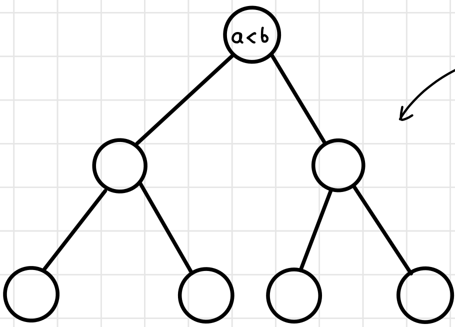
Dolna Granica

Drzewa Decyzyjne

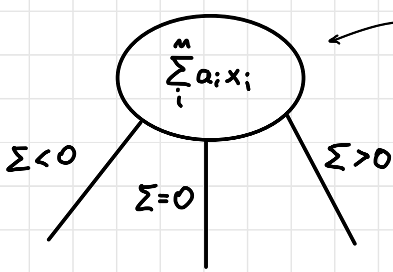
Drzewo decyzyjne daje nam tylko informację, czy $a < b$ na każdym poziomie algorytmu. Mając tylko tę informacja łatwo zauważyć, że dolną granica takich algorytmów generuje odpowiednie drzewo decyzyjne:



Drzewo decyzyjne jest unikalne dla różnych rozmiarów danych jak i algorytmów.

Liniowe Drzewa Decyzyjne

Tak jak zwykłe drzewa decyzyjne, lecz ternarne zamiast binarne.



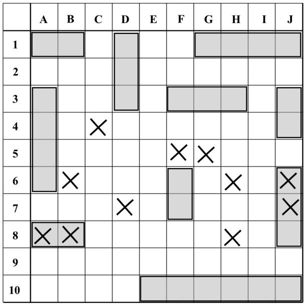
Teraz operujemy na kombinacjach liniowych

Gra z Adwersarzem

Gra z Adwersarzem przypomina grę w statki, gdzie masz algorytm pyta się adwersarza o jakąś ustaloną prymitywną operację - dla przykładu w modelu decyzyjnym czy $a > b$, a adwersarz odpowiada.

Jednakże adwersarz nie wymyśla układu statków przed grą - w naszym przypadku nie wybiera zestawu danych przed uruchomieniem algorytmu. Ustala je z czasem gdy algorytm pyta o informacje.

Celem adwersarza jest sprawienie, by algorytm najdłużej pytał się o wyniki utrzymując wiarygodność danych.



Wyobraźmy sobie, że chcemy pokazać, że dla problemu min-maxowego wykonamy conajmniej $\frac{3}{2}n - 2$ porównań.

Znajdź najmniejszy i największy element

Okazuje się, że możemy wstawić dane do 4 zbiorów / kategorii:

A - Jeszcze nie porównywane

B - Większe od innych

C - Mniejsze od innych

D - Większe od innych ale mniejsze od innych

Teraz algorytm porównuje dwie liczby. Większą wrzuca do kategorii B, a mniejszą wrzuca do kategorii C. Wykona $\frac{n}{2}$ porównań.

Adwersarz chce by te zbiory były jak największe, żeby utrudnić algorytmowi obliczenia.

Algorytm mógłby teraz porównywać elementy z B z elementami ze zbioru C, ale to by nic nie dało, bo adwersarz twierdziłby, że te z B są większe niż te z C.

Zatem algorytm porównuje elementy w kontekście jednego zbioru. Większe elementy ze zbioru C wrzuca do D, oraz mniejsze elementy ze zbioru B wrzuca do D.

Wykonuje zatem razem:

$$\underbrace{\frac{n}{2}}_{\text{Segregacja do B lub C}} + \underbrace{\frac{n-1}{2}}_{\text{znalezienie max w B}} + \underbrace{\frac{n-1}{2}}_{\text{znalezienie min w C}} = \frac{3n}{2} - 2$$

Problemy NP-trudne

Terminologia

P - zbiór algorytmów deterministycznych w złożoności wielomianowej (polynomial algorithms)

NP - zbiór algorytmów niedeterministycznych w złożoności wielomianowej (non-deterministic polynomial algorithms).

Opis

Jest to taki problem, którego nie potrafimy rozwiązać algorytmem A w złożoności wielomianowej, gdzie $A \in P$.

Jeśli problemy są ze sobą powiązane i potrafimy pokazać, że zachodzi między nimi taka sama relacja w złożoności czasowej (np. dla dwóch algorytmów w złożoności $O(2^n)$), to razem są w tym samym zbiorze algorytmów NP-trudnych.

Jeśli dodatkowo napiszemy dla tych problemów algorytmy niedeterministyczne $A' \in NP$, $A'' \in NP$, to wtedy są w tym samym zbiorze problemów NP-kompletnych.

Jeśli ktoś w tym momencie znajdzie algorytm $A \in P$, taki, że A rozwiązuje problem NP-kompletny, to wtedy na mocy tego, że te problemy są ze sobą powiązane możemy rozwiązać resztę problemów z tego samego zbioru.

W ten sposób ta osoba pokazała, że $P = NP$.