Drzewa Czerwono-Czarne

Red Black Trees

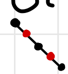
- Są to drzewa BST
- Są zbalansowane, zatem operacje są $O(\log n)$

Charakterystyka

Zasady:

- Korzeń oraz liście są czarne
- Jeśli węzeł jest czerwony, to jego dzieci są czarne
- Każda ścieżka od korzenia do liści ma tyle samo czarnych węzłów

Skutki uboczne:

- Najkrótsza ścieżka przechodzi jedynie przez czarne wierzchołki 
- Najdłuższa ścieżka ma maksymalnie 2x dłuższą ścieżkę niż najkrótsza i przechodzi przez drogę przeplataną czarnymi i czerwonymi wierzchołki. 

Przypadki balansowania drzewa

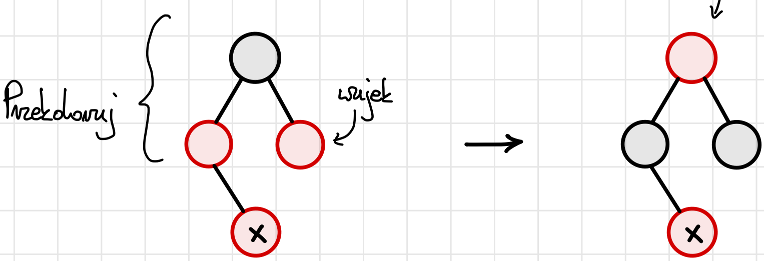
Będziemy balansować na wierzchołku x

1. Korzeń jest czerwony

Przekoloruj na czarny

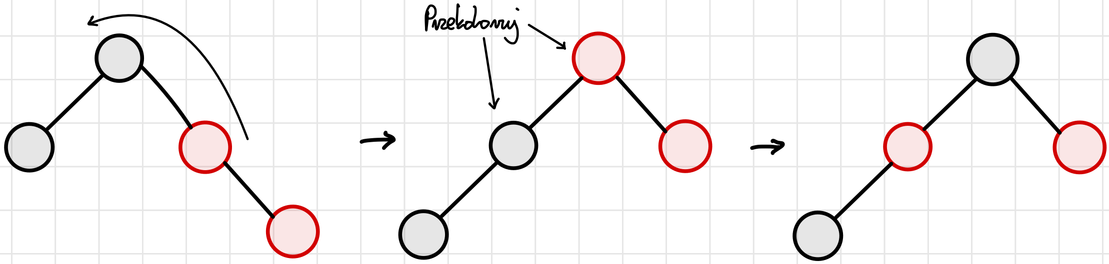
2. Wujek x'a jest czerwony

Jeśli to jest korzeń - wykonaj punkt 1



3. Wujek x'a jest czarny (trójkąt)

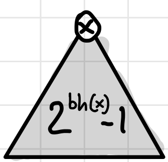
4. Wujek x'a jest czarny (linia)



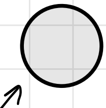
Drzewo czerwono-czarne ma wysokość maksymalnie $2\log(n+1)$

Dowód

Indukcyjnie wykażemy, że każde poddrzewo o korzeniu w dowolnym węźle x ma conajmniej $2^{bh(x)}-1$ węzłów wewnętrznych.



Indukcja: Zacznijmy od czarnego liścia



ma zero węzłów wewnętrznych

$$2^0 - 1 = 0$$

Krok indukcyjny:

Niech x będzie węzłem o dodatniej wysokości i dwóch synach.

black height się nie zmienia

- syn jest czerwony ⇒ wysokość $bh(x)$
- syn jest czarny ⇒ wysokość $bh(x) - 1$

black height zmniejsza się o jeden

W takim wypadku poddrzewa o korzeniach w synach x mają conajmniej $2^{bh(x)-1} - 1$ wierzchołków wewnętrznych.

Stąd wynika, że poddrzewo o korzeniu x ma:

$$\left(2^{bh(x)-1}-1\right)+\left(2^{bh(x)-1}-1\right)+1=2^{bh(x)}-1$$

węzłów wewnętrznych.

Teraz skoro udowodniliśmy powyższy lemat, że poddrzewo ma $2^{bh(x)}-1$ wierzchołków wewnętrznych.

Teraz niech h będzie wysokością drzewa. Z własności 4 wynika, że conajmniej połowa na każdej ścieżce od korzenia do liści są wierzchołkami czarnymi.

Zatem $bh(r)=\frac{h}{2}$ gdzie r - root

Więc

$$n \geqslant 2^{bh(r)}-1$$

$$n \geqslant 2^{\frac{h}{2}}-1$$

$$\log(n+1) \geqslant \frac{h}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2\log(n+1) \geqslant h$$

$\square$