Kacper Kowalik (277646)
Adam Matysiak (277641)

Fizyka 3.1 - Labolatorium

Wyznaczanie gęstości ciał stałych

Ćwiczenie 100a

Data wykonania ćwiczenia: 07.03.2024
Data oddania sprawozdania: 14.03.2024

1 Wstęp

Gęstość jest to wielkość fizyczna, którą matematycznie opisuje się jako stosunek masy substancji do jej objętości, a jednostką w układzie SI są kilogramy na metry sześcienne.

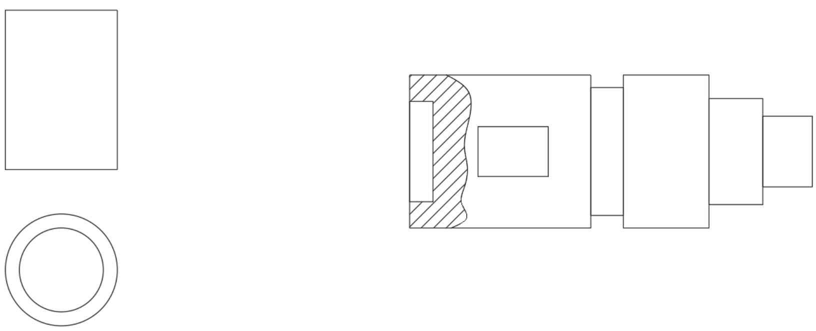
$$\rho = \frac{m}{V} \quad [\frac{kg}{m^3}]$$

gdzie:
ρ - gęstość
m - masa substancji
V - objętość substancji

W przypadku, gdy mamy do czynienia z substancją jednorodną nie będzie miało znaczenia jaki wybierzemy jej "skrawek", ponieważ gęstość będzie przyjmowała tę samą wartość. W tym eksperymencie posłużymy się jednak całą objędością modeli.

Do pomiaru gęstości potrzebujemy zmierzyć dwie wielkości fizyczne: objętość oraz masę. Do pomiaru objętości stosuje się dwie metody. Jedną z nich jest pomiar objętości poprzez dokonanie pomiarów obiektu używając suwmiarki, bądź mikrometru. Metoda ta jest dosyć dokładna, ponieważ suwmiarka posiada błąd systematyczny o wartości $0.05mm$, aczkolwiek przy bardziej skomplikowanych detalach ilość pomiarów zwiększa błąd pomiarowy. Drugą metodą pomiaru objętości jest użycie menzurki z wodą, która przy pomiarze miała błąd systematyczny o wartości $\pm 1mL$.

Pomiary zostały zebrane z dwóch elementów: cylindra (model po lewej), oraz wałka (model po prawej).



Rysunek 1: Uproszczone rysunki techniczne dla obu modeli

Do wyznaczenia gęstośći, z uwzględnieniem błędów pomiarowych, obu wyżej widocznych modeli użyte zostaną poniższe wzory:

Gęstość $\rho = \frac{m}{V}$

Objętość cylindra $V_{cyl} = \pi r^2 \cdot h$

gdzie r - promień podstawy
h - wysokość cylindra

Niepewność standardowa typu A
$$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

gdzie x_i - kolejny wynik pomiaru
$\overline{x}$ - średnia arytmetyczna pomiarów

Niepewność standardowa typu B
$$u_B(x) = \sqrt{\frac{(\Delta_p x)^2}{3}}$$

gdzie $\Delta_p x$ - bład systematyczny przyrządu pomiarowego

Niepewność standardowa całkowita
$$u(x) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Niepewność złożona
$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}$$

2 Wyniki pomiarów

2.1 Cylinder

Zaczynając od mniej złożonej bryły. Dla każdego wymiaru dokonanych zostało 5 pomiarów. Wymiary, które zostały zmierzone, to: średnica zewnętrzna i wewnętrzna cylindra, oraz jego wysokość.

Do obliczenia niepewności całkowitej najpierw obliczamy niepewność standardową typu A. Dla średnicy wewnętrznej niepewność ta wynosi:

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(16-15.98)^2 + (15.95-15.98)^2 + (16-15.98)^2 + (16-15.98)^2 + (15.95-15.98)^2}{5(5-1)}}$$
$$= \sqrt{\frac{0.0004 + 0.0009 + 0.0004 + 0.0004 + 0.0009}{20}} = \sqrt{\frac{0.003}{20}} \approx 0.0122$$

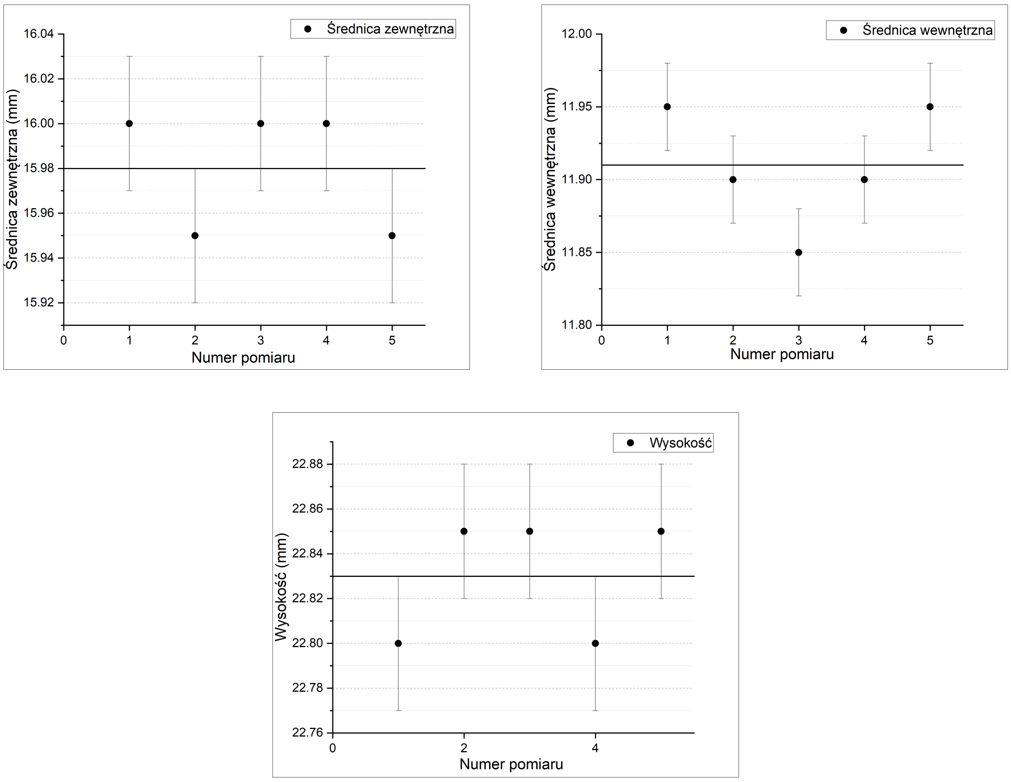
Niepewność standardowa typu B będzie dla każdego wymiaru taka sama, ponieważ uwzględniamy jedynie błąd przyrządu pomiarowego użytego do każdego pomiaru, którym była suwmiarka o dokładności $0.05mm$.

$$u_B(x) = \sqrt{\frac{(\Delta_p x)^2}{3}} = \sqrt{\frac{(0.05)^2}{3}} \approx 0.03$$

Niepewność całkowita będzie równa:

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{(0.0122)^2 + (0.03)^2} \approx 0.32$$

Na wykresach pokazane są pomiary z niepewnością całkowitą (wszędzie równa 0.03) oraz wartością średnią.



Rysunek 2: Wyniki pomiarów cylindra.

2.2 Wałek

Tak samo jak w przypadku cylindra dla każdego wymiaru wykonano po 5 pomiarów. Wymiary zmierzone w tym przypadku, to 6 średnic, 6 długości, oraz szerokość i długość frezu. Wyniki pomiarów oraz obliczone niepewności ukazane są w tabelach poniżej:

Wszystkie wartości pomiarów podane są w mm.

	Średnice						Długości					
Lp.	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1.	10	14.95	21.65	18.1	21.65	14.2	7	7.6	12.1	4.6	25.6	3.3
2.	10.05	14.95	21.65	18.1	21.6	14.2	7	7.6	12.1	4.55	25.65	3.35
3.	10	14.95	21.65	18.1	21.65	14.2	7	7.6	12.1	4.65	25.65	3.25
4.	10.1	14.95	21.65	18.1	21.65	14.25	7	7.6	12.15	4.6	25.6	3.3
5.	10	14.95	21.65	18.1	21.65	14.2	7	7.6	12.1	4.6	25.6	3.3
$u_A(x)$	0.02	0	0	0	0.01	0.01	0	0	0.01	0.0158	0.0122	0.0158
$u_B(x)$	0.03											
$u(x)$	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03

	Frez	
Lp.	s_f	d_f
1.	12.9	9.6
2.	12.95	9.55
3.	12.9	9.6
4.	12.9	9.6
5.	12.9	9.55
$u_A(x)$	0.01	0.0122
$u_B(x)$	0.03	
$u(x)$	0.03	0.03

3 Objętości i wyznaczenie gęstości

Do wyznaczenia gęstości potrzeba tylko średnich arytmetycznych masy oraz objętości. Ze względu na złożoność obiektów należy uwzględnić w wyniku niepewność złożoną.

Masy nie będą uwzględnione w funkcjach gęstości, ponieważ została wyznaczona pojedynczym pomiarem. Przyjmiemy, że jest z góry wyznaczoną wartością i nie posiada ona błędu pomiarowego.

Masa cylindra $m_c = 5.5g$
Masa wałka $m_w = 51.57g$

3.1 Cylinder

Wzór na objętość cylindra w tym przypadku będzie wyglądał następująco:

$$V_c = \left(\frac{d_{zew}}{2}\right)^2 \pi h - \left(\frac{d_{wew}}{2}\right)^2 \pi h = \pi h \left(\left(\frac{d_{zew}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{wew}}{2}\right)^2\right) = \pi h \left(\frac{d_{zew}^2 - d_{wew}^2}{4}\right),$$

więc wzór na gęstość owego cylindra jako funkcja wielu zmiennych to:

$$\rho_c(d_{zew}, d_{wew}) = \frac{m_c}{\pi h \left(\frac{d_{zew}^2 - d_{wew}^2}{4}\right)}$$

Niepewność złożona składa się z pochodnych cząstkowych. Będą to pochodne funkcji wymiernej z funkcją kwadratową w mianowniku, oraz każda zmienna jest powiązana ze sobą jedynie sumą, dlatego dla ułatwienia zadania posłuży nam poniższy wzór.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{bx^2 + c} = -\frac{2abx}{(bx^2 + c)^2}$$

Będzie to wyglądać następująco:

$$\begin{aligned}
u_c(\rho_c) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial d_{zew}}\frac{m_c}{\pi h}\frac{1}{\left(\frac{d_{zew}^2 - d_{wew}^2}{4}\right)}\right)^2 \cdot u^2(d_{zew}) + \left(\frac{\partial}{\partial d_{2ew}}\frac{m_c}{\pi h}\frac{1}{\left(\frac{d_{zew}^2 - d_{wew}^2}{4}\right)}\right)^2 \cdot u^2(d_{wew})} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-2\frac{m_c}{\pi h}\frac{1}{4}d_{zew}}{\left(\frac{d_{zew}^2 - d_{wew}^2}{4}\right)^2}\right)^2 \cdot (0.03)^2 + \left(\frac{-2\frac{m_c}{\pi h}\frac{1}{4}d_{wew}}{\left(\frac{d_{zew}^2 - d_{wew}^2}{4}\right)^2}\right)^2 \cdot (0.03)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-\frac{5.5}{3.14\cdot 22.83\cdot 2}\cdot 15.98}{\left(\frac{(15.98)^2-(11.91)^2}{4}\right)^2}\right)^2 \cdot 0.0009 + \left(\frac{-\frac{5.5}{3.14\cdot 22.83\cdot 2}\cdot 11.91}{\left(\frac{(15.98)^2-(11.91)^2}{4}\right)^2}\right)^2 \cdot 0.0009} \approx \sqrt{(0.00076)^2 + (0.00057)^2} = 0.00095
\end{aligned}$$

Gęstość będzię równa:

$$\rho_c = \frac{5.5g}{2027mm^3} \approx (2.7 \pm 0.95) * 10^{-3}\frac{g}{mm^3}$$

3.2 Wałek

Wzór na objętość wałka będzie nieco bardziej skomplikowany, a co za tym idzie, również funkcja gęstości. Objętość frezu, którą trzeba odjąć od całościowej objętości będzie równa różnicy wycinka koła i pola trójkąta stworzonego z promieni koła i szerokości frezu razy jego długość.

$$V_f = (P_w - P_\Delta) \cdot d_f = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\pi\left(\frac{\phi_5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{s_f}{2}\sqrt{\left(\frac{\phi_5}{2}\right)^2 - \left(\frac{s_f}{2}\right)^2}\right) \cdot d_f \approx 80.56mm^3$$

Objętość całego wałka będzie równa:

$$V_w = \pi\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2 d_1 + \pi\left(\frac{\phi_2}{2}\right)^2 d_2 + \pi\left(\frac{\phi_3}{2}\right)^2 d_3 + \pi\left(\frac{\phi_4}{2}\right)^2 d_4 + \pi\left(\frac{\phi_5}{2}\right)^2 d_5 - \pi\left(\frac{\phi_6}{2}\right)^2 d_6 - V_f,$$

więc wzór na gęstość wałka jako funkcji wielu zmiennych będzie miał postać:

$$\rho_w(\phi_1, d_1, ..., \phi_6, d_6) = \frac{m_w}{\pi\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2 d_1 + \pi\left(\frac{\phi_2}{2}\right)^2 d_2 + \pi\left(\frac{\phi_3}{2}\right)^2 d_3 + \pi\left(\frac{\phi_4}{2}\right)^2 d_4 + \pi\left(\frac{\phi_5}{2}\right)^2 d_5 - \pi\left(\frac{\phi_6}{2}\right)^2 d_6 - 80.56}$$

Do niepewności złożonej wałka również posłużą wzóry zastosowane w przypadku cylindra.

$$\begin{aligned}
u_c(\rho_w) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1}\frac{m_w}{\pi\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2 d_1 + \pi\left(\frac{\phi_2}{2}\right)^2 d_2 + ... + \pi\left(\frac{\phi_5}{2}\right)^2 d_5 - \pi\left(\frac{\phi_6}{2}\right)^2 d_6 - 80.56}\right)^2 \cdot u^2(\phi_1) + ...} \\
&= \sqrt{\left(\frac{2\frac{m_w}{2\pi} d_1 \phi_1}{\left(\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2 d_1 + \left(\frac{\phi_2}{2}\right)^2 d_2 + ... + \left(\frac{\phi_5}{2}\right)^2 d_5 - \left(\frac{\phi_6}{2}\right)^2 d_6 - 80.56\right)^2}\right)^2 \cdot u^2(\phi_1) + ...} \\
&\approx 0.000013
\end{aligned}$$

Gęstość będzie równa:

$$\rho_w = \frac{51.57g}{16267mm^3} = (3.17 \pm 0.013) \cdot 10^-3 \frac{g}{mm^3}$$

4 Wnioski

Ćwiczenie polegało na wyznaczeniu gęstości detali za pomocą suwmiarki i/lub mikrometru. Gęstości, które udało się wyznaczyć:

$\rho_c = (2.7 \pm 0.95) \cdot 10^{-3} \frac{g}{mm^3}$

$\rho_w = (3.170 \pm 0.013) \cdot 10^{-3} \frac{g}{mm^3}$

Dzięki temu doświadczeniu udało nam się zrozumieć zasadę działania niepewności pomiarowych w praktyce, jak również wyznaczyć wartość wielkości złożonej.

Z obliczeń wynika, że gęstości obu detali są nieznacznie różne. Może być to spowodowane nieprzewidywalnymi błędami pomiarowymi, ponieważ z obliczeń niepewności systematycznych i niepewności standardowej wynika, że odchyłka od wartości wielkości mierzonej prawie dla każdego pomiaru jest sobie równa, a oba detale wytworzone zostały z tego samego materiału.