Kacper Kowalik (277646)
Adam Matysiak (277641)

Fizyka 3.1 - Labolatorium

Wyznaczanie wartości przyspieszenia ziemskiego

Ćwiczenie 17

Data wykonania ćwiczenia:	14.03.2024
Data oddania sprawozdania:	21.03.2024

1 Wstęp

Przyspieszenie ziemskie, to wielkość wektorowa skierowana do środka Ziemi, która opisuje jak bardzo oddziałuje na ciała znajdujące się w pobliżu siła ciężkości planety. Wartość przyspieszenia można obliczyć korzystając z prawa powszechnego ciążenia znając masę planety, masę obiektu próbnego, odległość między nimi, oraz stałą grawitacji. Można skorzystać również z wahadła matematycznego przeprowadzając doświadczenie, przy którym potrzebujemy jedynie długości wahadła, oraz okresu jego oscylacji. Poza metodą z zastosowaniem wahadła matematycznego zastosowaliśmy też wahadło fizyczne, którym będzie metalowy pierścień.

Wzory potrzebne do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego korzystając z wahadła matematycznego:

Przyspieszenie ziemskie .... $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

gdzie l - długość wahadła
T - okres drgań
Wzór ten stosuje się tylko dla małych kątów drgań wahadła! (ok. 8°)

Okres drgań .... $T = \frac{t}{n}$

gdzie t - czas oscylacji
n - liczba wachnięć w mierzonym czasie

Wzory potrzebne do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego korzystając z wahadła fizycznego:

Przyspieszenie ziemskie .... $g = 8\pi^2 \frac{I}{T^2 md}$

gdzie I - moment bezwładności pierścienia względem osi obrotu
T - okres drgań
m - masa pierścienia
d - wewnętrzna średnica pierścienia

Moment bezwładności I .... $I = I_0 + m\frac{d^2}{4}$

gdzie I_0 - moment bezwładności pierścienia względem osi przechodzącej przez środek masy
d - wewnętrzna średnica pierścienia
m - masa pierścienia

Moment bezwładności I_0 .... $I_0 = \frac{1}{8}m(d^2 + D^2)$

gdzie d - wewnętrzna średnica pierścienia
D - zewnętrzna średnica pierścienia
m - masa pierścienia

2 Wyniki i analiza pomiarów

Podczas wykonywania pomiarów musimy uwzględnić błędy metody, tj. miara, którą wykonywaliśmy pomiar długości wahadła posiada błąd o wartości 1mm. Dla pomiaru czasu korzystaliśmy ze stopera, więc problemem jest czas reakcji osoby wykonującej pomiar. Przyjęliśmy, że niepewność eksperymentatora wyniesie 0.2s, a niepewność metody wynosi 0.01s. Przy pomiarach związanych z wahadłem fizycznym użyliśmy dodatkowo suwmiarki oraz wagi. Do pomiaru średnic pierścienia błąd suwmiarki wynosił 0.05mm, a do pomiaru masy błąd wagi wynosił 0.001kg.

Do obliczenia średnich oraz niepewności skorzystamy z poniższych wzorów:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{- średnia arytmetyczna}$$

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \quad \text{- niepewność standardowa typu A}$$

$$u_B(x) = \sqrt{\frac{(\Delta_p x)^2}{3} + \frac{(\Delta_e x)^2}{3}} \quad \text{- niepewność standardowa typu B}$$

$$u(x) = \sqrt{(u_A(x))^2 + (u_B(x))^2} \quad \text{- niepewność standardowa całkowita}$$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} \quad \text{- niepewność złożona}$$

Niepewność typu B dla pomiaru z użyciem miary: $u_B(x) = \sqrt{\frac{(1)^2}{3}} \approx 0.0058m$

Niepewność typu B dla pomiaru z użyciem stopera: $u_B(x) = \sqrt{\frac{(0.01)^2}{3} + \frac{(0.2)^2}{3}} \approx 0.12s$

Niepewność typu B dla pomiaru z użyciem suwmiarki: $u_B(x) = \sqrt{\frac{(0.00005)^2}{3}} \approx 0.000029m$

Niepewność typu B dla pomiaru z użyciem wagi: $u_B(x) = \sqrt{\frac{(0.001)^2}{3}} \approx 0.00058kg$

2.1 Wahadło matematyczne

Dla wahadła matematycznego przeprowadziliśmy pomiary trzech długości wahadła dla których wykonaliśmy po 3 pomiary czasu oscylacji (łącznie 9 pomiarów), gdzie ilość wahnięć wahadła była równa $n = 100$. Wyniki pomiarów dla trzech długości wahadła przedstawione są w tabeli poniżej:

Lp.	Długość l_1	Czas t_1	l_2	t_2	l_3	t_3
1		159.13s		114.79s		85.8s
2	0.63m	158.45s	0.33m	114.24s	0.185m	85.75s
3		158.56s		114.32s		86s

Dla pojedynczych pomiarów długości niepewność standardowa całkowita będzie równa: $u(x) = u_B(x) = 0.00577m$. Dla pomiarów czasu potrzebujemy dodatkowo uwzględnić odchylenie standardowe (niepewność typu A).

Przykład dla t_1:

$$u_A(t_1) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(159.13 - 158.71)^2 + (158.45 - 158.71)^2 + (158.56 - 158.71)^2}{6}} \approx 0.21s$$

Po obliczeniu średnich wartości wielkości mierzonych i ich niepewności pomiarowych wyszły poniższe wyniki:

	l_1	l_2	l_3	t_1	t_2	t_3
$\overline{x}$	0.63m	0.33m	0.185m	158.71s	114.45s	85.85s
$u_A(x)$				0.21s	0.17s	0.076s
$u_B(x)$	0.0058m			0.12s		
$u(x)$	0.0058m			0.24s	0.21s	0.14s

Obliczamy teraz okres drgań dla każdej długości ze wzoru $T = \frac{t}{n}$, średnią, oraz niepewność złożoną.

Przykład dla T_1:

$$T_1 = T(t_1) = \frac{t_1}{n} = \frac{159.13s}{100} \approx 1.59s$$

$$u_c(T(t_1)) = \sqrt{\left(\frac{\partial T(t_1)}{\partial t_1}\right)^2 u^2(t_1)} = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot (0.24)^2} = \sqrt{\frac{0.0576}{10000}} \approx 0.0024s$$

	T_i	$u(T_i)$
1	1.59s	0.0024s
2	1.14s	0.0021s
3	0.86s	0.0014s
$\overline{x}$	1.20s	

W tym momencie mamy już wszystko do obliczenia przyspieszenia ziemskiego ze wzoru $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$, oraz niepewności złożonej.

Przykład dla g_1:

$$g_1 = g(l_1, T_1) = 4\pi^2 \frac{l_1}{T_1^2} = 4\pi \frac{0.63m}{(1.59s)2} \approx 9.87 \frac{m}{s^2}$$

$$u_c(g(l_1, T_1)) = \sqrt{\left(\frac{\partial g(l_1, T_1)}{\partial l_1}\right)^2 u^2(l_1) + \left(\frac{\partial g(l_1, T_1)}{\partial T_1}\right)^2 u^2(T_1)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{(1.59s)^2}\right) \cdot (0.0058m)^2 + \left(\frac{-2 \cdot 4\pi^2 \cdot 0.63m}{(1.59)^3}\right) \cdot (0.0024)^2} \approx 0.095 \frac{m}{s^2}$$

	g_i	$u_c(g_i)$
1	$9.87 \frac{m}{s^2}$	$0.096 \frac{m}{s^2}$
2	$9.95 \frac{m}{s^2}$	$0.18 \frac{m}{s^2}$
3	$9.91 \frac{m}{s^2}$	$0.31 \frac{m}{s^2}$
$\overline{x}$	$9.91 \frac{m}{s^2}$	

Końcowo otrzymujemy wyniki z uwzględnieniem niepewności złożonej równy:

$$g = (9.91 \pm 0.12) \frac{m}{s^2}$$

2.2 Wahadło fizyczne

Dla wahadła fizycznego przeprowadziliśmy pomiary średnicy wewnętrznej (d) i zewnętrznej pierścienia (D) i jego masy (m), następnie dokonaliśmy trzech pomiarów czasu oscylacji, gdzie ilość wahnięć wahadła była równa $n = 100$. Wyniki pomiarów przedstawione są w tabeli poniżej:

Lp.	m	D	d	t
1	0.2148kg	0.1195m	0.1045m	67.57s
2				66.64
3				65.96
$\overline{x}$				66.57
$u_A(x)$				0.34
$u_B(x)$	0.00057g	0.00003m	0.00003m	0.12s
$u(x)$				0.36s

Do wyznaczenia przyśpieszenia grawitacyjnego potrzebujemy jeszcze obliczyć momenty bezwładności:

$$I_0 = \frac{1}{8} m(d^2 + D^2) = \frac{1}{8} 0.2148kg((0.1045m)^2 + (0.1195m)^2) \approx 0.00067663kgm^2$$

$$I = I_0 + m\frac{d^2}{4} = 0.00067663 + 0.2148kg \frac{(0.1045)^2}{4} \approx 0.0012630kgm^2$$

Niepewność złożona będzie liczona w następujący sposób:

$$I = I(m, d, D) = I_0 + m\frac{d^2}{4} = \frac{1}{8} m(d^2 + D^2) + m\frac{d^2}{4}$$

$$
\begin{aligned}
u_c^2(I(m,d,D)) &= \left(\frac{\partial I(m,d,D)}{\partial m}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial I(m,d,D)}{\partial d}\right)^2 u^2(d) + \left(\frac{\partial I(m,d,D)}{\partial D}\right)^2 u^2(D) \\
&= \left(\frac{d^2+D^2}{8} + \frac{d^2}{4}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{dm}{4} + \frac{dm}{2}\right)^2 u^2(d) + \left(\frac{Dm}{4}\right)^2 u^2(D) \\
&= \left(\frac{(0.1045m)^2 + (0.1195m)^2}{8} + \frac{(0.1045m)^2}{4}\right)^2 (0.00057kg)^2 \\
&\quad + \left(\frac{0.1045m \cdot 0.2148kg}{4} + \frac{0.1045m \cdot 0.2148kg}{2}\right)^2 (0.00003m)^2 \\
&\quad + \left(\frac{0.1195m \cdot 0.2148kg}{4}\right)^2 (0.00003m)^2 \approx 1.1526 \cdot 10^{-11}
\end{aligned}
$$

$$
u_c(I(m,d,D)) = \sqrt{u_c^2(I(m,d,D))} = \sqrt{1.1526 \cdot 10^{-11}} \approx 0.0000034
$$

Mając obliczony moment bezwładności i jego niepewność możemy wyzaczyć przyspieszenie grawitacyjene ze wzoru $g = 8\pi^2 \dfrac{I}{T^2 md}$, oraz jego niepewność złożoną.

$$
g = 8\pi^2 \frac{I}{T^2 md} = 8\pi^2 \frac{0.00126}{(0.666)^2 \cdot 0.2148 \cdot 0.1045} \approx 9.992 \frac{m}{s^2}
$$

$$
\begin{aligned}
u_c^2(g(I,T,m,d)) &= \left(\frac{\partial g(I,T,m,d)}{\partial I}\right)^2 u(I)^2 + \left(\frac{\partial g(I,T,m,d)}{\partial T}\right)^2 u(T)^2 + \left(\frac{\partial g(I,T,m,d)}{\partial m}\right)^2 u(m)^2 + \left(\frac{\partial g(I,T,m,d)}{\partial d}\right)^2 u(d)^2 \\
&= \left(\frac{8\pi^2}{T^2 md}\right)^2 u(I)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 I}{md}\frac{1}{T^3}\right)^2 u(T)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 I}{T^2 d}\frac{1}{m^2}\right)^2 u(m)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 I}{T^2 m}\frac{1}{d^2}\right)^2 u(d)^2 \\
&= \left(\frac{8\pi^2}{(0.666s)^2 \cdot 0.2148 \cdot 0.1045}\right)^2 (0.0000034)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{8\pi^2 \cdot 0.00126}{0.2148 \cdot 0.1048}\frac{1}{(0.666)^3}\right)^2 (0.0011))^2 \\
&\quad + \left(\frac{8\pi^2 \cdot 0.00126}{(0.666)^2 \cdot 0.1045}\frac{1}{(0.2148)^2}\right)^2 (0.00003)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{8\pi^2 \cdot 0.00126}{(0.666)^2 \cdot 0.2148}\frac{1}{(0.1045)^2}\right)^2 (0.0003)^2 \approx 0.001 \frac{m}{s^2}
\end{aligned}
$$

$$
u_c(g(I,T,m,d)) = \sqrt{u_c^2(g(I,T,m,d))} \approx 0.032 \frac{m}{s^2}
$$

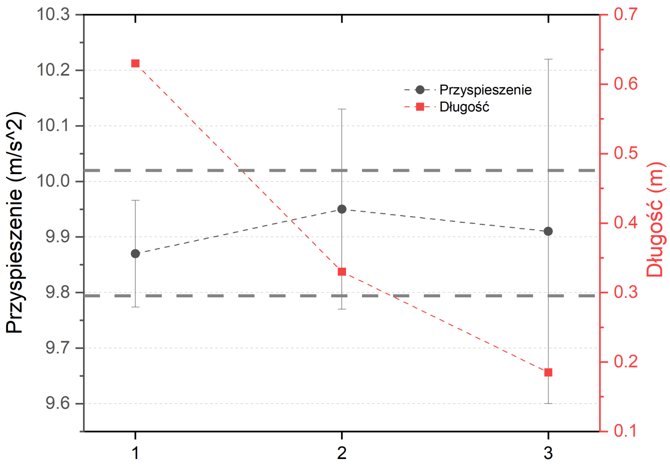
Końcowy wynik przyspieszenia ziemskiego stosując wahadło fizyczne, to:

$$
g = (9.992 \pm 0.032) \frac{m}{s^2}
$$

3 Wnioski

Ćwiczenie polegało na wyznaczeniu przyspieszenia ziemskiego stosując zależności między przyspieszeniem, a obiektami fizycznymi. Ćwiczenie zostało wykonane poprawnie.

Średnia wartość przyspieszenia jaka została zmierzona za pomocą wahadła matematycznego w budynku A-1 w sali 54 wyniosła $g = 9.91\frac{m}{s^2}$.



Po zestawieniu obok siebie danych na wykresie można zauważyć pewną zależność między długością wahadła, a końcowym wynikiem ćwiczenia. Wszystkie 3 wyniki przyspieszenia ziemskiego dla poszczególnych długości wahadła mieszczą się w otoczeniu (niepewności) średniej ich wartości. Natomiast wraz ze skracaniem długości wahadła diametralnie wzrósła niepewność tego wyniku. Może to skutkować zbyt krótkim czasem oscylacji wahadła.

Wnioskujemy więc, że dla bardziej dokładnego wyniku przyspieszenia powinno się dokonywać doświadczenia stosując duże długości wahadła. Z zebranych danych wynika, że dla $l \leqslant 63cm$ otrzymamy dłuższe czasy oscylacji i większe uśrednienie okresu, co w efekcie końcowym da dokładniejszei wyniki przyspieszenia.

Średnia wartość przyspieszenia jaka została zmierzona za pomocą wahadła fizycznego w budynku A-1 w sali 54 wyniosła $g = 10.26\frac{m}{s^2}$.

Porównując te wyniki możemy wyciągnąć wniosek, że wahadło matematyczne jest dokładniejszym narzędziem do wyznaczania wartości przyciągania grawitacyjnego.