QFT Notes

Chapter 3 正则量子化

三种常见场的量子化　基本构想：场视作无穷多粒子数的极限情况

标量场 —— Klein-Gordon eq.

旋量场 —— Dirac eq.

—— Maxwell e.q.

它们的解为 e^{ipx}，常称自由场.

- Non-Relativity QM 正则量子化方法 回顾

量子化条件为对易关系

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

$$[p_i, q_j] = i\delta_{ij}. \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

系统动力学由 Schrödinger 方程描述：

Schrödinger 绘景

$$H\psi = i\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$\psi(t)$：物理态随时演化

算符 p_i, q_i：非时间依赖

Heisenberg 绘景　由幺正变换联系

$$\psi_H = e^{iHt}\psi_s(t).$$

波函数联系

$$O_H = e^{iHt} O_s e^{-iHt}.$$

算符联系

对易关系变为：

$$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij}.$$

（对易关系幺正不变）

场量子化为上述理论的推广

相对论性量子场论中，狭相要求 $\vec{x}$、t 地位平等

均为场算符中 $(\vec{x}, t)$ 的参数，采用 Heisenberg 绘景更方便（算符时变）

$$q_i(t) \xrightarrow{\text{推广}} \phi(\vec{x},t)$$

自由度 $\to \infty$

离散 $\to$ 连续

为过渡到场，将三维空间划分为体积元 ΔV_i.

定义第 i 个坐标为

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\Delta V_i}\int_{\Delta V_i} d^3x\, \phi(\vec{x},t)$$

得到一系列离散可数的坐标 $\phi_i(t)$.

完成了对 q_i 的推广

同样地，$\partial_0\phi_i(t)$ 是 $\partial\phi(\vec{x},t)/\partial t$ 在第 i 个体积元上的平均.

拉氏量为拉氏密度的积分：

$$L = \int d^3x\, \mathcal{L} = \sum_i \Delta V_i\, \mathcal{L}_i(\phi_i, \partial_0\phi_i)$$

则共轭动量可定义为

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi_i(t))} = \Delta V_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\phi_i(t))} = \Delta V_i\, \pi_i(t)$$

Hamiltonian：

$$H = \sum_i p_i(t)\,\partial_0\phi_i(t) - L = \sum_i \Delta V_i\left(\pi_i\,\partial_0\phi_i(t) - \mathcal{L}_i\right) \longrightarrow \int d^3x\, \mathcal{H}$$

哈密顿密度为：

$$\mathcal{H} = \pi_i\,\partial_0\phi_i(t) - \mathcal{L}.$$

$(p_i\dot{q}_i - L)$

量子化时要求正则对易关系：

$$[\phi_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [\phi_i(t), \phi_j(t)] = 0, \quad [p_i(t), p_j(t)] = 0.$$

用 π_i 表达则为 $[\phi_i(t), \pi_j(t)] = i\dfrac{\delta_{ij}}{\Delta V_i}$.

过渡到连续情况下，正则对易关系为：

$$[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\quad [\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)]=0,\quad [\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=0.$$

(*)

同样地，有 $\pi(\vec{x},t)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}$

- 标量场

考虑标量场中，拉氏密度取如下形式：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi)-\frac{\mu^2}{2}\phi^2.$$

由 Euler-Lagrange 方程

推导？

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0.$$

可得它满足 K-G 方程

$$(\partial^\mu\partial_\mu+\mu^2)\phi=0.$$

下面对它进行量子化.

- 正则量子化

首先计算共轭动量 $\pi(\vec{x},t)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi.$

哈密顿密度为 $\mathcal{H}=\pi\partial_0\phi-\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[(\partial^0\phi)^2+(\nabla\phi)^2\right]+\frac{1}{2}\mu^2\phi^2.$

由对易关系(*)可得对易子

$$[H,\phi(\vec{x},t)]=\int d^3y\,[\mathcal{H},\phi(x,t)]=-i\partial_0\phi.$$

as expected，哈密顿量形成时间平移变换.