一些练习 & 搜索

$$x^\mu = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -x^1, -x^2, -x^3) = (t, -\vec{r})$$

$$(dx)^2 = (dx)^\mu (dx)_\mu = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2.$$

$$x^2 = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = x^\mu x_\mu$$

$$? \quad \cancel{+} p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = \omega^2 - k^2$$

$$= \underset{?}{\cancel{+}} k_\mu k^\mu = m^2.$$

搜到的理解：

上标　分量　　与逆变量有关

下标　基向量　　协变量

理解：

四矢量空间

$\underset{\sim}{V_p}$ 中的任意矢量 W^μ，可用时空度规 $\eta_{\mu\nu}$

构建一个线性map L_W 将 V_p 变到 $\mathbb{R}$

$$S^\mu \to \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \boxed{S^\mu} W^\nu.$$

linear map L_W

也是对偶矢量

可写为 $S^\mu \to \sum_\nu S^\nu W_\nu$.

例．$r = x^1 g_1 + x^2 g_2 + x^3 g_3$.

g_i 线性无关，但不一定满足规范正交条件．

若已知 r、g_i，如何求解分量 x^i？

分别点乘，很麻烦．于是引入逆变基矢量．

对偶条件：　$g_i \cdot g^j = \delta_{ij}$.

那么　$r = x^i g_i \longrightarrow \underline{x^i} = r \cdot \underline{g^i}$.

逆变分量　　逆变基矢

有了逆变基向量，任意坐标下的描述能像正交系一样简单．

由对偶知　$r = x_i g^i$

$$\underline{x_i} = r \cdot \underline{g_i}$$

协变分量　　协变基矢量

g_i 本身可由 $\frac{\partial r}{\partial x^i}$ 求得

g^i 与 $g_j \times g_k$ 平行？

$g^i = g^{ij} g_j$　　度规：

上下标的转换

$g_i = g_{ij} g^j$.

- 模态展开 (mode expansion)

注意到哈密顿密度

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial^0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2\right] + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2.$$

与谐振子的非常相似。

Klein - Gordon 方程通解为如下形式：(为什么?)

$$\exp i(k_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x}), \quad k_0^2 = \vec{k}^2 + \mu^2.$$

原单位制下：

$$-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$$

$$\psi = e^{-i\omega t + ik\cdot x} = e^{ik_\mu x^\mu}.$$

$$-p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = \underset{\hbar\omega}{\omega^2} - \underset{\hbar k}{\vec{k}^2} = -k_\mu k^\mu = m^2.$$

(因为 $p^2 = m^2$)

通解

可以用它来展开场算符(?)

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \Big[\underbrace{a(\vec{k})\, e^{-ik\cdot x}}_{\text{湮没算符}} + \underbrace{a^\dagger(\vec{k})\, e^{ik\cdot x}}_{\text{对应 K-G eq. 负能解，是产生算符}}\Big], \quad k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}$$

不依赖时间

Hermitian

为利用对易关系(*)，把 $a(k)$ 和 $a^\dagger(k)$ 用 ϕ 和 $\partial_0\phi$ 表示。(?)

$$\partial_0 \phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (-ik_0)\left[a(\vec{k})\, e^{-ik\cdot x} - a^\dagger(\vec{k})\, e^{ik\cdot x}\right], \quad k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2} = \omega_k$$

乘上 $e^{ik'\cdot x}$ 后对 x 积分，得

(类似反 Fourier 变换)

(2) $$\int e^{ik\cdot x} d^3x(\partial_0\phi - ik_0\phi) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}(-2ik_0)(2\pi)^3\delta^3(k-k')a(k).$$

由此得 $$a(k) = i\int d^3x \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\left[e^{ik\cdot x}\partial_0\phi - (\partial_0 e^{ik\cdot x})\right].$$

取厄米共轭 $$a^\dagger(k) = -i\int d^3x \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\left[e^{-ik\cdot x}\partial_0\phi - (\partial_0 e^{ik\cdot x})\right].$$

它们实质上是动量空间的场算符.

有 $[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})] = \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$, $[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0$, $[a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(k')] = 0$.

$$\hookrightarrow \int \frac{d^3x\, d^3x'\, e^{ikx} e^{-ik'x'}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k (2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\left[\partial_0\phi(x) - ik_0\phi(x),\ \partial_0\phi(x') - ik_0'\phi(x')\right]$$

$$\hookrightarrow (ik_0'(-i) - ik_0 i)\,\delta^3(x-x')$$