# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 1

Wojciech Łącki

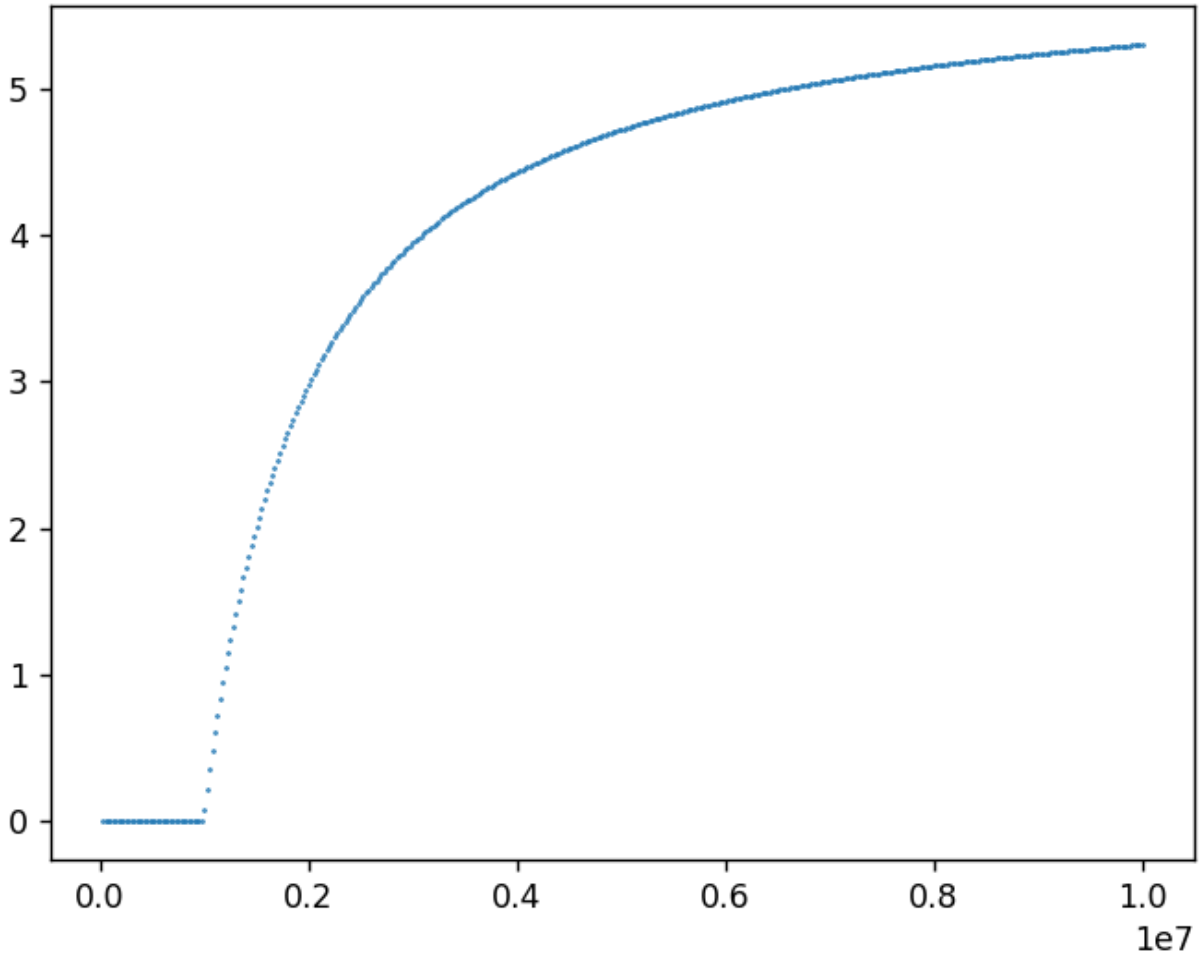
1. Sumowanie liczb pojedynczej precyzji

```
from datetime import datetime
from matplotlib import pyplot
import numpy

n = 10 ** 7
x = numpy.single(0.53125)
T = [x for _ in range(n)]


def zad1():
  relativeErrors = []
  X = []

  def sumIter(T):
    suma = numpy.single(0)
    for i in range(n):
      suma += T[i]
      if ((i + 1) % 25000 == 0):
        X.append(i)
        realVal = i * x
        relativeError = abs(realVal - suma) / realVal * 100
        relativeErrors.append(relativeError)
    return suma

  def sumReq(T, start, end):
    middle = (end + start) // 2
    if (start < end):
      return sumReq(T, start, middle) + sumReq(T, middle + 1, end)
    return T[start]

  real = 10 ** 7 * x
  start_time = datetime.now()
  sumaIter = sumIter(T)
  end_time = datetime.now()
  err1 = abs(real - sumaIter)
  err2 = err1 / real
  print("X:", x)
  print("DOKLADNA SUMA:", real)
  print("ITERACYJNIE:")
  print("SUMA:", sumaIter, "BEZWZGLEDNY:", err1, "WZGLEDNY:", err2)
  print('CZAS: {}'.format(end_time - start_time))
  print("%:", err2 * 100)
  start_time = datetime.now()
  sumaReq = sumReq(T, 0, n - 1)
  end_time = datetime.now()
  err1 = abs(real - sumaReq)
  err2 = err1 / real
  print("REKURENCYJNIE:")
  print("SUMA:", sumaReq, "BEZWZGLEDNY:", err1, "WZGLEDNY:", err2)
  print('CZAS: {}'.format(end_time - start_time))
  print("%:", err2 * 100)
  pyplot.plot(X, relativeErrors, marker=".", markersize=1,
linestyle='None')
  pyplot.show()

zad1()
```

Poniżej przedstawione są wyniki, które otrzymaliśmy.

```
X: 0.53125
DOKLADNA SUMA: 5312500.0
ITERACYJNIE:
SUMA: 5030840.5 BEZWZGLEDNY: 281659.5 WZGLEDNY: 0.05301825882352941 CZAS: 0:00:04.761316
%: 5.301825882352941
REKURENCYJNIE:
SUMA: 5312500.0 BEZWZGLEDNY: 0.0 WZGLEDNY: 0.0 CZAS: 0:00:09.726824
%: 0.0
```

Jak możemy zauważyć błąd względny dla sumy obliczonej w sposób iteracyjny wyszedł około 5.3%, czyli całkiem duży. Jest to spowodowane tym, że po pewnej liczbie iteracji zaczynamy dodawać stosunkowo małe liczby do dużego akumulatora, przez co tracimy informacje na temat mniej znaczących bitów.
Poniższy wykres przedstawia jak zmienia się błąd względny z kolejnymi iteracjami.

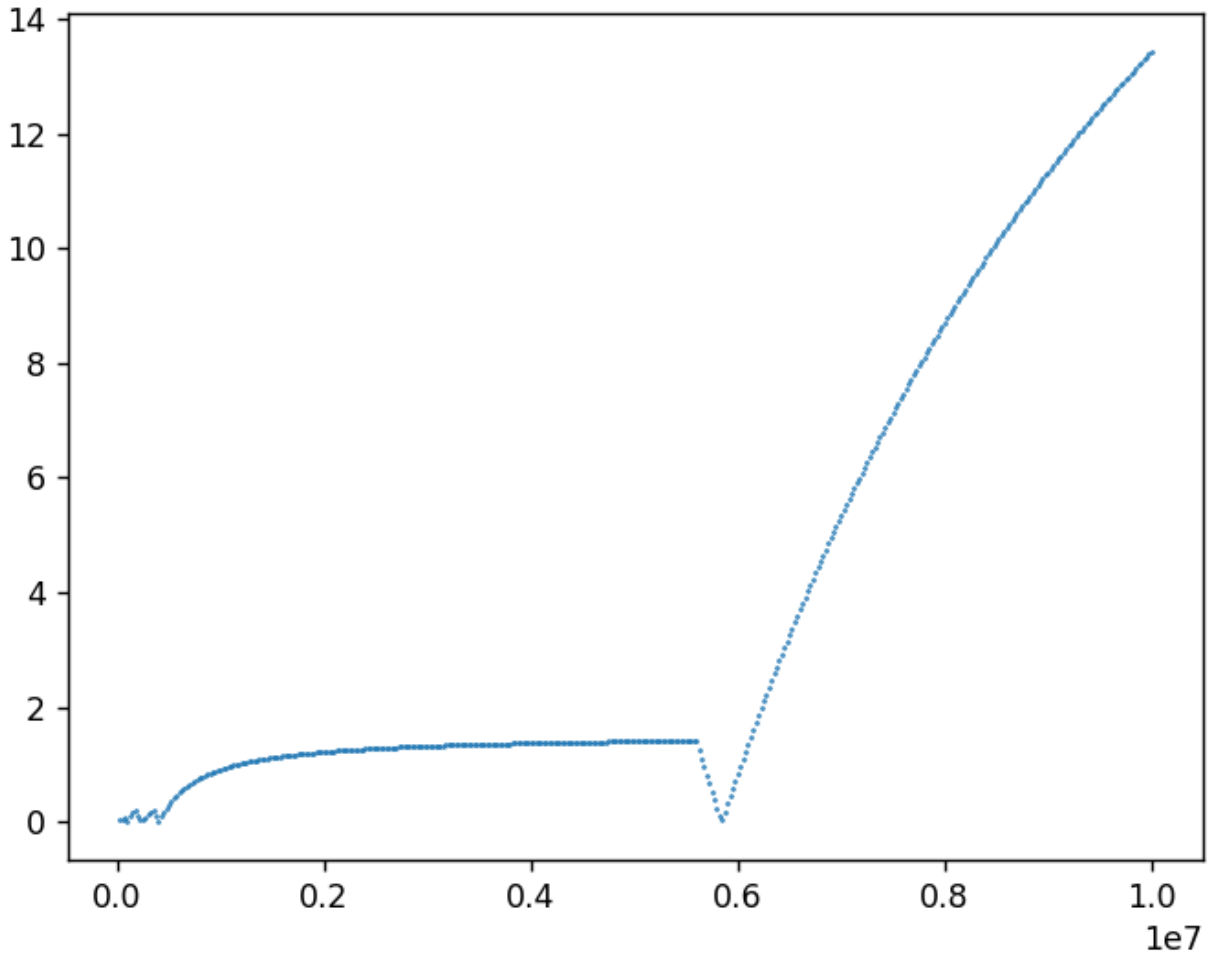



Można zauważyć, że błąd ten rośnie znacząco z kolejnymi przejściami pętli. W początkowej fazie błąd jest niezauważalny, po czym drastycznie zaczyna rosnąć, co oznaczają duże przerwy między kolejnymi punktami. Później błąd zaczyna coraz wolniej rosnąć.

Analizując teraz algorytm rekurencyjny, możemy zauważyć, że w tym przypadku nie zaobserwowano błędu. Wynika to z faktu, że za każdym razem dodajemy do siebie zbliżone liczby (tutaj takie same), przez co nie gubimy mniej znaczących bitów w takim stopniu jak to było w przypadku podejścia iteracyjnego.

Jednak analizując czas działania, nie ma wątpliwości, że sumowanie iteracyjne będzie szybsze, niże rekurencyjne, w tym przypadku około dwa razy. Niestety rekurencja kosztuje.

Jednak można znaleźć wartość początkową, którą wypełniamy tablicę taką, że wynik sumowania rekurencyjnego będzie niezerowy. Stanie się tak na przykład, gdy zmienną „x” ustawimy na „0.368373”. Wykres błędu względnego również nie wygląda już tak ładnie jak w przypadku powyższym.



## 2. Algorytm Kahana

```
import numpy
from datetime import datetime

n = 10 ** 7
x = numpy.single(0.53125)
T = [x for _ in range(n)]


def zad2():
  def sumKahan(T):
    suma = numpy.single(0)
    err = numpy.single(0)
    for add in T:
      y = add - err
      temp = suma + y
      err = (temp - suma) - y
      suma = temp
    return suma

  real = numpy.single(10 ** 7 * x)
  start_time = datetime.now()
  suma = sumKahan(T)
  end_time = datetime.now()
  err1 = abs(real - suma)
  err2 = err1 / real
  print("X:", x)
  print("DOKLADNA SUMA:", real)
  print("KAHAN:")
  print("SUMA:", suma, "BEZWZGLEDNY:", err1, "WZGLEDNY:", err2, 'CZAS:
{}'.format(end_time - start_time))
  print("%:", err2 * 100)

zad2()
```

Uzyskaliśmy następujący wynik.

```
X: 0.53125
DOKLADNA SUMA: 5312500.0
KAHAN:
SUMA: 5312500.0 BEZWZGLEDNY: 0.0 WZGLEDNY: 0.0 CZAS: 0:00:05.879910
%: 0.0
```

Widzimy, że nie wystąpiły błędy, co oznacza, że ten algorytm ma dobre własności numeryczne, a na pierwszy rzut oka nie różni się wiele od zwykłego podejścia iteracyjnego. Wynika to z faktu, że w kolejnych iteracjach dodajemy utracone mniej znaczące bity, do czego służy zmienna „err”. Dzięki temu zabiegowi wynik otrzymujemy dokładny wynik.

Porównując czasy, to algorytm Kahana jest trochę wolniejszy od zwykłego sumowania iteracyjnego, co jest oczywiste, gdyż są wykonywane dodatkowe operacje. Ale nie dość, że daje bardzo dokładny wynik, to jeszcze jest szybszy od podejścia rekurencyjnego, które czasami pokazało niewielkie błędy względne.

3. Sumy częściowe

```
import numpy

s = [2, 3.6667, 5, 7.2, 10]
n = [50, 100, 200, 500, 1000]
len_s = len(s)
len_n = len(n)


def zad3():
  def dzeta(n, s):
    sumForwardSingle = numpy.single(0)
    sumBackwardSingle = numpy.single(0)
    sumForwardDouble = numpy.double(0)
    sumBackwardDouble = numpy.double(0)
    for k in range(1, n + 1):
      sumForwardSingle += numpy.single(1 / (k ** s))
      sumForwardDouble += numpy.double(1 / (k ** s))
    for k in range(n, 0, -1):
      sumBackwardSingle += numpy.single(1 / (k ** s))
      sumBackwardDouble += numpy.double(1 / (k ** s))
    return sumForwardSingle, sumBackwardSingle, sumForwardDouble,
sumBackwardDouble

  def eta(n, s):
    sumForwardSingle = numpy.single(0)
    sumBackwardSingle = numpy.single(0)
    sumForwardDouble = numpy.double(0)
    sumBackwardDouble = numpy.double(0)
    for k in range(1, n + 1):
      sumForwardSingle += numpy.single((-1) ** (k - 1) / (k ** s))
      sumForwardDouble += numpy.double((-1) ** (k - 1) / (k ** s))
    for k in range(n, 0, -1):
      sumBackwardSingle += numpy.single((-1) ** (k - 1) / (k ** s))
      sumBackwardDouble += numpy.double((-1) ** (k - 1) / (k ** s))
    return sumForwardSingle, sumBackwardSingle, sumForwardDouble,
sumBackwardDouble

  for i in range(len_n):
    for j in range(len_s):
      print("n:", n[i], "s:", s[j])
      dz = dzeta(n[i], s[j])
      et = eta(n[i], s[j])
      print("dzeta")
      print("forwardSingle backwardSingle forwardDouble backwardDouble")
      print(dz)
      print("Difference single:", abs(dz[1] - dz[0]))
      print("Difference double:", abs(dz[3] - dz[2]))
      print("eta")
      print("forwardSingle backwardSingle forwardDouble backwardDouble")
      print(et)
      print("Difference single:", abs(et[1] - et[0]))
      print("Difference double:", abs(et[3] - et[2]))
      print()

zad3()
```

Jednym z wyników jest ukazany poniżej.

```
n: 1000 s: 3.6667
dzeta
forwardSingle backwardSingle forwardDouble backwardDouble
(1.1094086, 1.1094105, 1.1094105108423578, 1.1094105108423593)
Difference single: 1.9073486e-06
Difference double: 1.5543122344752192e-15
eta
forwardSingle backwardSingle forwardDouble backwardDouble
(0.9346933, 0.93469334, 0.9346933439141353, 0.9346933439141354)
Difference single: 5.9604645e-08
Difference double: 1.1102230246251565e-16
```

Wyniki liczenia wprzód i w tył różnią się od siebie dla tych samych parametrów, jednak zdarzają się przypadki, gdzie wyniki pojedynczej precyzji dla funkcji „dzeta” między tymi dwoma metodami są równe 0 (na przykład dla n=1000 oraz s=7.2). Pokażemy różnicę rozpisując i porównując oszacowania względnych błędów działań dwóch poniższych wzorów. Używamy maszynowego $\varepsilon$ oraz założenia, że $|x+y| < |y+z|$.

$$fl(fl(x+y)+z) = fl((x+y)(1+\varepsilon)+z) = fl(x+x\varepsilon+y+y\varepsilon+z)$$
$$= (x+x\varepsilon+y+y\varepsilon+z)(1+\varepsilon) = x+y+z+2x\varepsilon+2y\varepsilon+z\varepsilon+x\varepsilon^2+y\varepsilon^2$$

$$fl(x+fl(y+z)) = fl(x+(y+z)(1+\varepsilon)) = fl(x+y+y\varepsilon+z+z\varepsilon)$$
$$= (x+y+y\varepsilon+z+z\varepsilon)(1+\varepsilon) = x+y+z+x\varepsilon+2y\varepsilon+2z\varepsilon+y\varepsilon^2+z\varepsilon^2$$

Wzór 1.

$$fl(x+fl(y+z)) - fl(fl(x+y)+z) = z\varepsilon+z\varepsilon^2 - x\varepsilon - x\varepsilon^2$$

Analizując funkcję „dzeta” można zobaczyć, że kolejne składniki sumy są coraz mniejsze, ale zawsze są dodatnie (czyli x<z, co w naszym przypadku oznacza, że $fl(x+fl(y+z))$ jest dodawaniem do przodu, a $fl(fl(x+y)+z)$ w tył). Podstawiając do „Wzór 1.”, otrzymamy wynik dodatni, co oznacza, że dodając od największych liczb (czyli u nas od przodu) będziemy otrzymywać coraz większy błąd. Podobnie wygląda sprawa dla funkcji „eta”.

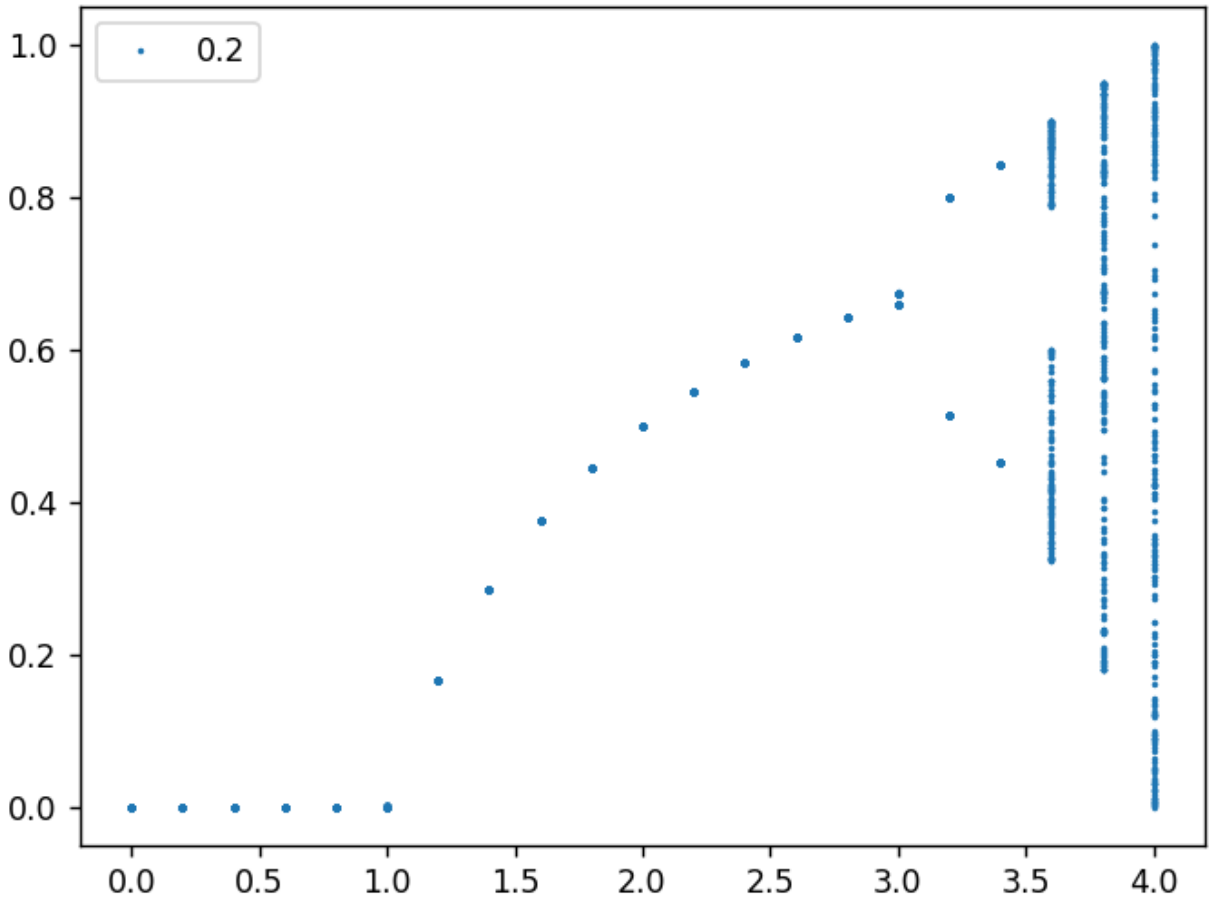
## 4. Błędy zaokrągleń i odwzorowanie logistyczne

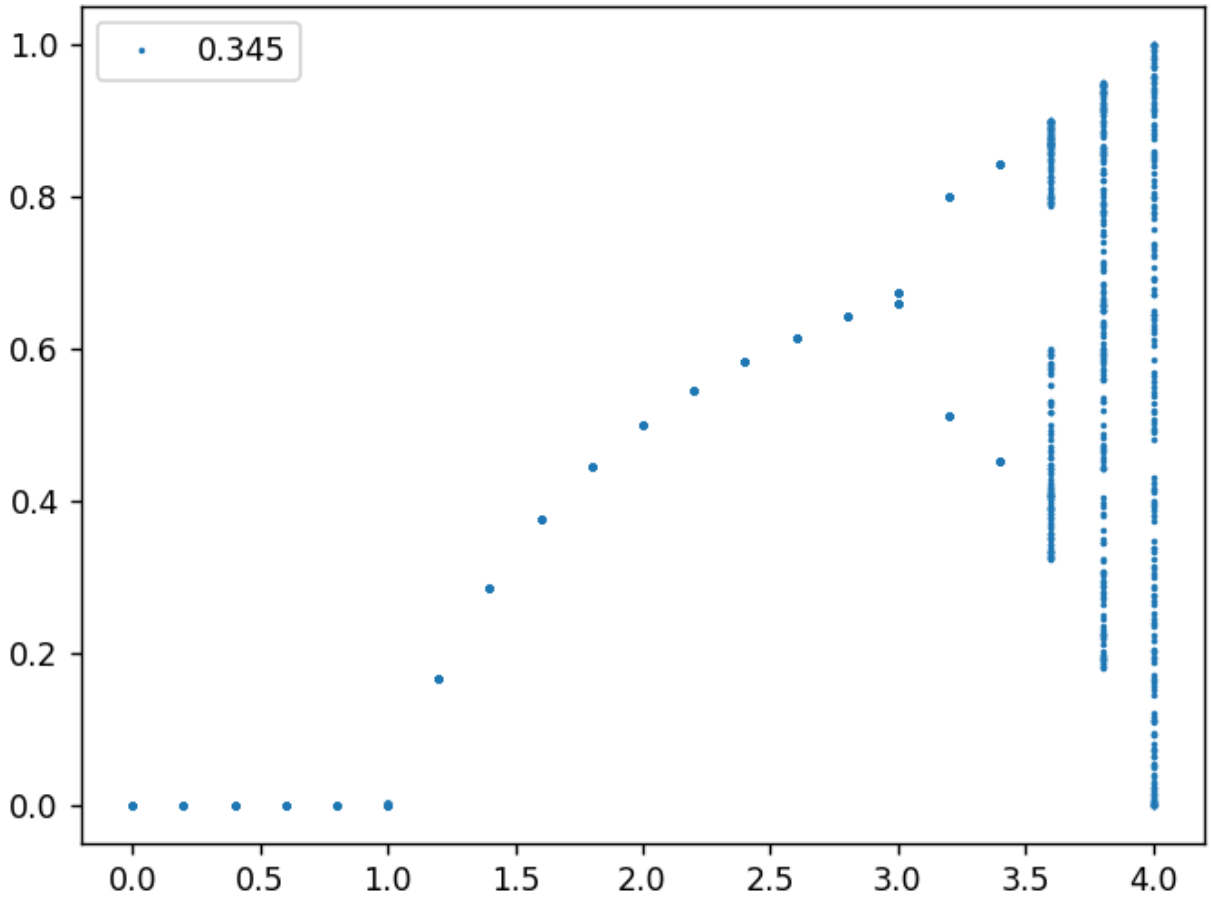
a)

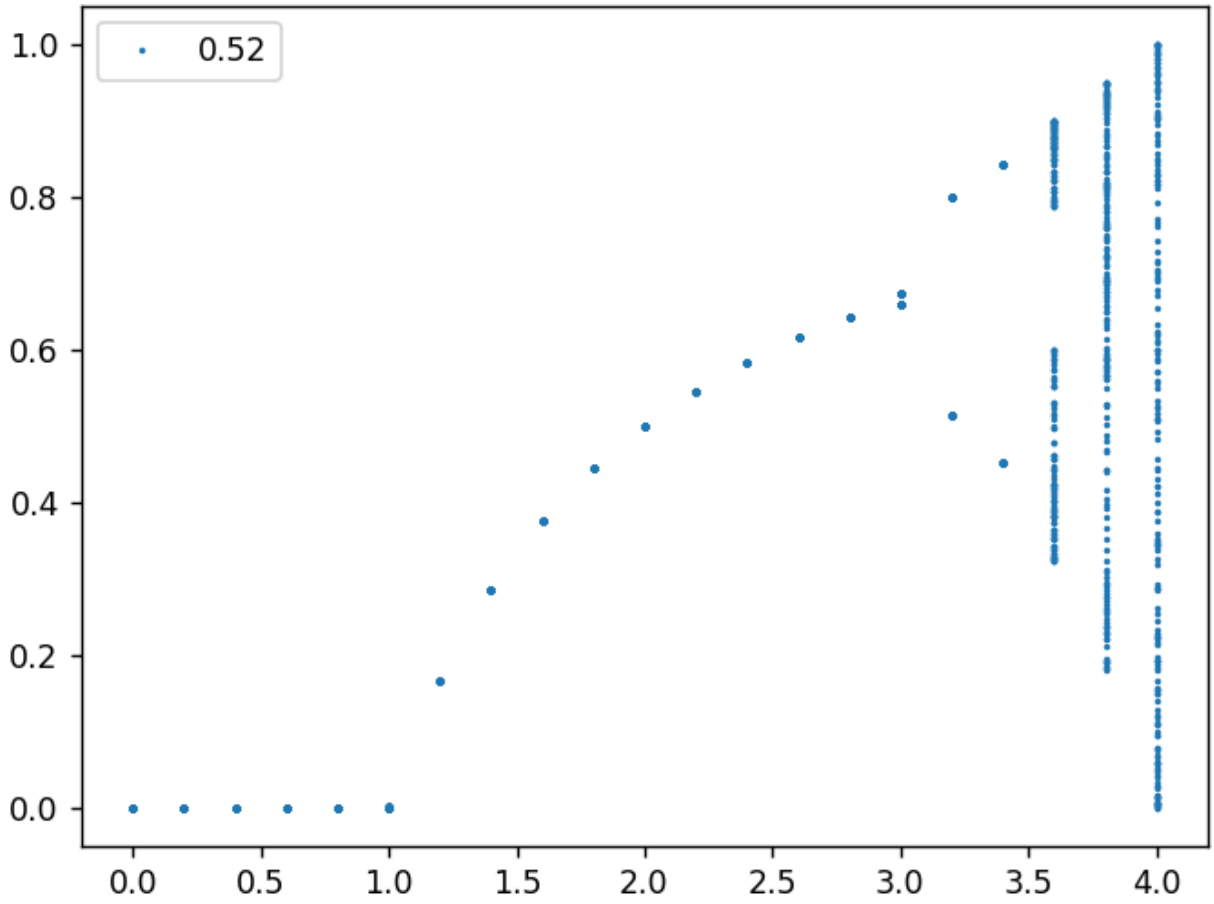
```
import numpy
from matplotlib import pyplot


def zad4():
  def logic():
    return numpy.single(r * numpy.single(x) * numpy.single(1 - x))

  x0s = [numpy.single(0.2), numpy.single(0.345), numpy.single(0.52),
numpy.single(0.89324)]
```

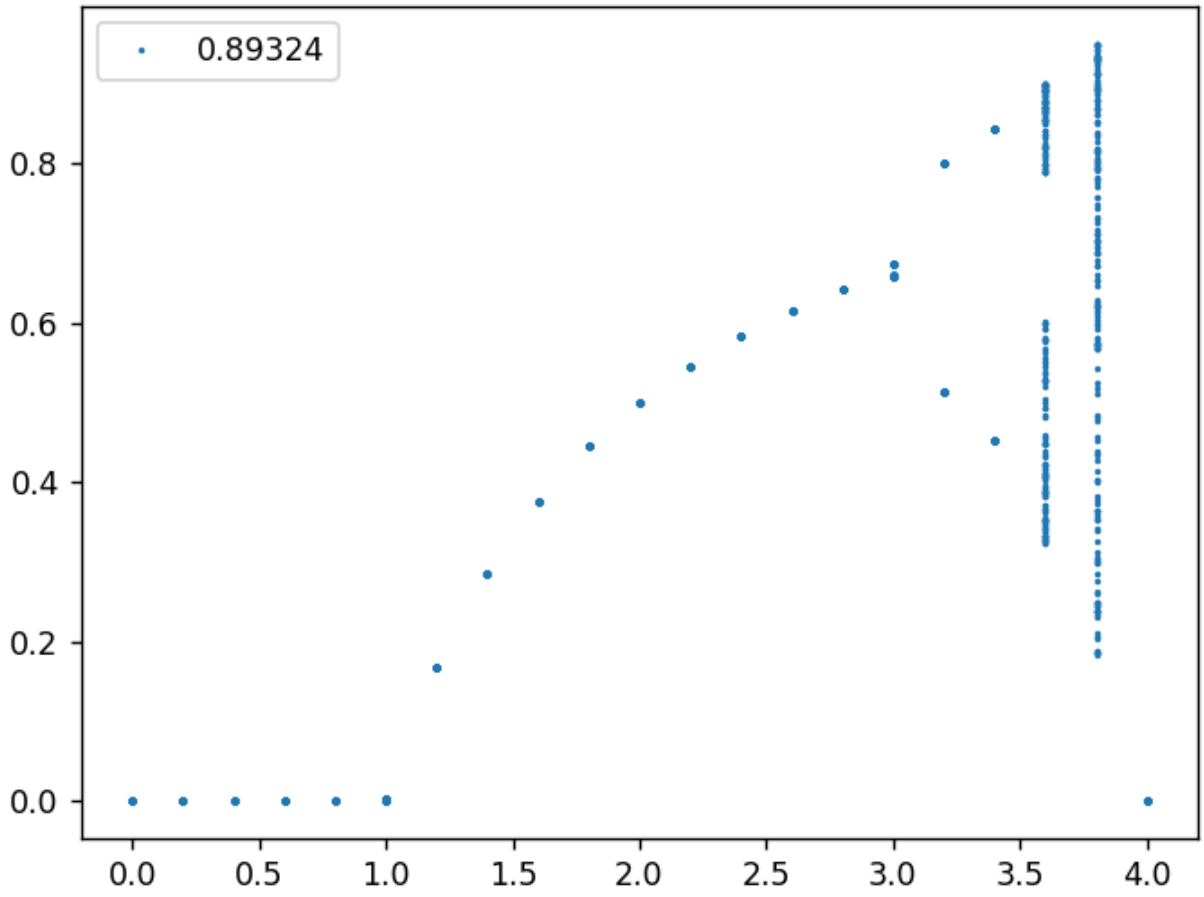
```
  for x0 in x0s:
    r = 0
    X = []
    Y = []
    for i in range(21):
      x = x0
      for j in range(1000):
        x = logic()
        if (j >= 800):
          X.append(r)
          Y.append(x)
      r += 0.2
    pyplot.clf()
    pyplot.plot(X, Y, marker=".", markersize=2, linestyle='None',
label=str(x0))
    pyplot.legend()
    pyplot.show()

zad4()
```

Poniżej są przedstawione wykresy dla kolejnych wartości $x_0$.




0.345
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0


0.52
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0



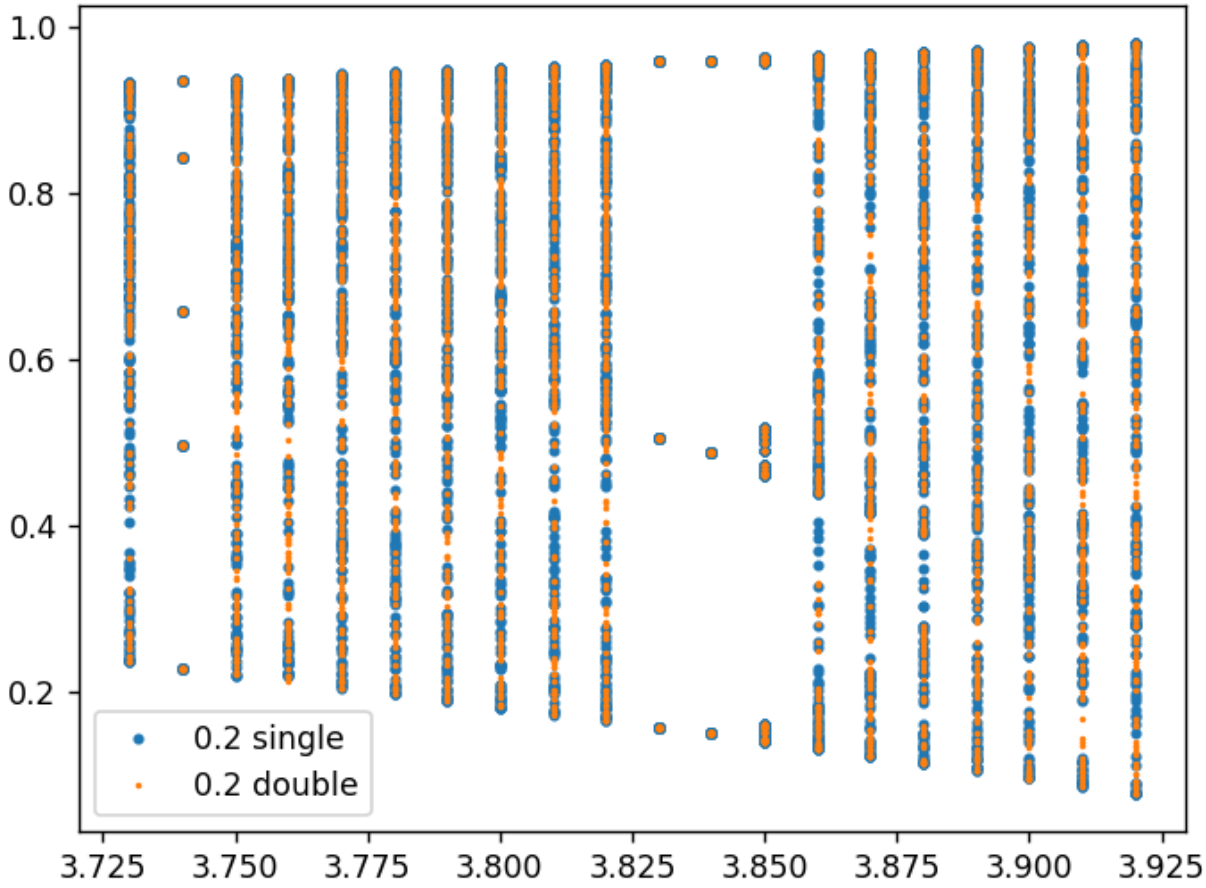

Można zaobserwować, że parametr $x_0$ nie ma dużego wpływu na to jak będą rozmieszczone punkty po wielu iteracjach i jest tak do $r < 3.5$, natomiast dalej ciężko jest to określić. Widać też, że parametr r ma duży wpływ na wynik. Ciekawe jest to, że dla $x_0 = 0.89324$ wartości są przy zerze. Dla r<3 punkty gromadzą się w jednym miejscu, dla $r \in (3, 3.5)$ wokół dwóch miejsc, a dalej nie da się określić.

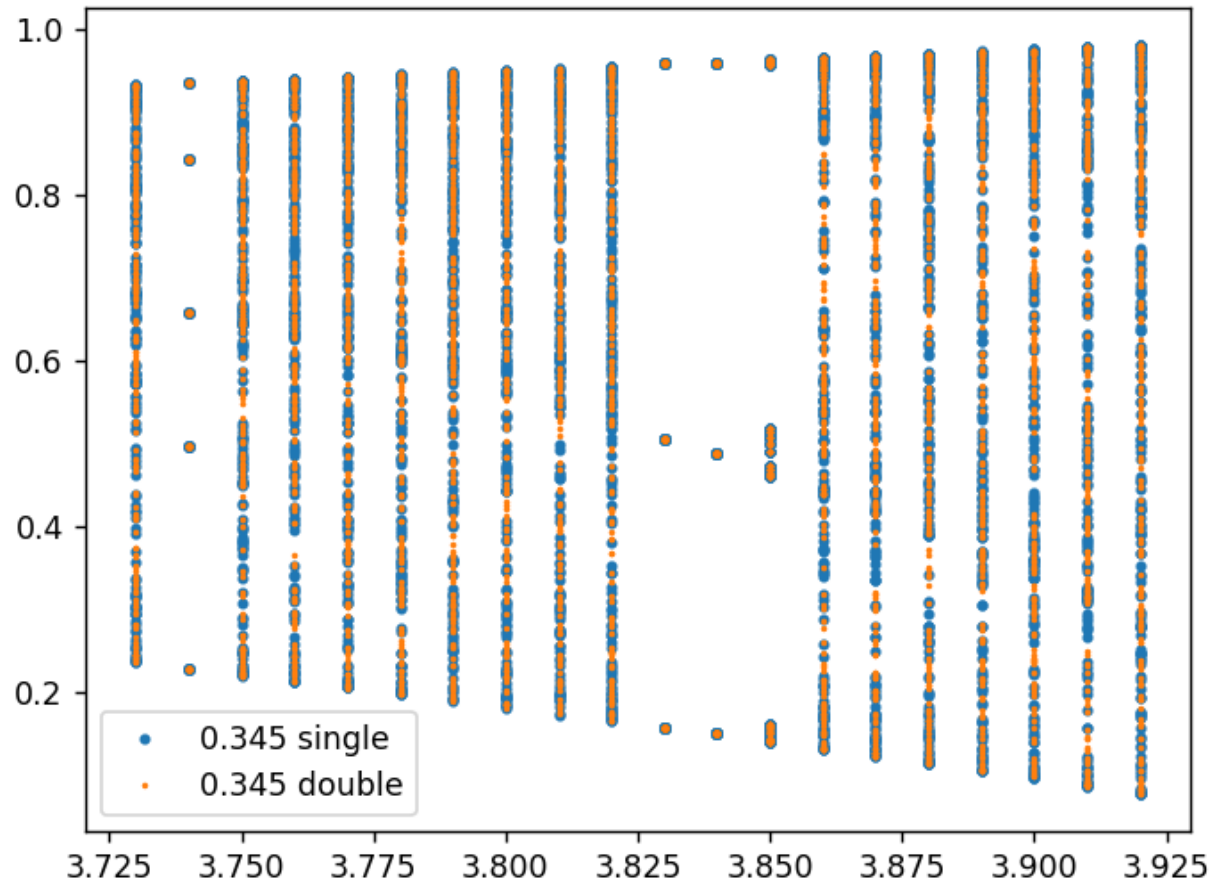
b)

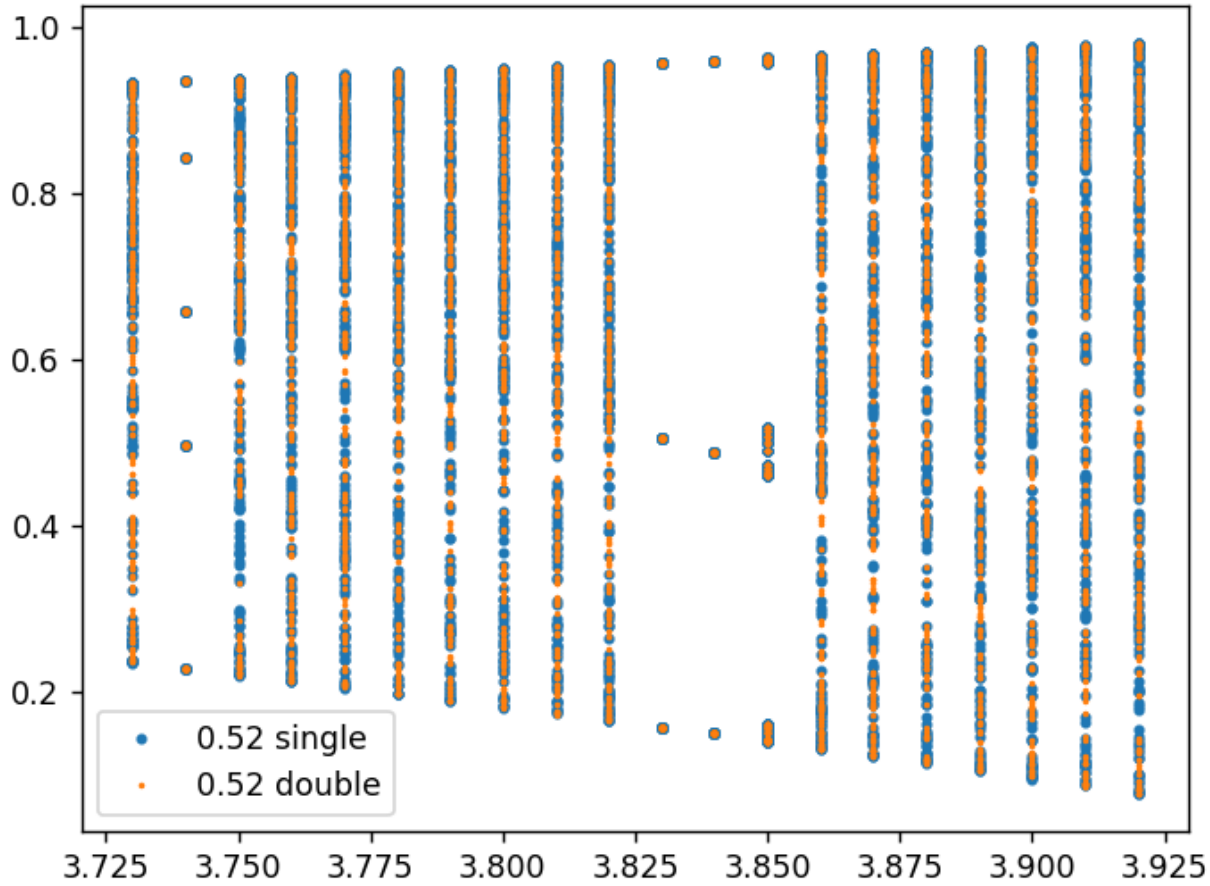
```
import numpy
from matplotlib import pyplot


def zad4():
  def logicSingle(x):
    return numpy.single(r * numpy.single(x) * numpy.single(1 - x))

  def logicDouble(x):
    return numpy.double(r * numpy.double(x) * numpy.double(1 - x))

  x0s = [numpy.single(0.2), numpy.single(0.345), numpy.single(0.52),
numpy.single(0.89324)]
  x0d = [numpy.double(0.2), numpy.double(0.345), numpy.double(0.52),
numpy.double(0.89324)]
  for k in range(len(x0s)):
    r = 3.73
    X = []
    Y = []
    Y2 = []
    for i in range(20):
      x1 = x0s[k]
```

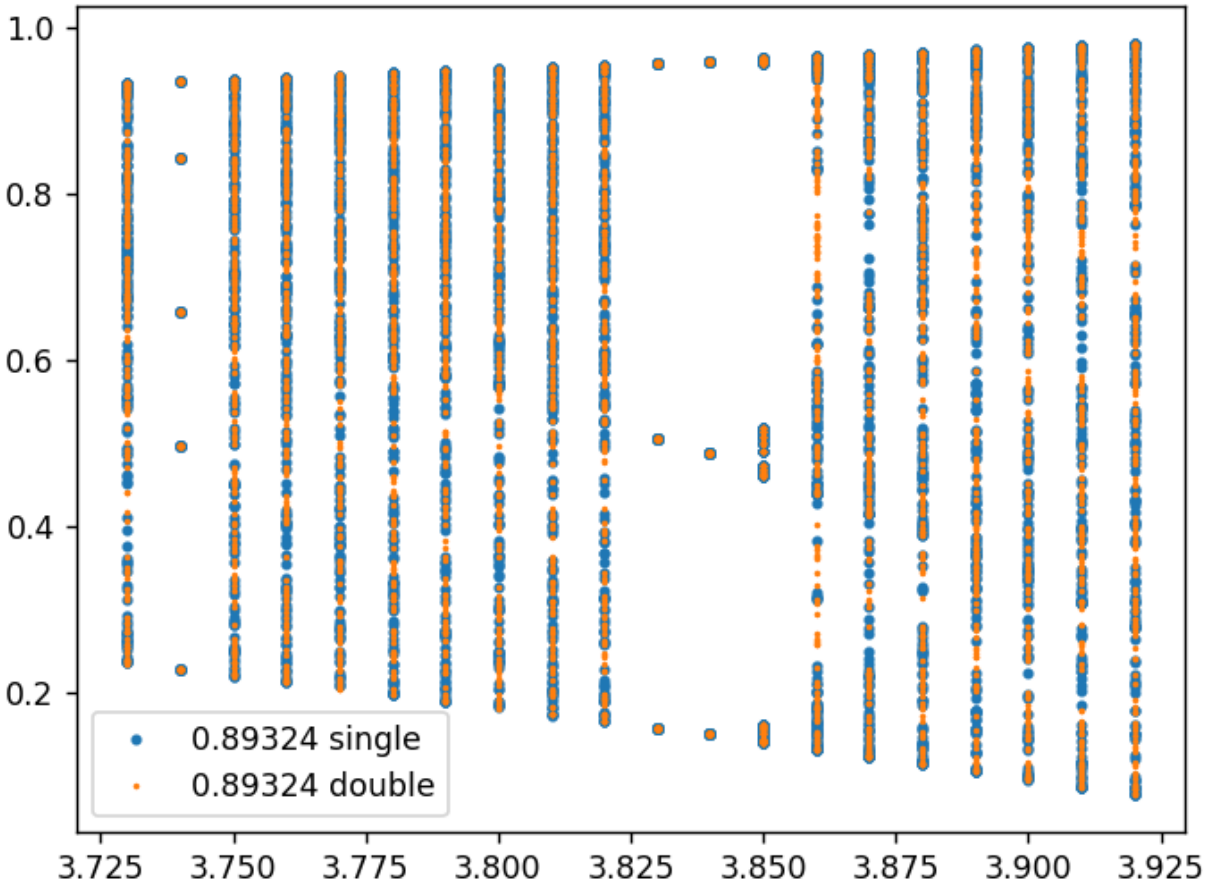
```
      x2 = x0d[k]
      for j in range(1000):
        x1 = logicSingle(x1)
        x2 = logicDouble(x2)
        if (j >= 800):
          X.append(r)
          Y.append(x1)
          Y2.append(x2)
      r += 0.01
    pyplot.clf()
    pyplot.plot(X, Y, marker=".", markersize=5, linestyle='None',
label=str(x0s[k])+" single")
    pyplot.plot(X, Y2, marker=".", markersize=2, linestyle='None',
label=str(x0d[k])+" double")
    pyplot.legend()
    pyplot.show()

zad4()
```

Dla tych samych $x_0$ co w podpunkcie a), zobaczymy co się dzieje dla liczb pojedynczej i podwójnej precyzji dla wartości $r \in (3.75, 3.8)$.




1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.345 single
0.345 double
3.725
3.750
3.775
3.800
3.825
3.850
3.875
3.900
3.925


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.52 single
0.52 double
3.725
3.750
3.775
3.800
3.825
3.850
3.875
3.900
3.925




Widzimy, że trajektoria jest podobna w obu przypadkach. Warto zauważyć, że dla niektórych „r" pojedyncza i podwójna precyzja się pokrywają, tak jak na przykład dla $r = 3.85$.

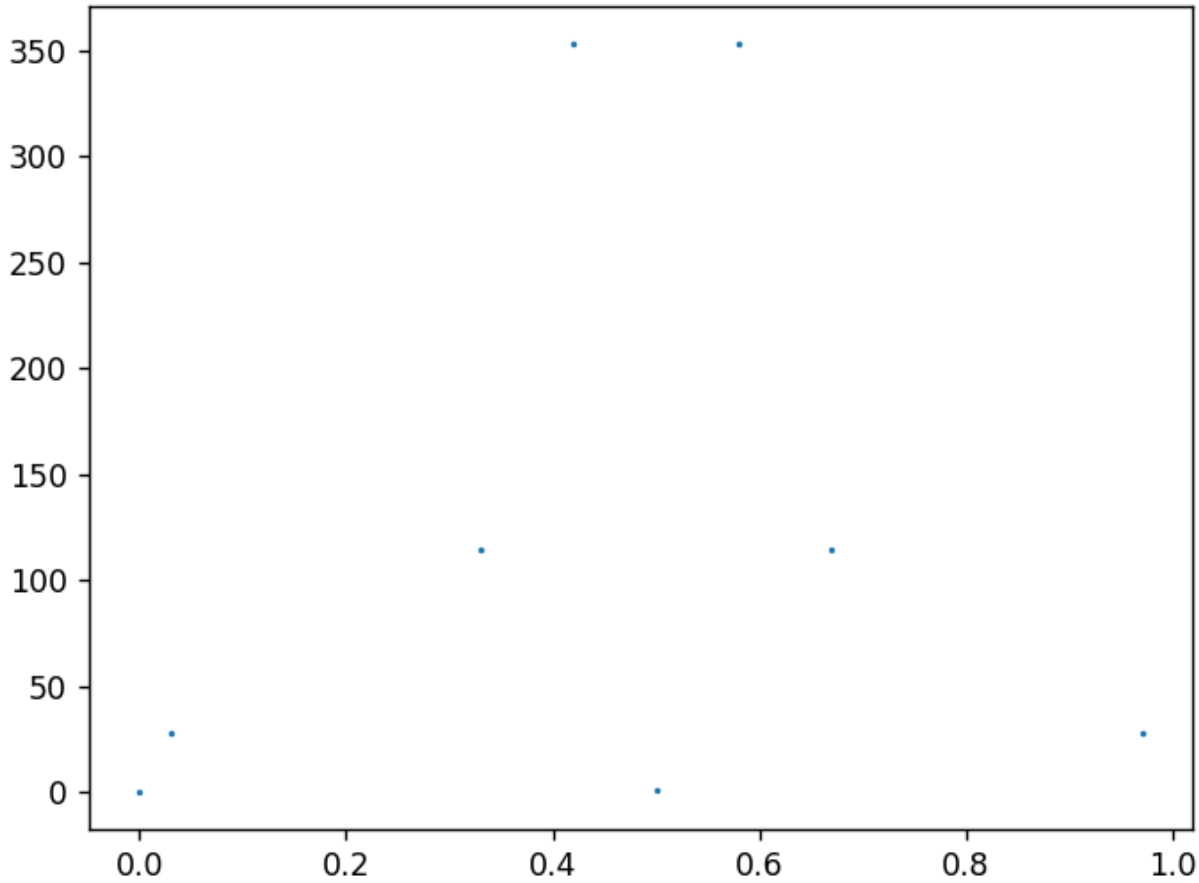
c)

```
import numpy
from matplotlib import pyplot


def zad4():
  def logic():
    return numpy.single(r * numpy.single(x) * numpy.single((1 - x)))

  x0 = []
  y0 = []
  r = 4
  for i in range(100):
    x = i * 0.01
    for j in range(1000):
      x = logic()
      if x == 0:
        x0.append(i * 0.01)
        y0.append(j)
        break
  print("x0:", x0)
  print("integrations:", y0)
  pyplot.plot(x0, y0, marker=".", markersize=2, linestyle='None',
label=str(x0))
  pyplot.show()

zad4()
```

Otrzymujemy następujące punktu wraz z liczbą iteracji potrzebnych do osiągnięcia 0.

```
x0: [0.0, 0.03, 0.33, 0.42, 0.5, 0.58, 0.67, 0.97]
integrations: [0, 28, 114, 353, 1, 353, 114, 28]
```

Na wykresie wygląda to następująco.




Wykres jest symetryczny względem osi $x = 0.5$, co pokazuje jak ciekawe jest to zadanie.