PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG-2

MỤC LỤC

Trang

Chương 1

KHÁI QUÁT VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

Trong chương này, chúng ta sẽ khảo sát các khái niệm cơ bản về phương trình đạo hàm riêng, phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai và đưa các phương trình này về dạng chính tắc. Chương này cũng nhắc lại phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, cấp 2 và các kết quả của khai triển Fourier, biến đổi Fourier cần thiết cho nội dung các chương về sau.

I. Ôn tập phương trình vi phân

Một phương trình vi phân là phương trình hàm (một biến) có chứa đạo hàm của hàm cần tìm. *Cấp* cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình được gọi là cấp của phương trình vi phân.

Phương trình vi phân cấp n có dạng

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0, \tag{1.1}$$

trong đó x là biến độc lập, y là hàm cần tìm, $y,y',\ldots,y^{(n)}$ là đạo hàm các cấp của y, biểu thức $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$ thực sự chứa $y^{(n)}$.

Hàm số $y=y(x)$ được gọi là *nghiệm* của phương trình vi phân (1.1) trên khoảng $I\subseteq\mathbb{R}$ nếu y và các đạo hàm của nó tồn tại trên I và thỏa mãn phương trình (1.1) tại mọi điểm thuộc I.

1.1. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.2}$$

trong đó x là biến độc lập, y là hàm cần tìm, $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.2) là biểu thức $y = f(x,C)$, trong đó C là hằng số tùy ý sao cho:

i) Với mỗi hằng số C, hàm số $y = f(x,C)$ là một nghiệm của (1.2).

ii) Với mọi điểm (x_0, y_0) thuộc miền chứa nghiệm, khi thay vào (1.2) thì có thể giải ra được $C = C_0$ duy nhất.

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.2) viết dưới dạng hàm ẩn $\varphi(x,y) = C$ được gọi là *tích phân tổng quát*.

Sau đây, ta nhắc lại một số loại phương trình giải được bằng phép tính tích phân.

1.1.1. Phương trình tách biến

Phương trình sau đây được gọi là phương trình tách biến

$$g(y)y' = f(x). \tag{1.3}$$

Phương pháp giải: Lấy tích phân hai vế của (1.3), ta được

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$G(y) = F(x) + C,$$

trong đó G là nguyên hàm của g, F là nguyên hàm của f, và C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 1.1. Giải các phương trình sau

a) $y' = 5x^4$.

b) $y^2 y' = e^x - 3$.

Giải

a) Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int y'dx = \int 5x^4 dx$$

$$\int dy = \int 5x^4 dx$$

$$y = x^5 + C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là $y = x^5 + C$, với C là hằng số tùy ý.

b) Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int y^2 y' dx = \int (e^x - 3) dx$$

$$\int y^2 dy = \int (e^x - 3) dx$$

$$\frac{y^3}{3} = e^x - 3x + C$$

$$y = \sqrt[3]{3e^x - 9x + D},$$

với $D = 3C$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \sqrt[3]{3e^x - 9x + D}$, với D là hằng số tùy ý.

Ví dụ 1.2. Giải phương trình $y' = y^2 e^x$.

Giải

Xét $y \neq 0$, phương trình trở thành

$$\frac{y'}{y^2} = e^x.$$

Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int \frac{y'}{y^2} dx = \int e^x dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^x dx$$

$$\frac{-1}{y} = e^x + C$$

$$y = \frac{-1}{e^x + C},$$

với C là hằng số tùy ý.

Ta thấy, $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1.3. Giải phương trình $(1+x)y+(1-y)xy'=0$, $x>0$.

Giải

Xét $y \neq 0$, phương trình trở thành

$$\frac{(1-y)y'}{y} = -\frac{1+x}{x}.$$

Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int \frac{(1-y)y'}{y} dx = -\int \frac{1+x}{x} dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = -\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$$

$$\ln|y| - y = -\ln x - x + C$$

$$\ln|xy| + x - y = C,$$

với C là hằng số tùy ý.

Ta thấy, $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình.

1.1.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Định lý 1.1. *Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất*

$$y' + p(x)y = 0,$$

trong đó p là hàm liên tục trên khoảng $I \subseteq \mathbb{R}$.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên khoảng I là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

với C là hằng số tùy ý.

Chứng minh. Nhân 2 vế của phương trình cho $e^{\int p(x)dx}$, ta được

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = 0$$

$$ye^{\int p(x)dx} = C$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

với C là hằng số tùy ý. ■

Định lý 1.2. *Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1*

$y' + p(x)y = q(x)$,

trong đó p, q là các hàm liên tục trên khoảng $I \subseteq \mathbb{R}$.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên khoảng I là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right),$$

với C là hằng số tùy ý.

Chứng minh. Nhân 2 vế của phương trình cho $e^{\int p(x)dx}$, ta được

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right),$$

với C là hằng số tùy ý. ■

Ví dụ 1.4. Tìm nghiệm của bài toán sau

$$\begin{cases} y' + 2y = x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Giải

Ta có $y' + 2y = x$. Nhân 2 vế cho $e^{\int 2dx} = e^{2x}$, ta được

$$\left(ye^{2x}\right)' = xe^{2x}$$

$$y = e^{-2x}\int xe^{2x}dx = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x},$$

với C là hằng số tùy ý.

Vì $y(0)=0$ nên $-\frac{1}{4}+C=0$, suy ra $C=\frac{1}{4}$.

Vậy, nghiệm của bài toán là $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}$.

1.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất trên $\mathbb{R}$ với hệ số hằng

$$ay''+by'+cy=0, \tag{1.4}$$

trong đó *a*, *b*, *c* là các hằng số và $a\neq 0$.

Phương trình đặc trưng của (1.4) là phương trình bậc 2 theo ẩn *k* như sau

$$ak^2+bk+c=0. \tag{1.5}$$

Nếu (1.5) có 2 nghiệm thực phân biệt k_1 và k_2 thì (1.4) có nghiệm tổng quát là

$$y=Ae^{k_1x}+Be^{k_2x},$$

với *A*, *B* là các hằng số tùy ý.

Nếu (1.5) có nghiệm kép k_0 thì (1.4) có nghiệm tổng quát là

$$y=(Ax+B)e^{k_0x},$$

với *A*, *B* là các hằng số tùy ý.

Nếu (1.5) có 2 nghiệm phức liên hợp $\alpha\pm i\beta$ thì (1.4) có nghiệm tổng quát là

$$y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x),$$

với *A*, *B* là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 1.5. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sau

a) $y''+4y'+3y=0$.

b) $y''-4y'+4y=0$.

c) $y''+y'+y=0$.

Giải

a) Phương trình đặc trưng là $k^2+4k+3=0$, suy ra $\left[\begin{array}{l}k=-1,\\ k=-3.\end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = Ae^{-x} + Be^{-3x},$$

với A, B là các hằng số tùy ý.

b) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 4k + 4 = 0$, suy ra $k = 2$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = (Ax + B)e^{2x},$$

với A, B là các hằng số tùy ý.

c) Phương trình đặc trưng là $k^2 + k + 1 = 0$, suy ra $k = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{\frac{-x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

với A, B là các hằng số tùy ý.

1.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

Xét phương trình sau đây trên $\mathbb{R}$

$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{1.6}$$

Ta sẽ tìm nghiệm tổng quát của (1.6) bằng hai phương pháp: *hệ số bất định* và *biến thiên hệ số Lagrange*.

1.3.1. Phương pháp hệ số bất định

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát y_0 của phương trình thuần nhất (1.4) tương ứng với (1.6).

Bước 2: Nếu $f(x)$ có dạng đặc biệt thì ta có thể tìm một nghiệm đặc biệt y_p của phương trình không thuần nhất (1.6) bằng phương pháp hệ số bất định, sẽ được trình bày sau đây.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình (1.6) là $y = y_0 + y_p$.

Cách tìm nghiệm đặc biệt: xét phương trình đặc trưng $ak^2 + bk + c = 0$.

Dạng 1:

$f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$, trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$; $P_n(x)$ là đa thức bậc *n*.	
Trường hợp	**Dạng nghiệm đặc biệt**
λ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng	$y_p = e^{\lambda x} Q_n(x)$
λ trùng với một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng	$y_p = x e^{\lambda x} Q_n(x)$
λ trùng với nghiệm kép của phương trình đặc trưng	$y_p = x^2 e^{\lambda x} Q_n(x)$

trong đó $Q_n(x) = A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n$ là một đa thức cùng bậc với $P_n(x)$. Các hệ số $A_i, i = \overline{0,n}$ được tìm bằng cách tính y_p', y_p'', sau đó thay tất cả vào phương trình ban đầu (1.6), đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được hệ phương trình để xác định chúng.

Dạng 2:

$f(x) = e^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\gamma x + Q_n(x)\sin\gamma x\right]$, trong đó $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$; $P_m(x)$, $Q_n(x)$ là các đa thức bậc *m*, *n* tương ứng.	
Trường hợp	**Dạng nghiệm đặc biệt**
$\lambda \pm i\gamma$ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng	$y_p = e^{\lambda x}\left[R_l(x)\cos\gamma x + S_l(x)\sin\gamma x\right]$
$\lambda \pm i\gamma$ trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng	$y_p = x e^{\lambda x}\left[R_l(x)\cos\gamma x + S_l(x)\sin\gamma x\right]$

trong đó $R_l(x) = A_0 + A_1 x + ... + A_l x^l$, $S_l(x) = B_0 + B_1 x + ... + B_l x^l$, là hai đa thức có cùng bậc $l = \max\{m, n\}$. Các hệ số $A_i, B_i, i = \overline{0,l}$ được tìm tương tự như Dạng 1.

Ví dụ 1.6. Giải phương trình $y'' - 4y' + 3y = e^x(x + 2)$.

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 - 4k + 3 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k = 1, \\ k = 3. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{3x},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Nhận xét rằng, $f(x) = e^x (x+2)$ suy ra $\lambda = 1$ trùng với một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng và $P_1(x) = x + 2$ là đa thức bậc nhất. Do đó, ta tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng

$$y_p = xe^x (Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx),$$

suy ra

$$y_p' = e^x \left[Ax^2 + (B + 2A)x + B \right],$$

$$y_p'' = e^x \left[Ax^2 + (B + 4A)x + 2A + 2B \right],$$

thay vào phương trình ban đầu ta có

$$e^x \left(-4Ax + 2A - 2B \right) = e^x \left(x + 2 \right).$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\begin{cases} -4A = 1, \\ 2A - 2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-1}{4}, \\ B = \dfrac{-5}{4}. \end{cases}$$

Suy ra

$$y_p = -e^x \left(\frac{x^2 + 5x}{4} \right).$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^x \left(\frac{x^2 + 5x}{4} \right),$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 1.7. Tìm nghiệm của bài toán sau

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2\sin x, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 - 3k + 2 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k = 1, \\ k = 2. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Nhận xét rằng, $f(x) = 2\sin x = e^{0x}(0.\cos x + 2\sin x)$, suy ra $\lambda = 0$, $\gamma = 1$ và $\lambda \pm i\gamma = \pm i$ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng. Hơn nữa $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 2$, suy ra $l = \max\{0,0\} = 0$. Do đó, ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình không thuần nhất ban đầu dưới dạng

$$y_p = A\cos x + B\sin x,$$

suy ra

$$y_p' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$y_p'' = -A\cos x - B\sin x,$$

thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 2\sin x.$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\begin{cases} A - 3B = 0, \\ 3A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{5}, \\ B = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Suy ra

$$y_p = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Từ đó, suy ra

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x,$$

mà

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{-3}{5}, \\ C_1 + 2C_2 = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được

$$\begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = \dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của bài toán ban đầu là

$$y = -2e^x + \frac{7}{5}e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

1.3.2. Phương pháp biến thiên hệ số Lagrange

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát y_0 của phương trình thuần nhất (1.4) tương ứng với (1.6). Giả sử nghiệm tổng quát của (1.4) là

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý; $y_1 = y_1(x)$ và $y_2 = y_2(x)$.

Bước 2: Tìm nghiệm đặc biệt của phương trình tuyến tính không thuần nhất (1.6) dưới dạng

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ thỏa hệ $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$

Giải hệ trên, ta được $\begin{cases} C_1' = \varphi_1(x), \\ C_2' = \varphi_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \underbrace{\int \varphi_1(x)dx}_{\Phi_1(x)} + k_1, \\ C_2 = \underbrace{\int \varphi_2(x)dx}_{\Phi_2(x)} + k_2. \end{cases}$

Chọn $k_1 = k_2 = 0$, ta được $y_p = \Phi_1(x)y_1 + \Phi_2(x)y_2$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1.6) là

$$y = y_0 + y_p.$$

Ví dụ 1.8. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}.$$

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 + 5k + 6 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k = -2, \\ k = -3. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$$

Ta tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng

$$y_p = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x},$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ thỏa hệ

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-3x} = 0, \\ -2C_1'e^{-2x} - 3C_2'e^{-3x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}}. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, \\ C_2' = \dfrac{-e^{3x}}{1+e^{2x}}, \end{cases}$$

suy ra

$$\begin{cases} C_1(x) = \displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + k_1, \\ C_2(x) = -\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx = -e^x + \arctan(e^x) + k_2. \end{cases}$$

Chọn $k_1 = k_2 = 0$, ta được

$$y_p = \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x}\arctan(e^x).$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_o + y_p = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x}\arctan(e^x),$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Định lý 1.3 (Nguyên lý chồng chất nghiệm)

Xét phương trình $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$ *trên* $\mathbb{R}$. *Khi đó, nghiệm đặc biệt* y_p *của phương trình trên được tìm dưới dạng*

$$y_p = y_1^* + y_2^*,$$

trong đó y_1^* *là một nghiệm đặc biệt của phương trình*

$$ay'' + by' + cy = f_1(x),$$

còn y_2^* *là một nghiệm đặc biệt của phương trình*

$$ay'' + by' + cy = f_2(x).$$

Ví dụ 1.9. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2\sin x.$$

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 - 3k + 2 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k = 1, \\ k = 2. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ dưới dạng

$$y_1^* = xe^{2x} A,$$

tương tự ví dụ 1.6, ta được $A = 3$, suy ra $y_1^* = 3xe^{2x}$.

Tiếp theo, theo ví dụ 1.7, nghiệm đặc biệt của phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$$

là

$$y_2^* = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_1^* + y_2^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

1.4. Phương trình Euler

Phương trình Euler thuần nhất trên $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ là phương trình vi phân có dạng

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0, \tag{1.7}$$

trong đó *a*, *b* và *c* là các hằng số.

Phương trình đặc trưng của (1.7) là phương trình bậc 2 theo ẩn *k* như sau

$$ak^2 + (b - a)k + c = 0. \tag{1.8}$$

Nếu (1.8) có 2 nghiệm thực phân biệt k_1 và k_2 thì (1.7) có nghiệm tổng quát là

$$y = Ax^{k_1} + Bx^{k_2},$$

với A, B là các hằng số tùy ý.

Nếu (1.8) có nghiệm kép k_0 thì (1.7) có nghiệm tổng quát là

$$y = (A\ln|x| + B)x^{k_0},$$

với A, B là các hằng số tùy ý.

Nếu (1.8) có 2 nghiệm phức liên hợp $\alpha \pm i\beta$ thì (1.7) có nghiệm tổng quát là

$$y = x^{\alpha}\left[A\cos(\beta\ln|x|) + B\sin(\beta\ln|x|)\right],$$

với A, B là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 1.10. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sau

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,\ x > 0.$$

Giải

Phương trình đặc trưng là $k^2 - 4k + 4 = 0$, suy ra $k = 2$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = (A\ln x + B)x^2,$$

với A, B là các hằng số tùy ý.

II. Một số khái niệm về phương trình đạo hàm riêng

Định nghĩa 2.1. Một phương trình đạo hàm riêng là một phương trình có chứa hàm nhiều biến chưa biết và một số đạo hàm riêng của nó.

Cấp cao nhất của đạo hàm riêng của hàm chưa biết xuất hiện trong phương trình được gọi là cấp của phương trình.

Tổng quát, phương trình đạo hàm riêng cấp m là phương trình có dạng

$$F\left(x;u;\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n};\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\dots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1.9)$$

trong đó F là hàm nhiều biến, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $u(x)=u(x_1,...,x_n)$ là hàm phải tìm, $k_1+k_2+...+k_n=m$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_j^k}=u_{\underbrace{x_jx_j...x_j}_{k\text{ lần}}}$.

Ví dụ 2.1. Các phương trình sau đây là phương trình đạo hàm riêng

$$u_t+u_x=0, \tag{1.10}$$

$$u_x-yu_y=0, \tag{1.11}$$

$$u_x+uu_y=0, \tag{1.12}$$

$$u_{tt}-u_{xx}+u^3=0, \tag{1.13}$$

$$u_{xx}+2u_{xy}+3x^2u_{yy}=4e^x, \tag{1.14}$$

$$u_xu_{xx}+\left(u_y\right)^2=0, \tag{1.15}$$

$$\left(u_{xx}\right)^2+u_{yy}+xu_x+yu=0, \tag{1.16}$$

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0, \tag{1.17}$$

$$u_{tt}+u_{xxxx}=0. \tag{1.18}$$

Ví dụ 2.2. Trong ví dụ 2.1, phương trình (1.10), (1.11), (1.12) là phương trình cấp 1; (1.13), (1.14), (1.15), (1.16) là phương trình cấp 2; (1.17) là phương trình cấp 3; (1.18) là phương trình cấp 4.

Phương trình (1.9) có thể được viết lại dưới dạng

$$L(u)=0$$

trong đó L là một *toán tử*, nghĩa là, nếu u là một hàm thì $L(u)$ sẽ là một hàm mới. Ở đây, $L(u)$ là vế trái của (1.9).

Ví dụ 2.3. Trong phương trình (1.11), toán tử $L=\dfrac{\partial}{\partial x}-y\dfrac{\partial}{\partial y}$, khi đó

$$L(u)=\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Định nghĩa 2.2. Phương trình đạo hàm riêng $L(u)=0$ được gọi là *tuyến tính* nếu L là một toán tử tuyến tính giữa các không gian vectơ, nghĩa là với mọi hàm u, v,

$$L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v) \text{, với } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nói cách khác, phương trình đạo hàm riêng được gọi là tuyến tính nếu hàm phải tìm và các đạo hàm riêng của nó đều chỉ xuất hiện với lũy thừa một và không có tích của chúng với nhau.

Ví dụ 2.4. Trong ví dụ 2.1, các phương trình tuyến tính là (1.10), (1.11), (1.14), (1.18). Các phương trình còn lại là phương trình không tuyến tính.

Định nghĩa 2.3. Phương trình đạo hàm riêng không tuyến tính được gọi là *tựa tuyến tính* nếu nó tuyến tính đối với tất cả đạo hàm riêng cấp cao nhất của hàm phải tìm.

Ví dụ 2.5. Trong ví dụ 2.1, phương trình (1.12), (1.13), (1.15), (1.17) là phương trình tựa tuyến tính, phương trình (1.16) không phải phương trình tựa tuyến tính.

Định nghĩa 2.4. Phương trình đạo hàm riêng được gọi là *thuần nhất* nếu mọi số hạng của phương trình đều có chứa hàm phải tìm hoặc đạo hàm của nó. Ngược lại, nếu có số hạng không chứa hàm phải tìm và cũng không chứa đạo hàm của nó thì ta gọi là phương trình *không thuần nhất*.

Ví dụ 2.6. Trong ví dụ 2.1, phương trình (1.14) là phương trình không thuần nhất, các phương trình còn lại đều là phương trình thuần nhất.

Ví dụ 2.7. (Một số phương trình đạo hàm riêng tiêu biểu)

$u_t = k^2 u_{xx}$: phương trình truyền nhiệt một chiều.

$u_{xx} + u_{yy} = 0$: phương trình Laplace hai chiều.

$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$: phương trình Poisson hai chiều.

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$: phương trình Laplace ba chiều.

$u_{tt} = k^2 u_{xx}$: phương trình truyền sóng một chiều.

III. Phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến

Phương trình tuyến tính cấp 2 tổng quát đối với hàm $u = u(x, y)$ có dạng

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \qquad (1.19)$$

trong đó A, B, C, D, E, F, G, u là những hàm thuộc

$$C^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \middle| u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy} \text{ liên tục trên } \Omega \right\}$$

của hai biến độc lập (x, y) trên miền mở và liên thông Ω. Giả sử *A*, *B*, *C* không đồng thời bằng 0.

Đặt $\Delta = \Delta(x, y) = B^2 - 4AC$.

Định nghĩa 3.1. Phương trình (1.19) thuộc loại

i) elliptic tại $(x_0, y_0) \in \Omega$ nếu $\Delta(x_0, y_0) < 0$,

ii) parabolic tại $(x_0, y_0) \in \Omega$ nếu $\Delta(x_0, y_0) = 0$,

iii) hyperbolic tại $(x_0, y_0) \in \Omega$ nếu $\Delta(x_0, y_0) > 0$.

Phương trình được gọi là thuộc loại elliptic (parabolic, hyperbolic) trên Ω nếu tương ứng $\Delta < 0$ $(\Delta = 0,\ \Delta > 0)$ tại mọi điểm $(x, y) \in \Omega$.

Ví dụ 3.1. Các phương trình sau đây thuộc loại nào?

a) $3u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$. b) $u_{xx} + yu_{yy} = 0$.

Giải

a) Ta có $\Delta = 2^2 - 4.3.5 = -56 < 0,\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vậy, phương trình thuộc loại elliptic trên $\mathbb{R}^2$.

b) Phương trình $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ có $\Delta = 0^2 - 4y = -4y$.

Nếu $y < 0$ thì $\Delta > 0$, suy ra phương trình thuộc loại hyperbolic trên $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}$.

Nếu $y = 0$ thì $\Delta = 0$, suy ra phương trình thuộc loại parabolic trên $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$.

Nếu $y > 0$ thì $\Delta < 0$, suy ra phương trình thuộc loại elliptic trên $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$.

Mệnh đề 3.2. *Qua phép đổi biến*

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases}$$

trong đó các hàm ξ, η *thuộc* $C^2(\Omega)$ *có Jacobian*

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

thì loại của phương trình (1.19) *sẽ không thay đổi.*

Chứng minh. Thật vậy, với phép đổi biến ở trên, ta có

$$u = u(\xi(x, y), \eta(x, y)),$$

nên

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \tag{1.20}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_x \\ &= (u_\xi \xi_x)_x + (u_\eta \eta_x)_x \\ &= (u_\xi)_x \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + (u_\eta)_x \eta_x + u_\eta \eta_{xx}, \end{aligned}$$

và do (1.20) ta được

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + (u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x) \eta_x + u_\eta \eta_{xx} \\ &= u_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Tương tự, ta có

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}, \tag{1.23}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}. \tag{1.24}$$

Thay (1.20) đến (1.24) vào (1.19), ta được

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u + G^* = 0, \tag{1.25}$$

trong đó

$$A^* = A^*(\xi, \eta) = A\xi_x^2 + B\xi_x \xi_y + C\xi_y^2, \tag{1.26}$$

$$B^* = B^*(\xi,\eta) = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y, \quad (1.27)$$

$$C^* = C^*(\xi,\eta) = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2, \quad (1.28)$$

$$D^* = D^*(\xi,\eta) = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y, \quad (1.29)$$

$$E^* = E^*(\xi,\eta) = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y, \quad (1.30)$$

$$F^* = F, \quad (1.31)$$

$$G^* = G. \quad (1.32)$$

Ta thấy, (1.25) cùng dạng với (1.19). Hơn nữa, (1.26), (1.27) và (1.28) được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} A^* & \dfrac{B^*}{2} \\ \dfrac{B^*}{2} & C^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Lấy định thức 2 vế của (1.33), ta được

$$\Delta^* = (B^*)^2 - 4A^*C^* = J^2(B^2 - 4AC) = J^2\Delta. \quad (1.34)$$

Vì $J \neq 0$ nên dấu của Δ^* cùng dấu với Δ. Như vậy, phép đổi biến ở trên không làm thay đổi loại của phương trình. ■

IV. Đưa phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến về dạng chính tắc

Do sự phân loại phương trình chỉ phụ thuộc vào hệ số của các số hạng chứa đạo hàm riêng cấp hai nên ta viết lại (1.19) và (1.25) dưới dạng sau

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = H(x,y,u,u_x,u_y), \quad (1.35)$$

$$A^*u_{\xi\xi} + B^*u_{\xi\eta} + C^*u_{\eta\eta} = H^*(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \quad (1.36)$$

Bằng cách chọn hai hàm $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ thích hợp trong phép đổi biến thì phương trình tuyến tính cấp hai (1.35) luôn đưa được về một trong các *dạng chính tắc* (dạng đơn giản hơn) sau đây

a) Loại hyperbolic: dạng chính tắc thứ nhất là $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ và dạng chính tắc thứ hai là $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi^*(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$.

b) Loại parabolic: $u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

c) Loại elliptic: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Xét phương trình đường đặc trưng của (1.35) là

$$A(y')^2 - By' + C = 0. \tag{1.37}$$

4.1. Loại hyperbolic

Ta có

$$\Delta = B^2 - 4AC > 0.$$

Trường hợp 4.1a. $A = C = 0$ thì phương trình (1.35) trở thành

$$Bu_{xy} = H(x, y, u, u_x, u_y).$$

Khi đó, chia 2 vế cho *B*, ta được dạng chính tắc thứ nhất

$$u_{xy} = H^*(x, y, u, u_x, u_y),$$

trong đó $H^* = \dfrac{H}{B}$.

Trường hợp 4.1b. $A \neq 0$ thì (1.37) có 2 nghiệm thực phân biệt

$$\left[\begin{array}{l} y' = \dfrac{B + \sqrt{\Delta}}{2A}, \\ y' = \dfrac{B - \sqrt{\Delta}}{2A}. \end{array}\right. \tag{1.38}$$

Giải hai phương trình vi phân trên, ta được

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_1(x, y) = C_1,\ C_1 = const, \\ \varphi_2(x, y) = C_2,\ C_2 = const. \end{array}\right. \tag{1.39}$$

Chọn $\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y), \\ \eta = \varphi_2(x, y). \end{cases}$ Với cách chọn này, ta chứng minh $J \neq 0$, $A^* = C^* = 0$ và $B^* \neq 0$. Từ đó, ta sẽ đưa được (1.35) về dạng chính tắc thứ nhất

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),$$

trong đó $\Phi = \dfrac{H^*}{B^*}$.

Thật vậy, từ (1.39) với chú ý $(\varphi_1)_y \neq 0,\ (\varphi_2)_y \neq 0$, ta suy ra

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(\varphi_1)_x}{(\varphi_1)_y} = \dfrac{-dy}{dx} = -y', \\ \dfrac{(\varphi_2)_x}{(\varphi_2)_y} = \dfrac{-dy}{dx} = -y'. \end{array}\right. \tag{1.40}$$

Vì (1.38) nên hai y' trong (1.40) là khác nhau. Do đó

$$J = \begin{vmatrix} (\varphi_1)_x & (\varphi_1)_y \\ (\varphi_2)_x & (\varphi_2)_y \end{vmatrix} = (\varphi_1)_x(\varphi_2)_y - (\varphi_1)_y(\varphi_2)_x \neq 0.$$

Từ (1.26), (1.27), (1.28) và chú ý (1.37), (1.40), ta có

$$A^* = (\varphi_1)_y^2\left[A(y')^2 - By' + C\right] = 0,$$

tương tự $C^* = 0$. Hơn nữa, ta có

$$B^* = \frac{-\Delta}{A}(\varphi_1)_y(\varphi_2)_y \neq 0.$$

Bây giờ, từ dạng chính tắc thứ nhất, dễ dàng chứng minh được nếu ta đổi biến $\begin{cases} \alpha = \xi + \eta, \\ \beta = \xi - \eta \end{cases}$ thì sẽ được dạng chính tắc thứ hai

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi^*(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta).$$

Trường hợp 4.1c. $A = 0$, $C \neq 0$ thì (1.37) có nghiệm $y' = \dfrac{C}{B}$.

Giải phương trình vi phân trên, ta được

$$\varphi(x,y) = D,\ D = const.$$

Chọn $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y), \end{cases}$ trong đó ψ là hàm tùy ý sao cho $J \neq 0$, $A^* = C^* = 0$ và $B^* \neq 0$. Chẳng hạn, ta có thể chọn $\eta = x$ hoặc $\eta = y$. Khi đó, bằng cách chứng minh tương tự trường hợp 4.1b, ta sẽ đưa được (1.35) về dạng chính tắc

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Ví dụ 4.1. Đưa các phương trình sau về dạng chính tắc

a) $u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0$.

b) $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0,\ x > 0,\ y > 0.$

Giải

a) Ta có $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, suy ra phương trình thuộc loại hyperbolic trên $\mathbb{R}^2$.

Phương trình đường đặc trưng $(y')^2 - 5y' + 6 = 0$, suy ra

$$\left[\begin{array}{l} y' = 3, \\ y' = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x + C_1, \\ y = 2x + C_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x + y = C_1, \\ -2x + y = C_2. \end{array}\right.$$

Đặt $\begin{cases} \xi = -3x + y, \\ \eta = -2x + y, \end{cases}$ suy ra $\begin{array}{l} \xi_x = -3,\ \xi_y = 1, \\ \eta_x = -2, \eta_y = 1, \end{array}$ do đó $J = -1 \neq 0$.

Ta có

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -3u_\xi - 2u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = 9u_{\xi\xi} + 12u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = (u_x)_y = -3u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

thay vào phương trình ban đầu, ta được dạng chính tắc thứ nhất

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{1.41}$$

Bây giờ, nếu ta đặt $\begin{cases}\alpha = \xi + \eta, \\ \beta = \xi - \eta,\end{cases}$ suy ra $\begin{matrix}\alpha_\xi = 1, \ \alpha_\eta = 1, \\ \beta_\xi = 1, \ \beta_\eta = -1,\end{matrix}$ do đó $J = -1 \neq 0$.

Ta có

$$u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = u_\alpha + u_\beta,$$

$$u_\eta = u_\alpha \alpha_\eta + u_\beta \beta_\eta = u_\alpha - u_\beta,$$

$$u_{\xi\eta} = (u_\alpha)_\eta + (u_\beta)_\eta = u_{\alpha\alpha} - u_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta} - u_{\beta\beta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta},$$

thay vào (1.41), ta được dạng chính tắc thứ hai

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 0.$$

Ta cũng có thể dùng các công thức từ (1.26) đến (1.32) trong Mục III để tính $A^*,\ B^*,\ C^*,\ D^*,\ E^*,\ F^*,\ G^*$. Cụ thể, trong ví dụ này ta có $A = 1,\ B = 5,\ C = 6,\ D = E = F = G = 0$.

Đặt $\begin{cases}\xi = -3x + y, \\ \eta = -2x + y,\end{cases}$ suy ra $\begin{matrix}\xi_x = -3,\ \xi_y = 1,\ \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0, \\ \eta_x = -2, \eta_y = 1,\ \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0,\end{matrix}$ do đó, ta được $J = -1 \neq 0$, $A^* = 0$, $B^* = -1,\ C^* = 0,\ D^* = E^* = F^* = G^* = 0$.

Vậy, dạng chính tắc của phương trình là $u_{\xi\eta} = 0$.

b) Ta có $A = y^2,\ B = 0,\ C = -x^2,\ D = E = F = G = 0$.

$\Delta = 0^2 - 4.y^2.(-x^2) = 4x^2y^2 > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, suy ra phương trình thuộc loại hyperbolic trên $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}$.

Phương trình đường đặc trưng $y^2\left(y'\right)^2 - x^2 = 0$, suy ra

$$\left[\begin{matrix} y' = \dfrac{x}{y}, \\ y' = \dfrac{-x}{y} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = C_1, \\ \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} = C_2. \end{matrix}\right.$$

Đặt $\begin{cases} \xi = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2}, \\ \eta = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}, \end{cases}$ suy ra $\begin{matrix} \xi_x = -x, & \xi_y = y, & \xi_{xx} = -1, & \xi_{xy} = 0, & \xi_{yy} = 1, \\ \eta_x = x, & \eta_y = y, & \eta_{xx} = 1, & \eta_{xy} = 0, & \eta_{yy} = 1, \end{matrix}$

do đó, ta được

$J = -2xy \neq 0$, $\forall x, y > 0$,

$A^* = 0$, $B^* = -4x^2y^2$, $C^* = 0$, $D^* = -x^2 - y^2$, $E^* = y^2 - x^2$, $F^* = G^* = 0$.

Bây giờ, từ $\begin{cases} \xi = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2}, \\ \eta = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \eta - \xi, \\ y^2 = \eta + \xi. \end{cases}$, ta được

$$B^* = -4x^2y^2 = 4(\xi^2 - \eta^2),\ D^* = -2\eta,\ E^* = 2\xi.$$

Vậy, dạng chính tắc của phương trình là

$$2(\xi^2 - \eta^2)u_{\xi\eta} - \eta u_\xi + \xi u_\eta = 0.$$

4.2. Loại parabolic

Ta có

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow B^2 = 4AC.$$

Trường hợp 4.2a. $A = 0, C \neq 0$, suy ra $B = 0$. Khi đó, phương trình (1.35) trở thành

$$Cu_{yy} = H(x, y, u, u_x, u_y),$$

suy ra

$$u_{yy} = H^*(x, y, u, u_x, u_y),$$

trong đó $H^* = \dfrac{H}{C}$.

Trường hợp 4.2b. $A \neq 0$. Khi đó, (1.37) có nghiệm kép

$$y' = \frac{B}{2A}.$$

Giải phương trình vi phân trên, ta được

$$\varphi(x,y) = C,\ C = const.$$

Chọn $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y), \end{cases}$ trong đó ψ là hàm tùy ý sao cho $J \neq 0$, $A^* = B^* = 0$ và $C^* \neq 0$. Chẳng hạn, ta có thể chọn $\eta = x$ hoặc $\eta = y$. Khi đó, bằng cách chứng minh tương tự trường hợp 4.1b, ta sẽ đưa được (1.35) về dạng chính tắc

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Ví dụ 4.2. Đưa các phương trình sau về dạng chính tắc

a) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + u = 0$.

b) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0,\ x > 0,\ y > 0$.

Giải

a) Ta có $A = 4$, $B = 12$, $C = 9$, $D = -2$, $E = 0$, $F = 1$, $G = 0$.

$\Delta = 12^2 - 4.4.9 = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, suy ra phương trình thuộc loại parabolic trên $\mathbb{R}^2$.

Phương trình đường đặc trưng $4(y')^2 - 12y' + 9 = 0$, suy ra

$$y' = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y - \frac{3}{2}x = C.$$

Đặt $\begin{cases} \xi = y - \dfrac{3}{2}x, \\ \eta = x, \end{cases}$ suy ra $\begin{array}{l} \xi_x = \dfrac{-3}{2},\ \xi_y = 1,\quad \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0, \\ \eta_x = 1,\quad \eta_y = 0,\quad \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0, \end{array}$

do đó, ta được

$$J = -1 \neq 0,\ A^* = 0,\ B^* = 0,\ C^* = 4,\ D^* = 3,\ E^* = -2,\ F^* = 1,\ G^* = 0.$$

Vậy, dạng chính tắc của phương trình là

$$4u_{\eta\eta} + 3u_\xi - 2u_\eta + u = 0.$$

b) Ta có $A = x^2$, $B = 2xy$, $C = y^2$, $D = xy$, $E = y^2$, $F = G = 0$.

$\Delta = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, suy ra phương trình thuộc loại parabolic trên $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}$.

Phương trình đường đặc trưng $x^2\left(y'\right)^2 - 2xyy' + y^2 = 0$, suy ra

$$y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \ln y - \ln x = C.$$

Đặt $\begin{cases} \xi = \ln y - \ln x, \\ \eta = x, \end{cases}$ suy ra $\begin{array}{l} \xi_x = \dfrac{-1}{x}, \quad \xi_y = \dfrac{1}{y}, \quad \xi_{xx} = \dfrac{1}{x^2}, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = \dfrac{-1}{y^2}, \\ \eta_x = 1, \quad \eta_y = 0, \quad \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0, \end{array}$

do đó, ta được

$$J = \frac{-1}{y} \neq 0, \ \forall y > 0, \ A^* = 0, \ B^* = 0, \ C^* = x^2, \ D^* = 0, \ E^* = xy, \ F^* = G^* = 0.$$

Bây giờ, từ $\begin{cases} \xi = \ln y - \ln x, \\ \eta = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \eta e^{\xi}, \\ x = \eta, \end{cases}$ ta được

$$C^* = \eta^2, \ E^* = \eta^2 e^{\xi}.$$

Vậy, dạng chính tắc của phương trình là

$$u_{\eta\eta} + e^{\xi} u_{\eta} = 0.$$

4.3. Loại elliptic

Ta có

$$\Delta = B^2 - 4AC < 0.$$

Khi đó, (1.37) có 2 nghiệm phức liên hợp

$$\left[\begin{array}{l} y' = \dfrac{B + i\sqrt{-\Delta}}{2A}, \\ y' = \dfrac{B - i\sqrt{-\Delta}}{2A}. \end{array}\right. \tag{1.42}$$

Giải hai phương trình vi phân trên, ta được nghiệm tổng quát có dạng

$$\left[\begin{array}{l}\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1,\ C_1=const,\\ \varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2,\ C_2=const.\end{array}\right. \qquad (1.43)$$

trong đó $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ là hai hàm thực.

Chọn $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y).\end{cases}$ Với cách chọn này, ta chứng minh $J\neq 0, B^*=0$ và $A^*=C^*$. Khi đó, ta sẽ đưa được (1.35) về dạng chính tắc

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\Phi(\alpha,\beta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Thật vậy, từ (1.43) với chú ý $\varphi_y\pm i\psi_y\neq 0,$ ta suy ra

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\varphi_x+i\psi_x}{\varphi_y+i\psi_y}=\dfrac{-dy}{dx}=-y',\\ \dfrac{\varphi_x-i\psi_x}{\varphi_y-i\psi_y}=\dfrac{-dy}{dx}=-y'.\end{array}\right. \qquad (1.44)$$

Vì (1.42) nên hai y' trong (1.44) là khác nhau. Do đó

$$J=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}=\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x\neq 0.$$

Thay y' trong biểu thức thứ nhất của (1.44) vào (1.37), ta được

$$A(\varphi_x+i\psi_x)^2+B(\varphi_x+i\psi_x)(\varphi_y+i\psi_y)+C(\varphi_y+i\psi_y)^2=0.$$

Tách phần thực và phần ảo, ta có

$$\begin{cases}A(\varphi_x^2-\psi_x^2)+B(\varphi_x\varphi_y-\psi_x\psi_y)+C(\varphi_y^2-\psi_y^2)=0,\\ 2A\varphi_x\psi_x+B(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+2C\varphi_y\psi_y=0,\end{cases}$$

suy ra

$$\begin{cases}A\varphi_x^2+B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2=A\psi_x^2+B\psi_x\psi_y+C\psi_y^2,\\ 2A\varphi_x\psi_x+B(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+2C\varphi_y\psi_y=0.\end{cases}$$

Thay $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y),\end{cases}$ và từ (1.26), (1.27), (1.28), ta có

$$A^*=C^* \text{ và } B^*=0.$$

Nhận xét $A^* = C^* \neq 0$. Thật vậy, nếu $A^* = C^* = 0$ thì từ (1.34), suy ra $J = 0$, trái với cách chọn các hàm ξ, η.

Ví dụ 4.3. Đưa các phương trình sau về dạng chính tắc

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + 17u_{yy} = 0$.

b) $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$, $x > 0$.

Giải

a) Ta có $A = 1,\ B = 2,\ C = 17,\ D = E = F = G = 0$.

$\Delta = 4 - 4.17 = -64 < 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, suy ra phương trình thuộc loại elliptic trên $\mathbb{R}^2$.

Phương trình đường đặc trưng $(y')^2 - 2y' + 17 = 0$, suy ra

$$y' = 1 \pm 4i \Leftrightarrow y - x \pm i(4x) = C.$$

Đặt $\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = 4x, \end{cases}$ suy ra $\begin{matrix} \xi_x = -1,\ \xi_y = 1,\ \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0, \\ \eta_x = 4,\ \eta_y = 0,\ \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0, \end{matrix}$ do đó, ta được

$$J = -4 \neq 0,\ A^* = 16,\ B^* = 0,\ C^* = 16,\ D^* = E^* = F^* = G^* = 0.$$

Vậy, dạng chính tắc của phương trình là

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

b) Ta có $A = 1,\ \ B = 0,\ C = x^2,\ D = E = F = G = 0$.

$\Delta = -4x^2 < 0,\ \ \forall (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, suy ra phương trình thuộc loại elliptic trên $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Phương trình đường đặc trưng $(y')^2 + x^2 = 0$, suy ra

$$y' = \pm ix \Leftrightarrow y \pm i\frac{x^2}{2} = C.$$

Đặt $\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = \dfrac{x^2}{2}, \end{cases}$ suy ra $\begin{matrix} \xi_x = 0, \xi_y = 1, \quad \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0, \\ \eta_x = x, \eta_y = 0,\ \eta_{xx} = 1, \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0, \end{matrix}$ do đó, ta được

$$J = -x \neq 0,\ \forall x > 0,\ A^* = x^2,\ B^* = 0,\ C^* = x^2,\ D^* = 0,\ E^* = 1,\ F^* = G^* = 0.$$

Bây giờ, từ $\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \xi, \\ x^2 = 2\eta, \end{cases}$ ta được

$$A^* = C^* = 2\eta.$$

Vậy, dạng chính tắc của phương trình là

$$2\eta u_{\xi\xi} + 2\eta u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

V. Nghiệm của một phương trình đạo hàm riêng

Định nghĩa 5.1. Một hàm $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là một *nghiệm* của phương trình đạo hàm riêng (1.9) trên miền $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nếu u và các đạo hàm riêng của nó tồn tại trên Ω và thỏa mãn phương trình (1.9) tại mọi điểm thuộc Ω.

Ví dụ 5.1. Các hàm $u = x^2 - y^2$, $u = e^x \cos y$ đều là nghiệm của phương trình Laplace hai chiều $u_{xx} + u_{yy} = 0$ trên $\mathbb{R}^2$.

Định nghĩa 5.2. Một biểu thức biểu diễn tất cả nghiệm của phương trình (1.9) được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình (1.9).

Ví dụ 5.2. Tìm nghiệm tổng quát $u(x, y)$ của phương trình

$$u_x - u = 0.$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình cho e^{-x}, ta được

$$e^{-x}u_x - e^{-x}u = 0$$

$$(e^{-x}u)'_x = 0$$

$$\int (e^{-x}u)'_x \, dx = \int 0 dx$$

$$e^{-x}u = C(y)$$

$$u = C(y)e^x,$$

với $C(y)$ là hàm tùy ý theo biến y.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$u(x,y) = C(y)e^x,$$

với $C(y)$ là hàm tùy ý theo biến y.

Ví dụ 5.3. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

a) $u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0$.

b) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0,\ x > 0,\ y > 0$.

Giải

a) Từ ví dụ 4.1a, ta được dạng chính tắc của phương trình là

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$\int (u_\xi)_\eta d\eta = \int 0 d\eta$$

$$u_\xi = C(\xi)$$

$$\int u_\xi d\xi = \int C(\xi) d\xi$$

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

với $F(\xi) = \int C(\xi)d\xi$, $G(\eta)$ là hàm tùy ý theo biến η.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$u(x,y) = F(-3x + y) + G(-2x + y).$$

b) Từ ví dụ 4.2b, ta được dạng chính tắc của phương trình là

$$u_{\eta\eta} + e^\xi u_\eta = 0$$

$$\int u_{\eta\eta} d\eta + \int e^\xi u_\eta d\eta = \int 0 d\eta$$

$$u_\eta + e^\xi u = C(\xi).$$

Nhân 2 vế của phương trình trên cho $e^{\int e^\xi d\eta} = e^{e^\xi \eta}$, ta được

$$\left(ue^{e^\xi \eta}\right)'_\eta = e^{e^\xi \eta} C(\xi)$$

$$\int \left(ue^{e^\xi \eta}\right)'_\eta d\eta = \int e^{e^\xi \eta} C(\xi) d\eta$$

$$ue^{e^\xi \eta} = C(\xi)e^{-\xi}e^{e^\xi \eta} + D(\xi)$$

$$u = C(\xi)e^{-\xi} + D(\xi)e^{-e^{\xi}\eta}$$

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\xi)e^{-e^{\xi}\eta},$$

với $F(\xi) = C(\xi),\ G(\xi) = D(\xi)$ là những hàm tùy ý theo biến ξ.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$u(x,y) = F(\ln y - \ln x) + G(\ln y - \ln x)e^{-y}.$$

Mệnh đề 5.3 (Nguyên lý tuyến tính). *Nếu $u_1,\ u_2,\dots,\ u_n$ là n nghiệm của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thuần nhất $L(u) = 0$ thì $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$, trong đó c_1, $c_2,\dots,\ c_n$ là các hằng số tùy ý cũng là nghiệm của phương trình này.*

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(u_i) = 0.$$ ■

Ví dụ 5.4. Dễ dàng chứng minh được $\forall k \in \mathbb{R}$, $u(x,y) = e^{kx}\cos(ky)$ là nghiệm của phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Từ đó, theo nguyên lý tuyến tính, ta có

$$u(x,y) = e^{-x}\cos y + 2e^{-3x}\cos 3y - 5e^{-\pi x}\cos \pi y$$

cũng là nghiệm của phương trình trên.

Chú ý rằng, nguyên lý tuyến tính không áp dụng được cho phương trình tuyến tính không thuần nhất. Thật vậy, giả sử u_1 và u_2 là nghiệm của phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 1$, khi đó $u_1 + u_2$ là nghiệm của phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 2$.

Mệnh đề 5.4. *Giả sử u_1 và u_2 là nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất $L(u) = f$, trong đó f là một hàm khác 0 và chỉ phụ thuộc vào biến độc lập x. Khi đó, $v = u_1 - u_2$ là một nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất $L(u) = 0$.*

Chứng minh. Ta có $L(v) = L(u_1 - u_2) = L(u_1) - L(u_2) = f - f = 0.$ ■

Ví dụ 5.5. Nếu u_1 và u_2 là nghiệm của phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 1$ thì $u_1 - u_2$ là nghiệm của phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 0.$

Mệnh đề 5.5. *Giả sử* u_p *là một nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất* $L(u)=f$ *(5.1),* u_0 *là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất* $L(u)=0$ *tương ứng với (5.1). Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình (5.1) là* $u=u_p+u_0$.

Chứng minh. Ta có $L(u)=L(u_p+u_0)=L(u_p)+L(u_0)=f+0=f$. ■

Ví dụ 5.6. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $u_{xx}=2,$ với $u=u(x,y)$.

Giải

Dễ thấy, $u_p(x,y)=x^2$ là một nghiệm của phương trình ban đầu.

Xét phương trình

$$u_{xx}=0$$

$$\int u_{xx}dx=\int 0dx$$

$$u_x=C(y)$$

$$\int u_x dx=\int C(y)dx$$

$$u=xC(y)+D(y),$$

do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $u_0(x,y)=xC(y)+D(y),$ với $C(y)$ và $D(y)$ là các hàm tùy ý theo biến *y*.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

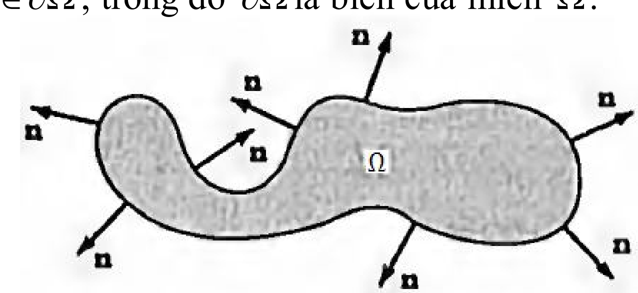
$$u(x,y)=u_p(x,y)+u_0(x,y)=x^2+xC(y)+D(y),$$

với $C(y)$ và $D(y)$ là các hàm tùy ý theo biến *y*.

VI. Các điều kiện biên và điều kiện đầu

Điều kiện biên là điều kiện trên *u* khi $x\in\partial\Omega$, trong đó $\partial\Omega$ là biên của miền Ω. Một số điều kiện biên:

- Điều kiện Dirichlet: $u\big|_{\partial\Omega}=g$.



▪ Điều kiện Neumann: $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g$.

▪ Điều kiện Robin: $\left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega} = g$.

trong đó g là hàm cho trước; $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$; n là vectơ pháp tuyến ngoài và $|n| = 1$; α và β là các hằng số khác 0.

Nếu $g \equiv 0$ thì điều kiện biên được gọi là điều kiện biên *thuần nhất*, ngược lại gọi là điều kiện biên *không thuần nhất.*

Bài toán tìm nghiệm của một phương trình đạo hàm riêng chỉ có điều kiện biên được gọi là *bài toán biên*.

Điều kiện đầu là điều kiện trên u khi biến thời gian $t = 0$. Số điều kiện đầu bằng số bậc cao nhất của đạo hàm theo t trong phương trình.

Bài toán tìm nghiệm của một phương trình đạo hàm riêng chỉ cùng với điều kiện đầu được gọi là *bài toán Cauchy*.

Bài toán tìm nghiệm của một phương trình đạo hàm riêng có điều kiện biên và điều kiện đầu được gọi là *bài toán biên-giá trị ban đầu* hay *bài toán hỗn hợp*.

Ví dụ 6.1. Bài toán biên Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u(x,0) = f_1(x),\ x \in [0,a], \\ u(x,b) = f_2(x),\ x \in [0,a], \\ u(0,y) = g_1(y),\ y \in [0,b], \\ u(a,y) = g_2(y),\ y \in [0,b]. \end{cases}$$

Ví dụ 6.2. Bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx},\ x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ 6.3. Bài toán hỗn hợp với điều kiện biên Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Ví dụ 6.4. Bài toán hỗn hợp với điều kiện biên Neumann

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u_x(L,t) = f(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Ví dụ 6.5. Bài toán hỗn hợp với điều kiện biên Robin

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx}, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(0,t) + \alpha u_x(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(1,t) + \beta u_x(1,t) = T_2, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

VII. Các phương pháp giải phương trình đạo hàm riêng

Phương pháp tích phân: biến đổi Fourier, biến đổi Laplace, hàm Green (xem [18]).

Phương pháp biến phân: tách biến, Galerkin, cực tiểu hóa phiếm hàm (xem [13]).

Phương pháp số: sai phân hữu hạn, phần tử hữu hạn (xem [18]).

Trong nội dung giáo trình này, chúng tôi trình bày ba phương pháp là: tách biến, biến đổi Fourier và sai phân hữu hạn.

VIII. Bài toán Sturm – Liouville

Định nghĩa 8.1. *Tích vô hướng* của hai hàm f và g đối với *hàm trọng* $r(x) > 0$ trên $[a,b]$ là

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)r(x)dx.$$

Nếu trong thuật ngữ không có "đối với hàm trọng $r(x)$" thì ta hiểu $r(x)=1$.

Ví dụ 8.1. Cho $f(x)=x$, $g(x)=e^{x^2}$. Tính tích vô hướng của f và g trên [0,1].

Giải

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}(e-1).$$

Định nghĩa 8.2. Hai hàm f và g được gọi là *trực giao* đối với *hàm trọng* $r(x)>0$ trên $[a,b]$ nếu $\langle f,g\rangle=0.$

Chuẩn của hàm f đối với hàm trọng $r(x)>0$ là

$$\|f\|=\left(\int_a^b |f(x)|^2 r(x)dx\right)^{1/2}.$$

Chú ý rằng, nếu f là hàm biến phức thì $|f(x)|^2=f(x)\overline{f(x)}$. Tập hợp các hàm $f:\Omega\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sao cho $\int_\Omega |f(x)|^p dx<\infty$ được gọi là không gian $L^p(\Omega)$, với chuẩn

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Định nghĩa 8.3. Họ hàm $\{\varphi_k(x)\}$, $k=1,2,3,...$ được gọi là *trực giao* đối với *hàm trọng* $r(x)>0$ trên $[a,b]$ nếu $\langle\varphi_m,\varphi_n\rangle=0,\ \forall m\neq n.$

Ví dụ 8.2. Cho $\varphi_n(x)=\cos\dfrac{n\pi x}{L},\ n=1,2,3,...$

a) Chứng minh rằng $\{1,\varphi_n(x)\}$, $n=1,2,3,...$ là họ hàm trực giao trên [0, L].

b) Tính $\|\varphi_n\|^2$.

Giải

a) Ta có

$$\langle 1,\varphi_n\rangle = \int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L = 0,\ n = 1,2,3,...$$

$$\langle \varphi_m,\varphi_n\rangle = \int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_0^L\left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{L} + \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{L} + \frac{L}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]\Bigg|_0^L$$

$$= 0,\quad \forall m \neq n.$$

Vậy, $\{1,\varphi_n(x)\}$, $n = 1,2,3,...$ là họ hàm trực giao trên [0, L].

b) $\|\varphi_n\|^2 = \int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_0^L\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}.$

Ví dụ 8.3. Họ hàm $\left\{\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$, $n = 1,2,3,...$ là họ hàm trực giao trên [0, L].

Ví dụ 8.4. Chứng minh rằng $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos x$ trực giao trên $[0,\pi]$ nhưng không trực giao trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Giải

Trên $[0,\pi]$, ta có $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx = \int_0^\pi \sin x\cos x dx = 0.$

Trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ta có $\langle f,g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x dx = \frac{1}{2} \neq 0.$

Suy ra điều phải chứng minh.

Định nghĩa 8.4. Bài toán Sturm – Liouville là bài toán biên trên $[a,b]$ có dạng

$$\begin{cases} \left[p(x)\varphi'(x)\right]' + \left[q(x)+\lambda r(x)\right]\varphi(x) = 0,\ a < x < b, & (1.45)\\ C_1\varphi(a) + C_2\varphi'(a) = 0, & (1.46)\\ D_1\varphi(b) + D_2\varphi'(b) = 0 & (1.47)\end{cases}$$

và thỏa các điều kiện

(i) $p(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, $r(x) > 0, \forall x \in [a,b]$ và $p(x), p'(x), q(x), r(x)$ liên tục trên $[a,b]$,

(ii) $C_1^2 + C_2^2 > 0$, $D_1^2 + D_2^2 > 0$.

Các nghiệm φ không đồng nhất bằng 0 của bài toán Sturm – Liouville được gọi là *hàm riêng* và số λ để hàm riêng tồn tại được gọi là *giá trị riêng* của bài toán.

Định lý 8.5

(i) *Các giá trị riêng của bài toán Sturm–Liouville là những số thực và tạo thành một dãy tăng* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$ *và* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

(ii) *Các hàm riêng* φ_n *(ứng với* λ_n*) là trực giao tương ứng với hàm trọng* $r(x) > 0$*, nghĩa là*

$$\left\langle \varphi_m, \varphi_n \right\rangle = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)r(x)dx = 0,\ \forall m \neq n.$$

Chứng minh.

(i) Giả sử $\lambda = \alpha + i\beta$ là giá trị riêng và hàm riêng tương ứng là $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$, trong đó α, β, u và v có giá trị thực. Thay λ và $\varphi(x)$ vào (1.45), ta được

$$\left[pu' + ipv'\right]' + \left[q + \alpha r + i\beta r\right](u + iv) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (pu')' + (q + \alpha r)u - \beta r v = 0, \\ (pv')' + (q + \alpha r)v + \beta r u = 0. \end{cases}$$

Nhân phương trình một với v, phương trình hai với $-u$ rồi cộng lại, ta được

$$-\beta(u^2 + v^2)r = u(pv')' - v(pu')' = \left[(pv')u - (pu')v\right]'.$$

Lấy tích phân hai vế dẫn đến

$$-\beta\int_a^b (u^2 + v^2)rdx = \left[p(uv' - u'v)\right]\Big|_a^b. \tag{1.48}$$

Bây giờ, ta sẽ dựa vào các điều kiện biên (1.46) và (1.47) để chứng tỏ vế phải của (1.48) bằng 0. Thật vậy, ta có

$$\left[p(uv' - u'v)\right]\Big|_a^b = p(b)\left[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)\right] - p(a)\left[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)\right]. \quad (1.49)$$

Có 4 trường hợp như sau

Trường hợp 1: Nếu $p(a) = p(b) = 0$ thì vế phải của (1.49) bằng 0.

Trường hợp 2: Nếu $p(a) \neq 0$ và $p(b)=0$. Số hạng đầu ở vế phải của (1.49) bằng 0.

Xét số hạng sau, từ điều kiện biên (1.46) suy ra

$$\begin{cases} C_1u(a) + C_2u'(a) = 0, \\ C_1v(a) + C_2v'(a) = 0. \end{cases}$$

Nếu $C_2 \neq 0$ thì nhân phương trình đầu với $-v(a)$, phương trình sau với $u(a)$ rồi cộng lại, ta được

$$C_2\left[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)\right] = 0,$$

suy ra $\left[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)\right] = 0$, tức là vế phải của (1.49) bằng 0.

Nếu $C_1 \neq 0$, lý luận hoàn toàn tương tự, ta cũng có vế phải của (1.49) bằng 0.

Trường hợp 3: Nếu $p(a) = 0$ và $p(b) \neq 0$. Chứng minh tương tự như trường hợp 2, nhưng dùng điều kiện biên (1.47) ta cũng thấy vế phải của (1.49) bằng 0.

Trường hợp 4: Nếu $p(a) \neq 0$ và $p(b) \neq 0$ thì lý luận như ở trường hợp 2, nhưng dùng cả hai điều kiện biên (1.46) và (1.47) cũng dẫn đến vế phải của (1.49) bằng 0.

Tiếp theo, vì φ là hàm riêng nên $\varphi \neq 0$, tức là $u^2 + v^2 \neq 0$, đồng thời $u^2 + v^2$ và $r(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $r(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$ nên tích phân ở vế trái của (1.48) khác 0, mà vế phải của (1.48) bằng 0, do đó $\beta = 0$. Vậy, giá trị riêng λ phải là số thực.

Chứng minh các giá trị riêng tạo thành một dãy tăng $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ (xem trong [20]).

(*ii*) Giả sử, $\varphi_m(x)$ và $\varphi_n(x)$ là hai hàm riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_m \neq \lambda_n$, thay vào (1.45), ta được

$$\begin{cases} (p\varphi_m')' + (q+\lambda_m r)\varphi_m = 0, \\ (p\varphi_n')' + (q+\lambda_n r)\varphi_n = 0. \end{cases}$$

Nhân phương trình một với φ_n và phương trình hai với $-\varphi_m$ rồi cộng lại, ta được

$$(\lambda_m - \lambda_n) r\varphi_m\varphi_n = \varphi_m (p\varphi_n')' - \varphi_n (p\varphi_m')' = \left[(p\varphi_n')\varphi_m - (p\varphi_m')\varphi_n\right]'.$$

Lấy tích phân hai vế dẫn đến

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b r\varphi_m\varphi_n dx = \left[p(\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n)\right]\Big|_a^b. \tag{1.50}$$

Lý luận tương tự như cho vế phải của (1.48), ta cũng được vế phải của (1.50) bằng 0. Hơn nữa, vì $\lambda_m \neq \lambda_n$ nên

$$\int_a^b r\varphi_m\varphi_n dx = 0.$$ ■

Ví dụ 8.5. Tìm các hàm riêng, giá trị riêng của bài toán

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, & 0 < x < L, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases}$$

Giải

Ta có $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow k^2 = -\lambda$.

· $\lambda = 0$, suy ra $k = 0$, do đó $\varphi(x) = Ax + B$, mà

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ AL + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 0.$$

Khi đó $\varphi(x) = 0$. Vậy, ta loại trường hợp $\lambda = 0$.

· $\lambda < 0$, suy ra $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, do đó $\varphi(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$, mà

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}L} + Be^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A, \\ A\left(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}\right) = 0. \end{cases}$$

Vì $e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} \neq 0, \forall \lambda < 0$ nên $A = B = 0$. Vậy, ta loại trường hợp $\lambda < 0$.

▪ $\lambda > 0$, suy ra $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, do đó

$$\varphi(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \tag{1.51}$$

mà

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ A\cos(\sqrt{\lambda}L) + B\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0. \end{cases} \tag{1.52}$$

Hệ phương trình (1.52) có nghiệm không tầm thường

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}L) & \sin(\sqrt{\lambda}L) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Giải phương trình $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, ta được giá trị riêng

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, n = 1, 2, \ldots$$

Vì $A = 0$ và chọn $B = 1$ nên từ (1.51) ta được hàm riêng tương ứng là

$$\varphi_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n = 1, 2, \ldots$$

Ví dụ 8.6. Tìm các vectơ riêng, giá trị riêng của bài toán

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, & 0 < x < L, \\ \varphi'(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases}$$

Giải

Ta có $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow k^2 = -\lambda$.

▪ Tương tự ví dụ 8.5, ta loại trường hợp $\lambda \leq 0$.

▪ $\lambda > 0$, suy ra $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, do đó

$$\varphi(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \tag{1.53}$$

$$\varphi'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x),$$

mà

$$\begin{cases}\varphi'(0)=0,\\ \varphi(L)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=0,\\ A\cos(\sqrt{\lambda}L)+B\sin(\sqrt{\lambda}L)=0.\end{cases} \tag{1.54}$$

Hệ phương trình (1.54) có nghiệm không tầm thường

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\sqrt{\lambda}L) & \sin(\sqrt{\lambda}L)\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -\cos(\sqrt{\lambda}L)=0.$$

Giải phương trình $\cos(\sqrt{\lambda}L)=0$, ta được giá trị riêng

$$\lambda_n=\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4L^2}, n=0,1,2,...$$

Vì $B=0$ và chọn $A=1$ nên từ (1.53) ta được hàm riêng tương ứng là

$$\varphi_n(x)=\cos(\sqrt{\lambda_n}x)=\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\right), n=0,1,2,...$$

Phương trình $\varphi''+\lambda\varphi=0,\ 0<x<L$.		
Điều kiện biên	λ_n	φ_n
$\varphi(0)=\varphi(L)=0$	$\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n=1,2,...$	$\sin\frac{n\pi x}{L}$, $n=1,2,...$
$\varphi'(0)=\varphi(L)=0$	$\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4L^2}$, $n=0,1,...$	$\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2L}$, $n=0,1,...$
$\varphi(0)=\varphi'(L)=0$	$\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4L^2}$, $n=0,1,...$	$\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2L}$, $n=0,1,...$
$\varphi'(0)=\varphi'(L)=0$	$\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n=0,1,...$	$\cos\frac{n\pi x}{L}$, $n=0,1,...$

Bảng 8.1. Tóm tắt kết quả của một số bài toán Sturm – Liouville thường gặp.

IX. Khai triển theo hàm riêng

Định nghĩa 9.1. Giả sử $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\ldots$ là họ hàm trực giao với hàm trọng $r(x)>0$ trên $[a,b]$. Nếu hàm $f(x)$ nào đó có biểu diễn chuỗi (hội tụ về $f(x)$ trên $[a,b]$)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \tag{1.55}$$

thì biểu diễn này được gọi là *khai triển trực giao* hoặc là *chuỗi Fourier mở rộng* của $f(x)$ trên $[a,b]$. Các hệ số $a_n, n=0,1,2,...$ được gọi là các *hệ số Fourier*.

Nếu hệ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\ldots$ là các hàm riêng của một bài toán Sturm –Liouville thì (1.55) được gọi là *khai triển theo hàm riêng* của $f(x)$ trên $[a,b]$.

Do tính trực giao nên các *hệ số Fourier* được tính bởi công thức

$$a_n=\frac{\langle f,\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Ví dụ 9.1 (Khai triển Fourier cos trên [0,*L*]). Ta có họ hàm

$$\left\{1,\cos\frac{n\pi x}{L}\right\},\ n=1,2,3,...$$

là họ hàm trực giao trên $[0,L]$ với hàm trọng $r(x)=1$. Khi đó, nếu $f\in L^2(0,L)$ thì khai triển Fourier cos của $f(x)$ trên $[0,L]$ là

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L},$$

với

$$a_0=\frac{\langle f,1\rangle}{\|1\|^2}=\frac{\int_0^L f(x)dx}{\int_0^L dx}=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{\left\langle f,\cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{L}\right\|^2}=\frac{\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx}{\int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{L}dx}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad n=1,2,3,...$$

Ví dụ 9.2 (Khai triển Fourier sin trên [0,*L*]). Ta có họ hàm

$$\left\{\sin\frac{n\pi x}{L}\right\},\ n=1,2,3,...$$

là họ hàm trực giao trên [0,L] với hàm trọng $r(x)=1$. Khi đó, nếu $f \in L^2(0,L)$ thì khai triển Fourier sin của $f(x)$ trên [0,L] là

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

với

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3,...$$

Ví dụ 9.3 (Khai triển Fourier trên [-*L*,*L*]). Ta có họ hàm $\left\{1,\cos\frac{n\pi x}{L},\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$, $n=1,2,3,...$ là họ hàm trực giao trên [-L,L] với hàm trọng $r(x)=1$. Khi đó, nếu $f \in L^2(-L,L)$ thì khai triển Fourier của $f(x)$ trên [-L,L] là

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

với

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3,...,$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3,...$$

Ví dụ 9.4. Tìm khai triển Fourier sin của $f(x)=x$ trên [0,2].

Giải

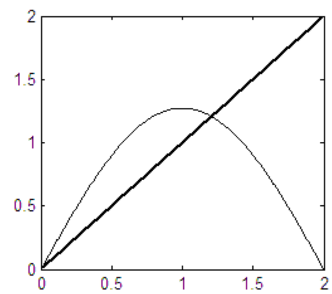
Ta có

$$b_n=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi},\ n=1,2,3,...$$

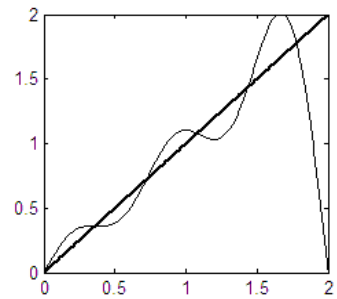
Vậy

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

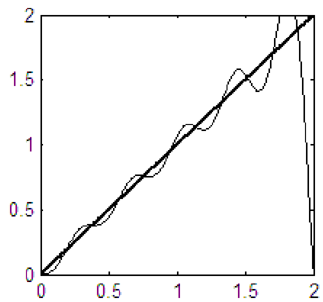
Hình vẽ $f(x)=x$ và tổng riêng phần thứ N trên [0,2] như sau



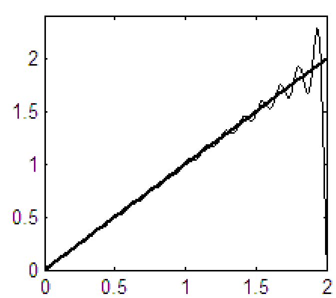
N=1



N=5



N=10



N=30

Ví dụ 9.5. Tìm khai triển Fourier cos của $f(x)=x$ trên [0,2].

Giải

Ta có

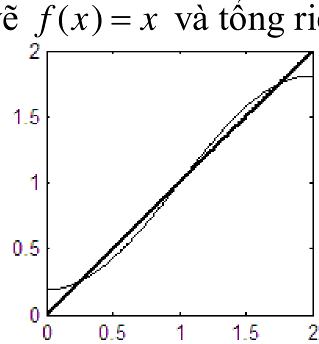
$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx=1,$$

$$a_n=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right],\ n=1,2,3,...$$

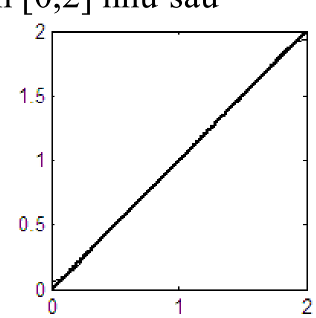
Vậy

$$f(x)=1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

Hình vẽ $f(x)=x$ và tổng riêng phần thứ N trên [0,2] như sau



N=1



N=5

Ví dụ 9.6. Tìm khai triển Fourier của

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

Giải

Vì $f(x)$ là hàm lẻ nên ta có

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0,$$

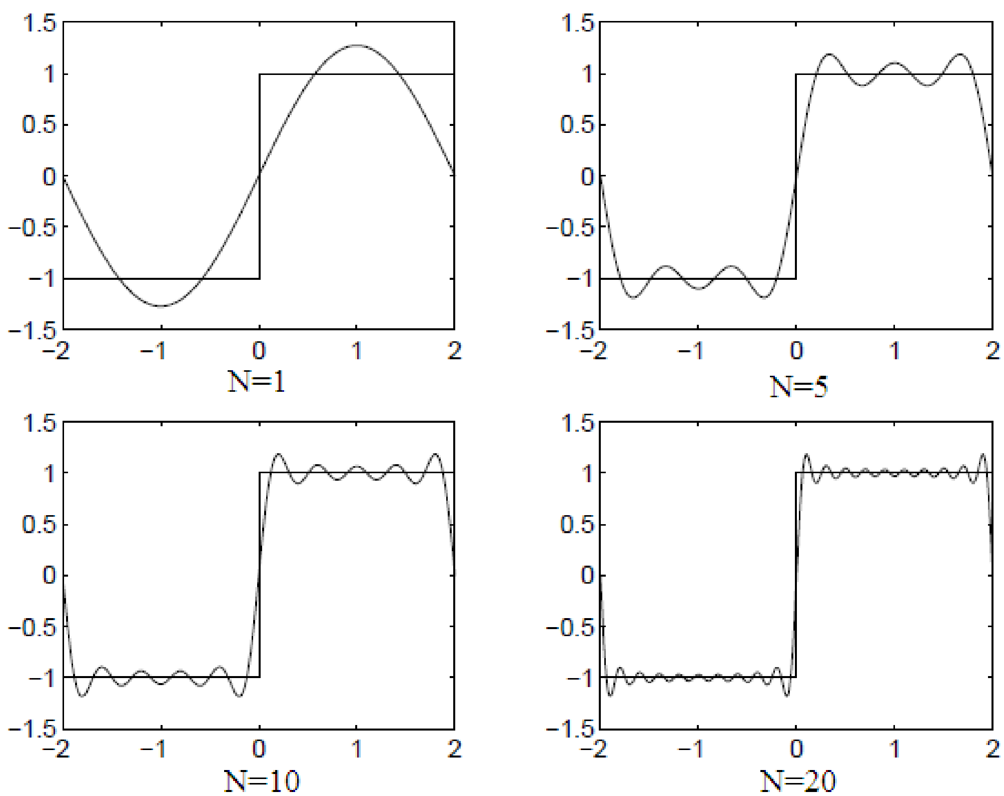
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,\ n=1,2,3,...$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right],\ \ n=1,2,3,...$$

Vậy

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n}\sin nx.$$

Hình vẽ $f(x)$ và tổng riêng phần thứ N trên $[-\pi,\pi]$ như sau



X. Biến đổi Fourier

Định nghĩa 10.1. Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$, biến đổi Fourier của f là hàm $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, được cho bởi

$$\widehat{f}(p) \equiv \mathcal{F}(f(x))(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ipx}dx,\ p\in\mathbb{R}.$$

Định lý 10.2. *Nếu $f \in L^1(\mathbb{R})$ thì $\widehat{f}$ là hàm liên tục và tiến dần về 0 tại vô cực.*

10.1. Một số biến đổi Fourier thường gặp

	$f(x)$	$\widehat{f}(p)$
i)	$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \lvert x\rvert < a, \\ 0, & \lvert x\rvert > a, \end{cases}\quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(pa)}{p}$
ii)	$e^{-a\lvert x\rvert}\quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+p^2}$
iii)	$e^{-ax^2}\quad (a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-p^2}{4a}}$
iv)	$\frac{1}{x^2+a^2}\quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\lvert p\rvert}}{a}$

Chứng minh.

i) $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \lvert x\rvert < a, \\ 0, & \lvert x\rvert > a, \end{cases}\quad (a>0).$

Với $p \neq 0$, ta có

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ipx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-ipx}dx$$

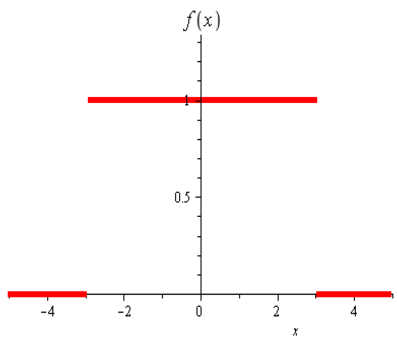
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{-e^{-ipx}}{ip}\right|_{x=-a}^{x=a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ipa}-e^{-ipa}}{ip}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(pa)}{p}.$$

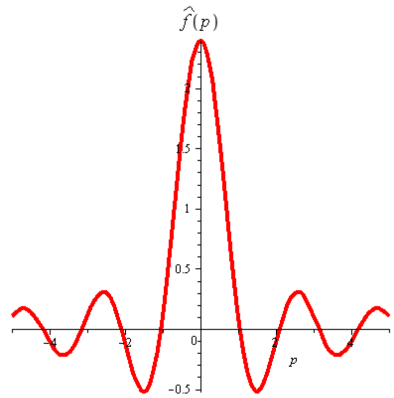
Với $p=0$, ta có $\widehat{f}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a}^{a} dx=a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}.$

Vậy

$$\widehat{f}(p)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin(pa)}{p}, & p\neq 0,\\ a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, & p=0.\end{cases}$$

Cụ thể, với $a=3$, ta có hình vẽ như sau





Dễ thấy, $\widehat{f}(p)$ liên tục tại $p=0$.

ii) $f(x)=e^{-a|x|}$ $(a>0)$.

Ta có $\widehat{f}(p)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|-ipx}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a-ip)x}dx+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a+ip)x}dx\right]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{a-ip}e^{(a-ip)x}\Big|_{x\to-\infty}^{x=0}-\frac{1}{a+ip}e^{-(a+ip)x}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty}\right].$$

Với $a>0$, ta có $\left|e^{(a-ip)x}\right|=e^{ax}\to 0$ khi $x\to-\infty$, tương tự $\left|e^{-(a+ip)x}\right|=e^{-ax}\to 0$ khi $x\to+\infty$. Do đó, ta được

$$\widehat{f}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-ip}+\frac{1}{a+ip}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+p^2}.$$

iii) $f(x)=e^{-ax^2}$ $(a>0)$.

Ta có $\widehat{f}(p)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-ipx}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-p^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\left(x+\frac{ip}{2a}\right)^2}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-p^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-p^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-p^2}{4a}}.$$

iv) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}\quad(a>0)$.

Ta có

$$\widehat{f}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ipx}}{x^2+a^2}dx.$$

Đặt $g(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}\ (a>0)$.

$$z^2+a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=ia\in\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\},\\ z=-ia\in\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z<0\}.\end{array}\right.$$

Vì $g(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}=\dfrac{1}{(z-ia)(z+ia)}$ nên $z=ia$ và $z=-ia$ là các cực điểm cấp 1.

Với $p=0$, ta có

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\pi i\operatorname{Re}s\left[g(z),ia\right]=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Với $-p>0\Leftrightarrow p<0$, ta có

$$\widehat{f}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\pi i\operatorname{Re}s\left[g(z)e^{-ipz},ia\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{ap}}{a}.$$

Với $-p<0\Leftrightarrow p>0$, ta có

$$\widehat{f}(p)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}2\pi i\operatorname{Re}s\left[g(z)e^{-ipz},ia\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ap}}{a}.$$

Vậy, ta được

$$\widehat{f}(p)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|p|}}{a},\ p\in\mathbb{R}.\qquad\blacksquare$$

Định nghĩa 10.3 (Tích chập). Với $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, tích chập của hai hàm *f* và *g* trong $\mathbb{R}$ là hàm $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, được xác định bởi

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - s) g(s) ds.$$

Nhận xét rằng $f * g = g * f$.

Định lý 10.4. *Cho* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Khi đó*

i) $\widehat{\alpha f + \beta g}(p) = \alpha \hat{f}(p) + \beta \hat{g}(p)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

ii) $\widehat{f^{(m)}}(p) = (ip)^m \hat{f}(p)$ *nếu* $f, f', \ldots, f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$ *và* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f^{(k)}(x) = 0$, *với* $k = 0, \ldots, m-1$, $\forall m \in \mathbb{N}$,

iii) $\widehat{f * g}(p) = \hat{f}(p).\hat{g}(p)$.

Chứng minh. Xem [11].

Ví dụ 10.3. Tìm biến đổi Fourier của $f(x) = xe^{-x^2}$.

Giải

$$\mathcal{F}(xe^{-x^2})(p) = \mathcal{F}\left(\frac{-1}{2}(e^{-x^2})'\right)(p) = \frac{-1}{2}\mathcal{F}\left((e^{-x^2})'\right)(p) = \frac{-1}{2} ip\, \mathcal{F}(e^{-x^2})(p) = \frac{-ip}{2\sqrt{2}} e^{\frac{-p^2}{4}}.$$

Định lý 10.5. *Nếu* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *và* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *thì ta có công thức biến đổi Fourier ngược*

$$f(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(p))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp,\ x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh. Xem [8].

Định lý 10.6 (Plancherel). *Nếu* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *thì* $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. *Hơn nữa, ta có*

$$\|f\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2.$$

Chứng minh. Xem [8].

10.2. Biến đổi Fourier cos

Cho $f \in L^1(0,+\infty)$, biến đổi Fourier cos của hàm $f(x)$ là

$$f_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos px dx,\ p > 0.$$

Công thức biến đổi Fourier cos ngược là

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f_c(p)\cos px dp,\ x > 0.$$

Ví dụ 10.1. Tìm biến đổi Fourier cos của

$$f(x) = e^{-ax},\ a > 0,\ x > 0.$$

Giải

$$f_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos px dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + p^2} \left[e^{-ax} \left(\frac{p}{a} \sin px - \cos px \right) \right]_{x=0}^{x \to +\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + p^2}.$$

10.3. Biến đổi Fourier sin

Cho $f \in L^1(0,+\infty)$, biến đổi Fourier sin của hàm $f(x)$ là

$$f_s(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\sin px dx,\ p > 0.$$

Công thức biến đổi Fourier sin ngược là

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f_s(p)\sin px dp,\ x > 0.$$

Ví dụ 10.2. Tìm biến đổi Fourier sin của

$$f(x) = e^{-ax},\ a > 0,\ x > 0.$$

Giải

$$f_s(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin px dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + p^2} \left[-e^{-ax} \left(\sin px + \frac{p}{a} \cos px \right) \right]_{x=0}^{x \to +\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{a^2 + p^2}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Giải các phương trình sau với $y = y(x)$

a) $y' = 2xe^{x^2}$.

b) $y' = 2xy$.

c) $y' = x^2 e^y$.

d) $y' = \dfrac{-x}{y}$.

e) $y' = x(1-y)$.

f) $y' = y^2(1+2x)$.

g) $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$.

h) $y' - xe^y = 2e^y$.

i) $xy^4 + (y^2+2)e^{-3x}y' = 0$.

j) $(e^y+1)^2 e^{-y} + (e^x+1)^3 e^{-x} y' = 0$.

Bài 2. Giải các phương trình sau với $y = y(x)$

a) $e^x y' + 2e^x y = 1$.

b) $2y' = e^{x/2} + y$.

c) $xy' = x^2 + 3y$, $x > 0$.

d) $3xy' - y = \ln x + 1$, $x > 0$.

e) $xy' + y = e^x$, $x > 0$.

f) $xy' + 3y = \dfrac{\sin x}{x^2}$, $x > 0$.

g) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$, $\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

h) $xy' - y = 2x\ln x$, $x > 0$.

i) $(x-1)^3 y' + 4(x-1)^2 y = x+1$, $x > 1$.

j) $(\tan x)y' + y = \sin^2 x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 3. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau với $y = y(x)$

a) $y'' - y' - 6y = 0$.

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

c) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

d) $y'' - y' - 12y = 0$.

e) $3y'' - y' = 0$.

f) $y'' + 9y = 0$.

g) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

h) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

i) $y'' = 0$.

j) $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

Bài 4. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau với $y = y(x)$

a) $y'' + 5y' + 4y = 1 + x + x^2$.

b) $y'' - 5y' + 4y = \sin 3x$.

c) $y'' + 2y' + 2y = e^{3x}$.

d) $y'' + y' - 12y = xe^{x}$.

e) $y'' + y' = 4x^2 e^{x}$.

f) $y'' + y = x\sin x$.

g) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$.

h) $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x} + 1$.

i) $y'' - y = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

j) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

k) $y'' - y' = \dfrac{(2-x)e^{x}}{x^3}$.

l) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

m) $y'' + y' = 5x + 2e^{x}$.

n) $y'' - 3y' = x + \cos x$.

o) $y'' + y = xe^{x} + 2e^{-x}$.

p) $y'' - 2y' - 8y = e^{x} - 8\cos 2x$.

q) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$.

r) $y'' - y' - 6y = 2(\sin 4x + \cos 4x)$.

Bài 5. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau với $y = y(x)$

a) $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$, $x < 0$.

b) $x^2 y'' + 5xy' + 13y = 0$, $x > 0$.

c) $4x^2 y'' + y = 0$, $x > 0$.

d) $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$, $x < 0$.

e) $x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0$, $x > 0$.

Bài 6. Giải các bài toán sau với $y = y(x)$ là hàm cần tìm

a) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + 6y' + 5y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3. \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' - y' = xe^{x}, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2. \end{cases}$

f) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos 2x, \\ y(\pi) = e^{\pi}, y'(\pi) = e^{\pi}. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 9y'' + y = 3x + e^{-x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2. \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2 y'' - xy' + 4y = 0, \\ y(1) = 0,\ y(2) = 1. \end{cases}$

i) $\begin{cases} y'' + y = 3\sin x, \\ y(0) + y'(0) = 0,\ y(\pi/2) + y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$

Bài 7. Xác định cấp của các phương trình sau

a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

b) $u_t = uu_{xxx} + \sin x$.

c) $u_{xxx} + u_{xyyy} + u_{xxy} + u^2 = f(x, y)$.

d) $uu_{xx} + (u_{yy})^2 + e^u = 0$.

e) $xu_x + yu_y = x^2 + y^2$.

f) $u_t = \left(uu_x\right)_x$.

Bài 8. Phương trình nào sau đây là phương trình: tuyến tính, không tuyến tính, thuần nhất, không thuần nhất? Trong trường hợp phương trình là không tuyến tính, hãy xét xem nó có tựa tuyến tính không?

a) $u_{xx} + u_{yy} - 2u = x^2$.

b) $u_{xy} = u$.

c) $uu_x + xu_y = 0$.

d) $(u_x)^2 + \ln u = 2xy$.

e) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = \cos x$.

f) $u_x(1 + u_y) = u_{xx}$.

g) $(\sin u_x)u_x + u_y = e^x$.

h) $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = 0$.

i) $u_x + u_x u_y - u_{xy} = 0$.

j) $(u_{tt})^2 + u_x = 0$.

Bài 9. Xác định loại của các phương trình sau với $u = u(x, y)$

a) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0$.

b) $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0$.

c) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u - xy^2 = 0$.

d) $4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$.

e) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$.

f) $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

g) $u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x + 5u_y + u = e^x$.

h) $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = 0$.

i) $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} + 7u_y = \sin x$.

Bài 10. Xác định loại của các phương trình sau với $u = u(x, y)$

a) $xu_{xx} + u_{yy} = x^2$.

b) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = e^x$.

c) $e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u$.

d) $u_{xx} + u_{xy} - xu_{yy} = 0$ trong miền $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0\right\}$.

e) $yu_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} = 0$.

f) $u_{xx} - 2(\cos x)u_{xy} - (\sin^2 x)u_{yy} = 0$.

Bài 11. Đưa các phương trình sau về dạng chính tắc với $u = u(x,y)$

a) $4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$.

b) $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = 0$.

c) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$.

d) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$.

e) $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$.

f) $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x+y) = 0$.

g) $u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} = y$.

Bài 12. Đưa các phương trình sau về dạng chính tắc với $u = u(x,y)$

a) $y^2u_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} = u_x + 6y$.

b) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = e^x,\ x > 0, y > 0$.

c) $u_{xx} - (1+y^2)^2u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0$.

d) $xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} = 0,\ x > 0, y > 0$.

e) $e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u$.

f) $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0$.

Bài 13. Tìm nghiệm tổng quát $u(x,y)$ của các phương trình trong bài 11a, 11b, 11g, 12a, 12c.

Bài 14. Tìm nghiệm tổng quát $u(x,y)$ của các phương trình sau

a) $u_{xx} - u = 0$.

b) $u_{xx} + u = 0$.

c) $u_{xy} = 0$.

d) $u_{xy} = -u_x$.

e) $u_x = 3x^2 + y^2$.

f) $u_{xy} = x^2 y$.

Bài 15. Cho phương trình $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$, với $u = u(x,y)$.

a) Bằng phép đổi biến $\alpha = y - 2x$ và $\beta = x$, chứng minh rằng $u_{\beta\beta} = 0$.

b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu.

Bài 16. Chứng minh rằng

$$u(x,t) = t^{-1/2} e^{\frac{-x^2}{4t}}, \, t > 0$$

là nghiệm của phương trình $u_t = u_{xx}$.

Bài 17. Hàm $u(x,y) = e^{k(x-y)}$, $k \in \mathbb{R}$ có là nghiệm của phương trình $u_{xx} - u_{yy} = 1$ không?

Bài 18. Chứng minh rằng

a) $u(x,y) = \dfrac{xe^x}{y}$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} xu_x + (x+1)yu_y = 0, \quad x, y > 1, \\ u(1,1) = e, \end{cases}$$

b) $u(x,t) = \cos x \sin t$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad x, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \cos x, \\ u_x(0,t) = 0. \end{cases}$$

Bài 19. Tìm nghiệm của bài toán sau bằng phép đổi biến α và β được cho trước:

a) $\begin{cases} u_t - 3u_x = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \end{cases}$ với $\alpha = -3x + t$ và $\beta = x + 3t$.

b) $\begin{cases} u_x + u_y = 2, \\ u(x,0) = x^2, \end{cases}$ với $\alpha = y$ và $\beta = x - y$.

c) $\begin{cases} u_x + 2u_y = \cos(y - 2x), \\ u(0,y) = \sin y, \end{cases}$ với $\alpha = x + 2y$ và $\beta = 2x - y$.

d) $\begin{cases} u_t + u_x - 3u = t, \\ u(x,0) = x^2, \end{cases}$ với $\alpha = x - t$ và $\beta = t$.

Bài 20. Chứng minh rằng $u(x,y) = F(xy) + xG\left(\frac{y}{x}\right)$, trong đó F, G có đạo hàm riêng cấp hai, là nghiệm của phương trình $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$.

Bài 21. Cho $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi.

a) Chứng minh rằng: với f là một hàm khả vi, hàm $u(x,t) = f(x + h(u)t)$ là nghiệm của phương trình $u_t = h(u)u_x$.

b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $u_t = (\sin u)u_x$.

Bài 22. Tìm các giá trị riêng, hàm riêng của các bài toán sau

a) $\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \ 0 < x < L, \\ \varphi(0) = \varphi'(L) = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \ 0 < x < L, \\ \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1), \\ \varphi'(0) = \varphi'(1). \end{cases}$

d) $\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \varphi(0) + \varphi'(0) = 0, \\ \varphi(1) + \varphi'(1) = 0. \end{cases}$

Bài 23. Tìm khai triển Fourier sin và khai triển Fourier cos của các hàm số sau trên đoạn đã cho

a) $f(x) = 1$ trên $[0,\pi]$.

b) $f(x) = x^2$ trên $[0,\pi]$.

c) $f(x) = e^x$ trên $[0,\pi]$.

d) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{4}(\pi-x), & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

Bài 24. Tìm khai triển Fourier của các hàm số sau trên đoạn đã cho

a) $f(x)=x+x^2$ trên $[-\pi,\pi]$.

b) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ trên $[-\pi,\pi]$.

c) $f(x)=|x|$ trên $[-\pi,\pi]$.

d) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ \pi-x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x<0,\\ x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & -2<x<0,\\ x, & 0<x<2.\end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\dfrac{1}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases}-x+e^x, & -\pi<x<0,\\ x+e^x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Bài 25. Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau

a) $f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0,\\ 1, & 0<x<1,\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<\pi,\\ 0, & |x|\geq\pi.\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leq 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<10,\\ 0, & x\leq 0 \vee x\geq 10.\end{cases}$

Bài 26. Cho $f\in L^1(\mathbb{R})$ và f là hàm chẵn. Cho $g(x)=\cos ax$, $a\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f*g(x)=\cos(ax)\widehat{f}(a)$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Bài 27. Cho

$$g_n(x)=\begin{cases}n\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & |x|<\dfrac{1}{n},\\ 0, & |x|>\dfrac{1}{n},\end{cases}\quad n=1,2,\ldots$$

Giả sử f liên tục trên $\mathbb{R}$ và F là một nguyên hàm của f. Chứng minh

$$f * g_n(x) = \frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}}.$$

Bài 28. Tìm biến đổi Fourier của $f(x) = e^{\frac{-ax^2}{2}}, a > 0$ bằng cách sau

a) Kiểm chứng $f'(x) = -axf(x)$.

b) Lấy biến đổi Fourier của biểu thức trên và giải phương trình vi phân.

Bài 29. Sử dụng kết quả của bài 28, hãy chứng minh rằng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx = \sqrt{\pi} e^{\frac{-1}{4}}.$$

Bài 30. a) Chứng minh

$$\mathcal{F}(f(ax))(p) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{p}{a}\right), a \neq 0.$$

b) Sử dụng kết quả trong câu a, tìm biến đổi Fourier của $g(x) = e^{-2|x|}$ từ biến đổi Fourier của $f(x) = e^{-|x|}$.

Bài 31. Chứng minh rằng

$$\mathcal{F}(f(x-a))(p) = e^{-iap} \mathcal{F}(f)(p), \ \forall a > 0.$$

Bài 32. Chứng minh rằng, $\forall a > 0$, ta có

a) $\mathcal{F}(e^{iax} f(x))(p) = \widehat{f}(p-a)$ và $\mathcal{F}(e^{-iax} f(x))(p) = \widehat{f}(p+a)$.

b) $\mathcal{F}(\cos(ax) f(x))(p) = \dfrac{\widehat{f}(p-a) + \widehat{f}(p+a)}{2}$.

c) $\mathcal{F}(\sin(ax) f(x))(p) = \dfrac{\widehat{f}(p-a) - \widehat{f}(p+a)}{2i}$.

Bài 33. Cho $a, b > 0$. Tìm biến đổi Fourier của

a) $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$.

b) $\dfrac{-i}{x - ai}$.

c) $\dfrac{e^{-ibx}}{x^2+a^2}$.

d) $\dfrac{2}{(x-ai)^2}$.

Bài 34. Sử dụng kết quả của bài 32, hãy tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau

a) $f(x)=\dfrac{\cos x}{e^{x^2}}$.

b) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{e^{|x|}}$.

c) $f(x)=\dfrac{\cos x+\cos 2x}{1+x^2}$.

d) $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos 2x}{4+x^2}$.

e) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

Bài 35. Tìm biến đổi Fourier cos của các hàm số sau

a) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ -1, & 1<x<2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

Bài 36. Tìm biến đổi Fourier sin của các hàm số sau

a) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

Nội dung của chương này trình bày về phương trình truyền nhiệt là một phương trình đạo hàm riêng quan trọng thuộc loại parabolic. Hơn nữa, chúng ta cũng làm quen với hai phương pháp thường gặp để nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng là: phương pháp tách biến và phương pháp biến đổi Fourier. Nguyên lý cực đại và tính duy nhất nghiệm của bài toán biên cho phương trình truyền nhiệt cũng được trình bày chi tiết trong chương này.

I. Phương pháp tách biến

Ý tưởng chính của phương pháp tách biến là ta sẽ tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng đã cho dưới dạng tích các hàm số một biến. Sau khi thay nghiệm này vào phương trình đã cho, ta thu được các phương trình vi phân có ẩn là các hàm số một biến và ta giải tìm các hàm số đó.

Ví dụ 1.1. Tìm $u(x,y)$ thỏa

$$\begin{cases} u_x - u_y = 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = e^{-x}, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Giải

Ta tìm $u(x,y)$ dưới dạng

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0,$$

trong đó $X(x)$ là hàm chỉ phụ thuộc *x*, $Y(y)$ là hàm chỉ phụ thuộc *y*, $X(x)$ và $Y(y)$ sẽ được xác định sau.

Ta có

$$u_x = X'(x)Y(y),$$

$$u_y = X(x)Y'(y),$$

thay vào $u_x - u_y = 0$, ta được

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y). \tag{2.1}$$

Nếu $X(x) = 0$ hay $Y(y) = 0$ thì $u(x, y) = 0$ (loại).

Nếu $X(x) \neq 0$ và $Y(y) \neq 0$ thì từ (2.1), ta có

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}. \tag{2.2}$$

Vế trái của (2.2) là một hàm chỉ phụ thuộc *x*, vế phải của (2.2) là một hàm chỉ phụ thuộc *y* nên chúng bằng nhau chỉ khi chúng là hằng số, do đó $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ thỏa

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\lambda, \tag{2.3}$$

$-\lambda$ được gọi là *hằng số tách biến*. Chú ý rằng $-\lambda \in \mathbb{R}$.

Từ (2.3), ta có

$$X'(x) + \lambda X(x) = 0 \Leftrightarrow X(x) = Ae^{-\lambda x},$$

$$Y'(y) + \lambda Y(y) = 0 \Leftrightarrow Y(y) = Be^{-\lambda y},$$

trong đó *A* và *B* là các hằng số tùy ý.

Do đó

$$u(x, y) = ABe^{-\lambda x}e^{-\lambda y} = Ce^{-\lambda(x+y)},$$

với $C = AB$.

Từ $u(x, 0) = e^{-x}$, ta được $Ce^{-\lambda x} = e^{-x}$, do đó $C = \lambda = 1$.

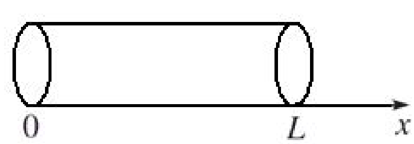
Vậy

$$u(x, y) = e^{-(x+y)}.$$

II. Phương trình truyền nhiệt một chiều

2.1. Mô hình truyền nhiệt dẫn đến phương trình truyền nhiệt một chiều

Xét quá trình truyền nhiệt trong một thanh mỏng có chiều dài *L* như hình vẽ.



Các đại lượng liên quan đến thanh mỏng:

c là *nhiệt dung riêng*;

ρ là *mật độ khối lượng*;

κ là *hệ số dẫn nhiệt*;

t là *thời gian*.

Giả sử:

i) Không có sự trao đổi nhiệt với môi trường xung quanh dọc theo chiều dài của thanh.

ii) Thanh được làm bằng vật liệu đồng chất sao cho nhiệt độ không đổi tại mọi điểm trong một thiết diện bất kỳ.

iii) Nhiệt dung riêng và hệ số dẫn nhiệt của vật liệu làm thanh là các hằng số.

Gọi $u(x,t)$ là *nhiệt độ* bên trong của thanh tại mặt cắt x tại thời điểm t. Khi đó, $u(x,t)$ thoả phương trình truyền nhiệt một chiều, tuyến tính, cấp hai, thuần nhất (xem [23])

$$u_t(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < L,\ t > 0,$$

trong đó $k^2 = \dfrac{\kappa}{c\rho}$ là *độ khuếch tán* của thanh đồng chất.

Ngoài ra, ta còn có phương trình truyền nhiệt không thuần nhất

$$u_t(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ 0 < x < L,\ t > 0,$$

trong đó $f(x,t)$ là *nguồn nhiệt* ngoài.

Để giải phương trình truyền nhiệt, ta cần có thêm các điều kiện biên và điều kiện đầu.

Gọi $\varphi(x)$, $A(t)$ và $B(t)$ là các hàm cho trước.

Điều kiện đầu $u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le L$ cho biết *nhiệt độ ban đầu* tại mỗi điểm dọc theo chiều dài của thanh, trong đó $\varphi(x)$ thể hiện sự phân bố nhiệt độ ban đầu.

Điều kiện biên Dirichlet $u(0,t) = A(t)$ và $u(L,t) = B(t)$, $t \geq 0$ cho biết *nhiệt độ tại hai đầu* của thanh, trong đó $A(t)$ và $B(t)$ là nhiệt độ đã được xác định.

Điều kiện biên Neumann $u_x(0,t) = A(t)$ và $u_x(L,t) = B(t)$, $t \geq 0$ cho biết *dòng nhiệt* hay *thông lượng nhiệt* đi qua hai đầu của thanh, trong đó $A(t)$ và $B(t)$ là dòng nhiệt đã được xác định.

Điều kiện biên Robin $\alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = A(t)$ và $\alpha u_x(L,t) + \beta u(L,t) = B(t)$, $t \geq 0$ cho biết *dòng nhiệt* đi qua biên và *nhiệt độ trao đổi* với môi trường xung quanh trên biên, trong đó $A(t)$ và $B(t)$ là dòng nhiệt đã được xác định, α, β là các hằng số khác 0.

2.2. Bài toán truyền nhiệt trong thanh hữu hạn với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất

Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 & (2.4) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \; t \geq 0, & & (2.5) \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L, & (2.6) \end{cases}$$

trong đó *k* là hằng số dương, $\varphi(x)$ là một hàm cho trước.

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0,$$

ta có

$$u_t = X(x)T'(t),$$
$$u_{xx} = X''(x)T(t),$$

thay vào $u_t = k^2 u_{xx}$, ta được

$$X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t),$$

$$\frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

do đó, ta có

$$T'(t) + k^2\lambda T(t) = 0, \tag{2.7}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Từ $\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0, \\ X(L)T(t) = 0, \end{cases}$ ta được $X(0) = X(L) = 0$.

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases}$$

từ kết quả trong bảng 8.1 của chương 1, ta có

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ và } X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, n = 1,2,3,\dots .$$

Tiếp theo, thế $\lambda = \lambda_n$ vào phương trình (2.7) và giải phương trình vi phân

$$T'(t) + k^2\lambda_n T(t) = 0,$$

ta được

$$T_n(t) = b_n e^{-k^2\lambda_n t} = b_n e^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t}{L^2}}, n = 1,2,3,\dots .$$

Vậy, nghiệm của (2.4) thỏa điều kiện biên (2.5) là

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = b_n e^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L}, n = 1,2,3,\dots,$$

trong đó b_n là hằng số tùy ý sẽ được xác định từ điều kiện đầu (2.6).

Dễ thấy, vì $\varphi(x)$ nói chung không tuần hoàn nên từng nghiệm $u_n(x,t)$ ở trên nói chung không thỏa điều kiện đầu (2.6) và tổng hữu hạn của chúng cũng vậy. Để thỏa điều kiện đầu (2.6), ta xét tổng vô hạn

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2.8}$$

Khi đó, điều kiện đầu $u(x,0)=\varphi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \varphi(x)$. Để thỏa điều này, b_n phải là hệ số của chuỗi Fourier sin của $\varphi(x)$ trên [0,L], nghĩa là

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3.... \qquad (2.9)$$

Định lý 2.1. *Nếu* $\varphi \in C^1[0,L]$ *thỏa* $\varphi(0)=\varphi(L)=0$ *thì chuỗi* (2.8) *với* b_n *xác định theo công thức* (2.9) *là nghiệm của bài toán* (2.4)-(2.6).

Chứng minh. Vì $\varphi(x)$ bị chặn và từ (2.9) ta có

$$|b_n| = \frac{2}{L}\left|\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right| \le \frac{2}{L}\int_0^L |\varphi(x)| \le C,$$

với C là một hằng số dương. Do đó, với mọi $t \ge t_0 > 0$ (t_0 là một giá trị cho trước nào đó), ta có

$$\left| b_n e^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L}\right| \le Ce^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t_0}{L^2}}.$$

Theo tiêu chuẩn tỷ số d'Alembert thì $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t_0}{L^2}}$ hội tụ. Vì vậy, theo tiêu chuẩn Weierstrass thì chuỗi (2.8) hội tụ đều trên $0 \le x \le L,\ t \ge t_0$.

Bây giờ, ta chứng minh rằng các chuỗi đạo hàm $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ hội tụ đều trên $0 \le x \le L,\ t \ge t_0$. Thật vậy,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left| -b_n\left(\frac{kn\pi}{L}\right)^2 e^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L}\right| \le C\left(\frac{kn\pi}{L}\right)^2 e^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t_0}{L^2}},$$

với $t \ge t_0$, và $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{\frac{-k^2n^2\pi^2 t_0}{L^2}}$ hội tụ. Do đó, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}$ hội tụ đều trên $0 \le x \le L, t \ge t_0$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ hội tụ đều trên $0 \le x \le L, t \ge t_0$.

Từ đó, lấy đạo hàm 2 vế của (2.8) một lần theo t và lấy đạo hàm 2 vế của (2.8) hai lần theo x, ta dễ dàng suy ra rằng $u_t = k^2 u_{xx}$.

Dễ thấy, $u(x,t)$ cho bởi (2.8) thỏa điều kiện biên $u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \geq 0.$

Bây giờ, vì $\varphi \in C^1[0,L]$ thỏa $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ với hệ số b_n xác định theo công thức (2.9) hội tụ tuyệt đối và đều tới hàm $\varphi(x)$. Từ đó, ta được $u(x,0) = \varphi(x)$.

Định lý đã được chứng minh. ■

Ví dụ 2.1. Giải bài toán sau

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0, & \\ u(x,0) = 100, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Giải

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0,$$

ta có

$$u_t = X(x)T'(t),$$
$$u_{xx} = X''(x)T(t),$$

thay vào $u_t = u_{xx}$, ta được

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t),$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

do đó, ta có

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Từ $\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0, \\ X(\pi)T(t) = 0, \end{cases}$ ta được $X(0) = X(\pi) = 0$.

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$\lambda_n = n^2 \text{ và } X_n(x) = \sin nx,\ n = 1,2,3,\dots .$$

Giải phương trình $T'(t) + \lambda_n T(t) = 0,$ ta được

$$T_n(t) = b_n e^{-\lambda_n t} = b_n e^{-n^2 t},\ n = 1,2,3,\dots .$$

Ta có

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Hơn nữa, $u(x,0) = 100 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = 100,$ với

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 100 \sin nx dx = \frac{200}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right],\ n = 1,2,3,\dots .$$

Vậy, nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{200}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] e^{-n^2 t} \sin nx,$$

mà $\frac{200}{n\pi}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ chẵn}, \\ \frac{400}{n\pi}, & n \text{ lẻ}, \end{cases}$ nên

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{400}{(2n+1)\pi} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x.$$

Ví dụ 2.2. Tìm nhiệt độ của một thanh dài π m không có nguồn nhiệt, với nhiệt độ tại hai đầu của thanh luôn ở 0^0C và dọc theo thanh là cách nhiệt hoàn toàn, nhiệt độ ban đầu của thanh là $6\sin 9x\ ^0C,$ độ khuếch tán của thanh là 1 m^2/s .

Giải

Gọi $u(x,t)$ là nhiệt độ của thanh $(0 \le x \le \pi,\ t \ge 0).$ Ta cần tìm $u(x,t)$ thoả

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 6\sin 9x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Tương tự ví dụ 2.1, ta có

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

Hơn nữa, $u(x,0) = 6\sin 9x \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = 6\sin 9x$, với

$$\begin{cases} b_9 = 6, \\ b_n = 0, \forall n \neq 9. \end{cases}$$

Vậy, nhiệt độ của thanh là $u(x,t) = 6e^{-81t}\sin 9x\ {}^0C$.

2.3. Bài toán truyền nhiệt trong thanh hữu hạn có nguồn nhiệt với điều kiện biên thuần nhất

Bài toán 2.3.1. Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} + \boldsymbol{f(x,t)}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $f(x,t)$ là hàm cho trước và thể hiện như *nguồn nhiệt*.

Ta giải bài toán trên theo các bước như sau

Bước 1 (Tìm $X_n(x)$): Xét

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Bằng phương pháp tách biến, ta tìm được

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, n = 1,2,3,\dots .$$

Bước 2: Tìm nghiệm của bài toán 2.3.1 dưới dạng

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

ta có

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$u_{xx}(x,t)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Khai triển Fourier sin của hàm $f(x,t)$ trên $[0,L]$ theo biến x là

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

với

$$f_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3\dots.$$

Từ $u_t=k^2u_{xx}+f(x,t)$, ta có

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{n\pi k}{L}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}=0,$$

do đó

$$T_n'(t)+\omega_n T_n(t)=f_n(t), \tag{2.10}$$

trong đó $\omega_n=\left(\frac{n\pi k}{L}\right)^2$, $n=1,2,3\dots$.

Từ (2.10), ta được

$$T_n(t)=T_n(0)e^{-\omega_n t}+\int_0^t e^{-\omega_n(t-s)}f_n(s)ds,\ n=1,2,3\dots. \tag{2.11}$$

Ta có $u(x,0)=0\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{L}=0,$ với

$$T_n(0)=0,\ n=1,2,3\dots,$$

do đó, ta được

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-s)} f_n(s)ds,\ n = 1,2,3\dots .$$

Vậy, nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-s)} f_n(s)ds \right) \sin\frac{n\pi x}{L},$$

với

$$f_n(s) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,s)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1,2,3\dots .$$

Bài toán 2.3.2. Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} + \boldsymbol{f(x,t)}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ \text{Điều kiện biên} = 0,\ t \ge 0, & \\ u(x,0) = \boldsymbol{\varphi(x)}, & 0 \le x \le L, \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $f(x,t)$ và $\varphi(x)$ là những hàm cho trước.

Ta giải bài toán trên theo các bước như sau

Bước 1 (Tìm $X_n(x)$): Xét

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ \text{Điều kiện biên} = 0,\ t \ge 0. \end{cases}$$

Bằng phương pháp tách biến, ta sẽ tìm được $\boldsymbol{X_n(x)}$.

Bước 2: Tìm nghiệm của bài toán 2.3.2 dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t)\boldsymbol{X_n(x)},$$

với $\boldsymbol{X_n(x)}$ đã tìm được ở bước 1.

Sau đó, ta làm tương tự như bước 2 của bài toán 2.3.1. Chú ý rằng

$$u(x,0) = \varphi(x) \Leftrightarrow \sum_n T_n(0)\boldsymbol{X_n(x)} = \varphi(x),$$

với $T_n(0)$ là hệ số của khai triển Fourier theo họ hàm $\boldsymbol{X_n(x)}$ và được tính bởi công thức phù hợp.

Ví dụ 2.3. Giải bài toán sau

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2x, \qquad 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\, t \geq 0, \\ u(x,0) = x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Giải

Bước 1: Xét

$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\, 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0,$$

ta có

$$u_t = X(x)T'(t),$$
$$u_{xx} = X''(x)T(t),$$

thay vào $u_t = u_{xx}$, ta được

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t),$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

do đó, ta có

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Từ $\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0, \\ X(1)T(t) = 0, \end{cases}$ ta được $X(0) = X(1) = 0$.

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\, 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$X_n(x) = \sin(n\pi x),\ n = 1,2,3\ldots .$$

Bước 2: Ta tìm nghiệm của bài toán ban đầu dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\sin(n\pi x),$$

ta có

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n'(t)\sin(n\pi x),$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\pi^2 T_n(t)\sin(n\pi x).$$

Hơn nữa, $2x = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sin(n\pi x),$ với

$$f_n = 2\int_0^1 2x\sin(n\pi x)dx = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1},\ n = 1,2,3\ldots .$$

Từ $u_t = u_{xx} + 2x$, ta có

$$T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = f_n,\ n = 1,2,3,\ldots .$$

Hơn nữa, $u(x,0) = x - x^2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(0)\sin(n\pi x) = x - x^2,$ với

$$T_n(0) = 2\int_0^1 (x - x^2)\sin(n\pi x)dx = \frac{4}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right],\ n = 1,2,3,\ldots .$$

Giải bài toán tìm $T_n(t)$ thỏa

$$\begin{cases} T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = f_n, \\ T_n(0) = \dfrac{4}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right], \end{cases} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

ta được

$$T_n(t) = \frac{4}{n^3\pi^3}\left[e^{-n^2\pi^2 t} + (-1)^{n+1}\right].$$

Vậy, nghiệm của bài toán ban đầu là

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^3\pi^3}\left[e^{-n^2\pi^2 t}+(-1)^{n+1}\right]\sin(n\pi x).$$

2.4. Bài toán truyền nhiệt trong thanh hữu hạn với điều kiện biên không thuần nhất

Xét trường hợp điều kiện biên không thuần nhất

$$u\big|_{\partial\Omega}=g\neq 0.$$

Ta sẽ đưa về trường hợp biên thuần nhất bằng cách chọn một hàm v sao cho

$$v\big|_{\partial\Omega}=g.$$

Đặt

$$w=u-v.$$

Khi đó hàm w sẽ thỏa điều kiện biên thuần nhất, nghĩa là

$$w\big|_{\partial\Omega}=0.$$

Giải bài toán theo w, tìm được w, ta suy ra $u=w+v.$

Ta có thể chọn hàm v có dạng như sau

Điều kiện biên	$\boldsymbol{v(x,t)}$
$u(0,t)=A(t),\ \ u(L,t)=B(t)$	$v(x,t)=A(t)+\dfrac{x}{L}\left[B(t)-A(t)\right]$
$u_x(0,t)=A(t),\ \ u_x(L,t)=B(t)$	$v(x,t)=xA(t)+\dfrac{x^2}{2L}\left[B(t)-A(t)\right]$
$u(0,t)=A(t),\ \ u_x(L,t)=B(t)$	$v(x,t)=A(t)+xB(t)$
$u_x(0,t)=A(t),\ \ u(L,t)=B(t)$	$v(x,t)=(x-L)A(t)+B(t)$

trong đó $A(t)$ và $B(t)$ là những hàm cho trước.

Cụ thể, xét bài toán biên thứ nhất dạng tổng quát

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} + f(x,t), \; 0 < x < L, \, t > 0, & (2.12) \\ u(0,t) = A(t), \qquad t \geq 0, & (2.13) \\ u(L,t) = B(t), \qquad t \geq 0, & (2.14) \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leq x \leq L, & (2.15) \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $\varphi(x)$, $A(t)$, $B(t)$ và $f(x,t)$ là những hàm cho trước.

Giải

Đặt

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t),$$

với

$$v(x,t) = A(t) + \frac{x}{L}\left[B(t) - A(t)\right].$$

Ta có

$$w_t = u_t - v_t = k^2 u_{xx} + f(x,t) - v_t, \; w_{xx} = u_{xx},$$

suy ra

$$w_t = k^2 w_{xx} + F(x,t),$$

với $F(x,t) = f(x,t) - v_t$.

Hơn nữa, từ (2.13), (2.14) và (2.15), ta được

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0,t) = A(t) - A(t) = 0$$

$$w(L,t) = u(L,t) - v(L,t) = B(t) - B(t) = 0,$$

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = \Phi(x),$$

với $\Phi(x) = \varphi(x) - v(x,0)$.

Vậy, ta có bài toán tìm hàm $w(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} w_t = k^2 w_{xx} + F(x,t), \; 0 < x < L, \, t > 0, \\ w(0,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ w(L,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ w(x,0) = \Phi(x), \qquad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Đây là bài toán 2.3.2 đã được xét ở phần trước. Giải bài toán này, ta tìm được $w(x,t)$. Từ đó, suy ra nghiệm của bài toán ban đầu (2.12)-(2.15) là

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t),$$

với

$$v(x,t) = A(t) + \frac{x}{L}\left[B(t) - A(t)\right].$$

Ví dụ 2.4. Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ của một thanh dài 2 m $(0 \le x \le 2)$ không có nguồn nhiệt, với nhiệt độ tại đầu bên trái $(x = 0)$ và bên phải $(x = 2)$ của thanh lần lượt là 1^0C, 3^0C, dọc theo thanh là cách nhiệt hoàn toàn, nhiệt độ ban đầu của thanh là $x^2 - x + 1\ {}^0C$, độ khuếch tán của thanh là 1 m^2/s .

Giải

Ta cần tìm $u(x,t)$ thoả

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 1, & t \ge 0, \\ u(2,t) = 3, & t \ge 0, \\ u(x,0) = x^2 - x + 1, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Đặt

$$w(x,t) = u(x,t) - 1 - x,$$

ta có

$$w_t = u_t = u_{xx},$$

$$w_{xx} = u_{xx},$$

suy ra

$$w_t = w_{xx}.$$

Hơn nữa, ta có

$$w(0,t) = u(0,t) - 1 = 0,$$

$$w(2,t) = u(2,t) - 1 - 2 = 0,$$

$$w(x,0) = u(x,0) - 1 - x = x^2 - 2x.$$

Giải bài toán

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, & 0 < x < 2, t > 0, \\ w(0,t) = w(2,t) = 0, \; t \geq 0, \\ w(x,0) = x^2 - 2x, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

ta được

$$w(x,t) = \frac{-32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{\frac{-(2n+1)^2 \pi^2 t}{4}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

Vậy, nhiệt độ của thanh là

$$u(x,t) = \frac{-32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{\frac{-(2n+1)^2 \pi^2 t}{4}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2} + 1 + x.$$

Ví dụ 2.5. Giải bài toán sau

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin 3x, \; 0 < x < \pi, \; t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(\pi,t) = 1, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \dfrac{x^2}{\pi^2}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Giải

Đặt

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{x}{\pi},$$

ta được bài toán

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + e^{-t} \sin 3x, \; 0 < x < \pi, \; t > 0, \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \; t \geq 0, \\ w(x,0) = \dfrac{x^2}{\pi^2} - \dfrac{x}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Giải bài toán trên, ta được nghiệm là

$$w(x,t) = \frac{1}{8}(e^{-t} - e^{-9t}) \sin 3x - \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t}.$$

Vậy, nghiệm của bài toán ban đầu là

$$u(x,t)=\frac{x}{\pi}+\frac{1}{8}(e^{-t}-e^{-9t})\sin 3x-\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}e^{-(2n+1)^2 t}.$$

III. Phương trình truyền nhiệt hai chiều

Xét bài toán truyền nhiệt trong một vật thể hình chữ nhật

$$\begin{cases} u_t = k^2(u_{xx}+u_{yy}), & 0<x<a,\ 0<y<b,\ t>0, \\ u(0,y,t)=u(a,y,t)=0,\ 0\le y\le b,\ t\ge 0, \\ u(x,0,t)=u(x,b,t)=0,\ 0\le x\le a,\ t\ge 0, \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & 0\le x\le a,\ 0\le y\le b, \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $\varphi(x,y)$ là hàm cho trước.

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)\neq 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} u_t &= X(x)Y(y)T'(t), \\ u_{xx} &= X''(x)Y(y)T(t), \\ u_{yy} &= X(x)Y''(y)T(t), \end{aligned}$$

thay vào $u_t = k^2(u_{xx}+u_{yy}),$ ta được

$$X(x)Y(y)T'(t)=k^2\left[X''(x)Y(y)T(t)+X(x)Y''(y)T(t)\right],$$

$$\frac{T'(t)}{k^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda,$$

do đó, ta có

$$T'(t)+k^2\lambda T(t)=0,$$

và

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda. \qquad (2.16)$$

Hơn nữa, từ (2.16), suy ra

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\gamma.$$

Do đó

$$X''(x) + \gamma X(x) = 0,$$
$$Y''(y) + (\lambda - \gamma)Y(y) = 0.$$

Từ $\begin{cases} u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)Y(y)T(t) = 0, \\ X(a)Y(y)T(t) = 0, \\ X(x)Y(0)T(t) = 0, \\ X(x)Y(b)T(t) = 0, \end{cases}$ ta được $\begin{cases} X(0) = X(a) = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \gamma X(x) = 0,\ 0 < x < a, \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$\gamma_m = \frac{m^2\pi^2}{a^2} \text{ và } X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a},\ m = 1,2,3,\dots .$$

Xét bài toán

$$\begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \gamma_m)Y(y) = 0,\ 0 < y < b, \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$\lambda - \gamma_m = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \text{ và } Y_n(x) = \sin\frac{n\pi y}{b},\ n = 1,2,3,\dots,$$

suy ra

$$\lambda_{mn} = \frac{n^2\pi^2}{b^2} + \gamma_m = \frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} = \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2}\right)\pi^2.$$

Tiếp theo, giải phương trình $T'(t) + k^2\lambda_{mn}T(t) = 0,$ ta được

$$T_{mn}(t) = b_{mn}e^{-k^2\lambda_{mn}t} = b_{mn}e^{-k^2\left(\frac{n^2}{b^2}+\frac{m^2}{a^2}\right)\pi^2 t}.$$

Ta có

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}X_m(x)Y_n(y)T_{mn}(t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}b_{mn}e^{-k^2\left(\frac{n^2}{b^2}+\frac{m^2}{a^2}\right)\pi^2 t}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Hơn nữa, $u(x,y,0)=\varphi(x,y)\Leftrightarrow\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=\varphi(x,y)$

$$\Leftrightarrow\sum_{m=1}^{+\infty}c_m\sin\frac{m\pi x}{a}=\varphi(x,y),$$

với

$$c_m=\sum_{n=1}^{+\infty}b_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{2.17}$$

Suy ra

$$c_m=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx.$$

Từ (2.17), ta có

$$b_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b c_m\sin\frac{n\pi y}{b}dy=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a\varphi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy.$$

Vậy, nghiệm của bài toán ban đầu là

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}b_{mn}e^{-k^2\left(\frac{n^2}{b^2}+\frac{m^2}{a^2}\right)\pi^2 t}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

với

$$b_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a\varphi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy.$$

Ví dụ 3.1. Giải bài toán sau

$$\begin{cases}u_t=\dfrac{1}{\pi^2}(u_{xx}+u_{yy}), & 0<x<1,\ 0<y<1,\ t>0,\\ u(0,y,t)=u(1,y,t)=0, & 0\le y\le 1,\ t>0,\\ u(x,0,t)=u(x,1,t)=0, & 0\le x\le 1,\ t>0,\\ u(x,y,0)=100, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.\end{cases}$$

Giải

Làm tuần tự như trên, ta có

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}b_{mn}e^{-\left(n^2+m^2\right)t}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y),$$

với

$$\begin{aligned}b_{mn}&=400\int_0^1\int_0^1\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)dxdy\\&=\frac{400}{\pi^2}\frac{\left[1-(-1)^m\right]\left[1-(-1)^n\right]}{mn}\\&=\begin{cases}0, & m \text{ chẵn hoặc } n \text{ chẵn},\\ \dfrac{1600}{\pi^2 mn}, & m \text{ lẻ và } n \text{ lẻ}.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy, nghiệm của bài toán là

$$u(x,t)=\frac{1600}{\pi^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left[(2m+1)\pi x\right]\sin\left[(2n+1)\pi y\right]}{(2m+1)(2n+1)}e^{-\left[(2n+1)^2+(2m+1)^2\right]t}.$$

IV. Tính duy nhất nghiệm của bài toán biên Dirichlet-giá trị ban đầu dạng tổng quát cho phương trình truyền nhiệt

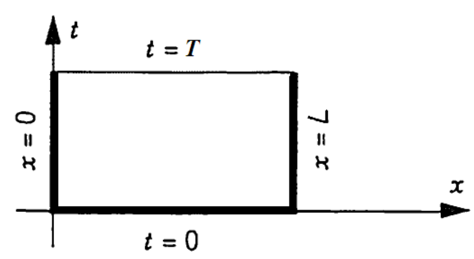
Cho $L, T>0$. Đặt

$$\overline{\Omega}_T=\left\{(x,t):0\le x\le L, 0\le t\le T\right\},$$

$$\Omega_T=\left\{(x,t):0< x< L, 0< t\le T\right\},$$

$$\Gamma_T=\overline{\Omega}_T\setminus\Omega_T,$$

$$C_1^2(\overline{\Omega}_T)=\left\{u(x,t)\middle| u,u_t,u_x,u_{xx}\in C(\overline{\Omega}_T)\right\}.$$



Định lý 4.1 (Nguyên lý cực đại). *Giả sử $u\in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ và thỏa phương trình truyền nhiệt $u_t=k^2u_{xx}$ trong Ω_T. Khi đó, ta có*

$i)$ $\max\limits_{\overline{\Omega}_T} u(x,t) = \max\limits_{\Gamma_T} u(x,t)$;

$ii)$ $\min\limits_{\overline{\Omega}_T} u(x,t) = \min\limits_{\Gamma_T} u(x,t)$.

Chứng minh.

$i)$ Đặt $M = \max\limits_{\Gamma_T} u(x,t)$ và $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$ với $\varepsilon > 0$. Khi đó, ta có

$$v(x,t) \le M + \varepsilon L^2, \ \forall (x,t) \in \Gamma_T$$

và

$$v_t - k^2 v_{xx} = u_t - k^2 u_{xx} - 2\varepsilon k^2 = -2\varepsilon k^2 < 0, \forall (x,t) \in \Omega_T. \tag{2.18}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $v(x,t)$ không đạt giá trị cực đại trên Ω_T.

Thật vậy, giả sử $v(x,t)$ đạt giá trị cực đại tại điểm

$$(x_0,t_0) \in \Omega_T \setminus \{(x,t): 0 < x < L, t = T\},$$

suy ra

$$\begin{cases} v_t(x_0,t_0) = 0, \\ v_{xx}(x_0,t_0) \le 0, \end{cases}$$

từ đó ta được $v_t(x_0,t_0) - k^2 v_{xx}(x_0,t_0) \ge 0$. Điều này mâu thuẫn với (2.18).

Giả sử $v(x,t)$ đạt giá trị cực đại tại điểm (x_0,t_0) thuộc $\{(x,t): 0 < x < L, t = T\}$, suy ra

$$\begin{cases} v_x(x_0,T) = 0, \\ v_{xx}(x_0,T) \le 0. \end{cases}$$

Hơn nữa, vì $v(x_0,T) \ge v(x_0,T-\delta)$, $\forall \delta > 0$ nên ta có

$$v_t(x_0,T) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{v(x_0,T) - v(x_0,T-\delta)}{\delta} \ge 0,$$

từ đó ta được $v_t(x_0,T) - k^2 v_{xx}(x_0,T) \ge 0$. Điều này mâu thuẫn với (2.18).

Vì vậy, $\forall \varepsilon > 0$, $v(x,t) \le M + \varepsilon L^2$ trên $\overline{\Omega}_T$. Khi đó, ta được

$$\forall \varepsilon > 0, u(x,t) \le M + \varepsilon(L^2 - x^2)$$

trên $\overline{\Omega}_T$. Từ đó, suy ra $u(x,t) \le M$ trên $\overline{\Omega}_T$ và ta được điều phải chứng minh.

ii) Chứng minh tương tự *i*).

Định lý đã được chứng minh. ■

Định lý 4.2 (Tính duy nhất nghiệm). *Giả sử* $\varphi \in C([0,L])$, $A,B \in C([0,T])$ *và* $f \in C(\Omega_T)$. *Khi đó, tồn tại không quá một nghiệm* $u \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ *của bài toán biên Dirichlet-giá trị ban đầu*

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} + f(x,t), (x,t) \in \Omega_T, \\ u(0,t) = A(t), \qquad 0 \le t \le T, \\ u(L,t) = B(t), \qquad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán trên. Đặt $w = u_1 - u_2$, khi đó $w \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ và thỏa

$$\begin{cases} w_t = k^2 w_{xx},\ (x,t) \in \Omega_T, \\ w(0,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \\ w(L,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \\ w(x,0) = 0,\ 0 \le x \le L. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh $w(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_T$ bằng hai cách. Từ đó, suy ra

$$u_1(x,t) = u_2(x,t), \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_T.$$

Cách 1: Từ Định lý 4.1, ta có

$$\max_{\overline{\Omega}_T} w(x,t) = \max_{\Gamma_T} w(x,t) = 0,$$

suy ra $w(x,t) \le 0$, $\forall (x,t) \in \overline{\Omega}_T$. Hơn nữa, ta cũng có

$$\min_{\overline{\Omega}_T} w(x,t) = \min_{\Gamma_T} w(x,t) = 0,$$

suy ra $w(x,t) \ge 0$, $\forall (x,t) \in \overline{\Omega}_T$. Vì vậy, $w(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_T$.

Cách 2 (Phương pháp năng lượng): Nhân 2 vế của phương trình $w_t = k^2 w_{xx}$ cho w, ta được

$$\left(\frac{1}{2}w^2\right)_t - \left(k^2 w_x w\right)_x + k^2\left(w_x\right)^2 = 0.$$

Lấy tích phân 2 vế theo biến x trên $[0,L]$, ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^L w^2(x,t)dx\right) - (k^2 w_x w)\Big|_{x=0}^{x=L} + k^2\int_0^L \left(w_x\right)^2 dx = 0.$$

Từ $w(0,t) = w(L,t) = 0$ và đặt $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L w^2(x,t)dx$ (*hàm năng lượng*), ta nhận được

$$\frac{dE}{dt} = -k^2\int_0^L \left(w_x\right)^2 dx \le 0,$$

khi đó $0 \le E(t) \le E(0) = 0, \forall t \in [0,T]$, suy ra $E(t) = 0, \forall t \in [0,T]$.

Do đó $w(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_T$ (xem [18]).

Định lý đã được chứng minh. ■

V. Giải bài toán Cauchy một chiều cho phương trình truyền nhiệt bằng phương pháp biến đổi Fourier

5.1. Bài toán Cauchy thuần nhất

Xét bài toán tìm hàm bị chặn $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, & (2.19)\\ u(x,t), u_x(x,t) \to 0 \text{ khi } x \to \pm\infty,\ \forall t > 0, & & (2.20)\\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, & (2.21)\end{cases}$$

và thỏa các điều kiện:

u, u_x và u_{xx} thuộc $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ theo biến x, $\forall t \ge 0$ cố định. (2.22)

$\forall T > 0, \exists \psi \in L^1(\mathbb{R})$ sao cho $\left|u_t(x,t)\right| \le \psi(x),\ \forall t \in [0,T],\ \forall x \in \mathbb{R},$ (2.23)

trong đó k là hằng số dương, $\varphi(x)$ là một hàm cho trước.

Lấy biến đổi Fourier hai vế của $u_t = k^2 u_{xx}$ theo biến x, ta có

$$\hat{u}_t(p,t) + k^2 p^2 \hat{u}(p,t) = 0. \tag{2.24}$$

Hơn nữa, từ $u(x,0) = \varphi(x)$, ta được

$$\hat{u}(p,0) = \hat{\varphi}(p). \tag{2.25}$$

Giải phương trình vi phân (2.24) với điều kiện (2.25), ta được

$$\hat{u}(p,t) = \hat{\varphi}(p)e^{-k^2p^2t} = \hat{\varphi}(p)\hat{g}(p) = \widehat{\varphi * g}(p),$$

với $\hat{g}(p) = e^{-k^2p^2t}$.

Lấy biến đổi Fourier ngược, ta được

$$u(x,t) = \varphi * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) g(x-s) ds, \tag{2.26}$$

với $g(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2p^2t})$.

Ta có

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{e^{\frac{-p^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}, \quad \forall a > 0,$$

suy ra

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{-p^2}{4a}}\right) = \sqrt{2a}e^{-ax^2}, \quad \forall a > 0.$$

Áp dụng kết quả trên với $\frac{1}{4a} = k^2 t \Leftrightarrow a = \frac{1}{4k^2t}$, ta được

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2p^2t}) = \frac{1}{\sqrt{2k^2t}} e^{\frac{-x^2}{4k^2t}}. \tag{2.27}$$

Thay (2.27) vào (2.26), ta được

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2 t}} e^{\frac{-(x-s)^2}{4k^2t}} \varphi(s) ds. \tag{2.28}$$

Đặt $G(x,s,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi k^2 t}}e^{\frac{-(x-s)^2}{4k^2t}}$ thì $G(x,s,t)$ được gọi là *nghiệm cơ bản* của phương trình truyền nhiệt.

Các tính chất của nghiệm cơ bản $G(x,s,t)$:

i) Hàm $G(x,s,t)$ thỏa phương trình $G_t = k^2 G_{xx}$ theo *x*, *t*.

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)ds = 1.$ Thật vậy, ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-s)^2}{4k^2t}}ds.$$

Đổi biến $\alpha = \dfrac{x-s}{2\sqrt{k^2 t}}$, ta được

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1.$$

Định lý 5.1. *Nếu φ là hàm liên tục, bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì hàm $u(x,t)$ được xác định bởi (2.28) là nghiệm bị chặn thỏa (5.1), (5.2), (2.22), (2.23) và* $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Định lý 5.2 (Tính duy nhất nghiệm). *Bài toán (5.1)-(5.3) thỏa điều kiện (2.22), (2.23) có nghiệm duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán (5.1)-(5.3) thỏa điều kiện (2.22), (2.23). Đặt $w = u_1 - u_2$, khi đó w thỏa

$$\begin{cases} w_t = k^2 w_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ w(x,t),\ w_x(x,t) \to 0 \text{ khi } x \to \pm\infty,\ \forall t > 0, & \\ w(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

và thỏa điều kiện (2.22), (2.23).

Xét hàm

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x,t)dx\,.$$

Ta có

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(w^2)_t\,dx=k^2\int_{-\infty}^{+\infty}w.w_{xx}dx=k^2\left[w.w_x\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w_x\right)^2dx\right]=-k^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w_x\right)^2dx\le 0,$$

khi đó

$$0\le E(t)\le E(0)=0,\ \forall t>0\,,$$

suy ra

$$E(t)=0,\ \forall t>0\,.$$

Do đó $w(x,t)=0,\ \forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$.

Định lý đã được chứng minh. ■

Ví dụ 5.1. Giải bài toán sau

$$\begin{cases} u_t=\dfrac{1}{4}u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,\ t>0,\\ u(x,0)=e^{-x^2}, & -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

Giải

Lấy biến đổi Fourier hai vế của $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}$ theo biến x, ta có

$$\hat{u}_t(p,t)+\frac{p^2}{4}\hat{u}(p,t)=0,$$

giải phương trình vi phân trên, ta được

$$\hat{u}(p,t)=C(p)e^{\frac{-p^2}{4}t}.$$

Từ $u(x,0)=e^{-x^2}$, ta được $\hat{u}(p,0)=\widehat{e^{-x^2}}(p)=\dfrac{e^{\frac{-p^2}{4}}}{\sqrt{2}}$, do đó

$$C(p)=\frac{e^{\frac{-p^2}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

Vì vậy

$$\hat{u}(p,t) = \frac{e^{\frac{-p^2}{4}}}{\sqrt{2}} e^{\frac{-p^2}{4}t} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-p^2}{4}(1+t)}.$$

Lấy biến đổi Fourier ngược, ta được

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-p^2}{4}(1+t)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{-p^2}{4}(1+t)}\right). \tag{2.29}$$

Ta có

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{-p^2}{4a}}\right) = \sqrt{2a} e^{-ax^2}, \ \forall a > 0.$$

Áp dụng kết quả trên với $\frac{1}{a} = 1 + t \Leftrightarrow a = \frac{1}{1+t}$, ta được

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{-p^2}{4}(1+t)}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t}} e^{\frac{-x^2}{1+t}}. \tag{2.30}$$

Thay (2.30) vào (2.29), vậy nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{\frac{-x^2}{1+t}}.$$

5.2. Bài toán Cauchy không thuần nhất

Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} + f(x,t), \ -\infty < x < +\infty, \ t > 0, & (2.31) \\ u(x,t), u_x(x,t) \to 0 \text{ khi } x \to \pm\infty, \ \forall t > 0, & (2.32) \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < +\infty, & (2.33) \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $\varphi(x)$ và $f(x,t)$ là những hàm cho trước.

Gọi $v(x,t)$, $w(x,t)$ lần lượt là nghiệm của hai bài toán sau

$$\begin{cases} v_t = k^2 v_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \quad (2.34) \\ v(x,t), v_x(x,t) \to 0 \ \text{khi } x \to \pm\infty,\ \forall t > 0, & \quad (2.35) \\ v(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \quad (2.36) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t = k^2 w_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \quad (2.37) \\ w(x,t), w_x(x,t) \to 0 \ \text{khi } x \to \pm\infty,\ \forall t > 0, & \quad (2.38) \\ w(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \quad (2.39) \end{cases}$$

Khi đó, dễ dàng chứng minh được nghiệm của bài toán (2.31)-(2.33) là

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

Từ mục 5.1, ta được nghiệm của bài toán (2.34)-(2.36) là

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2 t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Tiếp theo, ta tìm nghiệm của bài toán (2.37)-(2.39) bằng phương pháp biến đổi Fourier.

Lấy biến đổi Fourier hai vế của $w_t = k^2 w_{xx} + f(x,t)$ theo biến x, ta có

$$\widehat{w}_t(p,t) + k^2 p^2 \widehat{w}(p,t) = \widehat{f}(p,t),$$

từ đó, ta được

$$\widehat{w}(p,t) = \widehat{w}(p,0) e^{-k^2 p^2 t} + \int_0^t \widehat{f}(p,s) e^{-k^2 p^2 (t-s)} ds.$$

Từ $w(x,0) = 0,$ ta được $\widehat{w}(p,0) = 0$. Do đó, ta có

$$\widehat{w}(p,t) = \int_0^t \widehat{f}(p,s) e^{-k^2 p^2 (t-s)} ds = \int_0^t \widehat{f}(p,s) \widehat{g}(p,s) ds = \int_0^t \widehat{f * g}(p,s) ds,$$

với $\widehat{g}(p,s) = e^{-k^2 p^2 (t-s)}$.

Lấy biến đổi Fourier ngược, ta được

$$w(x,t) = \int_0^t (f * g)(x,s) ds = \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,s) g(x-\xi,s) d\xi \right] ds, \quad (2.40)$$

với $g(x,s) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2p^2(t-s)})$.

Ta có

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{-p^2}{4a}}\right) = \sqrt{2a}e^{-ax^2}, \ \forall a > 0.$$

Áp dụng kết quả trên với $\frac{1}{4a} = k^2(t-s) \Leftrightarrow a = \frac{1}{4k^2(t-s)}$, ta được

$$g(x,s) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2p^2(t-s)}) = \frac{1}{\sqrt{2k^2(t-s)}}e^{\frac{-x^2}{4k^2(t-s)}}. \qquad (2.41)$$

Thay (2.41) vào (2.40), ta được

$$w(x,t) = \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi k^2(t-s)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k^2(t-s)}}f(\xi,s)d\xi ds.$$

Vậy, nghiệm của bài toán (2.31)-(2.33) là

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + w(x,t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k^2t}}\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(t-s)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k^2(t-s)}}f(\xi,s)d\xi ds\right]. \end{aligned}$$

Định lý 5.3 (Tính duy nhất nghiệm). *Giả sử* $\varphi \in C(\mathbb{R}),\ f \in C(\mathbb{R}\times[0,T])$. *Khi đó tồn tại không quá một nghiệm* $u \in C_1^2\left(\mathbb{R}\times(0,T]\right)\cap C\left(\mathbb{R}\times(0,T]\right)$ *của bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} u_t = k^2u_{xx} + f(x,t), \ -\infty < x < +\infty, 0 < t < T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện tăng

$$|u(x,t)| \le Ae^{a|x|^2}, \ x \in \mathbb{R}, t \in [0,T],$$

với $A,\ a > 0$ *là các hằng số.*

Chứng minh. Xem [4].

VI. Phương trình truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn

Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,t), u_x(x,t) \to 0 \text{ khi } x \to +\infty, \forall t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < +\infty, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

trong đó k là hằng số, $\varphi(x)$ là hàm cho trước.

Lấy biến đổi Fourier sin hai vế của $u_t = k^2 u_{xx}$ theo biến x, ta được

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u_t(x,t)\sin(px)dx = k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u_{xx}(x,t)\sin(px)dx,$$

suy ra

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} u(x,t)\sin(px)dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^2\, u_x(x,t)\sin(px)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^2\, pu(x,t)\cos(px)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^2 p^2 \int_0^{+\infty} u(x,t)\sin(px)dx \\ &= -k^2 p^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(x,t)\sin(px)dx, \end{aligned}$$

do đó, ta có

$$\frac{\partial}{\partial t} u_s(p,t) = -k^2 p^2 u_s(p,t),$$

suy ra

$$u_s(p,t) = C(p)e^{-k^2 p^2 t}.$$

Từ $u(x,0) = \varphi(x)$, ta được $u_s(p,0) = \varphi_s(p)$, do đó $C(p) = \varphi_s(p)$.

Vì vậy, ta có $u_s(p,t) = \varphi_s(p)e^{-k^2 p^2 t}$.

Lấy biến đổi Fourier sin ngược, ta được nghiệm của bài toán ban đầu là

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}u_s(p,t)\sin(px)dp=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi_s(p)e^{-k^2p^2t}\sin(px)dp.$$

Ví dụ 6.1. Giải bài toán sau

$$\begin{cases} u_t=2u_{xx}, & x>0, t>0,\\ u(0,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=e^{-x}, x>0. \end{cases}$$

Giải

Làm tuần tự như trên, ta tính

$$\begin{aligned}\left(\widehat{e^{-x}}\right)_S &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(px)dx\\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-e^{-x}\sin(px)-pe^{-x}\cos(px)\right]\Big|_{x=0}^{x\to+\infty}-p^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(px)dx\\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}p-p^2\left(\widehat{e^{-x}}\right)_S,\end{aligned}$$

suy ra

$$\left(\widehat{e^{-x}}\right)_S=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{p}{1+p^2}.$$

Vậy, nghiệm của bài toán là

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{p}{1+p^2}e^{-2p^2t}\sin(px)dp.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau đây bằng phương pháp tách biến

a) $yu_x - xu_y = 0$, $(x, y \neq 0)$.

b) $u_x - yu_y = 0$, $(y \neq 0)$.

c) $u_{xy} - u = 0$.

d) $u_x = u_y + u$.

e) $u_{xx} - u_x = u_t$.

f) $2u_{xx} + 3u_{xy} - u_y = 0$.

Bài 2. Tìm $u(x,t)$ thỏa

a) $\begin{cases} 2u_x - u_t = 0, \\ u(0,t) = 2e^{-4t}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_x + u = u_t, \\ u(x,0) = 4e^{-3x}. \end{cases}$

Bài 3. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = u(L,t) = 0, t \geq 0, & \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0, t \geq 0, & \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, t \geq 0, & \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} - \alpha u, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, t \geq 0, & \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$ (α là hằng số).

e) $\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} - \alpha u, & 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, t \geq 0, & \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$ (α là hằng số).

Bài 4. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{3\pi x}{2} - 5\sin 3\pi x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$ với $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = \dfrac{x}{\pi^2}(\pi - x),\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \\ u_t(x,0) = x + 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{3}{2}x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = 6 + 4\cos 3x,\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$ với $f(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Bài 5. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin 3\pi x, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos x, & 0 < x < 2\pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \cos x + \cos 2x,\ 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x/2),\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x, & 0 < x < \pi/2,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi/2. \end{cases}$

Bài 6. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(2,t) = 8, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 2x^2,\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 1, & t \geq 0, \\ u(2,t) = 3, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x^2 - x + 1,\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t = 8u_{xx}, & 0 < x < 5,\ t > 0, \\ u(0,t) = 10, & t \geq 0, \\ u(5,t) = 90, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 16x + 10 + 2\sin \pi x - 4\sin 2\pi x + \sin 6\pi x,\ 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(1,t) = 1, & t \ge 0, \\ u(x,0) = x^2,\, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(0,t) = 1 - e^{-t},\ t \ge 0, \\ u_x(1,t) = e^{-t} - 1,\, t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1/2,\, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u_x(1/2,t) = 1,\, t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1/2. \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u_x(0,t) = t,\ t \ge 0, \\ u_x(1,t) = 2,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = 0,\, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x,\, 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u_x(\dfrac{\pi}{2},t) = 1, & t \ge 0, \\ u(x,0) = x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t,\, 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(1,t) = t, & t \ge 0, \\ u(x,0) = e^x \sin \pi x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

j) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x,\, 0 < x < \pi,\, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u_x(\pi,t) = 2\pi t, & t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

k) $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t,\, 0 < x < \pi,\, t > 0, \\ u(0,t) = 1 + t, & t \ge 0, \\ u(\pi,t) = 1 + t, & t \ge 0, \\ u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Bài 7. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_t = u_x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 70e^{-x^2/2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t = t^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = e^{2x-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases} \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \dfrac{x}{1+x^2}, & x \ge 0. \end{cases}$

j) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u_x(0,t) = f(t), & t \ge 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \ge 0. \end{cases}$

Bài 8. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0, \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, & 0 \le y \le 1, t \ge 0, \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, & 0 \le x \le 1, t \ge 0, \\ u(x,y,0) = xy(1-x)(1-y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t = k^2(u_{xx} + u_{yy}), & 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \\ u(0,y,t) = u_x(a,y,t) = 0, & 0 \le y \le b, t \ge 0, \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,b,t) = 0, & 0 \le x \le a, t \ge 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & 0 \le x \le a, 0 \le y \le b. \end{cases}$

Bài 9. Chứng minh tính duy nhất nghiệm của các bài toán sau bằng phương pháp năng lượng

a) $\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\, t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < L,\, t > 0, \\ u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = g_1(t), & t \geq 0, \\ u_x(L,t) + \beta u(L,t) = g_2(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$ trong đó α và β là các hằng số không âm.

Bài 10. Tìm nhiệt độ của một thanh đồng dài 80 *cm* không có nguồn nhiệt với nhiệt độ hai đầu luôn ở 0^0C và dọc theo thanh là cách nhiệt hoàn toàn. Nhiệt độ ban đầu là $100\sin\dfrac{\pi x}{80}\ {}^0C$. Biết mật độ khối lượng $\rho = 8{,}92 g / cm^3$, nhiệt dung riêng $c = 0{,}092\ cal / g\ {}^0C$, hệ số dẫn nhiệt $\kappa = 0{,}95\ cal / cm \sec {}^0C$. Sau bao lâu thì nhiệt độ cực đại trong thanh hạ đến 50^0C?

Bài 11. Tìm nhiệt độ của một thanh bạc dài 10 *cm* không có nguồn nhiệt với nhiệt độ hai đầu giữ ở 0^0C và dọc theo thanh là cách nhiệt hoàn toàn. Biết mật độ khối lượng $\rho = 10{,}6 g / cm^3$, nhiệt dung riêng $c = 0{,}056\ cal / g\ {}^0C$, hệ số dẫn nhiệt $\kappa = 1{,}04\ cal / cm \sec {}^0C$ và nhiệt độ ban đầu là $f(x)\ {}^0C$ với

a) $f(x) = \sin 0{,}4\pi x.$ b) $f(x) = 1 - 0{,}2|x - 5|.$ c) $f(x) = 0{,}01x(10 - x).$

Bài 12. Cho một thanh bạc dài 10 *cm* ($0 \leq x \leq 10$) không có nguồn nhiệt với nhiệt độ tại đầu bên trái ($x = 0$) và bên phải ($x = 10$) của thanh lần lượt là 100^0C, 0^0C, dọc theo thanh là cách nhiệt hoàn toàn, nhiệt độ ban đầu của thanh là 100^0C. Biết mật độ khối lượng $\rho = 10{,}6 g / cm^3$, nhiệt dung riêng $c = 0{,}056\ cal / g\ {}^0C$, hệ số dẫn nhiệt $\kappa = 1,04\ cal/cm\sec{}^0C$. Tìm nhiệt độ ở giữa của thanh tại các thời điểm $t = 1;\ 2;\ 3;\ 10;\ 50\ \sec$.

Bài 13. Tìm nhiệt độ của một thanh dài $\pi\ m$ với bề mặt cách nhiệt hoàn toàn, trên thanh có sự phân bố nguồn nhiệt liên tục, với mật độ nguồn nhiệt là $t\sin x$, nhiệt độ tại hai đầu mút và nhiệt độ ban đầu của thanh luôn duy trì ở 0^0C, độ khuếch tán của thanh là 1 m^2/s .

Bài 14. a) Cho M là một hằng số. Chứng minh rằng nếu $u \in C_1^2(\overline{\Omega_T})$ là nghiệm của phương trình truyền nhiệt $u_t = k^2 u_{xx}$ trên $\overline{\Omega_T}$ và $u(\bar{x},\bar{t}) \le M,\ \forall(\bar{x},\bar{t}) \in \Gamma_T$ thì $u(x,t) \le M,\ \forall(x,t) \in \overline{\Omega_T}$.

b) Giả sử $u_1, u_2 \in C_1^2(\overline{\Omega_T})$ là các nghiệm của phương trình truyền nhiệt $u_t = k^2 u_{xx}$ trên $\overline{\Omega_T}$. Chứng minh rằng nếu $u_1(\bar{x},\bar{t}) \le u_2(\bar{x},\bar{t}),\ \forall(\bar{x},\bar{t}) \in \Gamma_T$ thì $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$, $\forall(x,t) \in \overline{\Omega_T}$.

Bài 15. Xét bài toán

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 3,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = 6\sin\dfrac{\pi x}{3} + 2\sin \pi x, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$$

Chứng rằng nghiệm $u(x,t)$ của bài toán trên thoả bất đẳng thức

$$0 \le u(x,t) \le 4\sqrt{2},\ \forall(x,t) \in [0,3]\times[0,+\infty).$$

Bài 16. Xét bài toán

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin^7 x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Chứng rằng nghiệm $u(x,t)$ của bài toán trên thoả bất đẳng thức

$$u(x,t) \le e^{-t}\sin x,\ \forall(x,t) \in [0,\pi]\times[0,+\infty).$$

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH THẾ VỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ khảo sát hai phương trình thế vị: phương trình Laplace và phương trình Poisson. Các phương trình này thuộc loại elliptic và có vai trò quan trọng trong các ứng dụng của thuyết hấp dẫn, bài toán nhiệt độ trạng thái dừng, cơ học chất lỏng… Bằng hai phương pháp đã được giới thiệu trong chương hai, chúng ta sẽ giải các bài toán biên Dirichlet trên miền hình chữ nhật, miền tròn, nửa mặt phẳng trên và nửa dải vô hạn. Nguyên lý cực đại và tính duy nhất nghiệm của bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson cũng được trình bày chi tiết trong chương này.

I. Phương trình Laplace và phương trình Poisson

1.1. Mô hình vật lý dẫn đến phương trình Laplace và phương trình Poisson

Xét phương trình truyền nhiệt hai chiều

$$u_t = k^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t),$$

trong đó k là hằng số dương, $f(x,y,t)$ là hàm cho trước.

Nếu quá trình dừng, tức $u(x,y,t) = u(x,y)$ không phụ thuộc thời gian t thì $u_t = 0$ và ta nhận được *phương trình Poisson hai chiều*

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{-f}{k^2}.$$

Nếu không có nguồn nhiệt thì $f \equiv 0$ và ta nhận được *phương trình Laplace hai chiều*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{3.1}$$

Chú ý rằng, nghiệm của phương trình Laplace (3.1) mà có đạo hàm riêng cấp hai liên tục thì được gọi là *hàm điều hòa*.

1.2. Phương trình Laplace trong hệ tọa độ Đề các

Phương trình Laplace trong mặt phẳng

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

phương trình Laplace trong không gian

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

trong đó Δ (*Laplacian*, cũng còn ký hiệu là ∇^2) được gọi là *toán tử Laplace.*

1.3. Phương trình Laplace trong hệ tọa độ cực (r,φ)

Từ phương trình Laplace trong mặt phẳng

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

với phép đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

ta được phương trình Laplace trong tọa độ cực

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$$

hoặc

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Thật vậy, ta có

$$u_r = u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi,$$

$$u_\varphi = -ru_x\sin\varphi + ru_y\cos\varphi,$$

$$u_{rr} = u_{xx}\cos^2\varphi + u_{yy}\sin^2\varphi + u_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + u_{yx}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$u_{\varphi\varphi} = r^2\left(u_{xx}\sin\varphi - u_{xy}\cos\varphi\right)\sin\varphi - ru_x\cos\varphi$$
$$-r^2\left(u_{yx}\sin\varphi - u_{yy}\cos\varphi\right)\cos\varphi - ru_y\sin\varphi,$$

suy ra

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=u_{xx}+u_{yy}=0\,.$$

1.4. Phương trình Laplace trong hệ tọa độ trụ (r,φ,z)

Từ phương trình Laplace trong không gian

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,$$

với phép đổi biến

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases}$$

ta được phương trình Laplace trong tọa độ trụ

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}-u_{zz}=0$$

hoặc

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.=0$$

1.5. Phương trình Laplace trong tọa độ cầu (r,φ,θ)

Từ phương trình Laplace trong không gian

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,$$

với phép đổi biến

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\theta, \end{cases}$$

ta được phương trình Laplace trong tọa độ cầu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,.$$

II. Giải bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace bằng phương pháp tách biến

2.1. Bài toán biên Dirichlet trên miền hình chữ nhật

Xét bài toán tìm nhiệt độ dừng trên một hình chữ nhật có chiều dài a và chiều rộng b với nhiệt độ ở biên dưới, biên trên, biên trái và biên phải lần lượt là $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$ và $g_2(y)$.

Gọi $u(x,y), 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$ là nhiệt độ cần tìm. Khi đó, $u(x,y)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b, & (3.2) \\ u(x,0) = f_1(x), 0 \le x \le a, & (3.3) \\ u(x,b) = f_2(x), 0 \le x \le a, & (3.4) \\ u(0,y) = g_1(y), 0 \le y \le b, & (3.5) \\ u(a,y) = g_2(y), 0 \le y \le b, & (3.6) \end{cases}$$

trong đó $f_1(x), f_2(x), g_1(y), g_2(y)$ là những hàm cho trước.

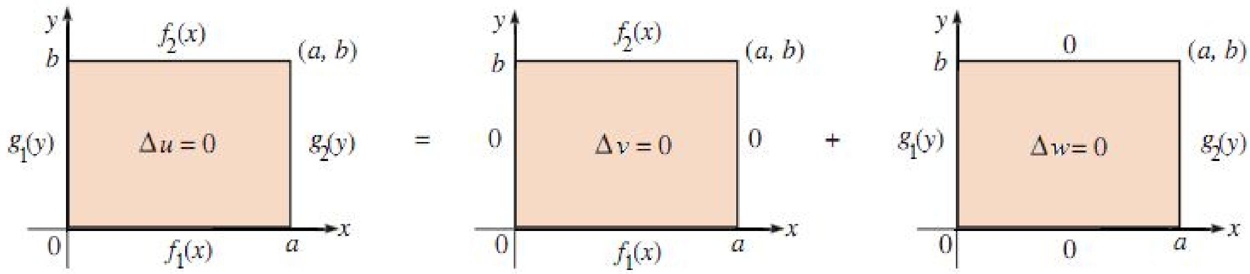
Gọi $v(x,y)$, $w(x,y)$ lần lượt là nghiệm của hai bài toán sau

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b, & (3.7) \\ v(x,0) = f_1(x), 0 \le x \le a, & (3.8) \\ v(x,b) = f_2(x), 0 \le x \le a, & (3.9) \\ v(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, & (3.10) \\ v(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, & (3.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b, & (3.12) \\ w(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le a, & (3.13) \\ w(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, & (3.14) \\ w(0,y) = g_1(y), 0 \le y \le b, & (3.15) \\ w(a,y) = g_2(y), 0 \le y \le b. & (3.16) \end{cases}$$

Khi đó, dễ dàng chứng minh được nghiệm của bài toán (3.2)-(3.6) là

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y).$$



Bây giờ, ta giải bài toán (3.7)-(3.11) bằng phương pháp tách biến.

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$v(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0,$$

ta có

$$v_{xx} = X''(x)Y(y),$$
$$v_{yy} = X(x)Y''(y),$$

thay vào $v_{xx} + v_{yy} = 0$, ta được

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

do đó, ta có

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Từ $\begin{cases} v(0,y) = 0, \\ v(a,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)Y(y) = 0, \\ X(a)Y(y) = 0, \end{cases}$ ta được $X(0) = X(a) = 0$.

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < a, \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \text{ và } X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a},\ n = 1,2,3,\dots .$$

Tiếp theo, giải phương trình $Y''(y) - \lambda_n Y(y) = 0,$ ta được

$$Y_n(y) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}y} + B_n e^{\sqrt{\lambda_n}y} = A_n e^{\frac{-n\pi y}{a}} + B_n e^{\frac{n\pi y}{a}},\ n = 1,2,3,\dots .$$

Vậy

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi x}{a}\left(A_n e^{\frac{-n\pi y}{a}} + B_n e^{\frac{n\pi y}{a}}\right).$$

Ta có $v(x,0) = f_1(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n + B_n\right)\sin\frac{n\pi x}{a} = f_1(x),$ với

$$A_n + B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1,2,\dots . \tag{3.17}$$

Hơn nữa, $u(x,b) = f_2(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n e^{\frac{-n\pi b}{a}} + B_n e^{\frac{n\pi b}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} = f_2(x),$ với

$$A_n e^{\frac{-n\pi b}{a}} + B_n e^{\frac{n\pi b}{a}} = \frac{2}{a}\int_0^a f_2(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1,2,\dots . \tag{3.18}$$

Giải hệ (3.17) và (3.18), ta tìm được A_n, B_n.

Tương tự, ta được nghiệm của bài toán (3.12)-(3.16) là

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi y}{b}\left(C_n e^{\frac{-n\pi x}{b}} + D_n e^{\frac{n\pi x}{b}}\right),$$

trong đó C_n và D_n được xác định từ hệ

$$\begin{cases} C_n + D_n = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b g_1(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy, \\ C_n e^{\frac{-n\pi a}{b}} + D_n e^{\frac{n\pi a}{b}} = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b g_2(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy, \end{cases} \quad n = 1,2,\dots .$$

2.2. Bài toán biên Dirichlet cho hình tròn

Xét bài toán tìm hàm $u(r,\varphi)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0,\ 0 < r < R, -\pi < \varphi < \pi, \\ u(R,\varphi) = f(\varphi), \qquad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ u(r,-\pi) = u(r,\pi), \qquad 0 \le r \le R, \\ u_\varphi(r,-\pi) = u_\varphi(r,\pi), \quad 0 \le r \le R, \\ \lim\limits_{r\to 0^+} \left|u(r,\varphi)\right| < +\infty, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \end{cases}$$

trong đó $f(\varphi)$ là hàm cho trước.

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \ne 0,$$

ta có

$$u_{rr} = R''(r)\Phi(\varphi),$$
$$u_{\varphi\varphi} = R(r)\Phi''(\varphi),$$

thay vào $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$, ta được

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0,$$

$$\frac{-r^2R''(r) - rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda,$$

do đó

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0,$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

Từ $u(r,-\pi) = u(r,\pi) \Leftrightarrow R(r)\Phi(-\pi) = R(r)\Phi(\pi),$ ta được

$$\Phi(-\pi) = \Phi(\pi).$$

Từ $u_\varphi(r,-\pi) = u_\varphi(r,\pi) \Leftrightarrow R(r)\Phi'(-\pi) = R(r)\Phi'(\pi),$ ta được

$$\Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi).$$

Xét bài toán

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \ -\pi < \varphi < \pi, \\ \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \\ \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi), \end{cases}$$

ta có

$$\lambda_n = n^2, \ \Phi_n(x) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, n = 0,1,2...,$$

trong đó A_n và B_n là các hằng số thỏa $A_n^2 + B_n^2 \neq 0$, $n = 0,1,2...$.

Tiếp theo, giải phương trình $r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) - \lambda_n R_n(r) = 0$, ta được

$$R_n(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln r, \quad n = 0, \\ C_n r^n + D_n r^{-n}, \ n = 1,2,3,..., \end{cases}$$

trong đó C_n và D_n $(n = 0,1,2...)$ là các hằng số thỏa $C_n^2 + D_n^2 \neq 0$, $n = 0,1,2...$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} u_n(r,\varphi) &= R_n(r)\Phi_n(\varphi) \\ &= \begin{cases} A_0\left(C_0 + D_0 \ln r\right), & n = 0, \\ \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right), & n = 1,2,3,..., \end{cases} \end{aligned}$$

và

$$u(r,\varphi) = A_0\left(C_0 + D_0 \ln r\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right).$$

Chú ý rằng $\lim\limits_{r\to 0^+} \ln r = -\infty$ và $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{-n} = +\infty$, $\forall n \geq 1$. Do đó, để $\lim\limits_{r\to 0^+} |u(r,\varphi)| < +\infty$, $\forall \varphi \in [-\pi,\pi]$ thì ta chọn $D_0 = 0$ và $D_n = 0, \ n = 1,2,3,...$.

Vậy

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= A_0 C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) C_n r^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \qquad (3.19) \end{aligned}$$

trong đó $a_n = A_n C_n$ và $b_n = B_n C_n$, $n = 0,1,2,...$.

Ta có $u(R,\varphi)=f(\varphi)\Leftrightarrow a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}R^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)=f(\varphi)$, với

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi, \tag{3.20}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\ n=1,2,3,..., \tag{3.21}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi,\ n=1,2,3,.... \tag{3.22}$$

2.3. Tích phân Poisson

Ta biến đổi công thức (3.19) về dạng đơn giản hơn. Thay các biểu thức (3.20), (3.21) và (3.22) vào (3.19) ta được

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}r^nf(\theta)\cos n\varphi\cos n\theta d\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}r^nf(\theta)\sin n\varphi\sin n\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{R^n}\left(\cos n\varphi\cos n\theta+\sin n\varphi\sin n\theta\right)\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos\left(n(\varphi-\theta)\right)\right]d\theta. \tag{3.23}$$

Đặt $b=\frac{r}{R}$, $\psi=\varphi-\theta$, ta có

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos\left(n(\varphi-\theta)\right)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}b^n\cos n\psi$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}b^n\left(e^{in\psi}+e^{-in\psi}\right)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(be^{i\psi})^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(be^{-i\psi})^n$$

$$=1+\frac{be^{i\psi}}{1-be^{i\psi}}+\frac{be^{-i\psi}}{1-be^{-i\psi}}=\frac{1-b^2}{1-2b\cos\psi+b^2}$$

$$= \frac{1-b^2}{1-2b\cos(\varphi-\theta)+b^2} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2},$$

thay vào (3.23), ta có

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left[\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\right]d\theta \qquad (3.24)$$

được gọi là *tích phân Poisson*.

III. Giải bài toán biên Dirichlet trên miền hình chữ nhật cho phương trình Poisson bằng phương pháp tách biến

Phương trình Poisson hai chiều có dạng

$$u_{xx} + u_{yy} = F(x,y),$$

trong đó $F(x,y)$ là hàm cho trước và đóng vai trò là nguồn nhiệt. Nếu không có nguồn nhiệt thì $F(x,y) = 0$ và ta nhận được phương trình Laplace hai chiều đã xét trong phần trước.

Bài toán 3.1. Xét bài toán tìm hàm $u(x,y)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x,y), \ 0 < x < a, \ 0 < y < b, \\ u(x,0) = f_1(x), \quad 0 \le x \le a, \\ u(x,b) = f_2(x), \quad 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \end{cases}$$

trong đó $f_1(x)$, $f_2(x)$ và $F(x,y)$ là những hàm cho trước.

Ta giải bài toán trên theo các bước như sau

Bước 1 (Tìm $X_n(x)$): Xét

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ 0 < x < a, \ 0 < y < b, \\ u(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b. \end{cases}$$

Bằng phương pháp tách biến, ta tìm được

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a},\; n=1,2,3,\dots .$$

Bước 2: Tìm nghiệm bài toán 3.1 dưới dạng

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a},$$

ta có

$$u_{xx}(x,y)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a},$$

$$u_{yy}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n''(y)\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

Khai triển Fourier sin của hàm $F(x,y)$ trên $[0,a]$ theo biến x là

$$F(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a},$$

với

$$F_n(y)=\frac{2}{a}\int_0^a F(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx.$$

Từ $u_{xx}+u_{yy}=F(x,y)$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[Y_n''(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y)-F_n(y)\right]\sin\frac{n\pi x}{a}=0,$$

do đó

$$Y_n''(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y)=F_n(y),\; n=1,2,3,\dots .$$

Từ $\begin{cases}u(x,0)=f_1(x),\\ u(x,b)=f_2(x),\end{cases}$ ta được

$$\begin{cases}Y_n(0)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx,\\[2ex] Y_n(b)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f_2(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx,\end{cases}\quad n=1,2,3,\dots . \qquad (3.25)$$

Như vậy, để tìm $Y_n(y)$, ta giải bài toán

$$Y_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y) = F_n(y),\ n = 1,2,3,...$$

với điều kiện $Y_n(0)$ và $Y_n(b)$ trong (3.25). Từ đó, ta sẽ thu được nghiệm của bài toán 3.1.

Bài toán 3.2. Xét bài toán tìm hàm $u(x,y)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x,y),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le a, \\ u(x,b) = 0, & 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = g_1(y), & 0 \le y \le b, \\ u(a,y) = g_2(y), & 0 \le y \le b, \end{cases}$$

trong đó $g_1(y)$, $g_2(y)$ và $F(x,y)$ là những hàm cho trước.

Cách giải bài toán 3.2 hoàn toàn tương tự cách giải bài toán 3.1, với chú ý rằng, ở bước 1 ta sẽ tìm được họ hàm

$$Y_n(x) = \sin\frac{n\pi y}{b},\ n = 1,2,3,... .$$

Bài toán 3.3. Xét bài toán tìm hàm $u(x,y)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x,y),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(x,0) = f_1(x), & 0 \le x \le a, \\ u(x,b) = f_2(x), & 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = g_1(y), & 0 \le y \le b, \\ u(a,y) = g_2(y), & 0 \le y \le b, \end{cases}$$

trong đó $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ và $F(x,y)$ là những hàm cho trước.

Gọi $v(x,t)$ là nghiệm của bài toán (3.7)-(3.11) và $w(x,t)$ là nghiệm của bài toán 3.2. Khi đó, ta dễ dàng chứng minh được nghiệm của bài toán 3.3 là

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

Định lý 3.1. *Giả sử* Ω *là tập mở và bị chặn trong* $\mathbb{R}^2$ *với biên là* $\partial\Omega$, $u(x,y)$ *là hàm điều hòa, liên tục trên* $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. *Khi đó, ta có*

i) $\max\limits_{\Omega} u(x,y) = \max\limits_{\partial\Omega} u(x,y)$;

ii) $\min\limits_{\Omega} u(x,y) = \min\limits_{\partial\Omega} u(x,y)$.

Chứng minh. Trên Ω, xét hàm

$$v(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2),\ \varepsilon > 0.$$

Ta có

$$\Delta v = \Delta u(x,y) + \varepsilon\Delta(x^2 + y^2) = 0 + 4\varepsilon > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega.$$

Do đó, *v* không đạt giá trị cực đại trên Ω vì nếu không thì $v_{xx} < 0, v_{yy} < 0$ và vì vậy $\Delta v < 0$. Hơn nữa, vì *v* là hàm liên tục trên miền đóng, bị chặn $\overline{\Omega}$ nên *v* đạt giá trị cực đại trên $\overline{\Omega}$. Vì vậy, *v* đạt giá trị cực đại tại điểm (x_0, y_0) nào đó thuộc $\partial\Omega$. Từ đó, $\forall (x,y) \in \Omega$, ta có

$$u(x,y) \le v(x,y) \le v(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2) \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2).$$

Vì Ω bị chặn nên $\exists M > 0$ sao cho $x_0^2 + y_0^2 \le M$. Do đó

$$u(x,y) \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon M.$$

Cho $\varepsilon \to 0$, ta được $u(x,y) \le \max\limits_{\partial\Omega} u,\ \forall (x,y) \in \Omega$. Như vậy, *u* đạt giá trị cực đại trên $\partial\Omega$. Chứng minh tương tự cho trường hợp *u* đạt giá trị cực tiểu trên $\partial\Omega$.

Định lý đã được chứng minh. ■

Định lý 3.2. *Giả sử* Ω *là tập mở và bị chặn trong* $\mathbb{R}^2$ *với biên là* $\partial\Omega$. *Bài toán biên Dirichlet* $\Delta u = f$ *trên* Ω *và* $u\big|_{\partial\Omega} = h$ *có nghiệm duy nhất, trong đó f và h là những hàm cho trước.*

Chứng minh. Giả sử u_1 và u_2 là nghiệm của bài toán Dirichlet $\Delta u = f$ trên Ω và $u\big|_{\partial\Omega} = h$. Đặt $v = u_1 - u_2$. Khi đó, $\Delta v = 0$ trên Ω và $v\big|_{\partial\Omega} = 0$. Theo Định lý 3.1 thì $v(x,y) = 0$ trên Ω. Vì vậy, $u_1(x,y) = u_2(x,y)$. ■

IV. Bài toán biên Dirichlet trong nửa mặt phẳng trên

Xét bài toán tìm hàm $u(x,y)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<+\infty, \quad y>0, \\ u(x,y),\, u_x(x,y)\to 0 \text{ khi } x\to\pm\infty,\ \forall y>0, \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<+\infty, \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y)=0, & -\infty<x<+\infty, \end{cases}$$

trong đó $f(x)$ là hàm cho trước.

Lấy biến đổi Fourier hai vế của $u_{xx}+u_{yy}=0$ theo biến x, ta có

$$\hat{u}_{yy}(p,y)-p^2\hat{u}(p,y)=0.$$

Giải phương trình vi phân trên, ta được

$$\hat{u}(p,y)=A(p)e^{-|p|y}+B(p)e^{|p|y}.$$

Để $\lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thì ta chọn $B(p)=0,$ do đó

$$\hat{u}(p,y)=A(p)e^{-|p|y}.$$

Từ $u(x,0)=f(x)$, ta được $\hat{u}(p,0)=\hat{f}(p),$ do đó $A(p)=\hat{f}(p).$

Vì vậy, ta có

$$\hat{u}(p,y)=\hat{f}(p)e^{-|p|y}=\hat{f}(p)\hat{g}(p)=\widehat{f*g}(p),$$

với $\hat{g}(p)=e^{-|p|y}$.

Lấy biến đổi Fourier ngược, ta được

$$u(x,y)=f*g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)\,ds, \tag{3.26}$$

với $g(x)=\mathcal{F}^{-1}(\hat{g})=\mathcal{F}^{-1}(e^{-|p|y})$.

Ta có

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|p|}}{a},\ \forall a>0,$$

suy ra

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a|p|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{x^2 + a^2}, \ \forall a > 0.$$

Áp dụng kết quả trên với $a = y$, ta được

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|p|y}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2 + y^2}. \qquad (3.27)$$

Thay (3.27) vào (3.26), ta được nghiệm của bài toán là

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2}ds.$$

V. Bài toán biên Dirichlet trong nửa dải vô hạn

Bài toán 5.1. Xét bài toán tìm hàm $u(x, y)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ y > 0, \\ u(0, y) = 0, & y \geq 0, \\ u(a, y) = 0, & y \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq a, \\ \lim\limits_{y \to +\infty} u(x, y) = 0, & 0 \leq x \leq a, \end{cases}$$

trong đó $f(x)$ là hàm cho trước.

Bằng phương pháp tách biến, ta được

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{n\pi x}{a}\left(A_n e^{\frac{-n\pi y}{a}} + B_n e^{\frac{n\pi y}{a}}\right),$$

trong đó A_n và B_n là các hằng số.

Để $\lim\limits_{y \to +\infty} u(x, y) = 0,\ \forall x \in [0, a]$ thì ta chọn $B_n = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Do đó

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{\frac{-n\pi y}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

Ta có $u(x, 0) = f(x) \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\dfrac{n\pi x}{a} = f(x),$ với

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1,2,\dots .$$

Vậy, nghiệm của bài toán là

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{\frac{-n\pi y}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a},$$

với

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1,2,\dots .$$

Bài toán 5.2. Xét bài toán tìm hàm $u(x,y)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ y > 0, \\ u(0,y) = \varphi(y), & y \ge 0, \\ u(a,y) = \psi(y), & y \ge 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le a, \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = \lim\limits_{y\to+\infty} u_y(x,y) = 0, & 0 \le x \le a, \end{cases}$$

trong đó $\varphi(y)$ và $\psi(y)$ là các hàm cho trước.

Lấy biến đổi Fourier sin hai vế của $u_{xx} + u_{yy} = 0$ theo biến y, ta được

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} u_{xx}(x,y)\sin(py)dy + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} u_{yy}(x,y)\sin(py)dy = 0,$$

suy ra

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{+\infty} u(x,y)\sin(py)dy - \sqrt{\frac{2}{\pi}}p^2\int_0^{+\infty} u(x,y)\sin(py)dy = 0,$$

do đó, ta có

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{u}_s(x,p) - p^2\hat{u}_s(x,p) = 0,$$

suy ra

$$\hat{u}_s(x,p) = A(p)e^{-xp} + B(p)e^{xp}.$$

Từ $u(0,y) = \varphi(y)$, ta được $\hat{u}_s(0,p) = \hat{\varphi}_s(p)$, do đó

$$A(p)+B(p)=\widehat{\varphi}_s(p). \tag{3.28}$$

Từ $u(a,y)=\psi(y)$, ta được $\hat{u}_s(a,p)=\widehat{\psi}_s(p)$, do đó

$$A(p)e^{-ap}+B(p)e^{ap}=\widehat{\psi}_s(p) \tag{3.29}$$

Giải hệ (3.28) và (3.29), ta được

$$\begin{cases} A(p)=\dfrac{\widehat{\varphi}_s(p)e^{ap}-\widehat{\psi}_s(p)}{2\sinh(ap)}, \\ B(p)=\dfrac{\widehat{\psi}_s(p)-\widehat{\varphi}_s(p)e^{-ap}}{2\sinh(ap)}, \end{cases}$$

do đó $\hat{u}_s(x,p)=\dfrac{1}{\sinh(ap)}\left[\widehat{\varphi}_s(p)\sinh(a-x)p+\widehat{\psi}_s(p)\sinh xp\right].$

Vậy, nghiệm của bài toán là

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} u_s(x,p)\sin(py)dp \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(py)}{\sinh(ap)}\left[\widehat{\varphi}_s(p)\sinh(a-x)p+\widehat{\psi}_s(p)\sinh xp\right]dp. \end{aligned}$$

Bài toán 5.3. Xét bài toán tìm hàm $u(x,y)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ \ y>0, \\ u(0,y)=\varphi(y), & y\ge 0, \\ u(a,y)=\psi(y), & y\ge 0, \\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le a, \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty} u_y(x,y)=0, & 0\le x\le a, \end{cases}$$

trong đó $\varphi(y)$, $\psi(y)$ và $f(x)$ là các hàm cho trước.

Gọi $v(x,t)$ là nghiệm của bài toán 5.1 và $w(x,t)$ là nghiệm của bài toán 5.2. Khi đó, ta dễ dàng chứng minh được nghiệm của bài toán 5.3 là

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t).$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 1. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1, 0<y<1, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le 1, \\ u(x,1)=100, & 0\le x\le 1, \\ u(0,y)=0, & 0\le y<1, \\ u(1,y)=0, & 0\le y<1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1, 0<y<2, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le 1, \\ u(x,2)=x, & 0\le x\le 1, \\ u(0,y)=0, & 0\le y\le 2, \\ u(1,y)=0, & 0\le y\le 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1, 0<y<1, \\ u(x,0)=1-x, & 0\le x\le 1, \\ u(x,1)=x, & 0\le x\le 1, \\ u(0,y)=0, & 0< y\le 1, \\ u(1,y)=0, & 0\le y<1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<2,\ 0<y<1, \\ u(x,0)=100, & 0\le x\le 2, \\ u(x,1)=0, & 0\le x\le 2, \\ u(0,y)=0, & 0< y\le 1, \\ u(2,y)=100(1-y), & 0\le y\le 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le 1, \\ u(x,1)=3\sin\pi x+2x, & 0\le x\le 1, \\ u(0,y)=0, & 0< y\le 1, \\ u(2,y)=2y, & 0\le y\le 1. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1, 0<y<1, \\ u(x,0)=\sin 7\pi x, & 0\le x\le 1, \\ u(x,1)=\sin\pi x, & 0\le x\le 1, \\ u(0,y)=\sin 3\pi y, & 0\le y\le 1, \\ u(1,y)=\sin 6\pi y, & 0\le y\le 1. \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1, 0<y<1, \\ u(x,0)=1+\sin\pi x, & 0\le x\le 1, \\ u(x,1)=2, & 0\le x\le 1, \\ u(0,y)=u(1,y)=1+y, & 0\le y\le 1. \end{cases}$

Bài 2. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a, 0<y<b, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le a, \\ u_y(x,b)=f(x), & 0\le x\le a, \\ u(0,y)=0, & 0\le y\le b, \\ u(a,y)=0, & 0\le y\le b. \end{cases}$

b) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b, \\ u_y(x,0)+2u(x,0)=0, & 0\le x\le a, \\ u_y(x,b)=f(x), & 0\le x\le a, \\ u(0,y)=0, & 0\le y\le b, \\ u(a,y)=0, & 0\le y\le b. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le \pi, \\ u(x,\pi)=f(x), & 0\le x\le \pi, \\ u_x(0,y)=0, & 0\le y\le \pi, \\ u_x(\pi,y)=0, & 0\le y\le \pi. \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<\pi,\ 0<y<1, \\ u(x,0)=100, & 0\le x\le \pi, \\ u_y(x,1)=\sin 2x, & 0\le x\le \pi, \\ u(0,y)=0, & 0< y\le 1, \\ u(\pi,y)=0, & 0< y\le 1. \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi, \\ u_y(x,0)=0, & 0\le x\le \pi, \\ u_y(x,\pi)=x-\dfrac{\pi}{2}, & 0\le x\le \pi, \\ u_x(0,y)=0, & 0\le y\le \pi, \\ u_x(\pi,y)=0, & 0\le y\le \pi. \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<\pi,\ 0<y<2, \\ u_y(x,0)=0, & 0\le x\le \pi, \\ u_y(x,2)=2\sin 3x-5\sin 10x, & 0\le x\le \pi, \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0, & 0\le y\le 2. \end{cases}$$

Bài 3. Giải các bài toán sau

a) $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u(x,\pi) = 1,, & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, & 0 \le y < \pi. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = x, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = u_x(1,y) = 0, & 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Bài 4. Giải các bài toán sau

a) $$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \ 0 < r < 1, \ -\pi < \varphi < \pi, \\ u(1,\varphi) = 3\sin 5\varphi, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ u(r,-\pi) = u(r,\pi), \quad 0 \le r \le 1, \\ u_\varphi(r,-\pi) = u_\varphi(r,\pi), \quad 0 \le r \le 1, \\ \lim\limits_{r \to 0^+} |u(r,\varphi)| < +\infty, \quad -\pi \le \varphi \le \pi. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \ 0 < r < 1, \ -\pi < \varphi < \pi, \\ u(1,\varphi) = \begin{cases} 0, & -\pi \le \varphi < 0 \\ 100, & 0 < \varphi \le \pi \end{cases}, \\ u(r,-\pi) = u(r,\pi), \quad 0 \le r \le 1, \\ u_\varphi(r,-\pi) = u_\varphi(r,\pi), \quad 0 \le r \le 1, \\ \lim\limits_{r \to 0^+} |u(r,\varphi)| < +\infty, \quad -\pi \le \varphi \le \pi. \end{cases}$$

c) $\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \ 0 < r < R, \ -\pi < \varphi < \pi, \\ u_r(R,\varphi) = f(\varphi), \qquad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ u(r,-\pi) = u(r,\pi), \qquad 0 \le r \le 1, \\ u_\varphi(r,-\pi) = u_\varphi(r,\pi), \quad 0 \le r \le 1, \\ \lim\limits_{r\to 0^+} |u(r,\varphi)| < +\infty, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \end{cases}$

trong đó hàm f thỏa $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi = 0$.

d) $\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \ 0 < r < 1, 0 < \varphi < a, \\ u_r(1,\varphi) = -u(1,\varphi) - \varphi, \ 0 \le \varphi \le a, \\ u(r,0) = u(r,a) = 0, \quad 0 \le r \le 1, \\ \lim\limits_{r\to 0^+} |u(r,\varphi)| < +\infty, \quad 0 \le \varphi \le a. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad 0 < r < 1, 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{3}, \\ u(1,\varphi) = \dfrac{1}{3}\cos 9\varphi - \dfrac{1}{9}\cos 3\varphi, \ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}, \\ u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\dfrac{\pi}{3}) = 0, \qquad 0 \le r \le 1, \\ \lim\limits_{r\to 0^+} |u(r,\varphi)| < +\infty, \qquad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad 1 < r < 2, \ -\pi < \varphi < \pi, \\ u(1,\varphi) = u(2,\varphi) = \sin\varphi, \ -\pi \le \varphi \le \pi, \\ u(r,-\pi) = u(r,\pi), \qquad 0 \le r \le 1, \\ u_\varphi(r,-\pi) = u_\varphi(r,\pi), \qquad 0 \le r \le 1. \end{cases}$

Bài 5. Giải các bài toán sau

a) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=e^{2y}\sin x,\ 0<x<\pi,\ 0<y<1, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le \pi, \\ u(x,1)=\sin x, & 0\le x\le \pi, \\ u(0,y)=0, & 0\le y\le 1, \\ u(\pi,y)=0, & 0\le y\le 1. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=-\sin\pi x\cos\pi y,\ 0<x<1,\ 0<y<1, \\ u_y(x,0)=0, & 0\le x\le 1, \\ u_y(x,1)=0, & 0\le x\le 1, \\ u(0,y)=0, & 0\le y\le 1, \\ u(1,y)=\cos 2\pi y, & 0\le y\le 1. \end{cases}$$

Bài 6. Giải các bài toán sau

a) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1,\ y>0, \\ u(0,y)=0, & y>0, \\ u(1,y)=0, & y>0, \\ u(x,0)=1, & 0\le x\le 1, \\ \lim\limits_{y\to+\infty}u(x,y)=0, & 0\le x\le 1. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ y>0, \\ u(0,y)=0, & y\ge 0, \\ u_x(a,y)=0, & y\ge 0, \\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le a. \\ \lim\limits_{y\to+\infty}u(x,y)=0, & 0\le x\le a. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ y>0, \\ u_x(0,y)=0, & y\ge 0, \\ u_x(a,y)=0, & y\ge 0, \\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le 1, \\ \lim\limits_{y\to+\infty}u(x,y)=0, & 0\le x\le 1. \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ y>0, \\ u(0,y)=A, & y\ge 0, \\ u(a,y)=B, & y\ge 0, \\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le a, \\ \lim\limits_{y\to+\infty}u(x,y)=0, & 0\le x\le a, \end{cases}$$

với A, B là các hằng số cho trước.

Bài 7. Giải các bài toán sau

a) $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty,\ y > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4+x^2}, -\infty < x < +\infty, & \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty,\ y > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 100, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} & \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = 0, -\infty < x < +\infty. & \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty,\ y > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} & \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = 0, -\infty < x < +\infty. & \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty,\ y > 0, \\ u(x,0) = \cos x, & -\infty < x < +\infty, \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = 0, & -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

Bài 8. Dùng biến đổi Fourier cos chứng minh nghiệm của phương trình

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x > 0,\ y > 0,$$

trong đó

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

$$u_x(0,y) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,y) = \lim_{x\to+\infty} u_x(x,y) = 0,\ y > 0,$$

$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0$$

là

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{a+x}{y}\right)+\arctan\left(\frac{a-x}{y}\right)\right].$$

Biết rằng

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^{-1}\sin rxdx=\arctan\left(\frac{r}{s}\right), r,s>0.$$

Bài 9. Dùng biến đổi Fourier sin chứng minh rằng nghiệm của phương trình Laplace $\Delta u=0$ đối với u trong miền $x>0,\ 0<\mathrm{y}<\mathrm{b}$ kết hợp với các điều kiện

i) $u(x,0)=f(x)$

ii) $u(x,b)=0$

iii) $u(0,y)=0$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}u_x(x,y)=0,\ y>0$

được cho bởi biểu thức

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(s)\int_0^{+\infty}\frac{\sinh p(b-y)}{\sinh pb}\sin(xp)\sin(sp)dpds.$$

Bài 10. Cho phương trình Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0,\ x\in(-\infty,+\infty),\ y\in(0,a)$ thỏa điều kiện

$$u(x,0)=f(x)$$

$$u(x,a)=0.$$

Chứng minh rằng nghiệm của phương trình trên là

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sinh p(a-y)}{\sinh pa}f(s)\cos p(s-x)ds\right]dp.$$

Bài 11. Cho phương trình Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0,\ x>0,\ y>0$ thỏa điều kiện

$$u(0,y)=0$$

$$u(x,0)=f(x),$$

$$\lim_{x\to+\infty}u(x,y)=\lim_{x\to+\infty}u_x(x,y)=0,\ y>0.$$

Chứng minh rằng nghiệm của phương trình trên là

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-py} f(s)\sin(ps)\sin(px)\,ds\,dp.$$

Tích phân tương ứng theo p để biến đổi nghiệm này thành dạng

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^{+\infty} f(s)\left[\frac{1}{y^2+(s-x)^2}-\frac{1}{y^2+(s+x)^2}\right]ds\,.$$

Bài 12. Tìm nhiệt độ dừng trên một hình vuông có cạnh $a=\pi$ mét, với nhiệt độ ở biên trái là $\sin y\ {}^0C$, biên trên là $5\sin 2x-7\sin 8x\ {}^0C$, biên dưới và biên phải giữ ở $0\ {}^0C$.

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hảm số

$$u(x,y)=x^3-3xy^2+xy-x$$

trên miền $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$.

Bài 14. Cho $u(x,y)$ là hàm liên tục trên hình tròn đóng bán kính 1 và là hàm điều hoà trên hình tròn mở bán kính 1. Chứng minh rằng, nếu $u(\cos\varphi,\sin\varphi)\le\sin\varphi+\cos 2\varphi$ thì $u(x,y)\le y+x^2-y^2,\ \forall(x,y): x^2+y^2\le 1.$

Bài 15. Biên của một tấm kim loại mỏng có dạng hình quạt $(r\le R,\ 0\le\varphi\le\alpha)$ cho bởi nhiệt độ

$$u(r,\varphi)=\begin{cases} f(\varphi) & \text{khi } r=R,\\ 0 & \text{khi } \varphi\in\{0;\alpha\}.\end{cases}$$

Hãy tìm trường nhiệt dừng của tấm này, biết

$$f(\varphi)=\begin{cases} u_1 & \text{khi } 0<\varphi<\dfrac{\alpha}{2},\\[2ex] u_2 & \text{khi } \dfrac{\alpha}{2}<\varphi<\alpha.\end{cases}$$

Chương 4

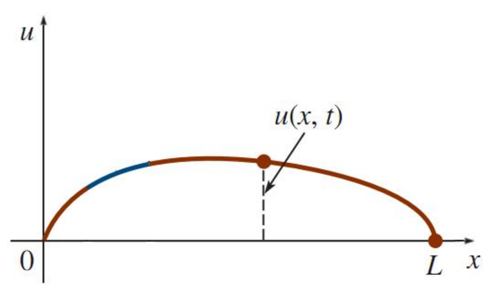
PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG

Chương này trình bày về phương trình truyền sóng. Đây là phương trình thuộc loại hyperbolic, nó đóng vai trò quan trọng vật lý và được thiết lập trên cơ sở nghiên cứu các dao động của: dây, màng mỏng, sóng âm, sóng đàn hồi… Chúng ta sẽ giải các bài toán dao động của dây, bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng. Tính duy nhất nghiệm của bài toán dao động của dây có lực tác dụng với điều kiện biên Dirichlet không thuần nhất cũng được chứng minh trong chương này.

I. Phương trình truyền sóng một chiều

1.1. Mô hình truyền sóng dẫn đến phương trình truyền sóng một chiều

Xét mô hình dẫn đến phương trình truyền sóng một chiều là bài toán dao động ngang của dây đàn hồi, chẳng hạn dây đàn guitar. Giả sử, dây có chiều dài L, với mọi điểm được căng ra theo chiều dài của trục Ox, dây được gắn chặt ở hai đầu $x = 0$ và $x = L$ như hình vẽ.



Ta kéo căng sợi dây khỏi vị trí cân bằng rồi thả cho dao động ở thời điểm $t = 0$.

Các đại lượng liên quan đến sợi dây:

ρ là *mật độ khối lượng* chiều dài của dây;

T là *lực căng* của dây.

Giả sử:

i) Dây là thuần nhất, tức là mật độ khối lượng mỗi đơn vị dài là như nhau.

ii) Dây là đàn hồi và không bị cản trở khi uốn cong.

iii) Lực trọng trường trên dây có thể bỏ qua.

iv) Mỗi điểm của dây chỉ dịch chuyển theo phương vuông góc với trục *Ox*.

Gọi $u(x,t)$ là *độ lệch* của dây tại điểm x tại thời điểm t. Khi đó, $u(x,t)$ thoả phương trình truyền sóng một chiều, tuyến tính, cấp hai, thuần nhất (xem [23])

$$u_{tt}(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < L,\ t > 0,$$

trong đó $k^2 = \dfrac{T}{\rho}$ là một hằng số dương.

Ngoài ra, ta còn có phương trình truyền sóng không thuần nhất

$$u_{tt}(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ 0 < x < L,\ t > 0,$$

trong đó $f(x,t)$ là *ngoại lực* tác dụng vào sợi dây.

Điều kiện ban đầu cho bài toán dao động của dây $u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \le x \le L$ cho biết *độ lệch ban đầu* và *vận tốc ban đầu* của dây.

1.2. Bài toán dao động của dây bị gắn chặt ở hai đầu

Xét bài toàn tìm hàm $u(x,t)$ thoả

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0, \quad (4.1) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, t \ge 0, & \quad (4.2) \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L, \quad (4.3) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le L, \quad (4.4) \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ là những hàm cho trước.

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = X(x)T(t) \ne 0,$$

ta có

$$u_{tt} = X(x)T''(t),$$
$$u_{xx} = X''(x)T(t),$$

thay vào $u_{tt} = k^2 u_{xx}$, ta được

$$T''(t)X(x) = k^2 X''(x)T(t),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{k^2 T(t)} = -\lambda,$$

do đó, ta có

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,,$$

$$T''(t) + k^2 \lambda T(t) = 0\,.$$

Từ $\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0, \\ X(L)T(t) = 0, \end{cases}$ ta được $X(0) = X(L) = 0$.

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ và } X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L},\ n = 1,2,\dots\,.$$

Tiếp theo, giải phương trình $T''(t) + k^2\lambda_n T(t) = 0$, ta được

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{kn\pi t}{L} + B_n \sin\frac{kn\pi t}{L},\ \ n = 1,2,\dots\,.$$

Vậy

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{kn\pi t}{L} + B_n \sin\frac{kn\pi t}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{4.5}$$

Ta có

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-kn\pi}{L}A_n \sin\frac{kn\pi t}{L} + \frac{kn\pi}{L}B_n \cos\frac{kn\pi t}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Hơn nữa, $u(x,0) = \varphi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \varphi(x)$, với

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1,2,\dots, \tag{4.6}$$

$u_t(x,0) = \psi(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn\pi}{L} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \psi(x)$, với

$$B_n = \frac{2}{kn\pi}\int_0^L \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1,2,\dots\,. \tag{4.7}$$

Định lý 1.1. *Nếu*

(i) $\varphi \in C^3[0,L]$ *và thỏa điều kiện* $\varphi(0)=\varphi(L)=0,\ \varphi''(0)=\varphi''(L)=0$,

(ii) $\psi \in C^2[0,L]$ *và thỏa điều kiện* $\psi(0)=\psi(L)=0$

thì chuỗi (4.5) *với* A_n *và* B_n *xác định theo công thức* (4.6), (4.7) *là nghiệm thực sự của bài toán* (4.1)-(4.4).

Chứng minh. Từ (4.6), bằng phương pháp tích phân từng phần, ta thu được

$$A_n = \frac{2}{L}\left[\frac{-L}{n\pi}\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L + \frac{L}{n\pi}\int_0^L \varphi'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)\int_0^L \varphi'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left[\varphi'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L \varphi''(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

$$= \frac{-2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\int_0^L \varphi''(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\left[\varphi''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

$$= \frac{-2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\int_0^L \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,\dots .$$

Tương tự, từ (4.7), ta được

$$B_n = \frac{-2}{kL}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\int_0^L \psi'''(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,\dots$$

Từ đó, với mọi số nguyên dương N, ta có

$$\frac{2}{L}\int_0^L\left|\varphi'''(x)+\left(\frac{\pi}{L}\right)^3\sum_{n=1}^N n^3 A_n\cos\frac{n\pi x}{L}\right|^2 dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L|\varphi'''(x)|^2dx - 2\left(\frac{\pi}{L}\right)^6\sum_{n=1}^N n^6|A_n|^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^6\sum_{n=1}^N n^6|A_n|^2$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L |\varphi'''(x)|^2\, dx - \left(\frac{\pi}{L}\right)^6 \sum_{n=1}^{N} n^6 |A_n|^2$$

nghĩa là

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^6 \sum_{n=1}^{N} n^6 |A_n|^2 \le \frac{2}{L}\int_0^L |\varphi'''(x)|^2\, dx\,,$$

suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{N} n^6 |A_n|^2$ hội tụ. Tương tự, ta cũng có chuỗi $\sum_{n=1}^{N} n^6 |B_n|^2$ hội tụ.

Từ đẳng thức

$$2n^2 |A_n| = \left(\frac{1}{n^2} + n^6 |A_n|^2\right) - \left(\frac{1}{n} - n^3 |A_n|\right)^2$$

suy ra

$$n^2 |A_n| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + n^6 |A_n|^2\right),$$

tương tự, ta có

$$n^2 |B_n| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + n^6 |B_n|^2\right).$$

Từ các đánh giá trên suy ra sự hội tụ của các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n|$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |B_n|$.

Từ đó, ta sẽ suy ra được điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 1.1. Giải các bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\, t \ge 0, & \\ u(x,0) = x(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Giải

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = X(x)T(t) \ne 0\,,$$

ta có

$$u_{tt} = X(x)T''(t),$$
$$u_{xx} = X''(x)T(t),$$

thay vào $u_{tt} = u_{xx}$, ta được

$$T''(t)X(x) = X''(x)T(t),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

do đó, ta có

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Từ $\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0, \\ X(1)T(t) = 0, \end{cases}$ ta được $X(0) = X(1) = 0$.

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \text{ và } X_n(x) = \sin(n\pi x),\ n = 1,2,\dots .$$

Giải phương trình $T''(t) + \lambda_n T(t) = 0$, ta được

$$T_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t),\ \ n = 1,2,\dots .$$

Ta có

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)\right]\sin(n\pi x),$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n\pi A_n \sin(n\pi t) + n\pi B_n \cos(n\pi t)\right]\sin(n\pi x).$$

Hơn nữa, $u(x,0) = x(1-x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = x(1-x)$, với

$$A_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)dx = \frac{4}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right], n = 1,2,\dots,$$

$$u_t(x,0)=0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin(n\pi x)=0, \text{ với } B_n=0,\ n=1,2,\dots.$$

Vậy, nghiệm của bài toán là

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^3}\cos(n\pi t)\sin(n\pi x) \\ &= \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\left[(2n+1)\pi t\right]\sin\left[(2n+1)\pi x\right]. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2. Tìm độ lệch của dây rung có độ dài 3π không có ngoại lực tác dụng, cố định ở hai đầu, với độ lệch ban đầu là $\sin 5x$ và vận tốc ban đầu là $\sin x$. Cho biết $k^2=2.$

Giải

Gọi $u(x,t)$ là độ lệch của dây rung ($0\le x\le 3\pi$, $t\ge 0$). Ta cần tìm $u(x,t)$ thoả

$$\begin{cases} u_{tt}=2u_{xx}, & 0<x<3\pi,\ t>0, \\ u(0,t)=u(3\pi,t)=0, & t\ge 0, \\ u(x,0)=\sin 5x, & 0\le x\le 3\pi, \\ u_t(x,0)=\sin x, & 0\le x\le 3\pi. \end{cases}$$

Tương tự ví dụ 1.1, ta có

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\sqrt{2}nt}{3}+B_n\sin\frac{\sqrt{2}nt}{3}\right)\sin\frac{nx}{3},$$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}n}{3}A_n\sin\frac{\sqrt{2}nt}{3}+\frac{\sqrt{2}n}{3}B_n\cos\frac{\sqrt{2}nt}{3}\right)\sin\frac{nx}{3}.$$

Hơn nữa, $u(x,0)=\sin 5x \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{nx}{3}=\sin 5x$, với

$$\begin{cases} A_{15}=1, \\ A_n=0,\ \forall n\ne 15. \end{cases}$$

$$u_t(x,0)=\sin x \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}n}{3}B_n\sin\frac{nx}{3}=\sin x, \text{ với}$$

$$\begin{cases} B_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ B_n = 0, \forall n \neq 3. \end{cases}$$

Vậy, độ lệch của dây rung là

$$\begin{aligned} u(x,t) &= B_3 \sin(\sqrt{2}t)\sin x + A_{15}\cos(5\sqrt{2}t)\sin(5x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\sin x + \cos(5\sqrt{2}t)\sin(5x). \end{aligned}$$

1.3. Bài toán dao động của dây có lực tác dụng và điều kiện biên thuần nhất

Bài toán 1.3.1. Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx} + \boldsymbol{f(x,t)}, \ \ 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

trong đó $f(x,t)$ cho trước, thể hiện như là *lực tác dụng*.

Ta giải bài toán trên theo các bước như sau

Bước 1 (Tìm $X_n(x)$): Xét

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx}, \ 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0. \end{cases}$$

Bằng phương pháp tách biến, ta tìm được

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \ n = 1,2,3,\ldots .$$

Bước 2: Tìm nghiệm của bài toán 1.2.1 dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

ta có

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Khai triển Fourier sin của hàm $f(x,t)$ trên $[0,L]$ theo biến x là

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

với

$$f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1,2,3\dots.$$

Từ $u_{tt} = k^2 u_{xx} + f(x,t)$, ta có

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[T_n''(t) + \left(\frac{kn\pi}{L}\right)^2 T_n(t) - f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L} = 0,$$

do đó

$$T_n''(t) + \left(\frac{kn\pi}{L}\right)^2 T_n(t) = f_n(t),\ n = 1,2,3\dots.$$

Từ $\begin{cases} u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases}$ ta được $\begin{cases} T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 0, \end{cases}$ $n = 1,2,3\dots$

Như vậy, để tìm $T_n(t)$, ta giải bài toán

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{n\pi k}{L}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0, \end{cases} n = 1,2,3\dots$$

bằng phương pháp hệ số bất định hoặc phương pháp biến thiên hệ số.

Ví dụ 1.3. Giải bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Giải

Bước 1: Xét

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0,$$

ta có

$$u_{tt} = X(x)T''(t),$$
$$u_{xx} = X''(x)T(t),$$

thay vào $u_{tt} = u_{xx}$, ta được

$$T''(t)X(x) = X''(x)T(t),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

do đó, ta có

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Từ $\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0, \\ X(1)T(t) = 0, \end{cases}$ ta được $X(0) = X(1) = 0$.

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$X_n(x) = \sin(n\pi x),\ n = 1,2,\dots .$$

Bước 2: Ta tìm nghiệm của bài toán ban đầu dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x),$$

ta có

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin(n\pi x),$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin(n\pi x),$$

$$u_{xx}(x,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2T_n(t)\sin(n\pi x).$$

Hơn nữa, $\sin(2\pi x)\sin(2\pi t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin(n\pi x)$, với

$$\begin{cases} f_2(t)=\sin(2\pi t), \\ f_n(t)=0,\ \forall n\neq 2. \end{cases}$$

Từ $u_{tt}=u_{xx}+\sin(2\pi x)\sin(2\pi t)$, ta có

$$T_n''(t)+n^2\pi^2T_n(t)=f_n(t),\ \ n=1,2,3,\dots .$$

Từ $\begin{cases} u(x,0)=0, \\ u_t(x,0)=0, \end{cases}$ ta được $\begin{cases} T_n(0)=0, \\ T_n'(0)=0, \end{cases}$ $n=1,2,3\dots .$

Với $n\neq 2$ thì $f_n(t)=0$, ta giải bài toán

$$\begin{cases} T_n''(t)+n^2\pi^2T_n(t)=0, \\ T_n(0)=T_n'(0)=0, \end{cases}$$

thu được $T_n(t)=0$, $\forall n\neq 2$.

Với $n=2$ thì $f_2(t)=\sin 2\pi t$, ta giải bài toán sau

$$\begin{cases} T_2''(t)+4\pi^2T_2(t)=\sin 2\pi t, \\ T_2(0)=T_2'(0)=0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Xét phương trình thuần nhất

$$T_2''(t)+4\pi^2T_2(t)=0. \tag{4.9}$$

Phương trình đặc trưng $k^2+4\pi^2=0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k=2\pi i, \\ k=-2\pi i. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (4.9) là

$$T_2^0(t)=C_1\cos(2\pi t)+C_2\sin(2\pi t),$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình không thuần nhất (4.8) dưới dạng

$$T_2^p(t) = t\left[A\cos(2\pi t) + B\sin(2\pi t)\right],$$

suy ra

$$T_2^{p''}(t) = -4\pi A\sin(2\pi t) + 4\pi B\cos(2\pi t) - 4\pi^2 t\left[A\cos(2\pi t) + B\sin(2\pi t)\right],$$

thay vào (4.8), ta được

$$-4\pi A\sin(2\pi t) + 4\pi B\cos(2\pi t) = \sin(2\pi t).$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\begin{cases} -4\pi A = 1, \\ 4\pi B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-1}{4\pi}, \\ B = 0, \end{cases}$$

suy ra

$$T_2^p(t) = \frac{-t}{4\pi}\cos(2\pi t).$$

Do đó, nghiệm tổng quát của (4.8) là

$$T_2(t) = T_2^0(t) + T_2^p(t) = C_1\cos(2\pi t) + C_2\sin(2\pi t) - \frac{t}{4\pi}\cos(2\pi t),$$

suy ra

$$T_2'(t) = -2\pi C_1\sin(2\pi t) + 2\pi C_2\cos(2\pi t) - \frac{1}{4\pi}\left[\cos(2\pi t) - 2\pi t\sin(2\pi t)\right].$$

Từ $\begin{cases} T_2(0) = 0, \\ T_2'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = \dfrac{1}{8\pi^2}, \end{cases}$ suy ra $T_2(t) = \dfrac{1}{8\pi^2}\sin(2\pi t) - \dfrac{t}{4\pi}\cos(2\pi t).$

Vậy, nghiệm của bài toán ban đầu là

$$u(x,t) = \left[\frac{1}{8\pi^2}\sin(2\pi t) - \frac{t}{4\pi}\cos(2\pi t)\right]\sin(2\pi x).$$

Bài toán 1.3.2. Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx} + \boldsymbol{f(x,t)},\ 0 < x < L, t > 0, \\ \text{Điều kiện biên} = 0, t \geq 0, \\ u(x,0) = \boldsymbol{\varphi(x)}, \qquad 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = \boldsymbol{\psi(x)}, \qquad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ là những hàm cho trước.

Ta giải bài toán trên theo các bước như sau

Bước 1 (Tìm $X_n(x)$): Xét

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx},\ 0 < x < L, t > 0, \\ \text{Điều kiện biên} = 0,\ t \geq 0. \end{cases}$$

Bằng phương pháp tách biến, ta sẽ tìm được $\boldsymbol{X_n(x)}$.

Bước 2: Tìm nghiệm của bài toán 1.3.2 dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) \boldsymbol{X_n(x)},$$

với $\boldsymbol{X_n(x)}$ đã tìm được ở bước 1.

Sau đó, ta làm tương tự bước 2 của bài toán 1.3.1. Chú ý rằng, lúc này từ

$$u(x,0) = \varphi(x) \Leftrightarrow, \sum_n T_n(0) \boldsymbol{X_n(x)} = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \Leftrightarrow \sum_n T_n'(0) \boldsymbol{X_n(x)} = \psi(x),$$

với $T_n(0)$, $T_n'(0)$ là hệ số của khai triển Fourier theo họ hàm $\boldsymbol{X_n(x)}$, được tính bởi công thức phù hợp.

1.4. Bài toán dao động của dây có lực tác dụng và điều kiện biên không thuần nhất

Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < L, t > 0, & (4.10) \\ u(0,t) = \varphi_1(t), \qquad t \geq 0, & (4.11) \\ u(L,t) = \varphi_2(t), \qquad t \geq 0, & (4.12) \\ u(x,0) = \psi_1(x), \qquad 0 \leq x \leq L, & (4.13) \\ u_t(x,0) = \psi_2(x), \qquad 0 \leq x \leq L, & (4.14) \end{cases}$$

trong đó $f(x,t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_1(x)$ và $\psi_2(x)$ là những hàm cho trước.

Cách giải bài toán (4.10)-(4.14) hoàn toàn tương tự cách giải bài toán cho phương trình truyền nhiệt trong trường hợp điều kiện biên không thuần nhất (Xem mục 2.4, chương 2).

Định lý 1.2 (Tính duy nhất nghiệm của bài toán (4.10)-(4.14)). *Giả sử* $\varphi_1, \varphi_2 \in C\big([0,+\infty)\big), \psi_1, \psi_2 \in C\big([0,L]\big), f \in C\big((0,L)\times(0,+\infty)\big)$ *thì tồn tại nhiều nhất một nghiệm* $u \in C^2\big([0,L]\times[0,+\infty)\big)$ *của bài toán (4.10)-(4.14).*

Chứng minh. Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm của bài toán (4.10)-(4.14). Đặt $w = u_1 - u_2$, khi đó w thỏa

$$\begin{cases} w_{tt} = k^2 w_{xx}, \ \ 0 < x < L, t > 0, \\ w(0,t) = 0, \ \ t \geq 0, \\ w(L,t) = 0, \ \ t \geq 0, \\ w(x,0) = 0, \ \ 0 \leq x \leq L, \\ w_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Xét hàm

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[k^2 w_x^2(x,t) + w_t^2(x,t)\right]dx, \ t \geq 0.$$

Ta có

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left[k^2 w_x^2 + w_t^2\right]dx = \int_0^L \left[k^2 w_x w_{xt} + w_t w_{tt}\right]dx$$

$$= k^2\left[w_x w_t\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L w_t w_{xx} dx\right] + \int_0^L w_t w_{tt} dx.$$

Từ $\begin{cases} w(0,t)=0, \\ w(L,t)=0, \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} w_t(0,t)=0, \\ w_t(L,t)=0, \end{cases}$ do đó

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\int_0^L w_t\left(w_{tt}-k^2w_{xx}\right)dx=0,\ t\ge 0,$$

suy ra

$$E(t)=C,\ \forall t\ge 0 \quad (C \text{ là hằng số}).$$

Từ $\begin{cases} w(x,0)=0, \\ w_t(x,0)=0, \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} w_x(x,0)=0, \\ w_t(x,0)=0. \end{cases}$

Do đó, ta được

$$C=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^L\left[k^2w_x^2(x,0)+w_t^2(x,0)\right]dx=0,$$

suy ra $E(t)=0,\ \forall t\ge 0$. Vì vậy, ta có $\begin{cases} w_x(x,t)=0, \\ w_t(x,t)=0, \end{cases}$ suy ra $w(x,t)=D$, D là hằng số, $\forall (x,t)\in[0,L]\times[0,+\infty)$. Hơn nữa, từ điều kiện $w(x,0)=0$ ta được $w(x,t)=0$, $\forall (x,t)\in[0,L]\times[0,+\infty)$. Vậy, $u_1=u_2$. ∎

II. Phương trình truyền sóng hai chiều

Xét bài toán dao động trên màng chữ nhật

$$\begin{cases} u_{tt}=k^2(u_{xx}+u_{yy}), & 0<x<a,\ 0<y<b,\ t>0, \\ u(0,y,t)=u(a,y,t)=0,\ 0\le y\le b,\ t\ge 0, \\ u(x,0,t)=u(x,b,t)=0,\ 0\le x\le a,\ t\ge 0, \\ u(x,y,0)=f(x,y), & 0\le x\le a, 0\le y\le b, \\ u_t(x,y,0)=g(x,y), & 0\le x\le a, 0\le y\le b, \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là những hàm cho trước.

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)\ne 0,$$

ta có

$$u_{tt} = X(x)Y(y)T''(t),$$
$$u_{xx} = X''(x)Y(y)T(t),$$
$$u_{yy} = X(x)Y''(y)T(t),$$

thay vào $u_{tt} = k^2(u_{xx} + u_{yy})$, ta được

$$\frac{T''(t)}{k^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda\,,$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\gamma$$

do đó, ta có

$$T''(t) + k^2\lambda T(t) = 0$$

và

$$X''(x) + \gamma X(x) = 0,$$

$$Y''(y) + (\lambda - \gamma)Y(y) = 0\,.$$

Từ $\begin{cases} u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0)Y(y)T(t) = 0, \\ X(a)Y(y)T(t) = 0, \\ X(x)Y(0)T(t) = 0, \\ X(x)Y(b)T(t) = 0, \end{cases}$ ta được

$$\begin{cases} X(0) = X(a) = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Xét bài toán

$$\begin{cases} X''(x) + \gamma X(x) = 0,\ 0 < x < a, \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$\gamma_m = \frac{m^2\pi^2}{a^2} \text{ và } X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a},\ m = 1,2,3,\dots\,.$$

Cho $\gamma = \gamma_m$, xét bài toán

$$\begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \gamma_m)Y(y) = 0,\ 0 < y < b, \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

ta có

$$\lambda - \gamma_m = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \text{ và } Y_n(x) = \sin\frac{n\pi y}{b},\ n = 1,2,3,...,$$

suy ra

$$\lambda_{mn} = \frac{n^2\pi^2}{b^2} + \gamma_m = \frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} = \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2}\right)\pi^2.$$

Tiếp theo, giải phương trình $T''(t) + k^2\lambda_{mn}T(t) = 0$, ta được

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos(k\lambda_{mn}t) + B_{mn}\sin(k\lambda_{mn}t),\ n,m = 1,2,...$$

Ta có

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_{mn}\cos(k\lambda_{mn}t) + B_{mn}\sin(k\lambda_{mn}t)\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$u_t(x,y,t) = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}k\lambda_{mn}\left[-A_{mn}\sin(k\lambda_{mn}t) + B_{mn}\cos(k\lambda_{mn}t)\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Hơn nữa, $u(x,y,0) = f(x,y) \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = f(x,y)$, với

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy,\ m,n = 1,2,...,$$

$$u_t(x,y,0) = g(x,y) \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}k\lambda_{nm}B_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} = g(x,y), \text{ với}$$

$$B_{mn} = \frac{4}{abk\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{a}dxdy,\ m,n = 1,2,...\ .$$

III. Giải bài toán Cauchy một chiều cho phương trình truyền sóng bằng phương pháp biến đổi Fourier

3.1. Bài toán Cauchy thuần nhất

Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \quad (4.15) \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \quad (4.16) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty, \quad (4.17) \end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ là những hàm cho trước.

Cách 1: Bằng phép đổi biến

$$\begin{cases} \xi = x - kt, \\ \eta = x + kt, \end{cases}$$

ta dễ dàng tìm được dạng chính tắc của phương trình (4.15) là

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Từ đó, ta được

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

với F là hàm tùy ý theo biến ξ và G là hàm tùy ý theo biến η.

Do đó, ta có nghiệm tổng quát của (4.15) là

$$u(x,t) = F\left(x - kt\right) + G\left(x + kt\right). \quad (4.18)$$

Từ (4.16) và (4.17), ta có

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x), \\ -k\left[F'(x) - G'(x)\right] = \psi(x). \end{cases}$$

Khi đó, ta được

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) - \dfrac{1}{2k}\displaystyle\int_0^x \psi(s)ds + \dfrac{C}{2}, \\ G(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) + \dfrac{1}{2k}\displaystyle\int_0^x \psi(s)ds - \dfrac{C}{2}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Từ (4.18) và (4.19), ta nhận được

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+kt) + \varphi(x-kt)}{2} + \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} \psi(s)ds. \quad (4.20)$$

Công thức (4.20) cho ta nghiệm của bài toán (4.15)-(4.17) nếu $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ và $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Cách 2: Lấy biến đổi Fourier hai vế của $u_{tt} = k^2 u_{xx}$ theo biến *x*, ta có

$$\hat{u}_{tt}(p,t) + k^2 p^2 \hat{u}(p,t) = 0. \tag{4.21}$$

Hơn nữa, từ $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$ ta được $\begin{cases} \hat{u}(p,0) = \hat{\varphi}(p), \\ \hat{u}_t(p,0) = \hat{\psi}(p). \end{cases}$ (4.22)

Với $p \neq 0$, giải phương trình vi phân (4.21) với điều kiện (4.22), ta được

$$\hat{u}(p,t) = \hat{\varphi}(p)\cos(kpt) + \frac{\hat{\psi}(p)}{kp}\sin(kpt), \ \ p \neq 0. \tag{4.23}$$

Với $p = 0$, ta dễ dàng có được

$$\hat{u}(0,t) = \hat{\varphi}(0) + t\hat{\psi}(0). \tag{4.24}$$

Từ (4.23) và (4.24), ta có

$$\hat{u}(p,t) = \begin{cases} \hat{\varphi}(p)\cos(kpt) + \dfrac{\hat{\psi}(p)}{kp}\sin(kpt), \ p \neq 0, \\ \hat{\varphi}(0) + t\hat{\psi}(0), \qquad\qquad p = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{\varphi}(p)e^{ikpt} + \frac{1}{2}\hat{\varphi}(p)e^{-ikpt} + \frac{1}{k}\hat{g}(p)\hat{\psi}(p), \ p \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{\varphi}(p)e^{ikpt} + \frac{1}{2}\hat{\varphi}(p)e^{-ikpt} + \frac{1}{k}\widehat{g * \psi}(p), \ p \in \mathbb{R}, \tag{4.25}$$

trong đó

$$\hat{g}(p) = \begin{cases} \dfrac{\sin(kpt)}{p}, \ p \neq 0, \\ kt, \qquad p = 0. \end{cases}$$

Từ (4.25), lấy biến đổi Fourier ngược với chú ý rằng

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \ |x| < kt, \\ 0, \quad |x| > kt, \end{cases}$$

ta được nghiệm của bài toán là

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+kt)+\varphi(x-kt)}{2}+\frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt}\psi(s)ds. \qquad (4.26)$$

Ví dụ 3.1. Dựa vào công thức nghiệm tổng quát (4.26), hãy tìm nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0,\\ u(x,0)=x(1-x), & x\in\mathbb{R},\\ u_t(x,0)=8x, & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Giải

Áp dụng công thức (4.26) với

$$k=2, \varphi(x)=x(1-x), \psi(x)=8x,$$

ta được nghiệm là

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{\varphi(x+2t)+\varphi(x-2t)}{2}+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}8sds\\ &=-4t^2+x-x^2+8xt.\end{aligned}$$

3.2. Bài toán Cauchy không thuần nhất

Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_{tt}=k^2u_{xx}+f(x,t), -\infty<x<+\infty, t>0, & (4.27)\\ u(x,t),u_x(x,t)\to 0 \text{ khi } x\to\pm\infty, \forall t>0, & (4.28)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<+\infty, & (4.29)\\ u_t(x,0)=\psi(x), -\infty<x<+\infty, & (4.30)\end{cases}$$

trong đó k là hằng số dương, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ là những hàm cho trước.

Gọi $v(x,t)$, $w(x,t)$ lần lượt là nghiệm của hai bài toán sau

$$\begin{cases} v_{tt}=k^2v_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0, & (4.31)\\ v(x,t),v_x(x,t)\to 0 \text{ khi } x\to\pm\infty, \forall t>0, & (4.32)\\ v(x,0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<+\infty, & (4.33)\\ v_t(x,0)=\psi(x), -\infty<x<+\infty, & (4.34)\end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt} = k^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < +\infty,\ t > 0, & (4.35)\\ w(x,t), w_x(x,t) \to 0 \text{ khi } x \to \pm\infty,\ \forall t > 0, & (4.36)\\ w(x,0) = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, & (4.37)\\ w_t(x,0) = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, & (4.38)\end{cases}$$

Khi đó, dễ dàng chứng minh được nghiệm của bài toán (4.27)-(4.30) là

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

Từ mục 3.1, ta được nghiệm của bài toán (4.31)-(4.34) là

$$v(x,t) = \frac{\varphi(x+kt) + \varphi(x-kt)}{2} + \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} \psi(s)ds.$$

Tiếp theo, ta tìm nghiệm của bài toán (4.35)-(4.38) bằng phương pháp biến đổi Fourier.

Lấy biến đổi Fourier hai vế của $w_{tt} = k^2 w_{xx} + f(x,t)$ theo biến x, ta có

$$\widehat{w}_{tt}(p,t) + k^2 p^2 \widehat{w}(p,t) = \widehat{f}(p,t). \qquad (4.39)$$

Hơn nữa, từ $\begin{cases} w(x,0) = 0, \\ w_t(x,0) = 0, \end{cases}$ ta được $\begin{cases} \widehat{w}(p,0) = 0, \\ \widehat{w}_t(p,0) = 0. \end{cases}$ (4.40)

Với $p \neq 0$, giải phương trình vi phân thuần nhất

$$\widehat{w}_{tt}(p,t) + k^2 p^2 \widehat{w}(p,t) = 0,$$

ta được

$$\widehat{w}_0(p,t) = A(p)\cos(kpt) + B(p)\sin(kpt).$$

Ta tìm được nghiệm đặc biệt của phương trình không thuần nhất (4.39) bằng phương pháp biến thiên hệ số là

$$\widehat{w}_*(p,t) = \left[A(p,0) - \int_0^t \frac{\sin(kps)}{kp}\widehat{f}(p,s)ds\right]\cos(kpt)$$
$$+\left[B(p,0) + \int_0^t \frac{\cos(kps)}{kp}\widehat{f}(p,s)ds\right]\sin(kpt),\ p \neq 0.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của (4.39) là

$$\begin{aligned}\widehat{w}(p,t) &= \widehat{w}_0(p,t)+\widehat{w}_*(p,t)\\ &= A(p)\cos(kpt)+B(p)\sin(kpt)\\ &\quad+\left[A(p,0)-\int_0^t \frac{\sin(kps)}{kp}\widehat{f}(p,s)ds\right]\cos(kpt)\\ &\quad+\left[B(p,0)+\int_0^t \frac{\cos(kps)}{kp}\widehat{f}(p,s)ds\right]\sin(kpt),\ p\neq 0.\end{aligned}$$

Từ (4.40) ta được $\begin{cases} A(p,0)=-A(p),\\ B(p,0)=-B(p),\end{cases}$ suy ra

$$\widehat{w}(p,t)=\left[-\int_0^t \frac{\sin(kps)}{kp}\widehat{f}(p,s)ds\right]\cos(kpt)+\left[\int_0^t \frac{\cos(kps)}{kp}\widehat{f}(p,s)ds\right]\sin(kpt)$$

$$=\int_0^t \frac{1}{kp}\widehat{f}(p,s)\left[-\sin(kps)\cos(kpt)+\cos(kps)\sin(kpt)\right]ds$$

$$=\int_0^t \frac{1}{kp}\widehat{f}(p,s)\sin\left[k(t-s)p\right]ds,\ p\neq 0. \tag{4.41}$$

Với $p=0$, ta dễ dàng tìm được

$$\widehat{w}(0,t)=\int_0^t (t-s)\widehat{f}(0,s)ds. \tag{4.42}$$

Từ (4.41) và (4.42), ta có

$$\widehat{w}(p,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t \frac{1}{kp}\widehat{f}(p,s)\sin\left[k(t-s)p\right]ds, & p\neq 0,\\ \displaystyle\int_0^t (t-s)\widehat{f}(0,s)ds, & p=0\end{cases}$$

$$=\int_0^t \frac{1}{k}\hat{g}(p,s)\widehat{f}(p,s)ds\ ,\ p\in\mathbb{R}$$

$$=\int_0^t \frac{1}{k}\widehat{g*f}(p,s)ds\ ,\ p\in\mathbb{R}\ , \tag{4.43}$$

trong đó

$$\hat{g}(p,s)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[k(t-s)p\right]}{p}, & p\neq 0,\\ k(t-s), & p=0.\end{cases}$$

Từ (4.43), lấy biến đổi Fourier ngược với chú ý rằng

$$g(x,s)=\mathcal{F}^{-1}(\hat{g})=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & |x|<k(t-s),\\ 0, & |x|>k(t-s),\end{cases}$$

ta được nghiệm của bài toán (4.35)-(4.38) là

$$w(x,t)=\frac{1}{2k}\int_0^t\left[\int_{x-k(t-s)}^{x+k(t-s)} f(r,s)dr\right]ds.$$

Vậy, nghiệm của bài toán Cauchy tổng quát cho phương trình truyền sóng là

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

$$=\frac{\varphi(x+kt)+\varphi(x-kt)}{2}+\frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt}\psi(s)ds+\frac{1}{2k}\int_0^t\left[\int_{x-k(t-s)}^{x+k(t-s)} f(r,s)dr\right]ds. \qquad (4.44)$$

Ví dụ 3.2. Dựa vào công thức nghiệm tổng quát (4.44), tìm nghiệm của bài toán

$$\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}+xt,\\ u(x,0)=x^2,\\ u_t(x,0)=x.\end{cases}$$

Giải

Áp dụng công thức (4.44), ta được

$$u(x,t)=\frac{(x+2t)^2+(x-2t)^2}{2}+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} sds+\frac{1}{4}\int_0^t\left[\int_{x-2(t-s)}^{x+2(t-s)} rsdr\right]ds.$$

Ta có

$$\frac{(x+2t)^2+(x-2t)^2}{2}=x^2+4t^2,\quad \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} sds=\frac{(x+2t)^2-(x-2t)^2}{8}=xt,$$

$$\frac{1}{4}\int_0^t\left[\int_{x-2(t-s)}^{x+2(t-s)} rsdr\right]ds = \frac{1}{8}\int_0^t s\left[\left(x+2(t-s)\right)^2 - \left(x-2(t-s)\right)^2\right]ds$$

$$= x\int_0^t s(t-s)ds = x\left(t\int_0^t sds - \int_0^t s^2ds\right) = \frac{xt^3}{6}.$$

Vậy, nghiệm của bài toán là $u(x,t) = x^2 + 4t^2 + xt + \dfrac{xt^3}{6}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài 1. Giải các bài toán sau

a) $$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \ge 0, & \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \ge 0, & \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \ge 0, & \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \cos^2 \pi x, & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = \sin^2 \pi x \cos \pi x,\ 0 \le x \le 1. & \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin \pi x + 3\sin 2\pi x - \sin 5\pi x,\ 0 \le x \le 1, & \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \ge 0, & \\ u(x,0) = x(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = \sin \pi x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

g) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 8\sin 13\pi x - 2\sin 31\pi x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = -\sin 8\pi x + 12\sin 88\pi x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{5\pi}{2}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{2}x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

j) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{2}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = \cos\dfrac{3\pi}{2}x + \cos\dfrac{5\pi}{2}x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

Bài 2. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^t \sin 5x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x,0) = \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin\dfrac{\pi}{2}x\sin t, \ 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = 0, \qquad\qquad 0 \le x \le 1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos 3x \cos 2t, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) = \cos^2 x, \qquad 0 \le x \le \pi, \\ u_t(x,0) = 1, \qquad\qquad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Bài 3. Giải các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = 1, \qquad t \ge 0, \\ u(1,t) = 2\pi, \qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = x + \pi, \ 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) = t, \qquad t \ge 0, \\ u_x(\pi,t) = 1, \qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{1}{2}x, \ 0 \le x \le \pi, \\ u_t(x,0) = 1, \qquad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1, \qquad 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \qquad t \ge 0, \\ u(\pi,t) = \dfrac{-\pi^2}{2}, \qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

d) $$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = (1-x)\cos t - \dfrac{4}{\pi}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = \cos t - 1, & t \ge 0, \\ u_x(\pi,t) = \cos t, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \dfrac{x^2}{2\pi}, & 0 \le x \le \pi, \\ u_t(x,0) = \cos 3x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} - \dfrac{x}{\pi}\sin t, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(\pi,t) = \sin t, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ u_t(x,0) = -\sin 3x + \dfrac{x}{\pi}, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Bài 4. Giải các bài toán sau

a) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \ge 0, & \\ u(x,0) = x^2 - x, & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 & \\ u(x,0) = \pi x - x^2, & 0 \le x \le \pi, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, & \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u_t(x,0) = x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = t, & t \ge 0, \\ u(1,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = 1 - x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 2t, & t \ge 0, \\ u(2,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Bài 5. Dựa vào công thức nghiệm tổng quát, hãy tìm nghiệm của các bài toán Cauchy sau đây

a) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 4x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \cos^2 x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = x + \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 1 + x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Bài 6. Chứng minh tính duy nhất nghiệm của các bài toán sau bằng phương pháp năng lượng

a) $\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = a(t), & t \geq 0, \\ u_x(L,t) = b(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$

Bài 7. Cho sợi dây dài L với hai đầu gắn chặt. Tìm nghiệm của phương trình dao động không có ngoại lực tác dụng nếu hình dạng ban đầu của sợi dây là một parabol đối xứng có độ cao bằng h, vận tốc ban đầu bằng 0.

Bài 8. Cho sợi dây dài L với hai đầu gắn chặt. Tìm nghiệm của phương trình dao động không có ngoại lực tác dụng nếu hình dạng ban đầu của sợi dây là một tam giác có độ cao bằng h, chân đường cao tại x_0, vận tốc ban đầu bằng 0.

Phần đọc thêm

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN

Phần này giới thiệu sơ lược về chương trình Matlab và trình bày phương pháp sai phân hữu hạn để giải số bài toán biên cho phương trình vi phân, phương trình truyền nhiệt một chiều, phương trình truyền sóng một chiều và phương trình Poisson hai chiều.

I. Giới thiệu sơ lược về Matlab

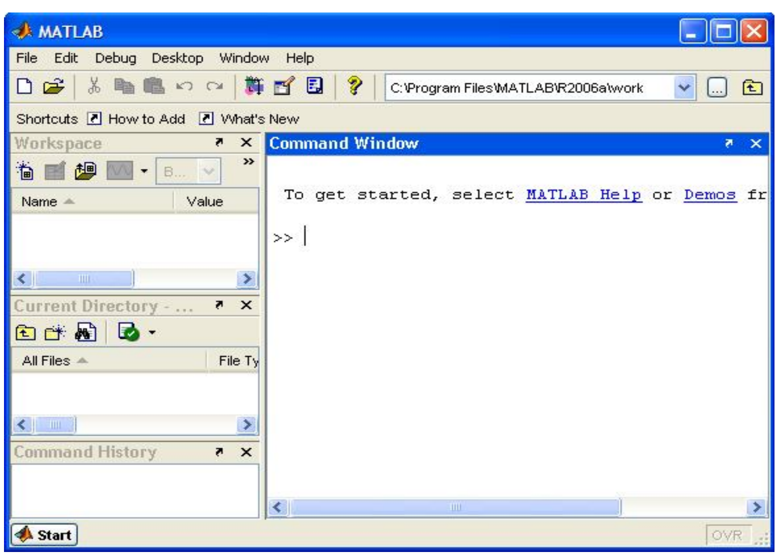
1.1. Giao diện chương trình

Cửa sổ lệnh *Command Window*: đây là cửa sổ chính của Matlab. Tại đây ta thực hiện việc nhập dữ liệu và xuất kết quả tính toán. Dấu nhắc “>>” để gõ các lệnh.

Cửa sổ lịch sử lệnh *Command History*: liệt kê các lệnh đã được sử dụng, có thể lặp lại các lệnh cũ, sao chép và xóa các lệnh.

Cửa sổ không gian làm việc *Wordspace*: cho biết các biến được sử dụng trong chương trình.

Cửa sổ thư mục hiện tại *Current Directory*: cho biết thư mục hiện tại đang sử dụng, chuyển đổi thư mục, tạo thư mục mới.



1.2. Một số lệnh hệ thống

Lệnh	Ý nghĩa
clc	Xóa tất cả các lệnh trong cửa sổ Command Window
clear all	Xoá tất cả các biến, các hàm, các liên kết
clf	Xóa cửa sổ đồ họa
Ctrl + C	Dừng chương trình
Ctrl + R (hoặc đặt dấu "%" ở đầu dòng)	Biến các dòng đã chọn trở thành dòng chú thích
Ctrl + T	Loại bỏ ký hiệu "%" trước các dòng chú thích
Quit, exit	Thoát Matlab

1.3. Các phép toán cơ bản

Ký tự	Ý nghĩa
+	Cộng
-	Trừ
*	Nhân
/	Chia phải
\	Chia trái
^	Lũy thừa

Thứ tự ưu tiên	Các phép
1	Dấu ngoặc ( )
2	^ , thực hiện từ trái sang phải
3	*, /, \ thực hiện từ trái sang phải
4	+, -

1.4. Các toán tử quan hệ và toán tử logic

Ký tự	Ý nghĩa
<	Nhỏ hơn
<=	Nhỏ hơn hay bằng
>	Lớn hơn

>=	Lớn hơn hay bằng
==	Bằng
~=	Không bằng
&	AND
|	OR
~	NOT

1.5. Một số hằng số

pi	Số π
i, j	Số ảo
Inf	Viết tắt chữ *Infinity* (∞)
NaN	Viết tắt chữ *Not a Number* (không phải là một số) và được cho bởi các việc tính toán như **inf/inf** hoặc **0/0**

1.6. Một số hàm có sẵn

Hàm	**Ý nghĩa**
sqrt(x)	Lấy căn bậc hai
abs(x)	Trị tuyệt đối
exp(x)	Hàm e^x
log(x)	Hàm logarit cơ số e
log10(x)	Hàm logarit cơ số 10
sin(x), cos(x), sinh (x), cosh(x)	Hàm sin, cos, sinh, cosh
tan(x), cot(x), tanh(x)	Hàm tang, cotang, tanh
eval(f)	Giá trị của biểu thức f

1.7. Các lệnh trên ma trận

Lệnh	Ý nghĩa
A=zeros(m,n)	Tạo ma trận *m* dòng và *n* cột có tất cả các phần tử đều bằng 0
A(i,j)	Lấy giá trị phần tử tại dòng *i*, cột *j* của ma trận A
A’	Lấy ma trận chuyển vị của ma trận A
A+B, A-B, A*B	Cộng, trừ, nhân hai ma trận
A^(-1)	Lấy ma trận nghịch đảo của A
size(A)	Cho biết số dòng, số cột của A
X=A\B	Chia ma trận, lúc đó A*X=B
X=[a:b], (a,b$\in\mathbb{Z}$)	Tạo vectơ X=[a,a+1,a+2,…,b]

1.8. Sử dụng lệnh trực tiếp

Các câu lệnh có thể được thực hiện trực tiếp ngay trên cửa sổ Command Window. Các câu lệnh được nhập sau dấu nhắc “>>” và thực hiện lệnh bằng cách nhấn phím Enter. Các dòng lệnh trong Matlab được thực hiện tiếp nối nhau. Nếu có dấu “ **;** ” ở cuối câu lệnh thì kết quả sẽ không xuất hiện trên màn hình, ngược lại kết quả sẽ xuất hiện trên màn hình.

Ví dụ 1.1

Dòng lệnh	Kết quả
>>‘Hello’	ans=Hello
>>x=2; >>y=x^2+2*x+1	 y=9

1.9. Sử dụng file lệnh

Khi sử dụng file lệnh, các câu lệnh của Matlab sẽ được đưa vào một file có cấu trúc *tenfile.m*. Để tạo *tenfile.m* ta chọn *File/New/M-File*. Khi đó, để thực hiện các câu lệnh trong *tenfile.m*, ta vào cửa sổ Command Window và gõ *tenfile.* Lưu ý: lúc này, đường dẫn tới thư mục chứa *tenfile.m* và các file liên quan phải được khai báo trong Current Directory.

Ví dụ 1.2. Ta có file *vidu.m* như sau

```
clc
clear all
x=2;
y=3;
z=x+2*y
```

Sau khi thực hiện lệnh, ta có kết quả z=8 trong cửa sổ Command Window.

1.10. Tạo file hàm

Trong Matlab có sẵn thư viện các hàm, muốn biết cách sử dụng các hàm đó, trong cửa sổ Command Window ta gõ lệnh *help* ␣ *tên hàm*. Tuy nhiên, trong quá trình sử dụng, ta cần một hàm không được định nghĩa sẵn, ta có thể tự định nghĩa trong M-File với cú pháp

function ␣ *tên kết quả=tên hàm* (*danh sách các biến*)

Ví dụ 1.3. Ta có file hàm *f.m* như sau

```
function a=f(x,y)
a=sin(x)+y;
```

Khi đó, trong cửa sổ Command Window, ta có

Dòng lệnh	**Kết quả**
>>f(pi,1)	1

1.11. Các lệnh điều kiện và vòng lặp

Lệnh	**Ý nghĩa**
if (*biểu thức điều kiện 1***)** *dòng lệnh 1***;** **elseif (***biểu thức điều kiện 2***)**	Nếu thỏa biểu thức điều kiện 1, thực hiện dòng lệnh 1, nếu thỏa biểu thức điều kiện 2, thực hiện dòng lệnh 2…

dòng lệnh 2; ⋮ **end**	
for *var* = *start*:*step*:*end* *dòng lệnh*; **end**	Vòng lặp với biến chạy là *var* bắt đầu từ *start* và kết thúc là *end*, mỗi bước lặp sẽ tăng một bước nhảy là *step* (có thể dương-vòng lặp tăng, có thể âm-vòng lặp giảm). Nếu không chỉ ra *step* thì mặc định *step*=1.

1.12. Đồ họa trong Matlab

Matlab cung cấp rất nhiều công cụ vẽ hình. Tuy nhiên, ta có thể dùng một số lệnh đơn giản cho phép vẽ hình từ dữ liệu rời rạc.

Để vẽ hình trong không gian hai chiều, ta dùng lệnh *plot*(X,Y), trong đó đối số X và Y là hai vectơ có cùng cỡ, sẽ vẽ bằng cách nối các điểm có tọa độ (X(*n*),Y(*n*)). Ta cũng có thể dùng lệnh *plot*(X1,Y1,X2,Y2) để vẽ đồ thị ứng với (X1,Y1) và đồ thị ứng với (X2,Y2) trên cùng một hình vẽ.

Để vẽ hình trong không gian ba chiều, ta dùng lệnh *surf*(*X, Y, Z*), trong đó đối số X, Y, Z là các ma trận cùng cỡ.

Ví dụ 1.4

```
X = -pi:pi/10:pi;
Y = tan(sin(X)) - sin(tan(X));
plot(X,Y)
```

Matlab mặc định đường vẽ là đường liền nét màu xanh da trời. Ta có thể thay đổi kiểu đường bằng cách đưa vào đối số thứ 3, được đặt trong dấu **’ ’** như sau

Ký tự	Màu	Ký tự	Màu	Ký tự	Loại nét vẽ
y	Vàng	g	Lục	-	Đường liền nét
m	Đỏ tươi	b	Lam	:	Đường chấm chấm
c	Lơ	w	Trắng	-.	Đường gạch chấm
r	Đỏ	k	Đen	--	Đường đứt đoạn

Một số lệnh khác

Lệnh	**Ý nghĩa**
title('*text*')	Tiêu đề đồ thị, *text*: tên tiêu đề
xlabel('*nx*')	Nhãn cho trục x, *nx*: tên trục x
ylabel('*ny*')	Nhãn cho trục y, *ny*: tên trục y
figure	Tạo các cửa sổ đồ họa
hold on	Giữ lại tất cả màn hình đã vẽ
hold off	Xóa các màn hình đã vẽ trừ màn hình mới nhất

II. Một số công thức sai phân tính gần đúng đạo hàm

Định nghĩa 2.1. Số a được gọi là *số gần đúng* của số chính xác A, kí hiệu $a \approx A$ (đọc là a xấp xỉ A), nếu a khác A không đáng kể và được dùng thay cho A trong tính toán.

Định nghĩa 2.2. Hiệu $\Delta a = a - A$ được gọi là *sai số thật sự* của a. *Sai số tuyệt đối* của a, ký hiệu Δ, là

$$\Delta = |\Delta a| = |a - A|.$$

Sai số tương đối của a, kí hiệu δ, là

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{|a - A|}{|A|}.$$

Xét hàm $y(x)$, ta cần tính đạo hàm $y'(x)$ tại một số điểm x. Nếu ta rời rạc trục x với khoảng chia đều h nhỏ, chúng ta có thể xấp xỉ đạo hàm bằng công thức *sai phân tiến*

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \tag{5.1}$$

Để có thể ước lượng sai số của công thức này, ta sử dụng khai triển Taylor của hàm $y(x)$ như sau

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + O(h^2)$$

suy ra

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - O(h),$$

trong đó

$$\left|O(h)\right| \le M\left|h\right|.$$

Tương tự, ta có công thức *sai phân lùi*

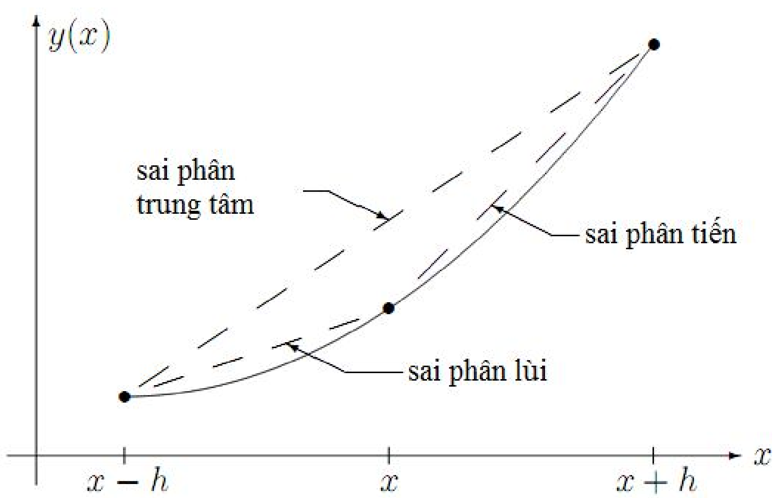
$$y'(x) \approx \frac{y(x) - y(x-h)}{h}. \tag{5.2}$$

Từ công thức (5.1) và (5.2), ta có công thức *sai phân trung tâm* cho đạo hàm cấp 1 là

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}.$$

Ta cũng có công thức sai phân trung tâm cho đạo hàm cấp 2 là

$$y''(x) \approx \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2}. \tag{5.3}$$



Hình 2.1. Sai phân hữu hạn xấp xỉ cho đạo hàm.

Công thức sai phân trung tâm có nguồn gốc từ khai triển Taylor sau

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4).$$

Tương tự, thay h bởi $-h$, ta có

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4).$$

Lấy tổng của hai phương trình trên, ta có

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2 y''(x) + O(h^4)$$

hay

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2),$$

trong đó

$$O(h^2) \le Mh^2.$$

III. Giải bài toán biên cho phương trình vi phân

Xét bài toán tìm hàm $y = y(x)$ trên $[a,b]$ thỏa

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \; a < x < b, & (5.4) \\ y(a) = \alpha, & (5.5) \\ y(b) = \beta, & (5.6) \end{cases}$$

trong đó α, β là các hằng số, $p(x)$, $q(x)$ và $r(x)$ là những hàm cho trước.

Định lý 3.1. *Nếu bài toán (5.4)-(5.6) thỏa các điều kiện sau*

i) $p(x)$, $q(x)$ *và* $r(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$*,*

ii) $q(x) > 0, \forall x \in [a,b]$

thì nó có nghiệm duy nhất.

Bây giờ, ta sẽ giải bài toán (5.4)-(5.6) bằng phương pháp sai phân. Đầu tiên, chọn số tự nhiên $M > 0$. Chia đoạn $[a,b]$ thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia $x_i = a + (i-1)h, \;\; i = 1,\ldots,M+1,$ với $h = \dfrac{b-a}{M}$ là độ dài đoạn chia.

Gọi $y_i = y(x_i)$ là các giá trị gần đúng của nghiệm tại x_i, $i = 1,\ldots,M+1$. Ý tưởng chính của phương pháp sai phân là ta sẽ tìm giá trị gần đúng y_i bằng cách thay các đạo hàm y' và y'' bởi các công thức sai phân hữu hạn tại các điểm chia. Khi đó, bài toán (5.4)-(5.6) trở thành bài toán giải hệ phương trình tuyến tính 3 đường chéo.

Từ điều kiện biên (5.5) và (5.6), ta có

$$y_1 = y(x_1) = y(a) = \alpha,$$

$$y_{M+1} = y(x_{M+1}) = y(b) = \beta.$$

Từ (5.4) và sử dụng công thức sai phân

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

$$y''(x) \approx \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

ta được

$$y_{i-1} - \left[2 - hp(x_i) + h^2 q(x_i)\right] y_i + \left[1 - hp(x_i)\right] y_{i+1} = h^2 r(x_i),\ i = 2,\ldots,M.$$

Như vậy, ta viết lại bài toán (5.4)-(5.6) dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} y_{i-1} + c_i y_i + d_i y_{i+1} = e_i,\ i = 2,\ldots,M, & (5.7) \\ y_1 = \alpha, & (5.8) \\ y_{M+1} = \beta, & (5.9) \end{cases}$$

trong đó

$$c_i = -\left[2 - hp(x_i) + h^2 q(x_i)\right],\ d_i = 1 - hp(x_i),\ e_i = h^2 r(x_i).$$

Tiếp theo, ta sẽ giải tìm y_i, $i = 1,\ldots,M+1$. Từ (5.7), cho i lần lượt nhận các giá trị từ 2 đến M, kết hợp với (5.8) và (5.9), ta được hệ phương trình đại số tuyến tính $AY = B$,

trong đó

$$A_{(M+1)\times(M+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c_2 & d_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{M-1} & d_{M-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c_M & d_M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_{(M+1)\times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{M-1} \\ y_M \\ y_{M+1} \end{pmatrix}, \; B_{(M+1)\times 1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{M-1} \\ e_M \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Giải hệ phương trình $AY = B$, ta sẽ tìm được *Y*. Từ đó, suy ra y_i, $i = 1,\dots,M+1$.

Ví dụ 3.1. Xét bài toán sau

$$\begin{cases} y'' = -\pi^2 \cos(\pi x), \; 0 < x < 1, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

a) Viết dạng sai phân hữu hạn của bài toán trên.

b) Cho khoảng chia theo x là $M = 20$. Viết chương trình Matlab tìm nghiệm gần đúng của bài toán trên và so sánh với nghiệm chính xác.

Giải

a) Đặt $r(x) = -\pi^2 \cos(\pi x)$.

Ta có $M = 20$. Chia đoạn $[0,1]$ thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia

$$x_i = \frac{i-1}{M}, i = 1,\dots,M+1,$$

với $h = \dfrac{1}{M}$ là độ dài đoạn chia.

Gọi $y_i = y(x_i)$ là các giá trị gần đúng của nghiệm tại x_i, $i = 1,...,M+1$.

Từ $\begin{cases} y(0) = 1, \\ y(1) = -1, \end{cases}$ ta có

$$y_1 = y(x_1) = y(0) = 1,$$

$$y_{M+1} = y(x_{M+1}) = y(1) = -1.$$

Từ $y''(x) = r(x)$ và sử dụng công thức sai phân

$$y''(x) \approx \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

ta được

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 r(x_i),\ i = 2,...,M.$$

Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 r(x_i),\ i = 2,...,M, & (5.10) \\ y_1 = 1, & (5.11) \\ y_{M+1} = -1. & (5.12) \end{cases}$$

b) Tiếp theo, ta sẽ tìm y_i, $i = 2,...,M$. Từ (5.10), cho *i* lần lượt nhận các giá trị từ 2 đến *M*, kết hợp với (5.11) và (5.12), ta được hệ phương trình đại số tuyến tính

$AY = B$,

trong đó

$$A_{(M+1)\times(M+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_{(M+1)\times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{M-1} \\ y_M \\ y_{M+1} \end{pmatrix}, \; B_{(M+1)\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ h^2 r(x_2) \\ h^2 r(x_3) \\ \vdots \\ h^2 r(x_{M-1}) \\ h^2 r(x_M) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa, dễ dàng tìm được nghiệm chính xác của bài toán là $y_{cx}(x) = \cos(\pi x)$.

Chương trình Matlab:

```
%Tạo file r.m
    function a=r(x)
    a=-pi^2*cos(pi*x);
%Tạo file ycx.m
    function a=ycx(x)
    a=cos(pi*x);
%Tạo file Vd3_1.m
    clc
    clear all
    M=20;
    h=1/M;
    %Tạo các điểm chia
    X=[0:M]*h;
    %Tạo ma trận A
    A=zeros(M+1,M+1);
    A(1,1)=1;
    A(M+1,M+1)=1;
    for i=2:M
        A(i,i-1)=1;
```

```
        A(i,i)=-2;
        A(i,i+1)=1;
    end
    %Tạo ma trận B
    B=zeros(M+1,1);
    B(1)=1;
    B(M+1)=-1;
    for i=2:M
        B(i)=h^2*r(X(i));
    end
%Giải hệ AY=B và xuất giá trị gần đúng của nghiệm tại
các điểm chia
    Y=A\B
    %Tính giá trị của nghiệm chính xác tại các điểm
chia
    Ycx=zeros(M+1,1);
    for i=1:(M+1)
        Ycx(i)=ycx(X(i));
    end
    %Xuất giá trị của nghiệm chính xác tại các điểm
chia
    Ycx
```

Ta được bảng kết quả sau

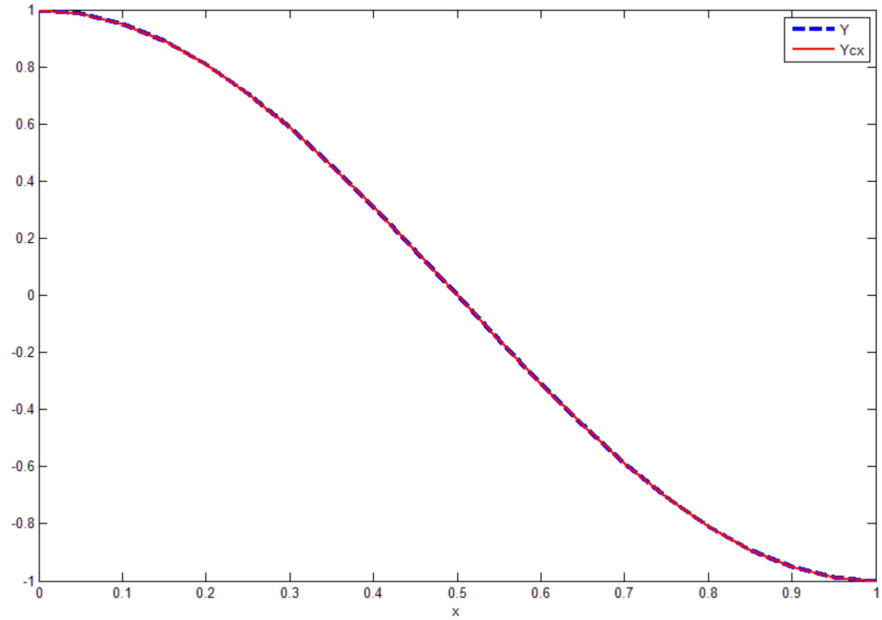
x_i	y_i	$y_{cx}(x_i)$	$\left\|y_i - y_{cx}(x_i)\right\|$
0	1	1	0
0.05	0.9879	0.9877	0.0002
0.1	0.9514	0.9511	0.0003
0.15	0.8914	0.8910	0.0004

0.2	0.8094	0.8090	0.0004
0.25	0.7075	0.7071	0.0004
0.3	0.5882	0.5878	0.0004
0.35	0.4543	0.4540	0.0003
0.4	0.3092	0.3090	0.0002
0.45	0.1566	0.1564	0.0002
0.5	0	0	0
0.55	-0.1566	-0.1564	0.0002
0.6	-0.3092	-0.3090	0.0002
0.65	-0.4543	-0.4540	0.0003
0.7	-0.5882	-0.5878	0.0004
0.75	-0.7075	-0.7071	0.0004
0.8	-0.8094	-0.8090	0.0004
0.85	-0.8914	-0.8910	0.0004
0.9	-0.9514	-0.9511	0.0003
0.95	-0.9879	-0.9877	0.0002
1	-1	-1	0

Để vẽ đồ thị cho nghiệm chính xác và nghiệm gần đúng, ta viết thêm chương trình sau

```
%Ve Y, Ycx
plot(X,Y,'b',X,Ycx,'r');
xlabel('x');
```

Ta có hình vẽ sau



IV. Giải bài toán biên Dirichlet cho phương trình truyền nhiệt một chiều

Xét bài toán tìm hàm $u(x,t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = p(t), \qquad t \geq 0, \\ u(L,t) = q(t), \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

trong đó c là hằng số dương, $\varphi(x)$, $p(t)$, $q(t)$ và $f(x,t)$ là những hàm cho trước.

Cho $T > 0$. Ta cần tính gần đúng $u(x,T)$. Chọn hai số tự nhiên $M, N > 0$. Chia đoạn $[0,L]$ thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia

$$x_i = (i-1)h,\ i = 1,\dots,M+1,$$

với $h = \dfrac{L}{M}$ là độ dài đoạn chia.

Chia đoạn $[0,T]$ thành N đoạn bằng nhau bởi $N+1$ điểm chia

$$t_j = (j-1)k,\ j = 1,\dots,N+1,$$

với $k = \dfrac{T}{N}$ là độ dài đoạn chia.

Gọi $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ là giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm nút (x_i, t_j), $i = 1,..., M+1;\ j = 1,..., N+1$.

Từ điều kiện đầu $u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le L$, ta có

$$u_{i,1} = u(x_i, t_1) = \varphi(x_i),\ i = 1,..., M+1.$$

Từ điều kiện biên $\begin{cases} u(0,t) = p(t),\ 0 < t \le T, \\ u(L,t) = q(t),\ 0 < t \le T, \end{cases}$ ta có

$$u_{1,j} = u(x_1, t_j) = p(t_j),\ j = 2,..., N+1,$$
$$u_{M+1,j} = u(x_{M+1}, t_j) = q(t_j),\ j = 2,..., N+1.$$

Từ $u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < L,\quad 0 < t \le T,$ để xấp xỉ đạo hàm cấp hai theo biến x tại điểm nút (x_i, t_j), ta dùng công thức sai phân trung tâm

$$u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},$$
$$i = 2,..., M;\ j = 2,..., N+1.$$

Đối với đạo hàm cấp một theo biến thời gian *t*, ta có thể sử dụng một trong hai công thức sai phân tiến hoặc lùi. Tùy theo việc sử dụng công thức nào, ta có các sơ đồ sai phân khác nhau.

(a) Sử dụng công thức sai phân tiến:

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k},$$

ta có

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1-2\lambda) u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} + kf(x_i, t_j),\ i = 2,..., M;\ j = 1,..., N+1,$$

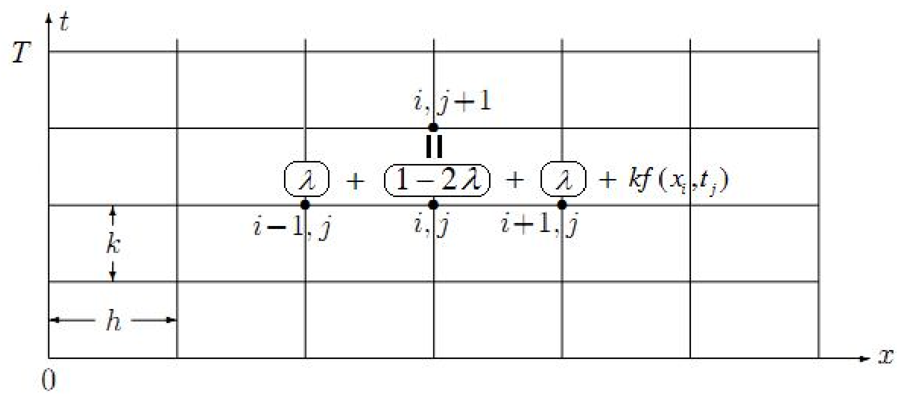
với

$$\lambda = \frac{kc^2}{h^2}.$$

Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} + kf(x_i,t_j),\ i=2,...,M;\ j=2,...,N+1, & (5.13) \\ u_{1,j} = p(t_j),\ j=2,...,N+1, & (5.14) \\ u_{M+1,j} = q(t_j),\ j=2,...,N+1, & (5.15) \\ u_{i,1} = \varphi(x_i),\ i=1,...,M+1. & (5.16) \end{cases}$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm $u_{i,j}$, $i=2,...,M;\ j=2,...,N+1$. Từ (5.13), ta thấy giá trị gần đúng của nghiệm tại thời điểm t_{j+1} được tính trực tiếp thông qua giá trị gần đúng của nghiệm tại thời điểm t_j. Sơ đồ tính toán được thể hiện qua hình vẽ sau



(b) Sử dụng công thức sai phân lùi:

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_i,t_j)-u(x_i,t_{j-1})}{k} = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k},$$

ta có

$$c^2u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j} + c^2u_{i+1,j} = \frac{-h^2}{k}u_{i,j-1} - h^2 f(x_i,t_j), i=2,...,M;\ j=2,...,N+1,$$

với

$$\lambda = -\left(2c^2 + \frac{h^2}{k}\right).$$

Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} c^2u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j} + c^2u_{i+1,j} = \dfrac{-h^2}{k}u_{i,j-1} - h^2f(x_i,t_j),\ i=2,...,M;\ j=2,...,N+1, & (5.17) \\ u_{1,j} = p(t_j),\ j=2,...,N+1, & (5.18) \\ u_{M+1,j} = q(t_j),\ j=2,...,N+1, & (5.19) \\ u_{i,1} = \varphi(x_i),\ i=1,...,M+1. & (5.20) \end{cases}$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm $u_{i,j}$, $i=2,...,M;\ j=2,...,N+1$. Từ (5.17), với mỗi *j* từ 2 đến *N*+1, ta cho *i* lần lượt nhận các giá trị từ 2 đến *M*, kết hợp với (5.18), (5.19) và (5.20) ta được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$AU_j = B_j,$$

trong đó

$$A_{(M+1)\times(M+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & \lambda & c^2 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & \lambda & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & c^2 & \lambda & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & c^2 & \lambda & c^2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ (U_j)_{(M+1)\times 1} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{M,j} \\ u_{M+1,j} \end{pmatrix},$$

$$\left(B_j\right)_{(M+1)\times 1} = \begin{pmatrix} p(t_j) \\ \dfrac{-h^2}{k}u_{2,j-1} - h^2f(x_2,t_j) \\ \dfrac{-h^2}{k}u_{3,j-1} - h^2f(x_3,t_j) \\ \vdots \\ \dfrac{-h^2}{k}u_{M-1,j-1} - h^2f(x_{M-1},t_j) \\ \dfrac{-h^2}{k}u_{M,j-1} - h^2f(x_M,t_j) \\ q(t_j) \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 4.1. Xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = (1+4\pi^2)e^t \sin(2\pi x), \ 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad\qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x), \qquad\qquad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

a) Viết dạng sai phân hữu hạn của bài toán trên.

b) Cho khoảng chia theo x là $M = 20$, khoảng chia theo t là $N = 800$. Viết chương trình Matlab tính gần đúng $u(x,1)$ và so sánh với nghiệm chính xác.

Giải

a) Đặt $f(x,t) = (1+4\pi^2)e^t \sin(2\pi x)$, $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$.

Cho $T > 0$. Chọn $M, N \in \mathbb{N}^*$. Chia đoạn $[0,1]$ thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia $x_i = (i-1)h, \ i = 1,\dots,M+1,$ với $h = \dfrac{1}{M}$.

Chia đoạn $[0,T]$ thành N đoạn bằng nhau bởi $N+1$ điểm chia $t_j = (j-1)k, \ j = 1,\dots,N+1,$ với $k = \dfrac{T}{N}$.

Gọi $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ là giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm nút (x_i, t_j), $i = 1,\dots,M+1; \ j = 1,\dots,N+1$.

Từ $u(x,0) = \varphi(x), \ 0 \le x \le 1$, ta có

$$u_{i,1} = u(x_i, t_1) = \varphi(x_i), \ i = 1,\dots,M+1.$$

Từ $u(0,t) = u(1,t) = 0, \ 0 < t \le T$, ta có

$$u_{1,j} = u(x_1, t_j) = 0, \ j = 2,\dots,N+1,$$
$$u_{M+1,j} = u(x_{M+1}, t_j) = 0, \ j = 2,\dots,N+1.$$

Từ $u_t - u_{xx} = f(x,t), \ 0 < x < 1, \ \ 0 < t \le T,$ để xấp xỉ đạo hàm cấp hai theo biến x tại điểm nút (x_i, t_j), ta dùng công thức sai phân trung tâm

$$u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_{i-1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i+1},t_j)}{h^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},$$

$$i = 2,\dots,M;\ j = 2,\dots,N+1.$$

Đối với đạo hàm cấp một theo biến thời gian t, ta có thể sử dụng một trong hai công thức sai phân tiến hoặc lùi.

Sử dụng công thức sai phân tiến:

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_j)}{k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k},$$

ta có

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} + kf(x_i,t_j),\ i = 2,\dots,M;\ j = 2,\dots,N+1,$$

với

$$\lambda = \frac{k}{h^2}.$$

Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} + kf(x_i,t_j),\ i = 2,\dots,M;\ j = 2,\dots,N+1, & (5.21) \\ u_{1,j} = 0,\ j = 2,\dots,N+1, & (5.22) \\ u_{M+1,j} = 0,\ j = 2,\dots,N+1, & (5.23) \\ u_{i,1} = \varphi(x_i),\ i = 1,\dots,M+1. & (5.24) \end{cases}$$

Sử dụng công thức sai phân lùi:

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_i,t_j) - u(x_i,t_{j-1})}{k} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k},$$

ta có

$$u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j} + u_{i+1,j} = \frac{-h^2}{k}u_{i,j-1} - h^2 f(x_i,t_j),\ \ i = 2,\dots,M;\ j = 2,\dots,N+1,$$

với

$$\lambda = -\left(2 + \frac{h^2}{k}\right).$$

Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j} + u_{i+1,j} = \dfrac{-h^2}{k} u_{i,j-1} - h^2 f(x_i, t_j),\ i = 2,...,M;\ j = 2,...,N+1, & (5.25) \\ u_{1,j} = 0,\ j = 2,...,N+1, & (5.26) \\ u_{M+1,j} = 0,\ j = 2,...,N+1, & (5.27) \\ u_{i,1} = \varphi(x_i),\ i = 1,...,M+1. & (5.28) \end{cases}$$

b) *Sử dụng công thức sai phân tiến*: Ta tìm $u_{i,j}$, $i = 2,...,M;\ j = 2,...,N+1$. Ta thấy, $u_{i,1}$ đã tính được từ (5.24). Từ (5.21), ta thấy giá trị gần đúng của nghiệm tại thời điểm t_{j+1} được tính trực tiếp thông qua giá trị gần đúng của nghiệm tại thời điểm t_j.

Sử dụng công thức sai phân lùi: Ta tìm $u_{i,j}$, $i = 2,...,M;\ j = 2,...,N+1$. Từ (5.25), với mỗi *j* từ 2 đến *N*+1, ta cho *i* lần lượt nhận các giá trị từ 2 đến *M*, kết hợp với (5.26), (5.27) và (5.28) ta được hệ phương trình đại số tuyến tính $AU_j = B_j$, trong đó

$$A_{(M+1)\times(M+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (U_j)_{(M+1)\times 1} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{M,j} \\ u_{M+1,j} \end{pmatrix},$$

$$\left(B_j\right)_{(M+1)\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-h^2}{k} u_{2,j-1} - h^2 f(x_2, t_j) \\ \dfrac{-h^2}{k} u_{3,j-1} - h^2 f(x_3, t_j) \\ \vdots \\ \dfrac{-h^2}{k} u_{M-1,j-1} - h^2 f(x_{M-1}, t_j) \\ \dfrac{-h^2}{k} u_{M,j-1} - h^2 f(x_M, t_j) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa, dễ dàng tìm được nghiệm chính xác của bài toán là $u_{cx}(x,t) = e^t \sin(2\pi x)$.

Chương trình Matlab:

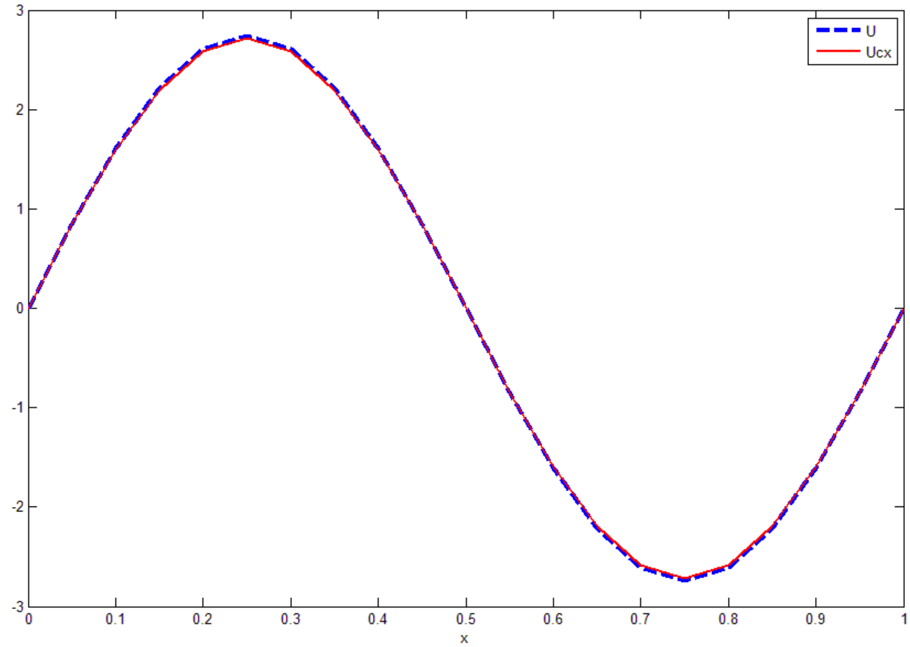
```
%Tạo file f.m
    function a=f(x,t)
    a=(1+4*(pi^2))*exp(t)*sin(2*pi*x);
%Tạo file phi.m
    function a=phi(x)
    a=sin(2*pi*x);
%Tạo file p.m
    function a=p(t)
    a=0;
%Tạo file q.m
    function a=q(t)
    a=0;
%Tạo file ucx.m
    function a=ucx(x,t)
    a=exp(t)*sin(2*pi*x);
%Tạo file Vd4_1spt.m
    clc
    clear all
    M=20;
    N=800;
    h=1/M;
    k=1/N;
    c=1;
    lamda=(c*c*k)/(h*h);
    %Tạo các điểm nút
    X=[0:M]*h;
```

```
T=[0:N]*k;
U=zeros(M+1,N+1);
%Từ điều kiện biên
for j=2:(N+1)
    U(1,j)=p(T(j));
    U(M+1,j)=q(T(j));
end
%Từ điều kiện đầu
for i=1:(M+1)
    U(i,1)=phi(X(i));
end
%Tính gần đúng u(x,1)
for j=2:(N+1)
    for i=2:M
U(i,j+1)=lamda*U(i-1,j)+(1-2*lamda)*U(i,j)
      +lamda*U(i+1,j)+k*f(X(i),T(j));
    end
end
%Xuất các giá trị gần đúng u(x,1)
V=zeros(M+1,1);
for i=1:(M+1)
    V(i)=U(i,N+1);
end
V
%Xuất các giá trị của nghiệm chính xác ucx(x,1)
Ucx=zeros(M+1,1);
for i=1:(M+1)
    Ucx(i)=ucx(X(i),1);
end
```

```
Ucx
%Ve U, Ucx
plot(X,V,'b',X,Ucx,'r');
xlabel('x');
```

Ta được bảng kết quả và hình vẽ sau

x_i	$u_{i,N+1}$	$u_{cx}(x_i,1)$	$\lvert u_{i,N+1}-u_{cx}(x_i)\rvert$
0	0	0	0
0.05	0.8468	0.8400	0.0068
0.1	1.6106	1.5978	0.0128
0.15	2.2168	2.1991	0.0177
0.2	2.6060	2.5852	0.0208
0.25	2.7401	2.7183	0.0218
0.3	2.6060	2.5852	0.0208
0.35	2.2168	2.1991	0.0177
0.4	1.6106	1.5978	0.0128
0.45	0.8468	0.8400	0.0068
0.5	0	0	0
0.55	-0.8468	-0.8400	0.0068
0.6	-1.6106	-1.5978	0.0128
0.65	-2.2168	-2.1991	0.0177
0.7	-2.6060	-2.5852	0.0208
0.75	-2.7401	-2.7183	0.0218
0.8	-2.6060	-2.5852	0.0208
0.85	-2.2168	-2.1991	0.0177
0.9	-1.6106	-1.5978	0.0128
0.95	-0.8468	-0.8400	0.0068
1	0	0	0

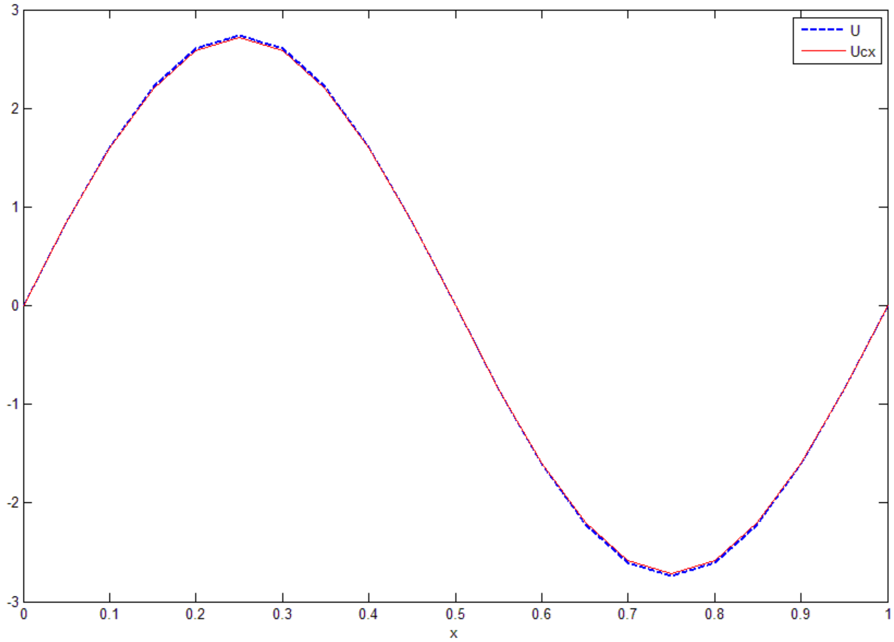



```
%Tạo file Vd4_1spl.m
    clc
    clear all
    M=20;
    N=800;
    h=1/M;
    k=1/N;
    c=1;
    lamda=-(2*c*c+(h^2)/k);
    %Tạo các điểm nút
    X=[0:M]*h;
    T=[0:N]*k;
    U=zeros(M+1,1);
    %Từ điều kiện đầu
    for i=1:(M+1)
        U(i)=phi(X(i));
    end
```

```
    %Tính gần đúng u(x,1)
    for j=2:(N+1)
        %Tạo ma trận A và B
        A=zeros(M+1,M+1);
        B=zeros(M+1,1);
        A(1,1)=c^2;
        A(M+1,M+1)=c^2;
        B(1)=p(T(j));
        B(M+1)=q(T(j));
        for i=2:M
            A(i,i-1)=1;
            A(i,i)=lamda;
            A(i,i+1)=1;
B(i)=-(h^2)*f(X(i),T(j))-((h^2)/k)*U(i);
        end
        %Giải hệ AU=B
        U=A\B;
end
    %Xuất các giá trị gần đúng u(x,1)
    U
    %Xuất các giá trị của nghiệm chính xác ucx(x,1)
    Ucx=zeros(M+1,1);
    for i=1:(M+1)
        Ucx(i)=ucx(X(i),1);
    end
    Ucx
    %Ve U, Ucx
    plot(X,U,'b',X,Ucx,'r');
    xlabel('x');
```

Ta được bảng kết quả và hình vẽ sau

x_i	$u_{i,N+1}$	$u_{cx}(x_i,1)$	$\left\|u_{i,N+1}-u_{cx}(x_i)\right\|$
0	0	0	0
0.05	0.8468	0.8400	0.0068
0.1	1.6107	1.5978	0.0129
0.15	2.2169	2.1991	0.0178
0.2	2.6061	2.5852	0.0209
0.25	2.7402	2.7183	0.0219
0.3	2.6061	2.5852	0.0209
0.35	2.2169	2.1991	0.0178
0.4	1.6107	1.5978	0.0129
0.45	0.8468	0.8400	0.0068
0.5	0	0	0
0.55	-0.8468	-0.8400	0.0068
0.6	-1.6107	-1.5978	0.0129
0.65	-2.2169	-2.1991	0.0178
0.7	-2.6061	-2.5852	0.0209
0.75	-2.7402	-2.7183	0.0219
0.8	-2.6061	-2.5852	0.0209
0.85	-2.2169	-2.1991	0.0178
0.9	-1.6107	-1.5978	0.0129
0.95	-0.8468	-0.8400	0.0068
1	0	0	0



V. Giải bài toán biên Dirichlet cho phương trình truyền sóng một chiều

Xét bài toán tìm $u(x,t)$ phương trình sau

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), \; 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = p(t), \qquad t \geq 0, \\ u(L,t) = q(t), \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

trong đó c là hằng số dương, $p(t)$, $q(t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ và $f(x,t)$ là những hàm cho trước.

Cho $T > 0$. Ta cần tính gần đúng $u(x,T)$. Chọn hai số tự nhiên $M, N > 0$. Chia đoạn $[0,L]$ thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia

$$x_i = (i-1)h, \; i = 1,\ldots,M+1,$$

với $h = \dfrac{L}{M}$ là độ dài đoạn chia.

Chia đoạn $[0,T]$ thành N đoạn bằng nhau bởi $N+1$ điểm chia

$$t_j = (j-1)k,\ j = 1,\dots,N+1,$$

với $k = \dfrac{T}{N}$ là độ dài đoạn chia.

Gọi $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ là giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm nút (x_i, t_j), $i = 1,\dots,M+1;\ j = 1,\dots,N+1$.

Từ điều kiện biên $\begin{cases} u(0,t) = p(t),\ 0 < t \le T, \\ u(L,t) = q(t),\ 0 < t \le T, \end{cases}$ ta có

$$u_{1,j} = u(0,t_j) = p(t_j),\ j = 2,\dots,N+1,$$
$$u_{M+1,j} = u(L,t_j) = q(t_j),\ j = 2,\dots,N+1.$$

Từ $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < L,\ \ 0 < t \le T,$ để xấp xỉ đạo hàm cấp hai theo biến x và t tại điểm nút (x_i, t_j), ta dùng công thức sai phân trung tâm

$$u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_{i-1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i+1},t_j)}{h^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},$$

$$u_{tt}(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_i,t_{j-1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j+1})}{k^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2},$$

$$i = 2,\dots,M;\ j = 1,\dots,N+1,$$

ta có

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + 2(1-\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + k^2 f(x_i,t_j),\ i = 2,\dots,M;\ j = 1,\dots,N+1, \tag{5.29}$$

với

$$\lambda = \frac{c^2 k^2}{h^2}.$$

Từ điều kiện đầu $u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le L$, ta có

$$u_{i,1} = u(x_i,0) = \varphi(x_i),\ i = 1,\dots,M+1.$$

Từ điều kiện đầu $u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le L$, ta sử dụng công thức sai phân trung tâm

$$u_t(x_i,t_1)\approx\frac{u(x_i,t_2)-u(x_i,t_0)}{2k}=\frac{u_{i,2}-u_{i,0}}{2k},\ i=1,...,M+1,$$

ta được

$$u_{i,0}=u_{i,2}-2k\psi(x_i),\ i=1,...,M+1. \tag{5.30}$$

Từ (5.29), với $j=1$, ta có

$$u_{i,2}=\lambda u_{i-1,1}+2(1-\lambda)u_{i,1}+\lambda u_{i+1,1}-u_{i,0}+k^2f(x_i,t_1). \tag{5.31}$$

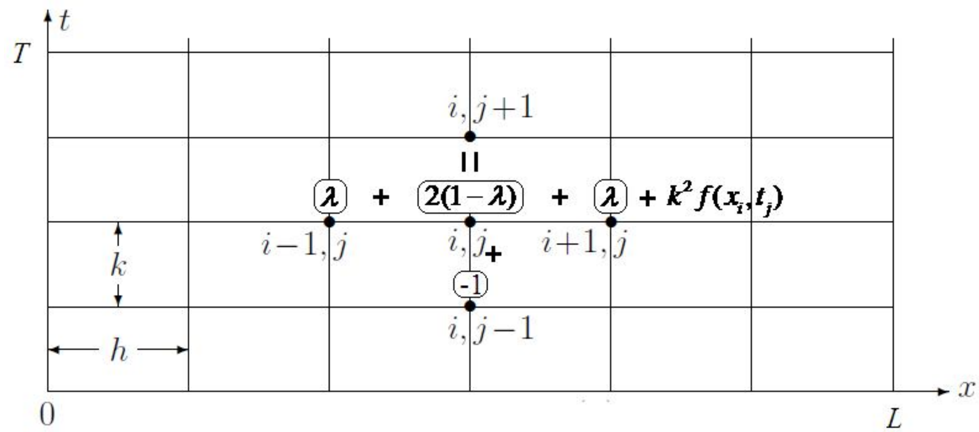
Thay (5.30) vào (5.31), ta được

$$u_{i,2}=\frac{\lambda}{2}u_{i-1,1}+(1-\lambda)u_{i,1}+\frac{\lambda}{2}u_{i+1,1}+k\psi(x_i)+\frac{k^2}{2}f(x_i,t_1),\ i=2,...,M.$$

Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases}
u_{i,j+1}=\lambda u_{i-1,j}+2(1-\lambda)u_{i,j}+\lambda u_{i+1,j}-u_{i,j-1}+k^2f(x_i,t_j),\ i=2,...,M;\ j=2,...,N+1, & (5.32)\\
u_{1,j}=p(t_j),\ j=2,...,N+1, & (5.33)\\
u_{M+1,j}=q(t_j),\ j=2,...,N+1, & (5.34)\\
u_{i,1}=\varphi(x_i),\ i=1,...,M+1, & (5.35)\\
u_{i,2}=\dfrac{\lambda}{2}u_{i-1,1}+(1-\lambda)u_{i,1}+\dfrac{\lambda}{2}u_{i+1,1}+k\psi(x_i)+\dfrac{k^2}{2}f(x_i,t_1),\ i=2,...,M. & (5.36)
\end{cases}$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm $u_{i,j}$, $i=2,...,M;\ j=2,...,N+1$. Chú ý rằng, $u_{i,1}$ đã biết được từ (5.35) và sau đó từ (5.36), ta tính được $u_{i,2}$. Từ (5.32), ta thấy giá trị của nghiệm tại thời điểm t_{j+1} được tính trực tiếp thông qua giá trị của nghiệm tại thời điểm t_j và t_{j-1}. Sơ đồ tính toán được thể hiện qua hình vẽ sau



Ví dụ 5.1. Xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(1,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x), & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,t) = 0, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

a) Viết dạng sai phân hữu hạn của bài toán trên.

b) Cho khoảng chia theo x là $M = 20$, khoảng chia theo t là $N = 35$. Viết chương trình Matlab tính gần đúng $u(x,1)$ và so sánh với nghiệm chính xác.

Giải

a) Đặt $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$. Ta có $M = 20$, $N = 35$.

Cho $T > 0$. Chọn $M, N \in \mathbb{N}^*$. Chia đoạn $[0,1]$ theo thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia $x_i = (i-1)h,\ i = 1,\dots,N+1,$ với $h = \dfrac{1}{M}$ là độ dài đoạn chia.

Chia đoạn $[0,T]$ theo thành N đoạn bằng nhau bởi $N+1$ điểm chia $t_j = (j-1)k,\ j = 1,\dots,N+1,$ với $k = \dfrac{T}{N}$ là độ dài đoạn chia.

Ta cần tính gần đúng $u(x,1)$. Gọi $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ là giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm nút (x_i, t_j), $i = 1,\dots,M+1;\ j = 1,\dots,N+1$.

Từ $u(0,t) = u(1,t) = 0,\ 0 < t \le T$, ta có

$$u_{1,j} = u(0,t_j) = 0,\ j = 2,\ldots,N+1,$$
$$u_{M+1,j} = u(L,t_j) = 0,\ j = 2,\ldots,N+1.$$

Từ $u_{tt} = 4u_{xx},\ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T,$ để xấp xỉ đạo hàm cấp hai theo biến x và t tại điểm nút (x_i,t_j), ta dùng công thức sai phân trung tâm

$$u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_{i-1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i+1},t_j)}{h^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},$$

$$u_{tt}(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_i,t_{j-1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j+1})}{k^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2},$$

ta có

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + 2(1-\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} - u_{i,j-1},\ i = 2,\ldots,M;\ j = 1,\ldots,N+1, \quad (5.37)$$

với

$$\lambda = \frac{4k^2}{h^2}.$$

Từ $u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1$, ta có

$$u_{i,1} = u(x_i,0) = \varphi(x_i),\ i = 1,\ldots,M+1.$$

Từ $u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1$, ta sử dụng công thức sai phân trung tâm

$$u_t(x_i,t_1) \approx \frac{u(x_i,t_2) - u(x_i,t_0)}{2k} = \frac{u_{i,2} - u_{i,0}}{2k},\ i = 1,\ldots,M+1,$$

ta được

$$u_{i,0} = u_{i,2},\ i = 1,\ldots,M+1. \quad (5.38)$$

Từ (5.37), với $j = 1$, ta có

$$u_{i,2} = \lambda u_{i-1,1} + 2(1-\lambda)u_{i,1} + \lambda u_{i+1,1} - u_{i,0}. \quad (5.39)$$

Thay (5.38) vào (5.39), ta được

$$u_{i,2} = \frac{\lambda}{2}u_{i-1,1} + (1-\lambda)u_{i,1} + \frac{\lambda}{2}u_{i+1,1},\ i = 2,\ldots,M.$$

Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + 2(1-\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} - u_{i,j-1},\ i = 2,\dots,M;\ j = 2,\dots,N+1, & (5.40) \\ u_{1,j} = 0,\ j = 2,\dots,N+1, & (5.41) \\ u_{M+1,j} = 0,\ j = 2,\dots,N+1, & (5.42) \\ u_{i,1} = 0,\ i = 1,\dots,M+1, & (5.43) \\ u_{i,2} = \dfrac{\lambda}{2}u_{i-1,1} + (1-\lambda)u_{i,1} + \dfrac{\lambda}{2}u_{i+1,1},\ i = 2,\dots,M. & (5.44) \end{cases}$$

b) Tiếp theo, ta sẽ tìm $u_{i,j}$, $i = 2,\dots,M;\ j = 2,\dots,N+1$. Chú ý rằng, $u_{i,1}$ đã biết được từ (5.43) và sau đó từ (5.44), ta tính được $u_{i,2}$. Từ (5.40), ta thấy giá trị của nghiệm tại thời điểm t_{j+1} được tính trực tiếp thông qua giá trị của nghiệm tại thời điểm t_j và t_{j-1}.

Hơn nữa, dễ dàng tìm được nghiệm chính xác của bài toán là

$$u_{cx}(x,t) = \sin(2\pi x)\cos(4\pi t).$$

Chương trình Matlab:

```
%Tạo file phi.m
    function a=phi(x)
    a=sin(2*pi*x);
%Tạo file ucx.m
    function a=ucx(x,t)
    a=sin(2*pi*x)*cos(4*pi*t);
%file Vd5_1.m
    clc
    clear all
    M=20;
    N=35;
    h=1/M;
    k=1/N;
    c=2;
```

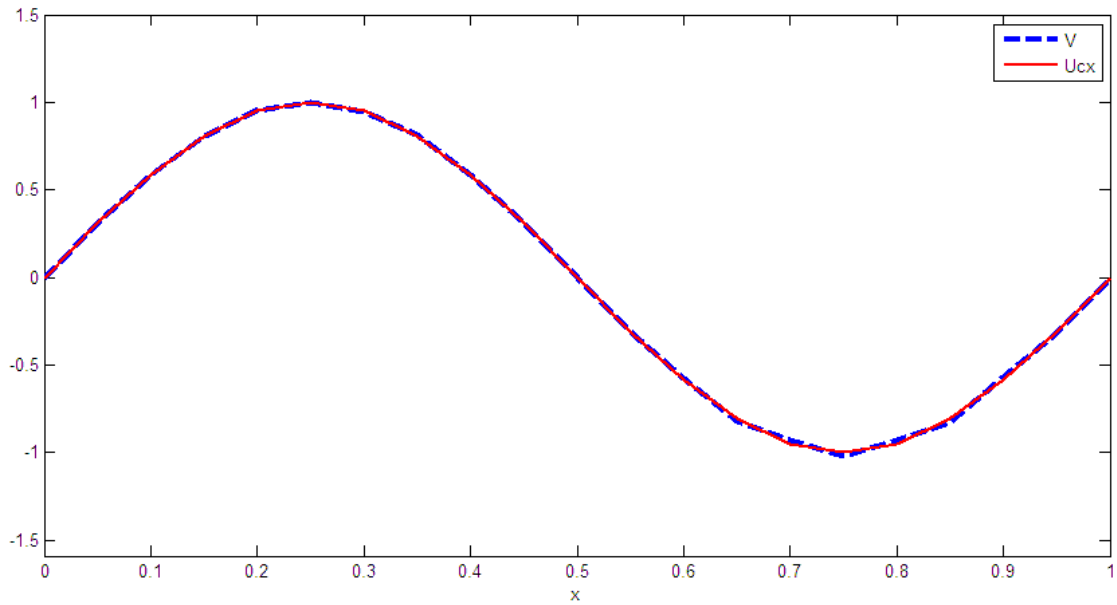
```
lamda=(c*c*k*k)/(h*h);
%Tạo các điểm nút
X=[0:M]*h;
T=[0:N]*k;
U=zeros(M+1,N+1);
for j=2:(N+1)
    U(1,j)=p(T(j));
    U(M+1,j)=q(T(j));
end
for i=1:(M+1)
    U(i,1)=phi(X(i));
end
for i=2:M
U(i,2)=(1-lamda)*U(i,1)+(lamda/2)*(U(i-1,1)
       +U(i+1,1));
end
for j=2:N+1
    for i=2:M
    U(i,j+1)=(lamda)*U(i-1,j)+2*(1-lamda)*U(i,j)
 +(lamda)*U(i+1,j)-U(i,j-1);
    end
end
%Tạo ma trận tạm V
V=zeros(M+1,1);
for i=1:(M+1)
    V(i)=U(i,N+1);
end
%Xuất các giá trị gần đúng u(x,1)
V
```

```
    %Xuất các giá trị của nghiệm chính xác ucx(x,1)
    Ucx=zeros(M+1,1);
    for i=1:(M+1)
        Ucx(i)=ucx(X(i),1);
end
    Ucx
    %Ve V, Ucx
    plot(X,V,'b',x,Ucx,'r');
    xlabel('x');
```

Ta được bảng kết quả và hình vẽ sau

x_i	$u_{i,M+1}$	$u_{cx}(x_i,1)$	$\lvert u_{i,M+1} - u_{cx}(x_i)\rvert$
0	0	0	0
0.05	0.3082	0.3090	0.0008
0.1	0.5889	0.5878	0.0011
0.15	0.8080	0.8090	0.001
0.2	0.9509	0.9511	0.0002
0.25	1.0014	1	0.0014
0.3	0.9478	0.9511	0.0033
0.35	0.8132	0.8090	0.0042
0.4	0.5833	0.5878	0.0045
0.45	0.3121	0.3090	0.0031
0.5	-0.0002	0	0
0.55	-0.3132	-0.3090	0.0042
0.6	-0.5781	-0.5878	0.0097
0.65	-0.8240	-0.8090	0.015
0.7	-0.9312	-0.9511	0.0199
0.75	-1.0225	-1	0.0225

0.8	-0.9279	-0.9511	0.0232
0.85	-0.8296	-0.8090	0.0206
0.9	-0.5721	-0.5878	0.0157
0.95	-0.3173	-0.3090	0.0083
1	0	0	0



VI. Giải bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson hai chiều

Xét bài toán tìm $u(x,y)$ thoả

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x,y), 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(x,0) = f_1(x), \quad 0 \le x \le a, \\ u(x,b) = f_2(x), \quad 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = g_1(y), \quad 0 \le y \le b, \\ u(a,y) = g_2(y), \quad 0 \le y \le b, \end{cases}$$

trong đó $f_1(x), f_2(x), g_1(y), g_2(y)$ và $F(x,y)$ là những hàm cho trước.

Chọn số tự nhiên $M > 0$. Chia đoạn $[0,a]$ thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia

$$x_i = (i-1)h,\ i = 1,\dots,M+1,$$

với $h = \dfrac{a}{M}$ là độ dài đoạn chia.

Chia đoạn $[0,b]$ thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia

$$t_j = (j-1)k,\ \ j = 1,\dots,M+1,$$

với $k = \dfrac{b}{M}$ là độ dài đoạn chia.

Gọi $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ là giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm nút (x_i, y_j), $i, j = 1,\dots,M+1$.

Từ điều kiện biên $\begin{cases} u(x,0) = f_1(x), & 0 \le x \le a, \\ u(x,b) = f_2(x), & 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = g_1(y), & 0 \le y \le b, \\ u(a,y) = g_2(y), & 0 \le y \le b, \end{cases}$ ta có

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= u(x_i,0) = f_1(x_i),\ \ i = 1,\dots,M+1, \\ u_{i,M+1} &= u(x_i,b) = f_2(x_i),\ \ i = 1,\dots,M+1, \\ u_{1,j} &= u(0,y_j) = g_1(y_j),\ j = 2,\dots,M, \\ u_{N+1,j} &= u(a,y_j) = g_2(y_j),\ j = 2,\dots,M. \end{aligned}$$

Từ $u_{xx} + u_{yy} = F(x,y), 0 < x < a,\ \ 0 < y < b,$ để xấp xỉ đạo hàm cấp hai theo biến x và y tại điểm nút (x_i, y_j), ta dùng công thức sai phân trung tâm

$$u_{xx}(x_i,y_j) \approx \frac{u(x_{i-1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i+1},y_j)}{h^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},$$

$$u_{yy}(x_i,y_j) \approx \frac{u(x_i,y_{j-1}) - 2u(x_i,y_j) + u(x_i,y_{j+1})}{k^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2},$$

ta có

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + \lambda u_{i,j-1} + \lambda u_{i,j+1} - 2(1+\lambda)u_{i,j} = h^2 F(x_i,y_j),\ i,j = 2,\dots,M,$$

với

$$\lambda = \frac{h^2}{k^2}.$$

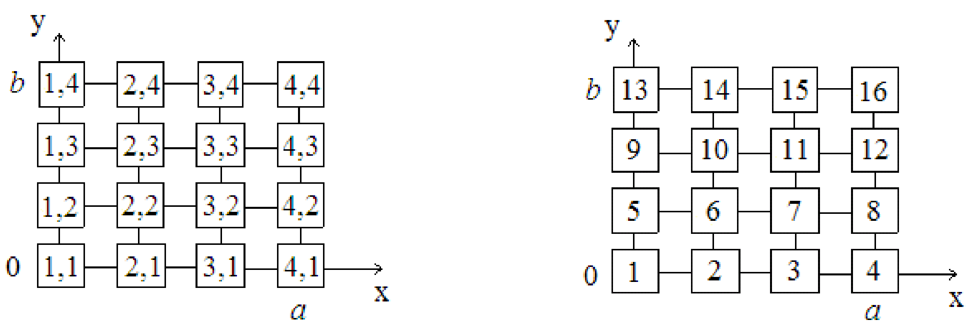
Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+\lambda u_{i,j-1}+\lambda u_{i,j+1}-2(1+\lambda)u_{i,j}=h^2F(x_i,y_j),\ i=2,\dots,M;\ j=2,\dots,M, & (5.45)\\ u_{i,1}=f_1(x_i),\quad i=1,\dots,M+1, & (5.46)\\ u_{i,M+1}=f_2(x_i),\quad i=1,\dots,M+1, & (5.47)\\ u_{1,j}=g_1(y_j),\quad j=2,\dots,M, & (5.48)\\ u_{N+1,j}=g_2(y_j),\quad j=2,\dots,M. & (5.49)\end{cases}$$

Tiếp theo, ta sẽ giải tìm $u_{i,j}$, $i,j=1,\dots,M+1$. Ta thấy, (5.45)-(5.49) là hệ phương trình đại số tuyến tính gồm $(M+1)^2$ phương trình với $(M+1)^2$ ẩn là $u_{i,j}$. Để thuận tiện trong cách viết ma trận hệ số của phương trình, ta ký hiệu

$$w_q=u_{i,j}$$

trong đó $q=i+(M+1)(j-1)$, với $i,j=1,\dots,M+1$. Nói cách khác, ta đánh số thứ tự các điểm nút theo quy tắc từ trái sang phải và từ dưới lên trên. Ví dụ, với $M=3$, kết quả việc đánh lại số thứ tự các điểm nút được thể hiện trong hình sau



Khi đó, (5.45)-(5.49) được viết lại dưới dạng $AW=B$, trong đó

$$A_{(M+1)^2\times(M+1)^2}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \cdots & \mathrm{O}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},\ W_{(M+1)^2\times 1}=\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_{(M+1)^2-1}\\ w_{(M+1)^2}\end{pmatrix},$$

$$B_{(M+1)^2\times 1}=\begin{pmatrix} f_1(x_1)\\ \vdots\\ f_1(x_{M+1})\\ g_1(y_2)\\ h^2F(x_i,y_2),\ i=\overline{2,M}\\ g_2(y_2)\\ \vdots\\ g_1(y_M)\\ h^2F(x_i,y_M),\ i=\overline{2,M}\\ g_2(y_M)\\ f_2(x_1)\\ \vdots\\ f_2(x_{M+1}) \end{pmatrix},$$

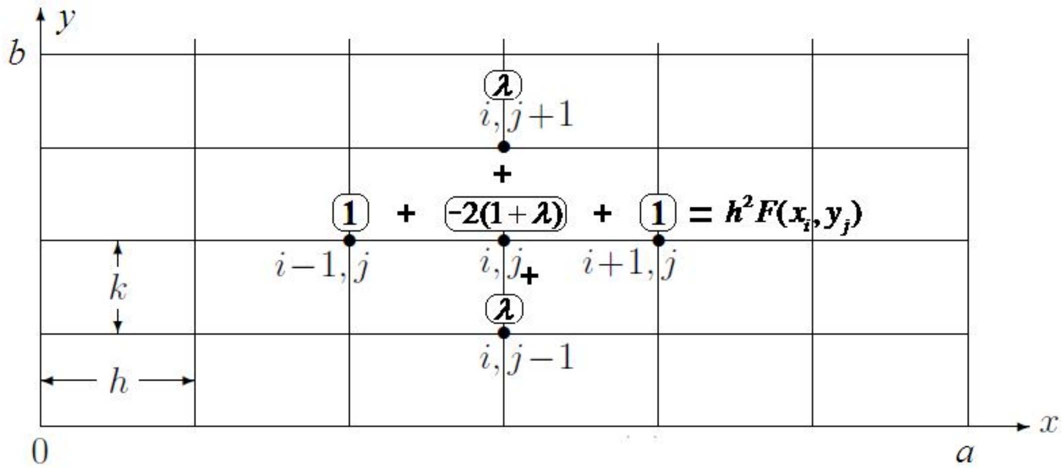
với

$$\boldsymbol{I}_{(M+1)\times(M+1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{O}_{(M+1)\times(M+1)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{(M+1)\times(M+1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -2(1+\lambda) & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & -2(1+\lambda) & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2(1+\lambda) & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_{(M+1)\times(M+1)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa, chú ý rằng, phương trình (5.45) cho ta mối liên hệ giữa $u_{i,j}$ và bốn nút lân cận của nó. Sơ đồ tính toán được thể hiện qua hình vẽ sau



Ví dụ 6.1. Xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x), & 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = \sin(2\pi y), & 0 \le y \le 1, \\ u(1,y) = 0, & 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

a) Viết dạng sai phân hữu hạn của bài toán trên.

b) Cho khoảng chia theo x và khoảng chia theo y là $M = 20$. Viết chương trình Matlab vẽ đồ thị của nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác.

Giải

a) Đặt $f(x) = \sin(2\pi x)$, $g(y) = \sin(2\pi y)$.

Chọn $M \in \mathbb{N}^*$. Chia đoạn $[0,1]$ thành M đoạn bằng nhau bởi $M+1$ điểm chia. Tại mỗi điểm nút là

$$(x_i, y_j) = \big((i-1)h, (j-1)h\big),\ i, j = 1, \ldots, M+1, \text{ với } h = \frac{1}{M}.$$

Gọi $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ là giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm nút (x_i, y_j), $i, j = 1, \ldots, M+1$.

Từ điều kiện biên $\begin{cases} u(x,0) = f(x), \; 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = g(y), \; 0 \le y \le 1, \\ u(1,y) = 0, \qquad 0 \le y \le 1, \end{cases}$ ta có

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= u(x_i,0) = f(x_i), \; i = 1,\dots,M+1, \\ u_{i,M+1} &= u(x_i,1) = 0, \qquad i = 1,\dots,M+1, \\ u_{1,j} &= u(0,y_j) = g(y_j), \; j = 2,\dots,M, \\ u_{N+1,j} &= u(1,y_j) = 0, \qquad j = 2,\dots,M. \end{aligned}$$

Từ $u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x < 1, \; 0 < y < 1,$ để xấp xỉ đạo hàm cấp hai theo biến x và y tại điểm nút (x_i, y_j), ta dùng công thức sai phân trung tâm

$$u_{xx}(x_i,y_j) \approx \frac{u(x_{i-1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i+1},y_j)}{h^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},$$

$$u_{yy}(x_i,y_j) \approx \frac{u(x_i,y_{j-1}) - 2u(x_i,y_j) + u(x_i,y_{j+1})}{h^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2},$$

ta có

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0. \; i,j = 2,\dots,M.$$

Như vậy, ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0, i,j = 2,\dots,M, \\ u_{i,1} = f(x_i), \quad i = 1,\dots,M+1, \\ u_{i,M+1} = 0, \qquad i = 1,\dots,M+1, \\ u_{1,j} = g(y_j), \; j = 2,\dots,M, \\ u_{M+1,j} = 0, \qquad j = 2,\dots,M. \end{cases}$$

b) Dễ dàng tìm được nghiệm chính xác của bài toán là

$$u_{cx}(x,y) = \frac{1}{\sinh(2\pi)}\Big(\sinh\big[2\pi(1-y)\big]\sin(2\pi x) + \sinh\big[2\pi(1-x)\big]\sin(2\pi y)\Big).$$

Chương trình Matlab:

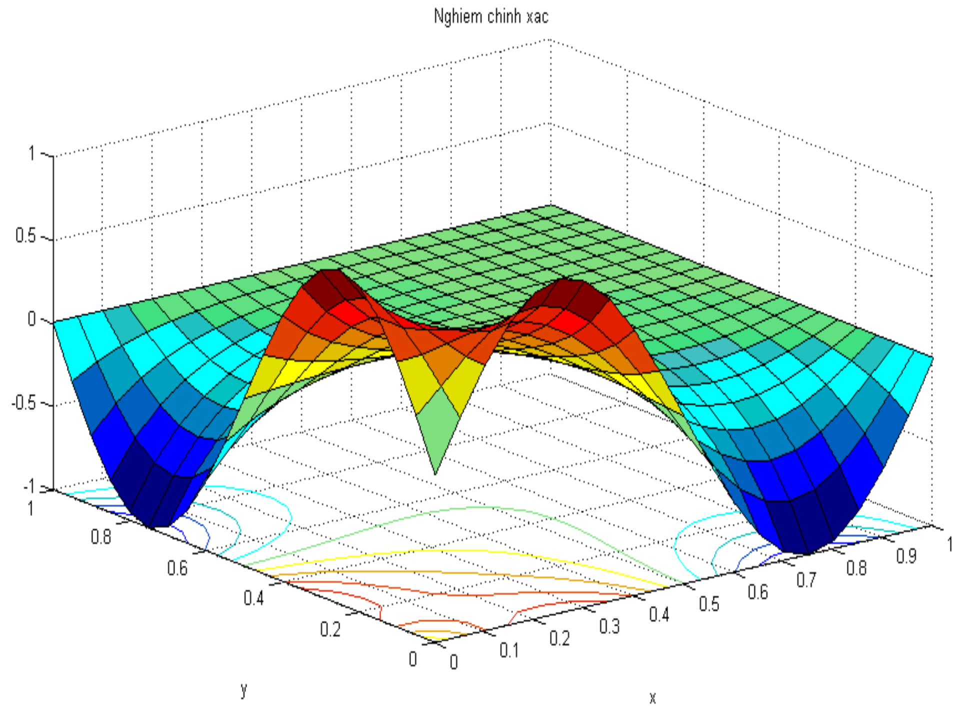
```
%Tạo file f.m
```

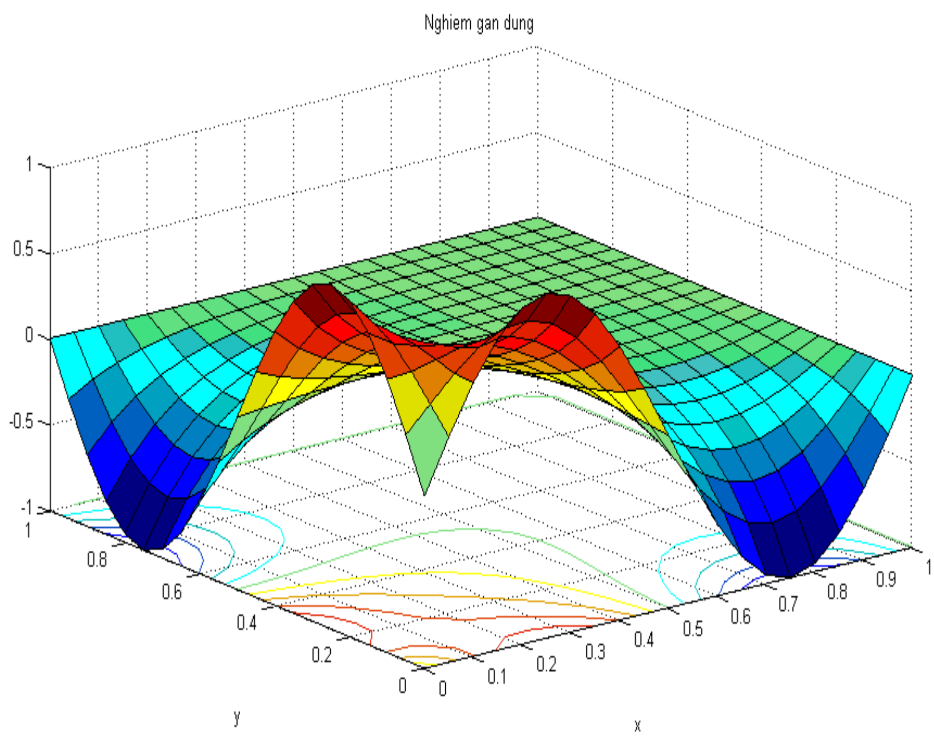
```
    function a=f(x)
    a=sin(2*pi*x);
%Tạo file g.m
    function a=g(y)
    a=sin(2*pi*y);
%Tạo file ucx.m
    function a=ucx(x,y)
    a=(1/sinh(2*pi))*(sinh(2*pi*(1-y))*sin(2*pi*x)
                          +sinh(2*pi*(1-x))*sin(2*pi*y));
%Tạo file change.m
    function a=change(M,i,j)
    a=i+(M+1)*(j-1);
%Tạo file Vd6_1.m
    clc
    clear all
    M=20;
    h=1/M;
    %Tạo các điểm nút
    X=[0:M]*h;
    Y=[0:M]*h;
    %Tạo ma trận A và B
    A=zeros((M+1)^2,(M+1)^2);
    B=zeros((M+1)^2,1);
    for j=1:(M+1)
        for i=1:(M+1)
       id=change(M,i,j); %Chỉ số của điểm (i,j)
       idleft=change(M,i-1,j); %Chỉ số của điểm
                          nằm bên trái điểm (i,j)
       idright=change(M,i+1,j); %Chỉ số của điểm
```

```
                          nằm bên phải điểm (i,j)
      idup=change(M,i,j+1); %Chỉ số của điểm nằm
bên trên điểm (i,j)
      iddown=change(M,i,j-1); Chỉ số của điểm nằm
bên dưới điểm (i,j)
      if ((i>1)&&(i<M+1)&&(j>1)&&(j<M+1))
               A(id,id)=-4;
               A(id,idleft)=1;
               A(id,idright)=1;
               A(id,idup)=1;
               A(id,iddown)=1;
               B(id)=0;
       elseif (j==1)
               A(id,id)=1;
               B(id)=f(X(i));
           elseif (j==M+1)
               A(id,id)=1;
               B(id)=0;
           elseif (i==1)
               A(id,id)=1;
               B(id)=g(Y(j));
   elseif (i==M+1)
               A(id,id)=1;
               B(id)=0;
           end
       end
   end
   %Giải hệ AU=B
   U=A\B;
```

```
%Chuyển U về ma trận 2 chiều để vẽ đồ thị
V=zeros(M+1,M+1);
for i=1:(M+1)
    for j=1:(M+1)
        V(i,j)=U(change(M,i,j));
    end
end
%Tạo ma trận cho nghiệm chính xác ucx
Ucx=zeros(M+1,M+1);
for i=1:(M+1)
    for j=1:(M+1)
        Ucx(i,j)=ucx(X(i),Y(j));
    end
end
%Vẽ V
figure(1)
surfc(X,Y,V);
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Nghiem gan dung');
%Vẽ Ucx
figure(2)
surfc(X,Y,Ucx);
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Nghiem chinh xac');
```

Ta được hình vẽ sau


Nghiem chinh xac
y
x


Nghiem gan dung
y
x

BÀI TẬP PHẦN ĐỌC THÊM

Bài 1. Cho khoảng chia theo x là $M = 20$. Viết chương trình Matlab tìm nghiệm gần đúng của các bài toán sau bằng phương pháp sai phân hữu hạn và so sánh với nghiệm chính xác

a) $\begin{cases} y'' = -\pi^2 \sin(\pi x), \ 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + y = 0, \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ y(0) = 1, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - y'' = (1+\pi^2)\cos(\pi x), \ 0 < x < 1, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' = y' + 2y + \cos x, \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ y(0) = \dfrac{-3}{10}, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-1}{10}. \end{cases}$

Bài 2. Viết dạng sai phân hữu hạn của bài toán sau

$$\begin{cases} y'' = f(x), \ a < x < b, \\ y'(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta, \end{cases}$$

trong đó α, β là các hằng số, $f(x)$ là hàm cho trước.

Bài 3. Xét bài toán sau

$$\begin{cases} y'' = 2\pi\cos(\pi x) - \pi^2 x \sin(\pi x), \ 0 < x < 1, \\ y'(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Cho khoảng chia theo x là $M = 20$. Viết chương trình Matlab:

a) Tìm nghiệm gần đúng của bài toán trên bằng phương pháp sai phân hữu hạn và so sánh với nghiệm chính xác.

b) Vẽ đồ thị của nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác trên cùng một hình.

Bài 4. Cho khoảng chia theo x là $M = 20$, khoảng chia theo t là $N = 10$. Viết chương trình Matlab tính gần đúng $u(x,1)$ và so sánh với nghiệm chính xác của các bài toán sau, trong đó đạo hàm cấp 1 theo biến thời gian t được xấp xỉ bằng công thức sai phân lùi

a) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin 3\pi x, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin \pi x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t = 8u_{xx}, & 0 < x < 5,\ t > 0, \\ u(0,t) = 10, & t > 0, \\ u(5,t) = 90, & t > 0, \\ u(x,0) = 16x + 10 + 2\sin \pi x - 4\sin 2\pi x + \sin 6\pi x, & 0 \le x \le 5. \end{cases}$

Bài 5. Cho khoảng chia theo x là $M = 20$, khoảng chia theo t là $N = 10$. Viết chương trình Matlab tính gần đúng $u(x,1)$ và so sánh với nghiệm chính xác của các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = e^t, t > 0, \\ u(1,t) = e^{t+1}, t > 0, \\ u(x,0) = e^x, 0 \le x \le 1, \end{cases}$

trong đó đạo hàm cấp 1 theo biến x được xấp xỉ bằng công thức sai phân tiến và đạo hàm cấp 1 theo biến thời gian t được xấp xỉ bằng công thức sai phân lùi.

b) $\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = \sin \frac{3}{2}x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$

trong đó đạo hàm cấp 1 theo biến x và đạo hàm cấp 1 theo biến thời gian t được xấp xỉ bằng công thức sai phân lùi.

c) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos x, & 0 < x < 2\pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \cos x + \cos 2x, & 0 \le x \le 2\pi. \end{cases}$

Bài 6. Cho khoảng chia theo x là $M = 20$, khoảng chia theo t là $N = 40$. Viết chương trình Matlab tính gần đúng $u(x,1)$ và so sánh với nghiệm chính xác của các bài toán sau, trong đó đạo hàm cấp 1 theo biến thời gian t được xấp xỉ bằng công thức sai phân trung tâm

a) $\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx}, & 0 < x < 3\pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(3\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin 5x, & 0 \le x \le 3\pi, \\ u_t(x,0) = \sin x, & 0 \le x \le 3\pi. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t), & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 3\pi, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 3\pi. \end{cases}$

Bài 7. Cho khoảng chia theo x và theo y là $M = 20$. Viết chương trình Matlab vẽ đồ thị của nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác của các bài toán sau

a) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 1 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 2\ln x, & 1 \le x \le 2, \\ u(x,1) = \ln(x^2+1), & 1 \le x \le 2, \\ u(1,y) = \ln(y^2+1), & 0 \le y \le 1, \\ u(2,y) = \ln(y^2+4), & 0 \le y \le 1, \end{cases}$

biết nghiệm chính xác là $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

b) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = x, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le 1, \\ u(1,y) = y, \quad 0 \le y \le 1, \end{cases}$

biết nghiệm chính xác là $u(x,y) = xy$.

c) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = \sin(7\pi x), & 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = \sin(\pi x), & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = \sin(3\pi y), & 0 \le y \le 1, \\ u(1,y) = \sin(6\pi x), & 0 \le y \le 1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 1 + \sin(\pi x), & 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = 2, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = 1 + y, & 0 \le y \le 1, \\ u(1,y) = 1 + y, & 0 \le y \le 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = e^{2y} \sin x, 0 < x < \pi, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u(x,1) = \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,y) = 0, & 0 \le y \le 1, \\ u(\pi,y) = 0, & 0 \le y \le 1. \end{cases}$

Bài 8. Tính gần đúng $u(x,T)$ thỏa

a) $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, t > 0, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin\left(\pi x / 2\right), 0 \le x \le 2, \end{cases}$

với $T = 0,2$; khoảng chia theo x là $M = 4$ và khoảng chia theo t là $N = 2$.

b) $\begin{cases} u_t - \dfrac{1}{16}u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 2\sin(2\pi x), 0 \le x \le 1, \end{cases}$

với $T = 0{,}125$; khoảng chia theo *x* là $M = 3$ và khoảng chia theo *t* là $N = 4$.

Bài 9. Tìm nghiệm xấp xỉ trong miền *D* của các bài toán sau với khoảng chia theo *x* và theo *y* là $M = 3$

a) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 180xy, \ (x,y) \in D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = 90x, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = 0, & 0 \le y \le 1, \\ u(1,y) = 90y, & 0 \le y \le 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (x,y) \in D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \\ u(x,0) = 1, & 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = 2, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = 1, & 0 \le y \le 1, \\ u(1,y) = 2, & 0 \le y \le 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in D = \{0 < x < 2, 0 < y < 2\}, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 2, \\ u(x,2) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 2 - x, & 1 \le x < 2, \end{cases} \\ u(0,y) = 0, & 0 < y < 2, \\ u(2,y) = y(2-y), 0 < y < 2. \end{cases}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Công Tâm, *Phương trình vật lý toán nâng cao*, NXB ĐH Quốc gia TP. HCM, 2002.
[2] Phan Huy Thiện, *Phương trình Toán Lý*, NXB Giáo Dục, 2008.
[3] Phan Huy Thiện, *Tuyển tập bài tập Phương trình Toán Lý*, NXB Giáo Dục, 2008.
[4] Nguyễn Thừa Hợp, *Giáo trình Phương trình đạo hàm riêng*, NXB ĐH Quốc gia Hà Nội, 1999.
[5] Trần Đức Vân, *Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng*, NXB ĐH Quốc gia Hà Nội, 2005.
[6] Phan Quốc Khánh, *Toán chuyên đề*, NXB ĐH Quốc gia TP. HCM, 2000.
[7] Nguyễn Thanh Vũ, *Giáo trình Toán giải tích A4*, ĐH Khoa học Tự Nhiên TP. HCM.
[8] Đặng Đình Áng, Trần Lưu Cường, Huỳnh Bá Lân, Nguyễn Văn Nhân, Phạm Hoàng Quân, *Biến đổi tích phân*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2009.
[9] Đặng Đình Áng, *Lý thuyết tích phân*, NXB Giáo dục Việt Nam, 1999.
[10] Lê Thái Thanh, *Giáo trình phương pháp tính*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2006.
[11] Nakhlé H.Asmar, *Partial Differential Equation with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2000 Pearson Education, Inc., 2005.
[12] G.Evan, J.Blackedge, P.Yardley, *Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, NewYork, 2004.
[13] Paul Duchatteau, David W.Zachmann, *Theory and problems of Partial Differential Equations*, Mc Graw-Hill, 1986.
[14] Yehuda Pinchover and Jacob Rubinstein, *An introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2005.
[15] A.V.Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers, 1980.
[16] Richard Haberman, *Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Prentice-Hall, Inc., 1987.
[17] Tyn Myint-U, Lokenath Debnath, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhauser Boston, 2007.
[18] Walter A, Strauss, *Partial Differential Equations-An introduction*, John Wiley & Sons, Inc., 1992.
[19] Đinh Nho Hao, *Introduction to Partial Differential Equations*, Lecture Notes, 1996.
[20] Myint-U, T., Ordinary Differential Equations, Elsevier North Holland, Inc., New York, 1978.
[21] Gordon C. Everstine, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Lecture Notes, 2010.
[22] B. Neta, *Partial Differential Equations*, Lecture Notes, 2009.
[23] Enrique A. Gouzalez-Velasco, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Elsevier Science and Technology Books, 1996.
[24] David Bleecker, George Csordas, *Basic Partial Differential Equations*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1992.

BẢNG ĐỐI CHIẾU THUẬT NGỮ VIỆT-ANH

VIỆT	ANH
bài toán biên	boundary value problem
bài toán Cauchy	Cauchy problem
bài toán Sturm-Liouville	Sturm-Liouville problem
biến độc lập	independent variable
biến đổi Fourier	Fourier transform
biến đổi Fourier ngược	inverse Fourier transform
biến đổi tích phân	integral transform
cấp của phương trình	order of an equation
chuỗi Fourier	Fourier series
điều kiện biên	boundary condition
điều kiện biên không thuần nhất	nonhomogeneous boundary condition
điều kiện biên thuần nhất	homogeneous boundary condition
điều kiện đầu	initial condition
độ khuếch tán nhiệt	thermal diffusivity
hàm trọng	weight function
hệ số dẫn nhiệt	thermal conductivity
hệ số Fourier	Fourier coefficient
khai triển Fourier	Fourier expansion
khai triển theo hàm riêng	eigenfunction expansion
lực căng	tension
mật độ khối lượng	density
nghiệm D’Alembert	D’Alembert’s solution
nghiệm tổng quát	general solution
nguyên lý cực đại	maximum principle

nhiệt dung riêng	specific heat
phương pháp sai phân hữu hạn	finite difference method
phương pháp tách biến	method of separation of variables
phương trình đạo hàm riêng	partial differential equations (PDE)
phương trình elliptic	elliptic equation
phương trình hyperbolic	hyperbolic equation
phương trình Laplace	Laplace equation
phương trình parabolic	parabolic equation
phương trình Poisson	Poisson equation
phương trình thế vị	potential equation
phương trình truyền nhiệt	heat equation
phương trình truyền nhiệt hai chiều	two dimensional heat equation
phương trình truyền sóng	wave equation
phương trình tuyến tính không thuần nhất	nonhomogeneous linear equation
phương trình tuyến tính thuần nhất	homogeneous linear equation
phương trình vi phân	differential equation
sự hội tụ	convergence
sự ổn định	stability
tích chập	convolution
tích phân Poisson	Poisson integral
tính duy nhất nghiệm	uniqueness of solution
tính tồn tại nghiệm	existence of solution
trực giao	orthogonal