BÀI TẬP: GIẢI TÍCH I

CHƯƠNG II: HÀM SỐ
ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

Bài 1: Tìm hàm ngược của hàm số:

1) $y = 2^x + 2^{-x}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $t = 2^x \quad (t > 0)$.

Do đó: $y = 2^x + 2^{-x} = t + \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 - yt + 1 = 0 \quad (*)$

$\Rightarrow$Phương trình (*) có 2 nghiệm: $t = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow x = log_2\left(\dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right)$

Ta xét trên 2 miền:

- Trên miền $x > 0$, ta có song ánh:

$$\left.\begin{array}{l} (0, +\infty) \to (2, +\infty) \\ x \mapsto y = 2^x + 2^{-x} \\ x = log_2\left(\dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right) \leftarrow y \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ Hàm ngược trên miền $x > 0$ là: $y = log_2\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right) x > 2$

- Trên miền $x < 0$, tương tự ta có hàm ngược là: $y = log_2\left(\dfrac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right) x < -2$

2) $y = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{3}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $t = 2^x \quad (t > 0)$.

Do đó: $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{3} = \dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{3t} \Leftrightarrow t^2 - 3yt - 1 = 0 \qquad (**)$

$\Rightarrow$Phương trình (**) có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{3y+\sqrt{9y^2+4}}{2} \\ t_2 = \dfrac{3y-\sqrt{9y^2+4}}{2} \end{array}\right.$

Nghiệm t_2 loại do $t > 0$.

Do đó, ta có: $2^x = \dfrac{3y+\sqrt{9y^2+4}}{2} \Rightarrow x = log_2\left(\dfrac{3y+\sqrt{9y^2+4}}{2}\right)$

Vậy hàm ngược của hàm số đã cho là: $y = log_2\left(\dfrac{3x+\sqrt{9x^2+4}}{2}\right)$

3) $y = 3arccos\,x$

Hướng dẫn giải

$y = 3arccos\,x \Leftrightarrow arccos\,x = \dfrac{y}{3} \Rightarrow x = cos\left(\dfrac{y}{3}\right)$

Vậy hàm ngược của hàm số đã cho là: $y = cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

4) $y = \dfrac{2x+3}{4x+5}$

Hướng dẫn giải

$y = \dfrac{2x+3}{4x+5} \Rightarrow 2x+3 = 4xy+5y \Leftrightarrow 2x(1-2y) = 5y-3 \Rightarrow x = \dfrac{5y-3}{2-4y}$

Vậy hàm ngược của hàm số đã cho là: $y = \dfrac{5x-3}{2-4x}$

Bài 2: Tìm TXĐ của hàm số:

1) $y = \sqrt{2x-1} + 4\,arcsin\dfrac{3x-1}{2}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3x-1}{2} - 1 \le 0 \\ \dfrac{3x-1}{2} + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x \le 1 \\ x \ge -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le x \le 1.$ Vậy tập xác định là: $D = \left[\dfrac{1}{2};1\right]$

2) $y = arccos(2sin\,2x)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-1\le 2\sin 2x\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le \sin 2x\le \frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{6}+k2\pi\le 2x\le \frac{\pi}{6}+k2\pi \\ \frac{5\pi}{6}+k2\pi\le 2x\le \frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le \frac{\pi}{12}+k\pi \\ \frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le \frac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\qquad (k\in\mathbb{Z}).$

3) $y=\sqrt{4\,arccot\,x-3\pi}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $4\,arccot\,x-3\pi\ge 0\Leftrightarrow arccot\,x\ge \frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow \arctan x\le -\frac{\pi}{4}\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x\le -1$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là: $D=(-\infty;-1]$

Chú ý: Có (1) là vì ở đây ta áp dụng công thức: $\arctan x+arccot\,x=\frac{\pi}{2}$.

4) $y=\arcsin(2x+1)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-1\le 2x+1\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 0.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\left[-1;0\right]$

Bài 3: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

1) $y=\sqrt[5]{2-x}+\sqrt[5]{x+2}$

Hướng dẫn giải

$\forall x\in\mathbb{R}:\ y(-x)=\sqrt[5]{2-(-x)}+\sqrt[5]{(-x)+2}=\sqrt[5]{2+x}+\sqrt[5]{2-x}=y(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn

2) $y=\tan\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)$

Hướng dẫn giải

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ y(-x)=\tan\left(\frac{\sin(-x)}{(-x)^2}\right)=\tan\left(-\frac{\sin x}{x^2}\right)=-\tan\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)=-y(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ

3) $f(x)=\dfrac{x}{a^x-1}\quad (a>0,a\neq 1)$

Hướng dẫn giải

$\forall x\in\mathbb{R}:\ f(-x)=\dfrac{-x}{a^{-x}-1}\Rightarrow\begin{cases}f(-x)\neq f(x)\\ f(-x)\neq -f(x)\end{cases}$

Vậy hàm số đã cho không chẵn, không lẻ

4) $y=|x+1|+|x-1|$

Hướng dẫn giải

$\forall x\in\mathbb{R}:\ y(-x)=|(-x)+1|+|(-x)-1|=|-(x-1)|+|-(x+1)|=|x-1|+|x+1|=f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn

5) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-1\leq\dfrac{2x}{1+x^2}\leq 1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^2}+1\geq 0\\ \dfrac{2x}{1+x^2}-1\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1}{1+x^2}\geq 0\\ \dfrac{-x^2+2x-1}{1+x^2}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}\geq 0\\ -\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}\leq 0\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}.$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ y(-x)=\arcsin\dfrac{2(-x)}{1+(-x)^2}=\arcsin\left(-\dfrac{2x}{1+x^2}\right)=-\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)=-y(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ

6) $f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\dfrac{1+x}{1-x}>0\Rightarrow -1<x<1\Rightarrow D=(-1,1).$

$\forall x\in(-1,1):\ f(-x)=\log\left(\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)}\right)=\log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\log\left(\dfrac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)=\log\left[\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right]=-\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ

Bài 4: Tìm TXĐ và TGT của hàm số:

1) $y=\arccos(e^x)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-1 \le e^x \le 1 \Rightarrow -\infty < x \le 0 \Rightarrow D = (-\infty; 0]$.

Tập giá trị: $-1 \le e^x \le 1 \Rightarrow \arccos(1) \le \arccos(e^x) \le \arccos(-1) \Rightarrow 0 \le y \le \pi$

2) $y = \arcsin(\arctan x)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Tập giá trị: $-1 \le \arctan x \le 1 \Rightarrow \arcsin(-1) \le \arcsin(\arctan x) \le \arcsin(1) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

3) $y = \arcsin(\cos 2x)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-1 \le \cos 2x \le 1 \Leftrightarrow k\pi \le 2x \le \pi + k\pi \Leftrightarrow k\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Tập giá trị: $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow \arcsin(-1) \le \arcsin(\cos 2x) \le \arcsin(1) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

4) $y = \arcsin(\sqrt{x})$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} -1 \le \sqrt{x} \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow D = [0;1]$.

Tập giá trị: $0 \le \sqrt{x} \le 1 \Rightarrow \arcsin(0) \le \arcsin(\sqrt{x}) \le \arcsin(1) \Rightarrow 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

Bài 5: Xét tính tuần hoàn, $y = \sqrt{\sin x}$, tìm chu kỳ (nếu có)

Hướng dẫn giải

Rõ ràng hàm tuần hoàn nhận $T = 2\pi$ là chu kỳ (chu kỳ của hàm sin).

Giả sử: $0 < p < 2\pi$ là một chu kỳ khác $\Rightarrow \sqrt{\sin(x+p)} = \sqrt{\sin x} \qquad \forall x \in$ TXĐ

$\Rightarrow \sin(x+p) = \sin x \qquad \forall x$ mà $\sin x \ge 0$. Cho $x = 0 \Rightarrow \sin p = 0 \Rightarrow p = \pi$.

Điều này không thể vậy CKCS là $T = 2\pi$

Bài 6: Tìm $f(x)$ biết:

1) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $t=x+\frac{1}{x}\ \left(|t|\geq 2\right)\Rightarrow t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

Do đó: $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f(t)=t^2-2$

Vậy $f(x)=x^2-2$

2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $t=x+\frac{1}{x}\ \left(|t|\geq 2\right)\Rightarrow t^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2.\frac{1}{x}+3x.\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\Leftrightarrow t^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$

$\Leftrightarrow t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$

Do đó: $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}\Rightarrow f(t)=t^3-3t$

Vậy $f(x)=x^3-3x$

3) $f\left(\frac{x}{1+x}\right)=x^2$

Hướng dẫn giải

Đặt: $t=\frac{x}{1+x}\ \left(t\neq 1\right)\Rightarrow x=\frac{t}{1-t}\Rightarrow x^2=\left(\frac{t}{1-t}\right)^2$

Do đó: $f\left(\frac{x}{1+x}\right)=x^2\Rightarrow f(t)=\left(\frac{t}{1-t}\right)^2$

Vậy $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$

4) $f(x+1)=x^2-3x+2$

Hướng dẫn giải

Đặt: $t=x+1\Rightarrow x=t-1$

Do đó: $f\left(x+1\right)=x^2-3x+2\Rightarrow f\left(t\right)=\left(t-1\right)^2-3\left(t-1\right)+2=t^2-5t+6$

Vậy $f\left(x\right)=x^2-5x+6$

5) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad (x>0)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x^2-\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{x-\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x^2-\left(1+x^2\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}$

Chia cả tử và mẫu cho x ta được: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{-1}{x}}{1-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{-x}{1-\sqrt{x^2+1}}\quad \left(x>0\right).$

6) $f\left(\arcsin x\right)=\dfrac{\pi}{2}+x$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\arcsin x=t\Rightarrow x=\sin t$

Do đó: $f\left(\arcsin x\right)=\dfrac{\pi}{2}+x\Rightarrow f\left(t\right)=\dfrac{\pi}{2}+\sin t\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{\pi}{2}+\sin x$

Bài 7: CMR, nếu:

1) $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\le g(x)\quad \forall x$ thì ta cũng có: $f\left[f(x)\right]\le g\left[g(x)\right]$

2) $f(x)$ là đơn điệu tăng (giảm) trong X thì tồn tại hàm ngược $x=f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) trong miền Y là miền giá trị của $f(x)$.

Hướng dẫn giải

1) Theo giả thiết: $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\le g(x)\quad \forall x$ nên ta có: $f\left[f\left(x\right)\right]\le f\left[g\left(x\right)\right]\le g\left[g\left(x\right)\right]\Rightarrow f\left[f\left(x\right)\right]\le g\left[g\left(x\right)\right]$, đpcm

2) Xét trường hợp hàm tăng (giảm tương tự). Hàm tăng nên $x_1\ne x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\ne f\left(x_2\right)$ tức đơn ánh. Giới hạn tập đích là TGT thì hàm song ánh, vậy tồn tại hàm ngược.

$y_1 = f(x_1) \le y_2 = f(x_2) \Rightarrow x_1 \le x_2$ vì hàm tăng. Vậy $x_1 = f^{-1}(y_1) \le x_2 = f^{-1}(y_2)$ từ đó hàm ngược cũng tăng, đpcm

Bài 8: Cho $f(x)$ xác định trên [0,1]. Tìm miền xác định của các hàm:

1) $f\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x)$ xác định trên $[0,1]$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{\tan x}{\sqrt{3}} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \tan x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

2) $f(\ln x)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x)$ xác định trên $[0,1] \Rightarrow 0 \le \ln x \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le e \Rightarrow D = [1,e]$

3) $f(e^x)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x)$ xác định trên $[0,1] \Rightarrow 0 \le e^x \le 1 \Rightarrow -\infty < x \le 0 \Rightarrow D = (-\infty, 0]$

4) $f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x)$ xác định trên $[0,1] \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \dfrac{1+x}{1-x} \le 1 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} \ge 0 \\ \dfrac{1+x}{1-x} - 1 \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} \ge 0 \\ \dfrac{2x}{1-x} \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x \le 0 \end{array}\right. \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 0 \Rightarrow D = [-1, 0]$$

Bài 9: CMR bất kỳ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng (-a,a) cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi $f(x)$ như sau: $f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$

Đặt $\begin{cases} h(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right] \\ g(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right] \end{cases}$. Dễ dàng nhận ra, $h(x)$ là hàm số chẵn còn $g(x)$ là hàm số lẻ.

$\Rightarrow f(x)=h(x)+g(x)$ là tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ $\Rightarrow$ đpcm.

Để cm tính duy nhất ta giả sử có biểu diễn khác $f(x)=g'(x)+h'(x)=g(x)+h(x)$. Chuyển các hàm cùng chẵn hoặc cùng lẻ về cùng vế suy ra hàm chẵn = hàm lẻ. Điều này chỉ xảy ra khi chúng bằng 0. Ta có các hàm trùng nhau nên biểu diễn là duy nhất.

Bài 10: Hãy thử lại rằng hàm số $y=\frac{1-x}{1+x}$ có hàm ngược là chính nó.

Với điều kiện nào của a, b, c, d thì hàm số: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có hàm số ngược là chính nó?

Hướng dẫn giải

1) Tập xác đinh: $D=R\backslash\{-1\}$.

$$y=\frac{1-x}{1+x}\Rightarrow y+yx=1-x\Leftrightarrow x(y+1)=1-y\Rightarrow x=\frac{1-y}{1+y}\ (1)$$

Vậy hàm ngược của hàm số đã cho là chính nó.

2) Tập xác đinh: $D=R\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow ycx+yd=ax+b\Leftrightarrow x(yc-a)=b-yd\Rightarrow x=\frac{-yd+b}{yc-a}\ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Để hàm số có hàm ngược là chính nó, ta có điều kiện sau: $a=-d$, b, c bất kỳ

__HẾT__