BÀI TẬP: ĐẠI SỐ

CHƯƠNG III: MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HPT TUYẾN TÍNH

CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

Bài 1: Cho $A=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\\3&4\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}0&1\\3&2\\-2&3\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}2&-3\\1&2\\4&-1\end{bmatrix}$. Tính

a) $(A+B)+C$

b) $A+(B+C)$

c) 3A

d) Tìm A^t,B^t,C^t

Hướng dẫn giải

a) $(A+B)+C=\begin{bmatrix}1&4\\2&4\\1&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-3\\1&2\\4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\3&6\\5&6\end{bmatrix}$

b) **Đáp án:** $\begin{bmatrix}3&1\\3&6\\5&6\end{bmatrix}$

c) **Đáp án:** $\begin{bmatrix}3&9\\-3&6\\9&12\end{bmatrix}$

d) **Đáp án:** $A^t=\begin{bmatrix}1&-1&3\\3&2&4\end{bmatrix};B^t=\begin{bmatrix}0&3&-2\\1&2&3\end{bmatrix};C^t=\begin{bmatrix}2&1&4\\-3&2&-1\end{bmatrix}$

Bài 2: Thực hiện phép tính sau hoặc nêu lý do tại sao phép tính không thực hiện được?

a) $\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\2&-1&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\\-1&4\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-3\\2&5\\4&-2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2&0&-2&4\\1&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\3&0\\-2&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-2\\4&9\end{pmatrix}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\2&-1&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\\-1&4\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-3\\2&5\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1\\0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-3\\2&5\\4&-2\end{pmatrix}$

Không thực hiện được phép cộng vì 2 ma trận không cùng kích cỡ.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$

Bài 3: Cho $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Tìm ma trận X thỏa mãn: $A^T.X^T=B+X^T$

Hướng dẫn giải

Nhận thấy:

$$A^T.X^T=B+X^T \Leftrightarrow \left(A^T-E\right).X^T=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.X^T=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Bài 4: Cho $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2.

a. Tính $F=A^2-3A$

b. Tìm ma trận X thỏa mãn $\left(A^2+5E\right).X=B^T.\left(3A-3A^2\right)$

Hướng dẫn giải

a. Ta có $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow F=A^2-3A=\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

b. Ta có $A^2+5E=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}; 3A-3A^2=\begin{bmatrix} 9 & -18 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

Do vậy $\left(A^2+5E\right).X=B^T.\left(3A-3A^2\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix} -3 & 21 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} -3 & 21 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -3 & 21 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}-\frac{8}{5} & \frac{11}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{8}{5}\end{bmatrix}$$

Bài 5: Cho $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}$ và hàm số $f(x)=3x^2-2x+5$. Tính $f(A)$

Hướng dẫn giải

Ta có $A^2=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -9 & 10\\ -3 & 7 & 5\\ 2 & -9 & 13\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow f(A)=3.\begin{bmatrix}6 & -9 & 10\\ -3 & 7 & 5\\ 2 & -9 & 13\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}+5.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & -23 & 24\\ -13 & 34 & 13\\ 0 & 7 & 38\end{bmatrix}$$

Bài 6: Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Tính các ma trận $A+BC, A^tB-C, A(BC), (A+3B)(B-C)$.

Đáp án:

$A+BC=\begin{bmatrix}4 & 5 & 7\\ 13 & 9 & 0\\ 13 & 13 & 9\end{bmatrix}$; $A^tB-C=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 0\\ -8 & 2 & 8\\ 2 & -5 & -8\end{bmatrix}$; $A(BC)=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 24\\ 4 & 14 & 0\\ 7 & 4 & -19\end{bmatrix}$;

$(A+3B)(B-C)=\begin{bmatrix}16 & 3 & 10\\ -61 & -8 & -12\\ -46 & 8 & 11\end{bmatrix}$

Bài 7: Cho hai ma trận: $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 2 & -3\\ 5 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ 6 & 1 & 2 & -1\\ -2 & 8 & 1 & -3\end{bmatrix}$

a) Lập các ma trận $A+B, A-B, 2A+5B, 3A-B$.

b) Tìm ma trận X sao cho: $3(X+2A+B)=X+7A-2B$.

Hướng dẫn giải

a) $A+B=\begin{bmatrix}5&0&4&4\\7&5&4&-4\\3&11&3&-2\end{bmatrix}$. Các ý khác tương tự.

b) $3(X+2A+B)=X+7A-2B \Leftrightarrow 3X+6A+3B=X+7A-2B \Leftrightarrow 2X=A-5B$

$$=\begin{bmatrix}2&-1&3&0\\1&4&2&-3\\5&3&2&1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}3&1&1&4\\6&1&2&-1\\-2&8&1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13&-6&-2&-20\\-29&-1&-8&2\\15&-37&-3&16\end{bmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}-13/2&-3&-1&-10\\-29/2&-1/2&-4&1\\15/2&-37/2&-3/2&8\end{bmatrix}$$

Bài 8: Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 3 giao hoán với ma trận

a) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&2\end{bmatrix}$

Hướng dẫn giải

a. Gọi $X=\begin{bmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{bmatrix}$ là ma trận giao hoán với ma trận A

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}a&d&g\\2b&2e&2h\\3c&3f&3i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&2d&3g\\b&2e&3h\\c&2f&3i\end{bmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}d=2d\\g=3g\\2h=3h\\2b=b\\3c=c\\3f=2f\end{cases}\Leftrightarrow b=c=d=f=g=h=0$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&e&0\\0&0&i\end{bmatrix}$$

b. Gọi $X=\begin{bmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{bmatrix}$ là ma trận giao hoán với ma trận B

Tương tự như phần a, thông qua cân bằng hệ số ta thu được: $\begin{cases}c=f=0\\g=i-a+2d\\h=2e-b+2i\end{cases}$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} a & d & i-a+2d \\ b & e & 2e-b+2i \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

Bài 9: Lập ma trận $4A+3A^t$ (A^t là ma trận chuyển vị của A), cho biết: $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Hướng dẫn giải

$$4A+3A^t=4.\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}+3.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 6 & -1 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 33 \\ 2 & 28 & 17 \\ 30 & 25 & 56 \end{bmatrix}$$

Bài 10: Cho 2 ma trận: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. Hãy thực hiện các phép nhân sau:

AB, AA^t, A^tA, BA^t

Hướng dẫn giải

$$AB=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 & 3 & 9 \\ -12 & 2 & 36 \end{bmatrix};\ AA^t=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 43 & -13 \\ -13 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^tA=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 & 13 & -17 \\ 13 & 26 & -11 \\ -17 & -11 & 25 \end{bmatrix};\ BA^t=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -12 & 20 \\ -17 & 36 \end{bmatrix}$$

Bài 11: Tìm ma trận X thoả mãn:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+2X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2}X-\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+2X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}+2X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 2X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3/2 \end{bmatrix}$

b) *Đáp án:* $X=\begin{bmatrix}0&-12&12\\-4&18&4\\-8&-16&12\end{bmatrix}$

Bài 12: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}-2&2&0\\0&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$ và đa thức $P(x)=x^2+4x+4$. Tính P(A).

Đáp án: $P(A)=A^2+4A+4E=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$

Bài 13: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&1\end{bmatrix}$ khi đó $A^5=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. Tính a + c.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^5=\begin{bmatrix}251&109\\327&142\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow a+c=578$

Bài 14: Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn

a) $X^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ b) $X^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow X^2=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ca+dc&cb+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=0\\ab+bd=0\\ca+dc=0\\cb+d^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=0&(1)\\b(a+d)=0&(2)\\c(a+d)=0&(3)\\cb+d^2=0&(4)\end{cases}$

Từ (2) có $\left[\begin{array}{l}b=0\overset{(1)}{\Rightarrow}a=0\overset{(4)}{\Rightarrow}d=0\overset{(3)}{\Rightarrow}c\in\mathbb{R}\\ d=-a\overset{(1)}{\Rightarrow}c=-a^2/b\end{array}\right.$

Vậy $X=\begin{bmatrix}0&0\\c&0\end{bmatrix}$ hoặc $X=\begin{bmatrix}a&b\\-a^2/b&-a\end{bmatrix}$ với a, b, c là các số thực bất kỳ và $b\neq 0$.

b) Tương tự ý a)

Đáp án: $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\c&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\c&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a&b\\1-a^2/b&-a\end{bmatrix}$ với a, b, c là các số thực bất kỳ và $b\neq 0$

Bài 15: Tìm X thỏa mãn: $X.\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&3\\0&2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}^2$

Hướng dẫn giải

$$X.\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&3\\0&2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}^2$$

$$\Rightarrow X.\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\-2&10\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}2&5\\-2&10\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}1&\frac{5}{2}\\-1&5\end{bmatrix}$$

Bài 16: Tìm ma trận X thỏa mãn:

a. $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}.X-\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&1\\-2&3\end{bmatrix}^2$

b. $\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3&0\\2&1\end{bmatrix}+2X=\begin{bmatrix}1&-2\\5&7\end{bmatrix}$

c. $\frac{1}{2}.X-\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-6&6\\-2&9&2\\-4&-8&6\end{bmatrix}$

Hướng dẫn giải

a. $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}.X-\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&1\\-2&3\end{bmatrix}^2$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}-4&9\\-6&6\end{bmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-4&9\\-6&6\end{bmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}-2&\frac{9}{2}\\-3&3\end{bmatrix}$$

b. $\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3&0\\2&1\end{bmatrix}+2X=\begin{bmatrix}1&-2\\5&7\end{bmatrix}\Leftrightarrow 2X=\begin{bmatrix}-6&-4\\6&3\end{bmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}-3&-2\\3&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

c. $\frac{1}{2}.X-\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-6&6\\-2&9&2\\-4&-8&6\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}.X=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&19&2\\-2&17&-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&38&4\\-4&34&-2\end{bmatrix}$$

Bài 17: Thực hiện các phép toán lũy thừa:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^2$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$

f) $\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}^n$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 \\ -7 & -4 & -7 \\ 37 & 13 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *(Gợi ý: Chứng minh bằng phương pháp qui nạp như ý f)*

f) $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ở đây ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Thật vậy, với n = 1, luôn đúng.

Với $n \geq 2$, giả sử đúng với n = k, ta có: $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos ka & -\sin ka \\ \sin ka & \cos ka \end{pmatrix}$

Ta sẽ đi chứng minh nó đúng với n = k + 1

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ka & -\sin ka \\ \sin ka & \cos ka \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos ka.\cos a - \sin ka.\sin a & -\cos ka.\sin a - \sin ka.\cos a \\ \sin ka.\cos a + \cos ka.\sin a & -\sin ka.\sin a + \cos ka.\cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k+1)a & -\sin(k+1)a \\ \sin(k+1)a & \cos(k+1)a \end{pmatrix}$$

Lưu ý: Để dùng được phương pháp qui nạp chúng ta cần phải dự đoán được trước kết quả của bài toán. Tuy nhiên, không phải bài nào chúng ta cũng dễ dàng tìm được.

Bài 18: Cho ma trận vuông cấp 2: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Hãy chứng minh:

a) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ (E là ma trận đơn vị và O là ma trận không cấp 2).

b) Nếu $A^3=O$ thì $A^2=O$.

Hướng dẫn giải

a) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{bmatrix}-(a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+(ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=O$

b) Từ $A^3=O \Rightarrow |A|^3=|A^3|=0 \Rightarrow |A|=ad-bc=0$. Đến đây áp dụng kết quả câu a:

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \Rightarrow A^2-(a+d)A=O$ (1)

Từ (1) $\Rightarrow A^3+(a+d)A^2=O \Rightarrow (a+d)A^2=O$

Nếu $a+d\neq 0 \Rightarrow A^2=O$. Nếu $a+d=0$ thì từ (1) cũng trực tiếp $A^2=O$

Vậy tóm lại luôn có $A^2=O$

Bài 19:

a. Cho $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tính A^{10}

b. Cho $A=\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$. Tính A^n

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{10}=\begin{bmatrix} 1024 & 1023 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix}$

b. Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 3a & -\sin 3a \\ \sin 3a & \cos 3a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{bmatrix}$$

__HẾT__