Bài tập phần Đồ thị & Cây

1. Hãy liệt kê tất cả các cây bao trùm đôi một không đẳng cấu của mỗi đồ thị dưới đây:

(a) K_3 (b) K_4 (c) K_5 (d) $K_{3,3}$

2. Tìm cây bao trùm nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal của đồ thị gồm các đỉnh A, B, C, D, E, F, G, H và được cho bởi ma trận trọng số sau:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	∞	5	7	∞	10	∞	∞	∞
B	5	∞	∞	∞	12	3	∞	∞
C	7	∞	∞	9	∞	∞	5	∞
D	∞	∞	9	∞	1	∞	5	8
E	10	12	∞	1	∞	7	∞	∞
F	∞	3	∞	∞	7	∞	∞	9
G	∞	∞	5	5	∞	∞	∞	7
H	∞	∞	∞	8	∞	9	7	∞

3. (a) Chứng minh rằng bậc trung bình của một cây luôn nhỏ hơn 2.

(b) Giả sử rằng mọi đỉnh trong đồ thị đều có bậc ít nhất bằng k. Liệu đồ thị này có đường đi độ dài k?

4. Chứng minh rằng Q_3 không có hai cây bao trùm không chung cạnh.

5. Chứng minh rằng mọi cây đều là đồ thị hai phần.

6. Giả sử G là một đồ thị liên thông với n đỉnh. Hãy chứng minh rằng G có đúng một chu trình nếu và chỉ nếu G có n cạnh.

7. Một đồ thị gọi là 2-**xóa được** nếu và chỉ nếu nó chứa hai đỉnh v và w sao cho $G - \{v\}$ là liên thông và $G - \{w\}$ cũng liên thông. Hãy chứng minh rằng mọi đồ thị liên thông với ít nhất hai đỉnh đều là 2-**xóa được**.

8. Với giá trị nào của n đồ thị K_n có hành trình Euler?

9. (a) Xét cây T và e là một cạnh mới nối giữa hai đỉnh không kề trong T. Giải thích tại sao $T + \{e\}$ phải chứa **đúng một** chu trình.

(b) Suy ra rằng đồ thị $T + \{e\}$ phải có một cây bao trùm khác T.

10. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị có trọng số; và trong G tồn tại cạnh e có trọng số nhỏ nhất, có nghĩa rằng $w(e) < w(f)$ với mọi cạnh $f \in E - \{e\}$. Chứng minh rằng mọi MST của G đều phải chứa e.

11. Xét G là một lưới 4×4 với cạnh dọc và ngang giữa hai đỉnh cạnh nhau. Một cách hình thức, tập đỉnh của nó là

$$V(G) := \{(k, j) \mid 0 \leq k, j \leq 3\}.$$

Đặt h_{ij} là cạnh ngang $\langle (i, j) - (i+1, j) \rangle$ và v_{ji} là cạnh dọc $\langle (j, i) - (j, i+1) \rangle$ với mọi $i = 0, 1, 2$ và $j = 0, 1, 2, 3$. Trọng số của các cạnh này được định nghĩa như sau:

$$w(h_{ij}) := \frac{4i + j}{100},$$
$$w(v_{ji}) := 1 + \frac{i + 4j}{100}.$$

(a) Hãy vẽ G trên mặt phẳng.

(b) Xây dựng một cây bao trùm trọng số nhỏ nhất (MST) cho G bằng thuật toán Kruskal.

(c) Xây dựng một MST cho G bắt đầu từ đỉnh $(1, 2)$ bằng thuật toán Prim–Jarník như sau:

Input: Đồ thị $G = (V, E)$ liên thông có trọng số.
Output: MST $T = (W, F)$ của G.

```
W := {x}, với x là một đỉnh bất kỳ trong V;
F := ∅;
while W ≠ V do
    Tìm một cạnh {u, v} có trọng số nhỏ nhất trong G thoả mãn u ∈ W và v ∉ W;
    Thêm đỉnh v vào W;
    Thêm cạnh {u, v} vào F;
end
```

(d) Chứng minh rằng với mọi đồ thị có trọng số G, thuật toán Prim-Jarník luôn cho một MST.

12. Dùng nguyên lý quy nạp để chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là một đồ thị với $|V| = 2m$, và G không chứa tam giác (đồ thị C_3), vậy thì $|E| \leq m^2$.

13. Chứng minh rằng nếu G là một đồ thị với n đỉnh, m cạnh, và c thành phần liên thông thì

$$n - c \leq m \leq \frac{1}{2}(n-c)(n-c+1).$$

Hãy xây dựng các ví dụ để chứng minh rằng cả hai dấu bằng có thể đạt được với mọi giá trị của n và c thỏa mãn $n \geq c$.

14. Một dãy số $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là **dãy bậc** nếu có một đồ thị với n đỉnh gán nhãn $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sao cho $\deg(v_i) = d_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Chứng minh rằng nếu $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là dãy bậc và $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, vậy thì

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$$

với $1 \leq k \leq n$.

15. **Chu vi nhỏ nhất** của một đồ thị G là giá trị nhỏ nhất của g để G có chứa một g-chu trình. Chứng minh rằng một đồ thị chính quy với bậc k và có chu vi nhỏ nhất $2m+1$ phải có ít nhất

$$1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{m-1}$$

đỉnh, và rằng một đồ thị chính quy với bậc k và chu vi nhỏ nhất bằng $2m$ phải có ít nhất

$$2[1 + (k-1) + (k-1)^2 + \cdots + (k-1)^{m-1}]$$

đỉnh.

16. Hãy xây dựng một bảng của các cận dưới trong hai bài tập trước khi $k = 3$ và chu vi nhỏ nhất là $3, 4, 5, 6, 7$. Chứng minh rằng có một đồ thị đạt được cận dưới cho bốn trường hợp đầu tiên, nhưng không cho trường hợp thứ 5.