Ngày 8 tháng 8 năm 2018

Chương 1

Hàm sinh

Nhiều ví dụ và bài tập trong chương này được tham khảo từ [Matousek-Nesetril]...

1.1 Ứng dụng của đa thức trong tổ hợp

Ví dụ 1.1.1. Có bao nhiêu cách trả lại 10 đồng nếu ta chỉ có 4 tờ một đồng, 3 tờ hai đồng, và 2 tờ 5 đồng?

Giải. Đây chính là số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 = 10$$

thỏa mãn

$$e_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad e_2 \in \{0, 2, 4, 6\}, \quad e_3 \in \{0, 5, 10\}.$$

Ở đây e_1, e_2, và e_3 (tương ứng) là tổng số tiền 1 đồng, 2 đồng, và 5 đồng cần trả lại. Ta khẳng định rằng: số nghiệm của phương trình này cũng chính là hệ số x^{10} của đa thức

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^5 + x^{10}).$$

Thật vậy, hệ số của x^{10} được tính từ tích của x^{e_1} trong dấu ngoặc đầu tiên, x^{e_2} trong dấu ngoặc thứ hai, và x^{e_3} trong dấu ngoặc thứ ba sao cho $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3} = x^{e_1+e_2+e_3} = x^{10}$. Đẳng thức này tương đương với $e_1 + e_2 + e_3 = 10$. Nhân đa thức ta tìm được hệ số của x^{10} là 4. $\square$

Ví dụ 1.1.2. Chứng minh rằng

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Giải. Vế trái của công thức trên chính là tích của n đa thức $(1+x)$. Tương tự như trong Ví dụ 1.1.1, hệ số của x^r của vế trái chính là số nghiệm của phương trình

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = r$$

với $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$. Đây chính là số cách chọn r phần tử từ tập n phần tử $\{i_1, \ldots, i_n\}$ để gán số 1. Số này bằng $\binom{n}{r}$. □

Hai ví dụ sau đây nhằm chỉ ra tính hiệu quả của việc sử dụng đa thức trong chứng minh đẳng thức tổ hợp.

Ví dụ 1.1.3. Chứng minh rằng

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}.$$

Giải. Lấy đạo hàm cả hai vế của công thức trong Ví dụ 1.1.2 và thay x = 1, ta được công thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.1.4. Chứng minh rằng

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Giải. Xét đẳng thức

$$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}.$$

- Với vế phải, hệ số của x^n theo công thức nhị thức là $\binom{2n}{n}$.

- Với vế trái, ta khai triển hai đa thức $(1+x)^n$ theo công thức nhị thức rồi nhân lại với nhau. Hệ số x^n trong tích này là

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh. □

Tính toán đa thức dùng máy tính

Có nhiều phần mềm giúp tính toán hình thức trên các đa thức như: Maple, Mathematica, Sage,.... Ta cũng có thể tính toán qua trang web Wolfram|Alpha tại địa chỉ:

`http://www.wolframalpha.com`

Ví dụ 1.1.5. Ta sử dụng Wolfram|Alpha để tính toán với đa thức trong ví dụ 1.1.1.

- Để khai triển đa thức

  $$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^{10})$$

  ta đánh lệnh sau vào ô tìm kiếm:

  ```
  Expand[(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^{10})]
  ```

- Còn để tính hệ số của x^{10} trong đa thức trên ta đánh lệnh sau vào ô tìm kiếm:

  ```
  Coefficient[(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^({10})),x,10]
  ```

  Hàm `Coefficient[Poly,z,n]` trả lại hệ số của z^n trong đa thức (nhiều biến) $Poly$.

Mô tả về cách tính toán đa thức của Wolfram|Alpha có thể tìm thấy tại địa chỉ:

`https://reference.wolfram.com/language/guide/PolynomialAlgebra.html`

Bài tập

Bài 1.1. Xét hai đa thức

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ b(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m \end{aligned}$$

Hãy viết ra công thức tính hệ số của x^k trong tích $a(x)b(x)$ với $0 \le k \le n+m$.

Bài 1.2. Biểu diễn số nghiệm nguyên của các phương trình sau như hệ số của số mũ x thích hợp trong tích các đa thức:

1. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = r, \qquad 0 \le e_i \le 4$
2. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \qquad 0 < e_i < 4$
3. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \qquad 2 \le e_i \le 8$, e_1 chẵn, e_2 lẻ
4. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \qquad 0 \le e_i$
5. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \qquad 0 < e_i$, e_2, e_4 lẻ, $e_4 \le 3$
6. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \qquad -3 \le e_i \le 3$

Bài 1.3. Một quán cà phê có bán ba loại bánh: táo, mứt, và kem. Có bao nhiêu cách mua 12 chiếc bánh sao cho mỗi loại có ít nhất hai chiếc **và** số bánh táo không vượt quá ba? Hãy biểu diễn số này như hệ số của số mũ x thích hợp trong tích các đa thức thích hợp.

Bài 1.4. Có bao nhiêu cách để phát hết 10 quả bóng giống nhau cho 2 cậu bé và 2 cô bé sao cho mỗi cậu bé được ít nhất một quả **và** mỗi cô bé được ít nhất hai quả? Hãy biểu diễn số này như hệ số của số mũ x thích hợp trong tích các đa thức thích hợp.

Bài 1.5. Tính tổng $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$.

Bài 1.6. Tìm hệ số của $x^{10}y^5$ trong $(19x+4y)^{15}$.

1.2 Hàm sinh

Định nghĩa 1.2.1. **Hàm sinh** của dãy số $\langle g_0, g_1, g_2, \cdots \rangle$ là chuỗi vô hạn

$$G(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \cdots .$$

Ta sử dụng ký hiệu mũi tên hai phía để chỉ tương ứng giữa một dãy số và hàm sinh của nó như sau:

$$\langle g_0, g_1, g_2, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad g_0 + g_1x + g_2x^2 + \cdots .$$

Ví dụ, dưới đây là một vài dãy số và hàm sinh của chúng:

$$\begin{array}{rcl} \langle 0,0,0,0,\cdots\rangle & \longleftrightarrow & 0+0x+0x^2+0x^3+\cdots=0 \\ \langle 1,0,0,0,\cdots\rangle & \longleftrightarrow & 1+0x+0x^2+0x^3+\cdots=1 \\ \langle 3,2,1,0,\cdots\rangle & \longleftrightarrow & 3+2x+1x^2+0x^3+\cdots=3+2x+x^2 \end{array}$$

Ở ví dụ trên, các dãy số chỉ có một số hữu hạn số khác 0 nên hàm sinh của nó là một đa thức. Nhưng đối với dãy có vô hạn số khác 0, liệu ta có thể tìm một công thức đóng cho chúng?

Ví dụ 1.2.1. Hãy tìm công thức đóng cho hàm sinh của dãy số $\langle 1,1,1,\cdots\rangle$.

Giải. Đặt

$$G(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

Ta có

$$\begin{array}{rcl} G(x) & = & 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \\ -xG(x) & = & \quad -x-x^2-x^3-\cdots-x^n-\cdots \\ \hline G(x)-xG(x) & = & 1 \end{array}$$

Chia cả hai vế cho $1-x$, ta được công thức đóng cho $G(x)$:

$$G(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Nói cách khác, ta có

$$\langle 1,1,1,\cdots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x}.$$

□

Tính toán với hàm sinh dùng máy tính

Ta có thể dùng các lệnh sau trên Wolfram|Alpha để tính toán với hàm sinh:

- `FindGeneratingFunction[{`a_1`, `a_2`, ...}, `x`]` : cố gắng tìm hàm sinh theo x với hệ số thứ n là a_n.

  Ví dụ: Lệnh `FindGeneratingFunction[{1,2,3,4},x]` cho kết quả là hàm sinh $1/(x-1)^2$.

- `GeneratingFunction[`$expr$`, `n`, `x`]` : cho ta hàm sinh theo x của dãy với phần tử thứ n là biểu thức $expr$.

  Ví dụ: Lệnh `GeneratingFunction[2^n, n ,x]` cho kết quả là hàm sinh $1/(1-2x)$.

Bài tập

Bài 1.7. Hãy tìm công thức đóng cho hàm sinh của các dãy sau và sau đó kiểm tra lại kết quả dùng Wolfram|Alpha:

1. $\langle\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 6,\ -6,\ 6,\ -6,\ 6,\ \cdots\ \rangle$
2. $\langle 1,0,1,0,1,0,\cdots\rangle$
3. $\langle 1,2,1,4,1,8,\cdots\rangle$
4. $\langle 1,1,0,1,1,0,1,1,0,\cdots\rangle$
5. (bình phương hoàn hảo)

$$\langle 0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots\rangle = \langle 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ \cdots\rangle.$$

1.3 Một số phép toán trên hàm sinh

Xét hai dãy số và hàm sinh tương ứng của chúng như sau:

$$\begin{aligned}\langle f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad F(x),\\ \langle g_0,\ g_1,\ g_2,\ \cdots\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad G(x),\end{aligned}$$

Dưới đây là một số phép toán quan trọng trên các dãy số và hàm sinh tương ứng:

1. *Phép cộng*:

$$\langle f_0+g_0,\ f_1+g_1,\ f_2+g_2,\ \cdots\rangle \quad\longleftrightarrow\quad F(x)+G(x).$$

2. *Phép nhân với một hằng số*:

$$\langle cf_0,\ cf_1,\ cf_2,\ \cdots\rangle \quad\longleftrightarrow\quad c\cdot F(x)$$

3. *Phép dịch phải*:

$$\langle \underbrace{0,\cdots,0}_{k\times}, f_0,\ f_1,\ f_2,\cdots\rangle \quad\longleftrightarrow\quad x^k\cdot F(x).$$

4. *Phép thế αx vào x*:

$$\langle f_0,\ \alpha f_1,\ \alpha^2 f_2,\ \cdots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad F(\alpha x).$$

5. *Phép thế x^n vào x*:

$$\langle f_0, \underbrace{0,\cdots,0}_{n\times}, f_1, \underbrace{0,\cdots,0}_{n\times},\ f_2,\cdots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad F(x^n).$$

6. *Phép lấy đạo hàm và tích phân*:

$$\langle f_1,\ 2f_2,\ 3f_3,\ \cdots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad F'(x).$$
$$\langle 0,\ f_0,\ \frac{1}{2}f_1,\ \frac{1}{3}f_2,\ \frac{1}{4}f_3,\ \cdots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t.$$

7. *Phép nhân hai hàm sinh*:

$$\langle h_0, h_1, h_2, \cdots\rangle \longleftrightarrow F(x)\cdot G(x),$$

trong đó
$$h_n = f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + f_2 g_{n-2} + \cdots + f_n g_0.$$

Luật tích ở trên có thể mô tả trực quan như sau. Đặt

$$H(x) = F(x)\cdot G(x).$$

Tích các tổng trong tích trên có thể xác định dựa vào bảng sau:

	g_0x^0	g_1x^1	g_2x^2	g_3x^3	$\cdots$
f_0x^0	$f_0g_0x^0$	$f_0g_1x^1$	$f_0g_2x^2$	$f_0g_3x^3$	$\cdots$
f_1x^1	$f_1g_0x^1$	$f_1g_1x^2$	$f_1g_2x^3$	$\cdots$	
f_2x^2	$f_2g_0x^2$	$f_2g_1x^3$	$\cdots$		
f_3x^3	$f_3g_0x^3$	$\cdots$			
$\vdots$	$\cdots$				

Để ý rằng các tổng liên quan đến cùng số mũ x sẽ nằm trên đường chéo $\nearrow$ của bảng. Cụ thể, các tổng liên quan đến x^n sẽ nằm trên đường chéo thứ $(n+1)$. Đây chính là tổng

$$f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + f_2 g_{n-2} + \cdots + f_n g_0.$$

Ví dụ 1.3.1. Hãy tìm công thức đóng cho hàm sinh của các dãy số sau:

1. $\langle 1, 2, 4, 8, \cdots \rangle$

2. $\langle 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \cdots \rangle$

3. $\langle 1, 2, 3, \cdots \rangle$

Giải.

1. Thế $2x$ vào x trong công thức $1 + x + x^2 + \cdots = 1/(1-x)$. Ta được

$$1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots = \frac{1}{1-2x}.$$

Vậy ta có

$$\langle 1, 2, 4, 8, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-2x}.$$

2. Áp dụng luật thế x^2 vào x cho hàm sinh trong câu (1), ta được

$$\langle 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-2x^2}.$$

Áp dụng luật dịch phải ta được

$$\langle 0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{x}{1-2x^2}.$$

Áp dụng luật cộng ta được hàm sinh cần tìm:

$$\langle 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1+x}{1-2x^2}.$$

3. Lấy đạo hàm của chuỗi

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

ta được $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$. Vậy ta có

$$\langle 1, 2, 3, 4, \cdots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^2}.$$

□

Bài tập

Bài 1.8. Hãy tìm công thức đóng cho hàm sinh của các dãy sau và sau đó kiểm tra lại kết quả dùng Wolfram|Alpha:

1. $\langle\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 6,\ -6,\ 6,\ -6,\ 6,\ \cdots\ \rangle$
2. $\langle 1,0,1,0,1,0,\cdots\rangle$
3. $\langle 1,2,1,4,1,8,\cdots\rangle$
4. $\langle 1,1,0,1,1,0,1,1,0,\cdots\rangle$
5. (bình phương hoàn hảo)
$$\langle 0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots\rangle = \langle 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ \cdots\rangle.$$

Bài 1.9. Mục đích của bài tập này là chỉ ra một phương pháp hiệu quả để tính nhiều công thức tổng.

1. Chứng minh rằng nếu
$$\langle g_0,\ g_1,\ g_2,\ \ldots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad G(x)$$
thì
$$\langle g_0,\ g_0+g_1,\ g_0+g_1+g_2,\ \ldots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x}G(x).$$
2. Dùng kết quả trên hãy tìm $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Dùng kết quả trên hãy tìm $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
4. Với n và m là các số tự nhiên, hãy tính $\sum_{k=1}^{n}(-1)\binom{n}{k}$.
5. Có vẻ như với phương pháp này ta có thể tính mọi tổng, nhưng thực tế không đơn giản như vậy! Chuyên gì xảy ra nếu bạn dùng phương pháp này để tính tổng $\sum_{k=1}^{n} 1/k$?

Bài 1.10. Dãy $r_0, r_1, r_2, \cdots$ được định nghĩa một cách đệ quy bởi luật sau: $r_0 = r_1 = 0$ và
$$r_n = 7r_{n-1} + 4r_{n-2} + (n+1),$$
với $n \geq 2$. Hãy biểu diễn hàm sinh của dãy này như thương của hai đa thức hoặc tích của các đa thức. Bạn không cần tìm dạng tường minh cho r_n.

Bài 1.11. Xét $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ta có thể kiểm tra được rằng

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!},$$

với $A^{(n)}$ là đạo hàm cấp n của A. Hãy dùng kết quả trên (thay vì luật tích) để chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n.$$

1.4 Tính hệ số của hàm sinh

Ta ký hiệu $[x^n]F(x)$ là hệ số của x^n trong hàm sinh

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots.$$

Có nghĩa rằng $[x^n]F(x) = f_n$.

Ví dụ 1.4.1. Tìm $[x^n]1/(1-x)^c$.

Giải. Ta có

$$\frac{1}{(1-x)^c} = (1 + x + x^2 + \cdots)^c.$$

Hệ số của x^n trong hàm sinh trên chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_c = n.$$

Vậy hệ số của x^n là $\binom{n+c-1}{n}$. Nói cách khác

$$\left\langle 1,\ c,\ \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \binom{c+3}{4}, \cdots \right\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^c}.$$

□

Ví dụ 1.4.2. Tìm

$$[x^n](x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5.$$

Hệ số này chính là số cách chọn n chiếc kẹo từ 5 loại kẹo, mỗi loại lấy ít nhất hai chiếc.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}(x^2+x^3+x^4+\cdots)^5 &= [x^2(1+x+x^2+\dots)]^5\\ &= x^{10}(1+x+x^2+\dots)^5\\ &= x^{10}\frac{1}{(1-x)^5}.\end{aligned}$$

Vậy thì

$$\begin{aligned}[x^n](x^2+x^3+x^4+\cdots)^5 &= [x^n]\left(x^{10}\frac{1}{(1-x)^5}\right)\\ &= [x^{n-10}]\left(\frac{1}{(1-x)^5}\right)\\ &= \binom{(n-10)+5-1}{n-10}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.4.3. Ta cần \$15 để đóng góp cứu trợ đồng bào vùng bão lụt. Có 20 sinh viên tham gia đóng góp. Biết rằng 19 người đầu tiên sẽ góp \$1 hoặc không, người thứ 20 sẽ góp \$1 hoặc \$5 (hoặc không góp). Hãy dùng hàm sinh để tính số cách quyên góp \$15.

Giải. Bài toán này tương đương với bài toán đếm số nghiệm của phương trình

$$e_1+e_2+\cdots+e_{20}=15$$

trong đó $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\dots,19$ và $x_{20}\in\{0,1,5\}$. Tương tự như trong Ví dụ 1.1.1, hàm sinh cho số nghiệm của phương trình này là

$$(1+x)^{19}(1+x+x^5)$$

Ta có

$$(1+x)^{19} = 1+\binom{19}{1}x+\binom{19}{2}x^2+\cdots+\binom{19}{19}x^{19}.$$

Ta đặt $F(x)$ là đa thức đầu tiên và $G(x)=(1+x+x^5)$. Hệ số x^{15} trong đa thức $H(x)=F(x)G(x)$ là

$$f_{15}g_0+f_{14}g_1+\cdots+f_0g_{15}$$

rút gọn chỉ còn

$$f_{15}g_0 + f_{14}g_1 + f_{10}g_5.$$

Vậy số cách quyên góp là

$$\binom{19}{15} \times 1 + \binom{19}{14} \times 1 + \binom{19}{10} \times 1 = \binom{19}{15} + \binom{19}{14} + \binom{19}{10}.$$

□

Ví dụ 1.4.4. Hãy tính số cách chọn n quả cam, táo, hoặc chuối thỏa mãn ba yêu cầu sau đây:

- có nhiều nhất 2 quả cam,
- số táo tùy ý, và
- số chuối phải chia hết cho 3.

Giải. Hàm sinh cho "Số cách chọn k quả cam trong đó có nhiều nhất hai quả cam":

$$C(x) = 1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}.$$

Hàm sinh cho "Số cách chọn k quả táo":

$$T(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Hàm sinh cho "Số cách chọn k quả chuối thỏa mãn số chuối chia hết cho 3":

$$\begin{aligned} B(x) &\longleftrightarrow \langle 1,0,0,1,0,0,1,0,\cdots \rangle \\ B(x) &= \frac{1}{1-x^3}. \end{aligned}$$

Từ luật tích, ta có hàm sinh cho số cách chọn quả

$$\begin{aligned} C(x)\cdot T(x)\cdot B(x) &= \frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Đây chính là hàm sinh cho dãy số $\langle 1,2,3,\cdots \rangle$. Số cách chọn n quả chính là hệ số của x^n trong $F(x)$:

$$[x^n]\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = n+1.$$

□

Tính các hệ số hàm sinh dùng máy tính

Ta có thể dùng các lệnh sau trên Wolfram|Alpha để tính hệ số của hàm sinh:

- Lệnh `SeriesCoefficient[`f`, {`x`, `x_0`, `n`}`n`]` : tính hệ số $(x-x_0)^n$ trong khai triển của hàm f tại điểm $x = x_0$. Khi tính hệ số hàm sinh, ta đặt $x_0 = 0$.

  Ví dụ: Lệnh `SeriesCoefficient[Sqrt[1+x], {x,0,3}]` để tính hệ số của x^3 trong hàm sinh $\sqrt{1+x}$ cho kết quả là $1/16 = \binom{1/2}{3}$.

- Lệnh `Series[`f`, {`x`, `x_0`, `n`}]` : tìm một chuỗi luỹ thừa là khai triển của hàm sinh f tại điểm $x = x_0$ tới bậc $(x-x_0)^n$.

  Ví dụ: Lệnh `Series[1/(1-2x),x,0,5]` cho kết quả là

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + O(x^6)$$

Bài tập

Bài 1.12. Hãy tính

1. $[x^{15}](x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^4$.
2. $[x^{50}](x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} \cdots)^6$.
3. $[x^5](1-2x)^{-2}$.
4. $[x^4]\sqrt[3]{1+x}$.
5. $[x^3]\big((2+x)^{3/2}/(1-x)\big)$.
6. $[x^4]\big((2+3x)^5\sqrt{(1-x)}\big)$
7. $[x^3]\big(1-x+2x^2\big)^9$.

Bài 1.13. Mục đích của bài tập này nhằm chỉ ra phương pháp xây dựng hàm sinh như tích hoặc thương của các đa thức.

1. Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}$, hàm sinh cho dãy các số nguyên dạng mũ k là thương của hai đa thức theo x. Có nghĩa rằng, với mọi $k \in \mathbb{N}$ có đa thức $R_k(x)$ và $S_k(x)$ sao cho
$$[x^n]\left(\frac{R_k(x)}{S_k(x)}\right) = n^k$$
Gợi ý: Để ý rằng đạo hàm của thương hai đa thức cũng là thương của hai đa thức. Ta không cần phải chỉ rõ tường minh $R_k(x)$ và $S_k(x)$ để chứng minh điều này.

2. Chứng minh rằng nếu $f(n)$ là một hàm trên các số nguyên không âm định nghĩa đệ quy dưới dạng
$$f(n) = f(n-1) + bf(n-2) + cf(n-3) + p(n)\alpha^n$$
với $a, b, c, \alpha \in \mathbb{C}$ và p là một đa thức với hệ số phức, vậy hàm sinh cho dãy
$$f(0), f(1), f(2), \ldots$$
sẽ là thương của hai đa thức theo x, và vậy có một biểu thức dạng tường minh cho $f(n)$.

Gợi ý: Xét
$$\frac{R_k(x)}{S_k(x)}$$

Bài 1.14. Sơn đang lên kế hoạch cho một chuyến đi xa bằng tàu biển, và anh ta cần quyết định xem nên mang gì theo.

- Anh chắc chắn phải mang mỳ tôm, được đóng 6 gói một.
- Anh và hai người bạn không biết nên ăn mặc lịch sự hay thoải mái. Vậy nên hoặc anh mang 0 đôi tông, hoặc anh mang 3 đôi.
- Do không có nhiều chỗ trong vali để khăn tắm, nên anh mang nhiều nhất 2 chiếc.
- Có lẽ sẽ dừng ở nhiều bãi biển đẹp và đông người, anh quyết định mang ít nhất 1 quần bơi.

1. Xét g_n là số cách khác nhau để Sơn mang n đồ vật (gói mỳ, đôi tông, khăn tắm, quần bơi) theo. Hãy biểu diễn hàm sinh $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ dưới dạng thương của hai đa thức.

2. Tìm công thức tường minh cho số cách Sơn mang đúng n đồ vật.

Bài 1.15. Bạn đang muốn mua một bó hoa. Bạn tìm thấy một cửa hàng trên mạng bó hoa từ hoa ly, hoa hồng, và hoa tulip, và bán theo ràng buộc sau

- chỉ có nhiều nhất ba bông hoa ly,

- phải có một số lẻ hoa tulip,

- số lượng hoa hông tuỳ ý.

Ví dụ: một bó gồm 3 bông tulip, không có bông ly nào, và 5 bông hồng thoả mãn ràng buộc trên.
Xét f_n là số bó hoa gồm n bông hoa thoả mãn rằng buộc này. Hãy biểu diễn hàm sinh $F(n)$ tương ứng với dãy $\langle f_0, f_1, f_2, \cdots \rangle$ theo thương của hai đa thức (hoặc tích của các đa thức). Bạn không cần đơn giản biểu thức này.

Bài 1.16. Đặt g_n là số cách trả lại n đồng chỉ dùng các tờ một đồng, các tờ hai đồng, và/hoặc các tờ năm đồng.

1. Hãy viết ra hàm sinh cho dãy $\langle\ g_0,\ g_1,\ g_2,\ \cdots\ \rangle$.

2. Dùng kết quả của câu 1, hãy tìm công thức cho g_n.

Bài 1.17. Các ngày phải đi học trong năm tới có thể đánh số $1, 2, \cdots, 300$. Tôi muốn trốn học càng nhiều càng tốt.

- Những ngày chẵn, tôi nói "bị ốm".

- Những ngày là bội của 3, tôi nói "bị tắc đường".

- Những ngày là bội của 5, tôi kiên quyết không ra khỏi chăn ấm.

Cuối cùng thì có bao nhiêu ngày tôi trốn học trong năm tới?

Bài 1.18. Bài tập này mô tả phương pháp tính các tổng dùng hàm sinh.

1. Xét
$$S(n) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$
Hệ số x^n trong hàm sinh trên là gì?

2. Giải thích xem tại sao $S(x)/(1-x)$ là hàm sinh cho các tổng của các bình phương. Có nghĩa rằng hệ số của x^n trong chuỗi $S(x)/(1-x)$ là $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

3. Dùng phần trước, hãy chứng minh rằng
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.5 Số Fibonacci

Dãy Fibonacci
$$\langle 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots \rangle$$
được định nghĩa bởi
$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (\text{với } n \geq 2). \end{aligned}$$

Ví dụ 1.5.1. Hãy tìm hàm sinh $F(x)$ cho dãy Fibonacci
$$\langle 0,\ 1,\ f_1+f_0,\ f_2+f_1,\ f_3+f_2,\ \cdots \rangle$$

Giải. Vì
$$\begin{array}{rlllllll} & \langle & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, \cdots \rangle & \longleftrightarrow \quad x \\ & \langle & 0, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, \cdots \rangle & \longleftrightarrow \quad xF(x) \\ + & \langle & 0, & 0, & f_0, & f_1, & f_2, \cdots \rangle & \longleftrightarrow \quad x^2F(x) \\ \hline & \langle & 0, & 1+f_0, & f_1+f_0, & f_2+f_1, & f_3+f_2, \cdots \rangle & \end{array}$$
nên ta có
$$\begin{aligned} F(x) &= x + xF(x) + x^2F(x) \\ &= \frac{x}{1-x-x^2}. \end{aligned}$$
□

Ví dụ 1.5.2. Hãy tìm hệ số của x^n trong hàm sinh $F(x)$ của dãy Fibonacci.

Giải. Trước hết, ta phân tích mẫu số

$$1 - x - x^2 = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x).$$

Ta được

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \qquad \text{và} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

Sau đó, ta tìm A_1, A_2 thoả mãn

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A_1}{1 - \alpha_1 x} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2 x}.$$

bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính. Ta được

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ A_2 &= \frac{-1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Vậy thì

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \alpha_1 x} - \frac{1}{1 - \alpha_2 x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big((1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \cdots) - (1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \cdots)\big) \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta được

$$\begin{aligned} [x^n]F(x) &= \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

□

Từ các ví dụ trên, ta được công thức lạ cho số Fibonacci thứ n:

Định lý 1.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Bài tập

Bài 1.19. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n mà không chứa hai số 0 liên tiếp?

Bài 1.20. Hãy tìm số các tập con (kể cả tập rỗng) của tập $\{1,2,\cdots,n\}$ mà không chứa hai số nguyên dương liên tiếp.

Bài 1.21. Tìm công thức tường minh cho các dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

1. $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$
2. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$
3. $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$.

Bài 1.22. Giải các hệ thức truy hồi

1. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 1$.
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + \cdots + a_1 + a_0$ $(n \geq 3)$ với $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

Bài 1.23. Giải hệ thức truy hồi

$$a_{n-2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$$

với điều kiện ban đầu $a_0 = 2, a_1 = 8$.

1.6 Số Catalan

Ví dụ 1.6.1. Tìm số cách đặt dấu ngoặc cho tổng n số để chỉ định trình tự thực hiện phép cộng. Với $n = 4$ ta có 5 khả năng:

$$\begin{gathered}(((a+b)+c)+d)\\((a+(b+c))+d)\\((a+b)+(c+d))\\(a+((b+c)+d))\\(a+(b+(c+d)))\end{gathered}$$

Giải. Đặt C_n là "số cách đặt dấu ngoặc cho tổng n số để chỉ định trình tự thực hiện phép cộng". Ta có công thức truy hồi cho C_n như sau:

$$\begin{aligned} C_n &= C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} C_iC_{n-i}. \end{aligned}$$

Ta đặt $C_0 = 0$ và dưới đây là một số giá trị của C_n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	0	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

Bây giờ, ta tìm công thức đóng cho hàm sinh của dãy $\langle C_n \rangle$. Xét hàm sinh của C_n

$$C(x) = 0 + x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + \cdots$$

Theo luật tích

$$\begin{aligned} C(x)^2 &= {C_0}^2 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0) + \cdots \\ &= 0 + 0 + \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{i=0}^{n} C_iC_{n-i} \right) x^n \\ &= C(x) - x. \end{aligned}$$

Giải phương trình

$$C(x)^2 - C(x) + x = 0$$

ta được

$$C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2} \quad \text{hoặc} \quad C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Vì $C(0) = C_0$ nên nghiệm đúng cho $C(x)$ là

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Tiếp theo, ta tìm hệ số của hàm sinh trên. Để làm điều này, ta cần đến định lý nhị thức tổng quát sau đây:

Định lý 2 (Công thức nhị thức tổng quát)**.** *Với mọi số thực r, ta có*

$$\left\langle \binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \binom{r}{3}, \binom{r}{4}, \cdots \right\rangle \quad \longleftrightarrow \quad (1+x)^r.$$

với $\binom{r}{k}$ được định nghĩa bởi

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Nghĩ $\sqrt{1-4x}$ như $(1-4x)^{1/2}$, theo định lý nhị thức tổng quát, ta có

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n. \end{aligned}$$

Vậy ta được

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

□

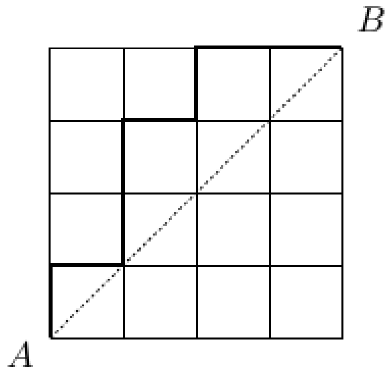
Số C_n tìm được ở trên là một trong những số hay gặp nhất trong tự nhiên sau hệ số tổ hợp. Ta gọi các số này là số Catalan. [Stanley2] đã chỉ ra hơn 200 đối tượng tổ hợp khác nhau có liên quan đến số C_n.

Định nghĩa 1.6.1. Số Catalan thứ n là số

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Bài tập

Bài 1.24. Cho bàn cờ $n \times n$ như sau:



Xét đường đi ngắn nhất từ góc A tới góc B đi qua các cạnh (mỗi đường qua $2n$ cạnh).

1. Có bao nhiêu đường như vậy?
2. Chứng minh rằng số đường không xuống dưới đường chéo chính là số Catalan C_n.

Bài 1.25. Hãy tìm cách chứng minh số cách đặt dấu ngoặc là số Catalan mà không dùng hàm sinh.

Bài 1.26. Có $2n$ người đứng đợi mua vé xem phim. Mỗi vé giá 5 đồng. Mọi người đều muốn mua vé; trong đó n người đều chỉ có một tờ 10 đồng và n khác người đều chỉ có một tờ 5 đồng. Ban đầu người bán vé không có đồng nào.

1. Có bao nhiêu cách xếp hàng cho $2n$ người này sao cho người bán vé luôn trả được 5 đồng cho những người chỉ có tờ 10 đồng.
2. Hãy tính xác suất để người bán vé có thể trả tiền được cho mọi người khi họ đứng xếp hàng một cách ngẫu nhiên.

Bài 1.27. Có bao nhiêu dãy gồm n số nguyên $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ thỏa mãn $a_i \leq i$? Ví dụ, có 5 dãy độ dài 3:

$$111 \quad 112 \quad 113 \quad 122 \quad 123$$

Bài 1.28. Có bao nhiêu dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_1 = 0$ và $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$? Ví dụ,

$$000 \quad 001 \quad 010 \quad 011 \quad 012$$

1.7 Hàm sinh mũ

Lấy phần lớn từ [Tucker2014].

Trong nhiều trường hợp, dãy $\langle g_n \rangle$ có hàm sinh rất phức tạp, trong khi dãy $\langle g_n/n! \rangle$ lại có hàm sinh đơn giản. Khi đó, ta có một mẹo rất hiệu quả: Tính toán trên dãy $\langle g_n/n! \rangle$ sau đó chia cho $n!$. Phương pháp này được sử dụng khá thường xuyên, đặc biệt trên các đối tượng liên quan đến hoán vị.

Ta xét bài toán tìm số xâu độ dài bốn trên bảng chữ $\{a, b, c\}$ với ít nhất hai chữ a để mô tả ý tưởng này. Các xâu này có thể được tạo ra từ các đa tập sau:

$$\begin{array}{lll} \{a,a,a,a\}, & \{a,a,a,b\}, & \{a,a,a,c\}, \\ \{a,a,b,b\}, & \{a,a,b,c\}, & \{a,a,c,c\}. \end{array}$$

Số cách sắp xếp các chữ trong mỗi đa tập trên tương ứng là

$$\frac{4!}{4!\,0!\,0!} \quad \frac{4!}{3!\,1!\,0!} \quad \frac{4!}{3!\,0!\,1!} \quad \frac{4!}{2!\,2!\,0!} \quad \frac{4!}{2!\,1!\,1!} \quad \frac{4!}{2!\,0!\,2!}$$

Lấy tổng số các cách sắp xếp trên ta được số xâu cần tìm.

Số các đa tập ở trên thực ra chính là số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 = 4 \qquad \text{với } 2 \le e_1, 0 \le e_2, e_3$$

và ứng với mỗi nghiệm (e_1, e_2, e_3) ta không muốn đếm 1 mà đếm

$$\frac{(e_1 + e_2 + e_3)!}{e_1!\; e_2! e_3!}.$$

Theo ngôn ngữ của hàm sinh, ta muốn hệ số x^4 đếm mọi tích hình thức gắn với

$$\frac{(e_1 + e_2 + e_3)!}{e_1!\; e_2!\; e_3!} x^{e_1} x^{e_2} x^{e_3}.$$

Định nghĩa 1.7.1. Hàm sinh mũ của dãy số $\langle g_0, g_1, g_2, \cdots \rangle$ là chuỗi vô hạn

$$\begin{aligned} G(x) &= g_0 + g_1 x/1! + g_2 x^2/2! + \cdots \\ &= \sum_{n \ge 0} g_n \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.7.1. Tìm hàm sinh mũ cho dãy $\langle g_n \rangle$, với g_n số xâu độ dài n trên bảng chữ $\{a, b, c\}$ với ít nhất hai chữ a.

Giải. Xét hàm sinh

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2.$$

Hệ số x^r của hàm sinh trên là tổng của mọi tích

$$\left(\frac{x^{e_1}}{e_1!}\right)\left(\frac{x^{e_2}}{e_2!}\right)\left(\frac{x^{e_2}}{e_2!}\right)$$

thỏa mãn

$$e_1 + e_2 + e_3 = r \quad \text{với } 2 \le e_1,\ 0 \le e_2, e_3.$$

Nếu ta chia x^r cho $r!$, hệ số x^r trở thành

$$\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=r} \frac{r!}{e_1!\, e_2!\, e_3!}\right)\frac{x^r}{r!} \qquad (2 \le e_1,\ 0 \le e_2, e_3).$$

Đây chính là hệ số mà ta muốn tìm. □

Ví dụ 1.7.2. Tìm hàm sinh cho g_r, là số cách sắp xếp r đối tượng (không lặp) trong tập gồm n đối tượng.

Giải. Vì không có lặp, hàm sinh của nó là

$$(1 + x)^n.$$

Hệ số của x^r trong $(1 + x)^n$ là $\binom{n}{r}$. Tuy nhiên, bây giờ ta muốn tìm hệ số của $x^r/r!$ trong $(1 + x)^n$:

$$\binom{n}{r}x^r = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}x^r = \frac{n!}{(n-r)!}\ \frac{x^r}{r!}.$$

Vậy $g_r = n!/(n-r)!$. □

Ví dụ 1.7.3. Tìm hàm sinh mũ cho số cách sắp xếp r đối tượng chọn từ 4 kiểu đối tượng với mỗi kiểu xuất hiện ít nhất hai lần và nhiều nhất bốn lần.

Giải. Ta biết "số cách sắp xếp r đối tượng với e_i đối tượng kiểu i" là

$$\frac{r!}{e_1!\, e_2!\, e_3!\, e_4!}.$$

Đây chính là hệ số của $\frac{x^r}{r!}$ trong $\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4$. □

Ví dụ 1.7.4. Tìm hàm sinh mũ cho số cách đặt r đối tượng vào ba phòng khác nhau với

1. ít nhất một người/phòng.
2. số chẵn người mỗi phòng.

Giải. Hàm sinh mũ cho hai câu trên là

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^3 \quad \text{và} \quad \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^3.$$

□

Dưới đây là một số đẳng thức hay dùng với hàm sinh mũ:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$
$$e^{nx} = 1+nx+\frac{n^2x^2}{2!}+\frac{n^3x^3}{3!}+\cdots$$

Từ các đẳng thức trên ta dẫn ra hai đẳng thức sau

$$\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right) = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Ví dụ 1.7.5. Tìm số cách khác nhau để sắp xếp r đối tượng được chọn (không giới hạn) từ n kiểu đối tượng.

Giải. Hàm sinh mũ cho dãy này là

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^n = (e^x)^n = e^{nx}.$$

Từ công thức ở trên, hệ số của $x^r/r!$ trong hàm sinh này là n^r. □

Ví dụ 1.7.6. Tìm số cách đặt 25 người vào 3 phòng khác nhau sao cho mỗi phòng có ít nhất một người.

Giải. Hàm sinh mũ cho dãy này là

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^3=(e^x-1)^3.$$

Đầu tiên ta khai triển biểu thức này

$$(e^x-1)^3=e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1.$$

Ta được

$$e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1=\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}-3\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{x^n}{n!}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1$$

Hệ số của $x^{25}/5!$ là $3^{25}-(3\times 2^{25})+3$. □

Ví dụ 1.7.7. Tìm số dãy độ dài r từ bốn chữ số $\{0,1,2,3,4\}$ với một số lẻ số 0 và một số chẵn số 1.

Giải. Hàm sinh cho dãy này là

$$\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2.$$

Dùng các đẳng thức trên, ta có thể viết lại hàm sinh này bằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\times\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)e^xe^x&=\frac{1}{4}\left(e^{2x}-e^0+e^0-e^{-2x}\right)e^xe^x\\&=\frac{1}{4}(e^{4x}-1)=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^n\frac{x^n}{n!}-1\right).\end{aligned}$$

Vậy hệ số của $x^n/n!$ là 4^{r-1}.

□

Bài tập

Bài 1.29. Tìm hàm sinh mũ cho số cách sắp xếp r đối tượng lấy từ 5 kiểu khác nhau với mỗi kiểu lấy ít nhất 5.

Bài 1.30. Tìm hàm sinh mũ cho số cách phân r người vào 6 phòng với số người mỗi phòng từ 2 đến 4.

Bài 1.31.

1. Tìm hàm sinh mũ cho $s_{n,r}$ là số cách phân bổ n đối tượng vào n hộp phân biệt thỏa mãn mọi hộp đều chứa ít nhất một đối tượng. Ở đây ta xem n là hằng số.
2. Xác định $s_{n,r}$. Số $s_{n,r}/n!$ được gọi là *số Stirling loại hai*.

Bài 1.32. Có bao nhiêu xâu tam phân độ dài r với:

1. số chữ số 0 là số chẵn?
2. số chữ số 0 là số chẵn và số chữ số 1 cũng là số chẵn?
3. ít nhất một chữ số 0 và ít nhất một chữ số 1?

Định nghĩa 1.7.2. Số Bell B_n là số cách phân hoạch một tập n phần tử.

Ví dụ, $B_0 = 1$ vì tập rỗng có một phân hoạch là chính nó; $B_3 = 5$ vì tập $\{1, 2, 3\}$ có năm phân hoạch

$$\begin{gathered}\{\{1,2,3\}\}\\ \{\{1,2\},\{3\}\}\\ \{\{1,3\},\{2\}\}\\ \{\{2,3\},\{1\}\}\\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\}\end{gathered}$$

Bài 1.33.

1. Chứng minh rằng: Với mọi $n \geq 1$,
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$
2. Hãy tìm hàm sinh mũ cho số Bell.