Toán rời rạc
Bài tập 1

Bài 1

Hãy chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố.

Bài 2

Dùng nguyên lý Sắp thứ tự tốt để chứng minh rằng: với mọi số nguyên không âm n, ta luôn có

$$n \leq 3^{n/3} \tag{1}$$

Gợi ý: Hãy kiểm tra (1) *với các giá trị* $n \leq 4$.

Bài 3

Với $n = 40$ giá trị của đa thức $p(n) ::= n^2 + n + 41$ không phải là số nguyên tố. Ta dự đoán rằng, ngoại trừ các đa thức hằng số, không có đa thức nào chỉ sinh ra các giá trị là các số nguyên tố.

Cụ thể, xét đa thức $q(n)$ với hệ số nguyên dương, và xét $c ::= q(0)$ là số hạng hằng số của $q(n)$.

(a) Chứng minh rằng $q(cm)$ là bội của c với mọi $m \in \mathbb{Z}$.

(b) Chứng minh rằng nếu đa thức q không phải đa thức hằng số và $c > 1$, thì tập

$$\{q(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

chứa vô hạn số **không** nguyên tố.

(c) Kết luận rằng với mọi đa thức q không phải hằng số, có một số nguyên n sao cho $q(n)$ **không** là số nguyên tố.

Bài 4

Chứng minh rằng trong một nhóm gồm 9 người luôn có bốn người đôi một quen nhau hoặc ba người đôi một lạ nhau.

Toán rời rạc
Bài tập 2

Bài 1

Ở một nước lạ luôn có hai loại người. Loại **Dối** luôn nói dối và loại **Thật** luôn nói thật. Một ngày, bạn đến nước lạ này và gặp hai người A và B.

- A nói: B là loại Thật.
- B nói: A và B không cùng loại.

Hãy xác định loại của A và B.

Bài 2

Bạn có 12 đồng xu, trong đó có một đồng là giả, và một quả cân. Các đồng xu thật có trọng lượng bằng nhau, nhưng đồng xu giả có trọng lượng nhỏ hơn các đồng còn lại. Hãy đưa ra chiến lược để xác định đồng xu giả mà chỉ dùng nhiều nhất 3 lần cân. (Chú ý: cân này có 2 đĩa, luôn nghiêng về bên nặng hơn).

Bài 3

Hãy sử dụng các luật đại số (slide 21 và 22 trong bài giảng) để đưa công thức

$$A \oplus B \oplus C$$

về cả hai dạng chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển.

Bài 4

Một tập phép toán logic được gọi là **đầy đủ** nếu mỗi mệnh đề đều tương đương với một mệnh đề chỉ chứa các toán tử logic đó.

Ví dụ: Ta đã biết trong bài giảng rằng tập $\{\neg, \rightarrow\}$ là đầy đủ.

Chứng minh rằng các tập

$$\{\texttt{AND}, \texttt{NOT}\}, \quad \{\texttt{OR}, \texttt{NOT}\}, \quad \{\texttt{NAND}\}$$

đều là đầy đủ.

Bài 5

Mục đích của bài tập này là kiểm tra xem những đặc tả sau đây có *thỏa được* không:

1. Nếu hệ thống file không bị khóa, thì
   (a) các thông điệp mới sẽ được đặt trong hàng đợi.
   (b) các thông điệp mới sẽ được gửi tới bộ đệm thông điệp.
   (c) hệ thống đang hoạt động bình thường, và ngược lại, nếu hệ thông đang hoạt động bình thường, thì hệ thống không bị khóa.
2. Nếu thông điệp mới không được đặt trong hàng đợi, thì chúng sẽ được gửi tới bộ đệm thông điệp.
3. Các thông điệp mới sẽ không được gửi tới bộ đệm thông điệp.

(a) Dịch năm đặc tả trên thành công thức mệnh đề dùng bốn biến mệnh đề sau đây:

$$\begin{aligned} L &:= \text{hệ thống file bị khóa,} \\ Q &:= \text{các thông điệp mới được đặt trong hàng đợi,} \\ B &:= \text{các thông điệp mới được gửi tới bộ đệm thông điệp,} \\ N &:= \text{hệ thống hoạt động bình thường.} \end{aligned}$$

(b) Chứng minh rằng tập đặc tả là thỏa được bằng cách mô tả một cách gán giá trị chân lý cho các biến L, Q, B, N, và kiểm tra rằng với cách gán này mọi đặc tả đều đúng.

(c) Chứng tỏ rằng cách gán xác định trong phần (b) là duy nhất.

Bài 6

Hãy đưa ra chứng minh hình thức của các định lý sau:

Với mọi công thức mệnh đề A, B, C bất kỳ, ta có:

1. $\vdash A \to A$,
2. $\vdash (\neg A \to A) \to A$,
3. $A \to B,\ B \to C\ \vdash A \to C$.
4. $A \to (B \to C)\ \vdash\ B \to (A \to C)$,
5. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$,
6. $\vdash \neg\neg A \to A$,
7. $\vdash A \to \neg\neg A$.

Toán rời rạc
Bài tập 3

Bài 1: Chứng minh sai

Tìm lỗi sai trong chứng minh dưới đây rằng $a^n = 1$ với mọi số nguyên không âm n và a là số thực không âm.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo n, với giả thiết

$$P(n) := \forall k \leq n. \quad a^k = 1,$$

trong đó k là biến nhận giá trị nguyên không âm.

Bước cơ sở: $P(0)$ tương đương với $a^0 = 1$ đúng theo định nghĩa của a^0 (kể cả khi $a = 0$).

Bước quy nạp: Giả sử $a^k = 1$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $k \leq n$. Nhưng vậy thì

$$a^{n+1} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

kéo theo $P(n+1)$ đúng.

Vậy bởi quy nạp $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$, có nghĩa rằng $a^n = 1$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. □

Bài 2: Bài toán ô chữ

Trong một trò chơi ô chữ, có 15 chữ cái và một ô trống đặt trên một lưới 4×4. Một bước chuyển gọi là hợp lệ nếu chữ cái chỉ di chuyển sang ô trống kề với nó. Ví dụ, một dãy gồm hai bước chuyển được mô tả như sau:

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	O	N	

$\rightarrow$

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	O		**N**

$\rightarrow$

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J		L
M	O	**K**	N

Trong cấu hình trái nhất ở hình trên, chữ O và N là sai thứ tự. Liệu có cách chuyển hợp lệ để có thể hoán đổi vị trí của O và N mà vẫn giữ nguyên vị trí của các chữ khác, và vị trí ô trống vẫn ở góc phải bên dưới của lưới? Trong bài toán này, bạn sẽ chứng minh câu trả lời là “không thể".
Định lý. *Không tồn tại dãy chuyển để đưa từ cấu hình bên trái dưới đây sang cấu hình bên phải.*

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	**O**	**N**	

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	**N**	**O**	

(a) Ta định nghĩa một "thứ tự" của các chữ trên lưới là dãy đi từ dòng trên xuống dòng dưới, và với mỗi dòng đi từ trái qua phải. Ví dụ, trong lưới bên phải thứ tự các chữ là $A, B, C, D, E, \ldots$.

Liệu việc di chuyển một chữ theo hàng có làm thay đổi thứ tự trước sau của các cặp chữ? Có nghĩa rằng, liệu có cặp chữ (L_1, L_2) thỏa mãn L_1 đứng trước L_2 nhưng sau khi di chuyển một chữ theo hàng lại làm L_1 đứng sau L_2? Chứng minh câu trả lời của bạn.

(b) Có bao nhiêu cặp chữ bị thay đổi thứ tự sau mỗi lần di chuyển một chữ theo cột? Chứng minh câu trả lời của bạn.

(c) Một cặp chữ (L_1, L_2) gọi là *ngược* nếu L_1 đứng trước L_2 theo thứ tự từ điển, nhưng L_1 lại đứng sau L_2 theo thứ tự định nghĩa ở câu (a). Ví dụ, cấu hình sau đây:

A	B	C	E
D	H	G	F
I	J	K	L
M	N	O	

có đúng bốn cặp ngược: (D, E), (G, H), (F, H) và (F, G).

Việc chuyển một chữ theo hàng ảnh hưởng đến tính chẵn lẻ của số các cặp ngược như thế nào? Chứng minh câu trả lời của bạn.

(d) Việc chuyển một chữ theo cột ảnh hưởng đến tính chẵn lẻ của số các cặp ngược như thế nào? Chứng minh câu trả lời của bạn.

(e) Chứng minh bổ đề sau đây:
Bổ đề. *Trong mỗi cấu hình đạt được từ cấu hình dưới đây, tính chẵn lẻ của số các cặp ngược khác với tính chẵn lẻ của hàng chứa ô trống.*

1	A	B	C	D
2	E	F	G	H
3	I	J	K	L
4	M	O	N	

(f) Từ các nhận xét (a)–(e), hãy chứng minh định lý đã đưa ra ở trên.

Bài 3: Robot

Một robot đi trên một lưới nguyên hai chiều. Nó bắt đầu tại điểm $(0, 0)$, và di chuyển mỗi bước theo một trong bốn cách sau:

1. $(+2, -1)$: sang phải 2 bước, đi xuống 1 bước.
2. $(-2, +1)$: sang trái 2, đi lên 1
3. $(+1, +3)$
4. $(-1, -3)$

Liệu sau một số bước robot có thể đi tới được vị trí $(1,1)$ không? Nếu được hãy chỉ ra một cách đi. Nếu không được hãy chứng minh.

Bài 4: Hàm Ackermann

Các bài tập sau đây liên quan đến hàm Ackermann. Hàm này được định nghĩa như sau:

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n & \text{nếu } m = 0 \\ 0 & \text{nếu } m \geq 1 \text{ và } n = 0 \\ 2 & \text{nếu } m \geq 1 \text{ và } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{nếu } m \geq 1 \text{ và } n \geq 2 \end{cases}$$

1. Tìm các giá trị của hàm Ackermann

(a) $A(1,0)$

(b) $A(1,1)$

(c) $A(0,1)$

(d) $A(2,2)$

(e) $A(2,3)$

(f) $A(3,3)$

2. Tìm $A(3,4)$

3. Chứng minh rằng

$$A(m, n+1) > A(m,n)$$

với mọi số nguyên không âm m, n.

4. Chứng minh rằng

$$A(m+1, n) > A(m,n)$$

với mọi số nguyên không âm m, n.

Bài 5: Lây cúm

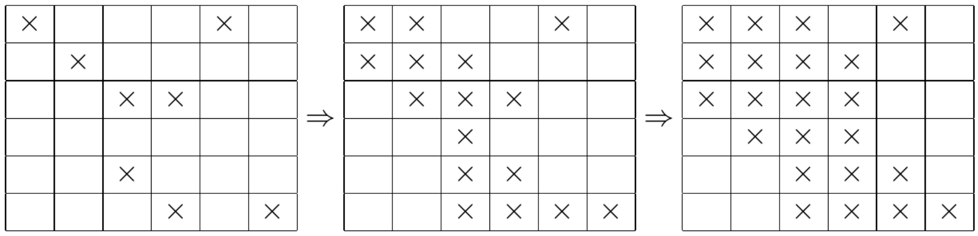
Trong lớp Toán rời rạc, các sinh viên được xếp ngồi trên một lưới $n \times n$. Một sinh viên bị cúm sẽ lây cho một số sinh viên khác trong lớp. Dưới đây là một ví dụ khi $n = 6$ và các sinh viên bị cúm được đánh dấu $\times$.

×				×	
	×				
		×	×		
		×			
			×		×

Hai sinh viên ở vị trí kề nhau nếu họ có chung cạnh (cụ thể, trên, dưới, phải, trái, nhưng **không** chéo); vậy, mỗi sinh viên kề với $2, 3$ hoặc 4 người khác. Bây giờ, việc lây lan bắt đầu diễn ra từng phút. Một sinh viên bị nhiễm cúm ở thời điểm tiếp theo nếu hoặc

- sinh viên này trước đó đã bị cúm, hoặc
- sinh viên này *kề* với ít nhất hai người đã bị nhiễm cúm.

Ví dụ, việc lây lan được chỉ ra như dưới đây



Trong ví dụ trên, sau một vài bước, mọi sinh viên trong lớp sẽ bị nhiễm cúm.

Hãy chứng minh định lý sau đây.
Định lý. *Nếu tại thời điểm ban đầu trong lớp có ít hơn n sinh viên bị nhiễm cúm, thì không bao giờ xảy ra việc cả lớp đều bị nhiễm cúm.*

Gợi ý: Để hiểu hệ thống kiểu như trên “tiến triển" thế nào theo thời gian, một chiến lược là

1. xác định một tính chất phù hợp của hệ thống ở giai đoạn ban đầu, và
2. chứng minh, bằng quy nạp theo bước thời gian, rằng tính chất này là bảo toàn ở mọi bước.

Vậy hãy bắt đầu bằng việc tìm kiếm một tính chất (của tập sinh viên bị nhiễm cúm) không thay đổi (bất biến) theo thời gian.

BÀI TẬP PHẦN ĐỒ THỊ

NORMAN L. BIGGS (DISCRETE MATHEMATICS)

1. Đồ thị và biểu diễn

1. Có ba ngôi nhà A, B, C, mỗi ngôi nhà đều kết nối với cả ba nhà cung cấp ga, nước, và điện: G, W, E.

(a) Hãy viết danh sách cạnh cho đồ thị biểu diễn bài toán này và vẽ nó.

(b) Liệu bạn có thể vẽ đồ thị này trên mặt phẳng để không có cạnh cắt nhau không?

2. Một khu vườn được thiết kế dạng đồ thị hình bánh xe W_n, trong đó tập đỉnh là $V = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ và tập cạnh là

$$\begin{aligned} &\{0,1\},\ \{0,2\},\ \cdots,\ \{0,n\} \\ &\{1,2\},\ \{2,3\},\ \cdots,\ \{n-1,n\},\ \{n,1\} \end{aligned}$$

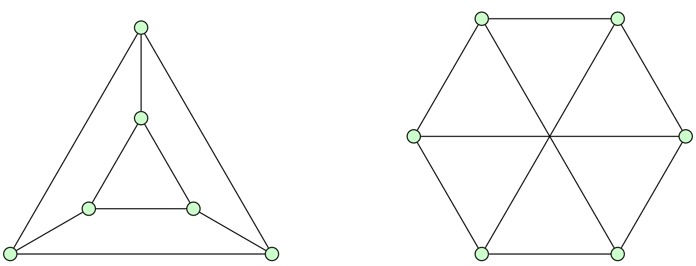
Hãy mô tả một đường đi bắt đầu và kết thúc đều tại đỉnh 0 và thăm mỗi đỉnh đúng một lần.

3. Với mỗi số nguyên dương n, ta định nghĩa **đồ thị đầy đủ** K_n là đồ thị gồm n đỉnh, trong đó mọi cặp đỉnh đều kề nhau. Đồ thị K_n có bao nhiêu cạnh? Với giá trị nào của n thì ta có thể vẽ đồ thị K_n trên mặt phẳng sao cho không có cạnh nào cắt nhau.

4. Một 3-*chu trình* trong đồ thị là tập ba đỉnh đôi một kề nhau. Hãy xây dựng một đồ thị với 5 đỉnh và 6 cạnh mà không chứa C_3.

2. Đẳng cấu

1. Hãy chứng minh rằng hai đồ thị sau không đẳng cấu.



2. Tìm một đẳng cấu giữa các đồ thị định nghĩa bởi hai danh sách cạnh sau. (Đây chính là đồ thị Peterson)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	0	1	0	2	6
5	0	1	2	3	4	4	3	5	7
7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

3. Xét $G = (V, E)$ là đồ thị định nghĩa như sau. Tập đỉnh V là tập mọi xâu nhị phân độ dài 3, và tập cạnh E chứa các cặp xâu khác nhau đúng một vị trí. Chứng minh rằng G đẳng cấu với đồ thị tạo bởi các góc và các cạnh của một khối lập phương.

3. Bậc

1. Các dãy số sau đây có thể là các bậc của mọi đỉnh của đồ thị nào đó không? Nếu có hãy vẽ một đồ thị như vậy.

(a) $2, 2, 2, 3$ (c) $2, 2, 4, 4, 4$

(b) $1, 2, 2, 3, 4$ (d) $1, 2, 3, 4$.

2. Xét đồ thị $G = (V, E)$, **phần bù** $\overline{G}$ của G là đồ thị có cùng tập đỉnh là V và tập cạnh là tất cả các cặp đỉnh khong kề nhau trong G. Nếu G có n đỉnh và các bậc của nó là $d_1, d_2, \ldots, d_n$, thì các bậc của $\overline{G}$ là gì?

3. Liệt kê các đồ thị chính quy bậc 4 (đôi một không đẳng cấu) với bảy đỉnh.

4. Giả sử G_1 và G_2 là các đồ thị đẳng cấu. Với mỗi $k \geq 0$, ký hiệu $n_i(k)$ là số đỉnh của G_i có bậc k $(i = 1, 2)$. Chứng minh rằng $n_1(k) = n_2(k)$.

5. Chứng minh rằng trong mọi đồ thị với ít nhất hai đỉnh luôn có hai đỉnh cùng bậc.

4. Đường đi và chu trình

1. Tìm số thành phần liên thông của đồ thị với danh sách cạnh là

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
f	c	b	h	c	a	b	d	a	a
i	g	e		g	i	c		f	f
j		g			j	e			

2. Đồ thị mô tả bữa tiệc của April có bao nhiêu thành phần liên thông?

3. Tìm chu trình Hamilton của đồ thị tạo bởi các đỉnh và cạnh của khối lập phương.

4. Năm tới, Dr Chunner và Dr Dodder định đi thăm đảo Mianda. Các địa điểm hấp dẫn và đường đi nối giữa chúng được biểu diễn bởi đồ thị có danh sách cạnh là

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7

Liệu có thể tìm đường cho họ thỏa mãn như trong *ví dụ* trên lớp.

5. Một con chuột định ăn một khối lập phương bơ $3 \times 3 \times 3$. Nó bắt đầu ở một góc và ăn hết toàn bộ khối $1 \times 1 \times 1$ trước khi chuyển sang ăn ô bên cạnh. Liệu con chuột có thể ăn miếng cuối cùng ở trung tâm khối lập phương không?

5. Cây

1. Xét $T = (V, E)$ là cây với $|V| \geq 2$. Hãy dùng tính chất

(T1) $|E| = |V| - 1$;

để chứng minh rằng T có ít nhất hai đỉnh bậc 1.

5. Hãy chứng minh rằng tính chất:

(T1) với mỗi cặp đỉnh x, y có duy nhất một đường đi từ x tới y;

kéo theo cả hai tính chất:

(T1) T liên thông; và

(T2) T không có chu trình.

3. Ta nói rằng đồ thị F là một **rừng** nếu nó có tính chất:

(T1) F không có chu trình.

Hãy chứng minh rằng nếu $F = (V, E)$ là một rừng với c thành phần liên thông thì

$$|E| = |V| - c.$$

6. Tô màu đồ thị

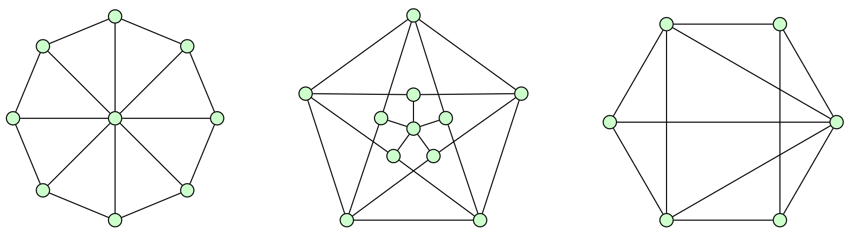
1. Tìm sắc số của các đồ thị sau:

(i) đồ thị đầy đủ K_n;

(ii) đồ thị chu trình C_{2r} với số đỉnh chẵn;

(iii) đồ thị chu trình C_{2r+1} với số đỉnh lẻ.

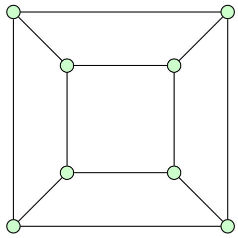
2. Tìm sắc số của các đồ thị sau:



3. Hãy mô tả tất cả các đồ thị G có $\chi(G) = 1$.

7. Thuật toán tham lam tô màu đỉnh

1. Tìm 3 cách đánh số thứ tự các đỉnh của đồ thị lập phương dưới đây để thuật toán tham lam dùng $2, 3,$ và 4 màu.



2. Chứng minh rằng với mọi đồ thị G ta luôn có cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu G dùng đúng $\chi(G)$ màu. [Gợi ý: dùng một cách tô màu dùng $\chi(G)$ màu để xác định thứ tự đỉnh cho thuật toán tham lam.]

3. Ký hiệu $e_i(G)$ là số đỉnh của đồ thị G có bậc nhỏ hơn i. Dùng thuật toán tham lam để chỉ ra rằng nếu tồn tại i để $e_i(G) \leq i+1$ thì $\chi(G) \leq i+1$.

4. Đồ thị M_r ($r \geq 2$) đặt được từ đồ thị chu trình C_{2r} bằng cách thêm các cạnh nối giữa mỗi cặp đỉnh đối nhau. Chứng minh rằng

(i) M_r là đồ thị hai phần khi r là số lẻ.

(ii) $\chi(M_r) = 3$ khi r chẵn và $r \neq 2$.

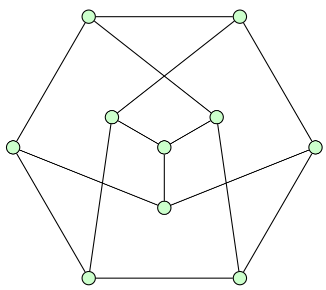
(iii) $\chi(M_2) = 4$.

8. Bài tập thêm

1. Với giá trị nào của n đồ thị K_n có hành trình Euler?

2. Dùng nguyên lý quy nạp để chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là một đồ thị với $|V| = 2m$, và G không chứa tam giác (đồ thị C_3), vậy thì $|E| \leq m^2$.

3. Xét $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và đặt V là tập mọi tập con 2-phần tử của X. Ký hiệu E là tập mọi cặp phần tử rời nhau của V. Chứng minh rằng đồ thị $G = (V, E)$ đẳng cấu với đồ thị dưới đây. Thực ra đây chính là một phiên bản của đồ thị Peterson nổi tiếng.



4. Xét G là một đồ thị hai phần với số đỉnh lẻ. Chứng minh rằng G không có chu trình Hamilton.

5. Đồ thị k-**lập phương** là đồ thị trong đó tập đỉnh là tập mọi xâu nhị phân độ dài k và hai đỉnh kề nhau nếu chúng khác nhau đúng một vị trí. Chứng minh rằng

(a) Q_k là đồ thị chính quy bậc k,

(b) Q_k là đồ thị hai phần.

6. Chứng minh rằng đồ thị Q_k có chu trình Hamilton.

7. Chứng minh rằng đồ thị Peterson không có chu trình Hamilton.

8. Chứng minh rằng nếu $\alpha : V_1 \to V_2$ là một đẳng cấu của các đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ thì hàm $\beta : E_1 \to E_2$ định nghĩa bởi

$$\beta\{x, y\} = \{\alpha(x), \alpha(y)\} \qquad (\{x, y\} \in E_1)$$

là một song ánh.

9. Nếu G là một đồ thị chính quy với bậc k và n đỉnh, hãy chứng minh rằng
$$\chi(G) \geq \frac{n}{n-k}.$$

10. Hãy xây dựng năm đồ thị chính quy bậc 3 đôi một không đẳng cấu với tám đỉnh.

11. Chứng minh rằng đồ thị đầy đủ K_{2n+1} là hợp của n chu trình Hamilton, trong đó không có hai chu trình nào có chung cạnh.

12. Liệu một con mã có thể đi hết các ô vuông của bàn cờ mỗi ô đúng một lần rồi quy về ô vuông xuất phát không? Diễn dịch câu trả lời của bạn theo thuật ngữ của chu trình Hamilton trong một đồ thị nào đó.

13. **Đồ thị kỳ lạ** O_k được định nghĩa như sau (khi $k \geq 2$): các đỉnh là các tập con $k-1$ phần tử của một tập $2k-1$ phần tử nào đó, và các cạnh nối hai tập con rời nhau. (Vậy thì O_3 là đồ thị Peterson.) Chứng minh rằng $\chi(O_k) = 3$ với mọi $k \geq 2$.

14. Chứng minh rằng nếu G là một đồ thị với n đỉnh, m cạnh, và c thành phần liên thông thì
$$n - c \leq m \leq \frac{1}{2}(n-c)(n-c+1).$$
Hãy xây dựng các ví dụ để chứng minh rằng cả hai dấu bằng có thể đạt được với mọi giá trị của n và c thỏa mãn $n \geq c$.

15. Một dãy số $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là **dãy bậc** nếu có một đồ thị với n đỉnh gán nhãn $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sao cho $\deg(v_i) = d_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Chứng minh rằng nếu $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là dãy bậc và $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, vậy thì
$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min(k, d_i)$$
với $1 \leq k \leq n$.

16. **Chu vi nhỏ nhất** của một đồ thị G là giá trị nhỏ nhất của g để G có chứa một g-chu trình. Chứng minh rằng một đồ thị chính quy với bậc k và có chu vi nhỏ nhất $2m+1$ phải có ít nhất
$$1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{m-1}$$
đỉnh, và rằng một đồ thị chính quy với bậc k và chu vi nhỏ nhất bằng $2m$ phải có ít nhất
$$2[1 + (k-1) + (k-1)^2 + \cdots + (k-1)^{m-1}]$$
đỉnh.

17. Hãy xây dựng một bảng của các cận dưới trong hai bài tập trước khi $k = 3$ và chu vi nhỏ nhất là $3, 4, 5, 6, 7$. Chứng minh rằng có một đồ thị đạt được cận dưới cho bốn trường hợp đầu tiên, nhưng không cho trường hợp thứ 5.

18. Xét $G = (V, E)$ là đồ thị với ít nhất ba đỉnh thỏa mãn
$$\deg(v) \geq \frac{1}{2}|V| \qquad (v \in V).$$
Chứng minh rằng G có chu trình Hamilton.

19. Chứng minh rằng nếu $\overline{G}$ là đồ thị bù của đồ thị G, thì $\chi(G)\chi(\overline{G}) \leq n$, với n là số đỉnh của G.

Toán rời rạc phần *Cặp ghép*
Bài tập 7

1. Để hiện đại hóa phương pháp giảng dạy, số giờ lên lớp của môn Toán rời rạc bị giảm đi, thay vào đó mỗi sinh viên phải tham gia vào một số nhóm tự học. Mỗi nhóm tự học này sẽ phải đề cử một sinh viên đại diện cho nhóm để trình bày một nội dung nghiên cứu trước lớp. Yêu cầu bắt buộc là một sinh viên **chỉ** đại diện cho một nhóm. Làm thế nào để chọn đại diện từ mỗi nhóm để đảm bảo yêu cầu này?

(a) Mô hình bài toán lựa chọn đại diện bằng ghép cặp.

(b) Danh sách đăng ký nhóm của sinh viên cho thấy rằng không có sinh viên nào là thành viên của hơn 4 nhóm và mọi nhóm đều có ít nhất 4 sinh viên. Liệu điều này có đảm bảo luôn có cách chọn đại diện thích hợp không? hãy giải thích.

2. Do số giờ lên lớp bị giảm đi, các sinh viên sẽ có nhiều thời gian hơn để tham gia vào các câu lạc bộ sinh viên (CLB); các CLB được đặt dưới sự quản lý của Hội sinh viên. Mỗi CLB đều muốn có thành viên đại diện ở trong ban chấp hành của Hội (để dễ xin tiền tài trợ), nhưng ban chấp hành không cho phép sinh viên nào đại diện cho **hơn một** CLB.

Sau khi xem hồ sơ, chị chủ tịch Hội thấy rằng: không có sinh viên nào là thành viên của nhiều hơn 9 câu lạc bộ, và mọi CLB đều có nhiều hơn 13 thành viên. Liệu điều này đã đủ để đảm bảo luôn có cách chọn đại diện từ các CLB chưa? Hãy giải thích.

3. Một *hình vuông Latin*[1] là một bảng $n \times n$ với các phần tử là các số $1, \ldots, n$. Các phần tử phải thỏa mãn hai ràng buộc: mọi hàng đều chứa đủ các số $1, \ldots, n$ theo một thứ tự nào đó, và mọi cột cũng phải chứa đủ các số $1, \ldots, n$ theo thứ tự nào đó.

Ví dụ, bảng dưới đây là một hình vuông Latin 4×4:

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

(a) Dưới đây là ba hàng của một hình vuông Latin 5×5 :

2	4	5	3	1
4	1	3	2	5
3	2	1	5	4

Hãy điền nốt hai hàng cuối để được một hình vuông Latin hoàn chỉnh.

(b) Hãy chỉ ra rằng: việc điền hàng tiếp theo của một hình vuông Latin $n \times n$ tương đương với bài toán ghép cặp trên đồ thị hai phần, mỗi phần gồm n-đỉnh.

(c) Hãy chứng minh rằng luôn tồn tại ghép cặp trong đồ thị hai phần này và, vậy thì ta luôn có thể mở rộng một một hình chữ nhật Latin để thành một Latin square.

4. Lấy một bộ bài gồm 52 quân. Mỗi quân bài có một chất và một gía trị. Có bốn chất: Rô, Cơ, Bích, Nhép; và có 13 giá trị: $A, 2, 3, \cdots, 10, J, Q, K$.

Hãy đề nghị một người bạn xếp bài trên một lưới gồm 4 hàng và 13 cột. Chị ta có thể để các quân bài theo cách bất kỳ. Trong bài tập này, bạn sẽ chứng minh rằng bạn luôn có thể lấy 13 quân bài, mỗi quân từ một cột trên lưới, sao cho có đủ 13 giá trị.

(a) Hãy mô hình bài toán này bằng cặp ghép trên đồ thị hai phần giữa 13 cột và 13 giá trị.

(b) Chỉ ra rằng mọi nhóm gồm n cột phải chứa ít nhất n giá trị khác nhau và chứng minh rằng tồn tại cặp ghép.

5. Các nhà nghiên cứu sau nhiều năm đã chỉ ra 20 đức tính cơ bản của con người: Trung thực, rộng lượng, trung thành, kiên trì, hoàn thành bài tập đầy đủ,... Vào đầu khóa học, mỗi sinh viên Khoa học máy tính đều có **đúng** 8 trong số 20 đức tính trên. Hơn nữa tập đức tính cơ bản cho mọi sinh viên là duy nhất; có nghĩa rằng không có hai sinh viên nào đã có cùng tập đức tính cơ bản. Các giảng viên Toán rời rạc phải lựa chọn thêm một đức tính nữa để đào tạo mỗi sinh viên trong suốt khóa học. Chứng minh rằng có một cách chọn thêm một đức tính cho mỗi sinh viên sao cho mỗi sinh viên có những đức tính khác nhau vào cuối khóa.

6. (Bài toán 'harem') Xét một tập chàng trai B, và giả sử mỗi chàng trai trong B đều mong muốn cưới nhiều hơn một trong số các bạn gái của anh ta. Tìm một điều kiện cần và đủ để bài toán harem có lời giải.

[1] Thuật ngữ Latin bắt nguồn từ Euler. Ông đã dùng tập ký tự Latin cho các phần tử của bảng.

Toán rời rạc: *Hôn nhân bền vững*
Bài tập 8

1. Có bốn sinh viên muốn thực tập tại bốn công ty. Sau đây là danh sách yêu thích của các sinh viên và của các công ty:

Sinh viên	Công ty
Albert	HP, Bellcore, AT&T, Draper
Nick	AT&T, Bellcore, Draper, HP
Oshani	HP, Draper, AT&T, Bellcore
Ali	Draper, AT&T, Bellcore, HP

Công ty	Sinh viên
AT&T	Ali, Albert, Oshani, Nick
Bellcore	Oshani, Nick, Albert, Ali
HP	Ali, Oshani, Albert, Nick
Draper	Nick, Ali, Oshani, Albert

(a) Hãy sử dụng thủ tục kén chồng (hoặc vợ) để tìm **hai** cặp ghép ổn định.

(b) Mô tả một thuật toán đơn giản để xác định xem liệu bài toán hôn nhân bền vững cho trước có nghiệm duy nhất không, có nghĩa rằng chỉ có duy nhất một cách ghép cặp ổn định.

2. Xét bài toán hôn nhân bền vững với 4 nam và 4 nữ với một phần thông tin về danh sách yêu thích của họ được cho dưới đây:

B1:	G1	G2	–	–
B2:	G2	G1	–	–
B3:	–	–	G4	G3
B4:	–	–	G3	G4
G1:	B2	B1	–	–
G2:	B1	B2	–	–
G3:	–	–	B3	B4
G4:	–	–	B4	B3

(a) Chứng minh rằng

$$(B1, G1), (B2, G2), (B3, G3), (B4, G4)$$

là ghép cặp ổn định với mọi cách gán giá trị còn lại trong danh sách yêu thích.

(b) Giải thích xem tại sao ghép cặp không phải là tốt nhất cho nam cũng không phải là tồi nhất cho nữ, và vì vậy nó không thể là kết quả của của Thủ tục kén chồng.

(c) Mô tả cách định nghĩa danh sách yêu thích cho n nam và n nữ để có ít nhất $2^{n/2}$ ghép cặp ổn định.

3. Giả sử có nhiều nam hơn nữ.

(a) Định nghĩa cặp ghép ổn định trong trường hợp này.

(b) Giải thích tại sao áp dụng Thủ tục kén chồng trong trường hợp này sẽ mang lại một cặp ghép ổn định trong đó mọi cô gái đều được kết hôn.

4. Hãy đưa ra một ví dụ cặp ghép ổn định giữa 3 nam và 3 nữ trong đó không ai lấy được người mình thích nhất. Giải thích tóm tắt tại sao cặp ghép của bạn là ổn định.

5. Trong một cặp ghép ổn định giữa n chàng trai và n cô gái dùng Thủ tục kén chồng, ta gọi một người là *may mắn* nếu họ được ghép cặp với một trong $\lceil n/2 \rceil$ người họ thích nhất. Hãy chứng minh định lý sau

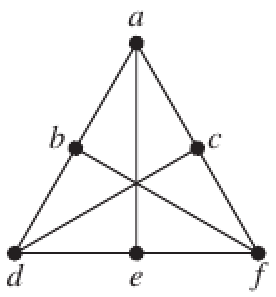
   Định lý. *Với thủ tục kén chồng, luôn có ít nhất một người may mắn.*

Toán rời rạc: *Đồ thị phẳng*

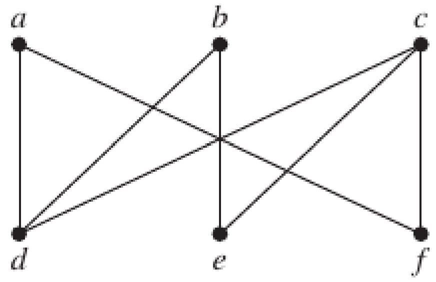
Bài tập 9

1. Các đồ thị sau đây có phẳng không? Nếu có hãy vẽ để nó không có cạnh cắt.

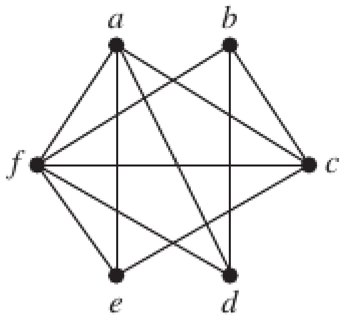
a)



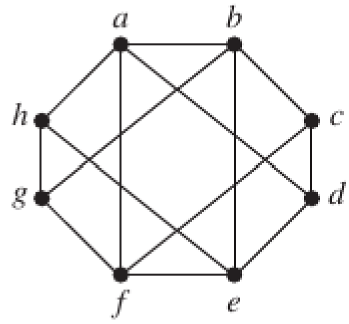
b)



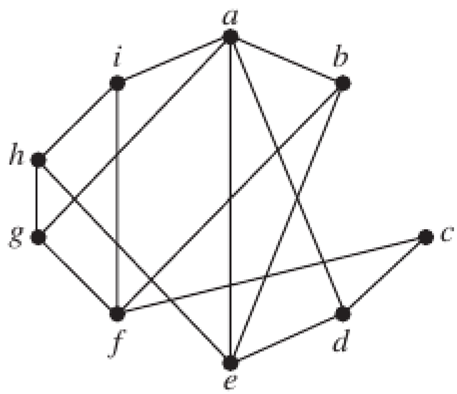
c)



d)



e)



2. Giả sử một đồ thị phẳng hai phần liên thông có e cạnh và v đỉnh. Hãy chứng minh rằng $e \leq 2v - 4$ nếu $v \geq 3$.

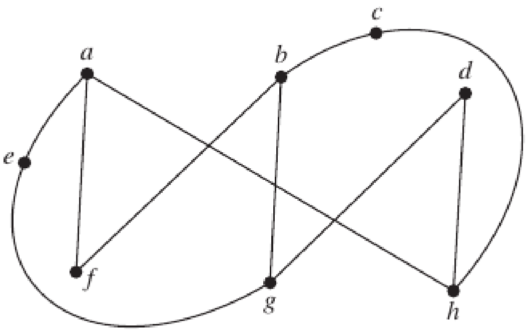
3. Giả sử một đồ thị liên thông hai phần phẳng có e cạnh và v đỉnh và không chứa chu trình có độ dài ≤ 4. Hãy chứng minh rằng $e \leq (5/3)v - (10/3)$ nếu $v \geq 3$.

4. Xét đồ thị phẳng có k thành phần liên thông, e cạnh, và v đỉnh. Ta cũng giả sử rằng biểu diễn phẳng của đồ thị chia mặt phẳng thành r miền. Hãy tìm công thức cho r theo e, v, và k.

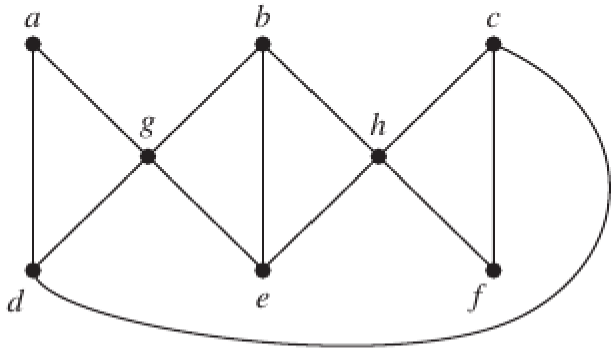
5. Đồ thị nào trong các đồ thị không phẳng dưới đây có tính chất: xóa mọi đỉnh và mọi cạnh liên thuộc với đỉnh đó cho ta một đồ thị phẳng? Giải thích.

6. Các đồ thị dưới đây có chứa một minor là $K_{3,3}$ không?

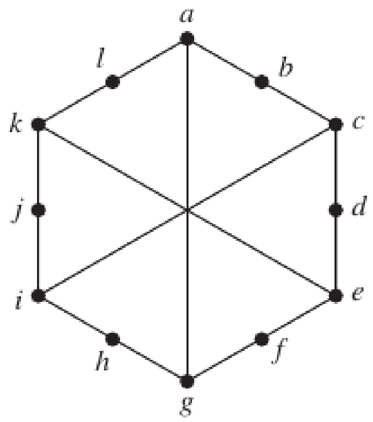
a)



b)



c)



7.

Định nghĩa. Giao số của đồ thị được định nghĩa là số giao điểm ít nhất khi vẽ đồ thị trên mặt phẳng sao cho không có ba cạnh nào cắt nhau tại cùng một điểm.

a) Chứng minh rằng $K_{3,3}$ có giao số bằng 1.

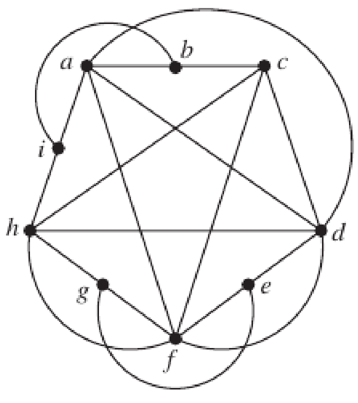
b) *Tìm giao số của mỗi đồ thị không phẳng sau

- K_5
- K_6
- K_7
- $K_{3,4}$
- $K_{4,4}$
- $K_{5,5}$

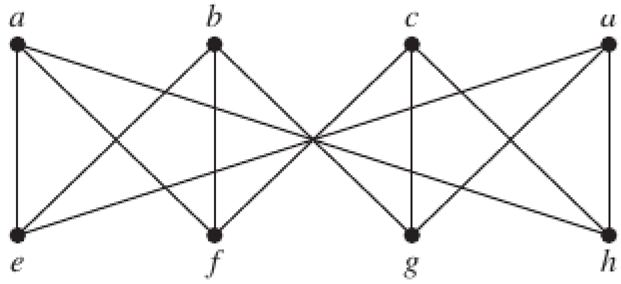
c) *Chứng minh rằng nếu m và n là các số nguyên chẵn, thì giao số của $K_{m,n}$ nhỏ hơn hoặc bằng $mn(m-2)(n-2)/16$.

8. Hãy dùng định lý Kuratowki-Wagner để xác định liệu các đồ thị sau đây có phẳng không?

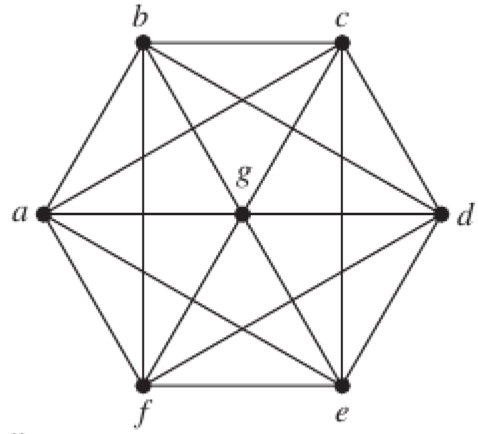
a)



b)



c)



Bài tập lập trình

Nếu bạn hoàn thành hai bài tập sau đây, hãy thông báo để giáo viên cộng 2 **điểm** vào bài thi giữa kỳ.

1. Hãy viết chương trình nhập vào một đồ thị (dưới dạng ma trận kề hoặc danh sách cạnh) từ file. Thông báo xem liệu đồ thị vừa nhập có phải đồ thị phẳng.
2. Hãy viết chương trình nhập hai đồ thị G_1 và G_2 từ file. Thông báo xem G_1 có chứa G_2 như một minor hay không.

Toán rời rạc: *Cây*
Bài tập 10

1. Có thể tìm được một cây có 8 đỉnh và thoả điều kiện dưới đây hay không? Nếu có, hãy vẽ cây đó; còn nếu không, hãy giải thích.

a. Mọi đỉnh đều có bậc 1.

b. Mọi đỉnh đều có bậc 2.

c. Có 6 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 1.

d. Có một đỉnh bậc 7 và 7 đỉnh bậc 1.

2. Chứng minh định lý móc xích kiểu hoa cúc trong slides.

3. **a.** Chứng minh rằng bậc trung bình của cây luôn nhỏ hơn 2.

b. Giả sử mọi đỉnh trong một đồ thị có bậc ít nhất bằng k. Hãy giải thích tại sao đồ thị có một đường đi độ dài k.

4. Một siêu khối H_n là một đồ thị với tập đỉnh là tập các xâu nhị phân độ dài n, và hai đỉnh trong H_n là kề nhau nếu và chỉ nếu chúng chỉ khác nhau đúng một bit. Ví dụ trong H_3, đỉnh 111 kề với đỉnh 011, nhưng hai đỉnh 101 và 011 là không kề.

a. Tính số đỉnh và số cạnh của H_n.

b. Giải thích tại sao ta không thể tìm được hai cây bao trùm **không** có chung cạnh trong H_3.

5. Chứng minh rằng mọi cây đều là đồ thị hai phần.

6. Giả sử G là một đồ thị liên thông với n đỉnh. Hãy chứng minh rằng G có đúng một chu trình nếu và chỉ nếu G có n cạnh.

7. Chứng minh rằng: Nếu G là một cây với đúng $2k$ đỉnh bậc lẻ, vậy G phân rã được thành k đường đi.

8. Hãy liệt kê tất cả các cây bao trùm đôi một không đẳng cấu của mỗi đồ thị dưới đây.

a. K_3 **b.** K_4 **c.** K_5 **d.** $K_{3,3}$

9. Tìm cây bao trùm nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal của đồ thị gồm các đỉnh A, B, C, D, E, F, G, H được cho bởi ma trận trọng số sau.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	∞	5	7	∞	10	∞	∞	∞
B	5	∞	∞	∞	12	3	∞	∞
C	7	∞	∞	9	∞	∞	5	∞
D	∞	∞	9	∞	1	∞	5	8
E	10	12	∞	1	∞	7	∞	∞
F	∞	3	∞	∞	7	∞	∞	9
G	∞	∞	5	5	∞	∞	∞	7
H	∞	∞	∞	8	∞	9	7	∞

10. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị có trọng số; và trong G tồn tại cạnh e có trọng số nhỏ nhất, có nghĩa rằng $w(e) < w(f)$ với mọi cạnh $f \in E - \{e\}$. Chứng minh rằng mọi MST của G đều phải chứa e.

11. Xét G là một lưới 4×4 với cạnh dọc và ngang giữa hai đỉnh cạnh nhau. Một cách hình thức, tập đỉnh của nó là

$$V(G) := \{(k, j) \mid 0 \leq k, j \leq 3\}.$$

Đặt h_{ij} là cạnh ngang $\langle (i, j) - (i+1, j) \rangle$ và v_{ji} là cạnh dọc $\langle (j, i) - (j, i+1) \rangle$ với mọi $i = 0, 1, 2$ và $j = 0, 1, 2, 3$. Trọng số của các cạnh này được định nghĩa như sau:

$$w(h_{ij}) := \frac{4i + j}{100},$$
$$w(v_{ji}) := 1 + \frac{i + 4j}{100}.$$

(a) Hãy vẽ G trên mặt phẳng.

(b) Xây dựng một cây bao trùm trọng số nhỏ nhất (MST) cho G bằng thuật toán Kruskal.

(c) Xây dựng một MST cho G bắt đầu từ đỉnh $(1, 2)$ bằng thuật toán Prim–Jarník như sau:

Input: Đồ thị $G = (V, E)$ liên thông có trọng số.
Output: MST $T = (W, F)$ của G.
$W := \{x\}$, với x là một đỉnh bất kỳ trong V;
$F := \emptyset$;
while $W \neq V$ **do**
    Tìm một cạnh $\{u, v\}$ có trọng số nhỏ nhất trong G thoả mãn $u \in W$ và $v \notin W$;
    Thêm đỉnh v vào W;
    Thêm cạnh $\{u, v\}$ vào F;
end

(d) Chứng minh rằng với mọi đồ thị có trọng số G, thuật toán Prim-Jarník luôn cho một MST.

12. Chứng minh rằng: Nếu trọng số trên các cạnh của đồ thị G là khác nhau từng đôi một, vậy đồ thị có duy nhất một MST.

13. **Cây bao trùm lớn nhất** của một đồ thị liên thông, có trọng số là cây bao trùm có trọng số lớn nhất. Hãy đề xuất một thuật toán tương tự thuật toán Kruskal xây dựng cây bao trùm cực đại của một đồ thị liên thông có trọng số.

14. Hãy đề xuất một thuật toán tương tự thuật toán Prim-Jarník để xây dựng cây bao trùm cực đại của một đồ thị liên thông có trọng số.

15. Hãy tìm cây bao trùm cực đại cho đồ thị có trọng số trong bài tập 11.

16. Hãy đề xuất một thuật toán tìm cây bao trùm nhỏ thứ 2 trong một đồ thị liên thông có trọng số. Chứng minh tính đúng đắn của thuật toán bạn vừa xây dựng.

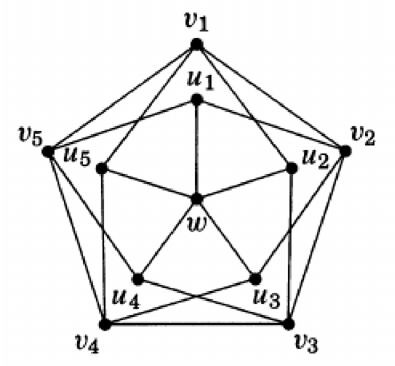
Toán rời rạc: *Đồ thị Hamilton*
Bài tập 11

1. Với những giá trị nào của r thì đồ thị hai phần đầy đủ $K_{r,r}$ là Hamilton?

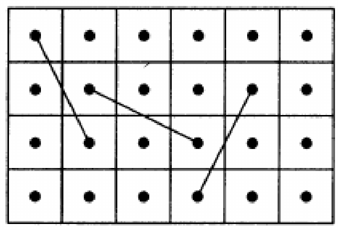
2. Với mọi $n > 1$, hãy chứng minh rằng $K_{n,n}$ có $(n-1)!n!/2$ chu trình Hamilton.

3. Chứng minh rằng đồ thị G là nửa Hamilton **chỉ nếu** với mọi tập đỉnh S, số thành phần liên thông của $G - S$ nhiều nhất là $|S| + 1$.

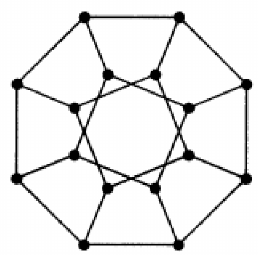
4. Đồ thị Grötzsch sau đây có là Hamilton?



5. Chứng minh rằng không tồn tại chu trình cho con mã đi hết bàn cờ $4 \times n$.
Gợi ý:Tìm tập đỉnh thích hợp vi phạm điều kiện cần để đồ thị là Hamilton.



6. Đồ thị sau đây có chu trình Hamilton không?



7. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị Peterson.

a. Chứng minh rằng G là đồ thị nửa Hamilton, nhưng không là Hamilton.

b. Chứng minh rằng với mọi $v \in V$, đồ thị $G - v$ là đồ thị Hamilton.

8. Chứng minh rằng đồ thị hai phần với một số lẻ đỉnh không là đồ thị Hamilton.

9. Chứng minh rằng đồ thị đầy đủ K_n có thể phân rã thành các chu trình Hamilton nếu và chỉ nếu n lẻ.

Toán rời rạc: *Đồ thị có hướng*
Bài tập 12

1. Xét trò chơi chọi gà như trong slides.

(a) Mô tả một đồ thị cho trò chơi 10 con gà trong đó có một vua gà với bậc ra 1.

(b) Mô tả một đồ thị cho trò chơi 5 con gà trong đó mọi con gà đều là vua.

2. Ta ký hiệu

$$\delta^+(G) = \min\{\text{outdeg}(v) \mid v \in V(G)\},$$
$$\delta^-(G) = \min\{\text{indeg}(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Hãy chứng minh rằng: nếu $\delta^+(G) \geq 1$ hoặc $\delta^-(G) \geq 1$ thì G chứa chu trình.

3. Một đồ thị gọi là Euler nếu nó có một hành trình đóng đi qua mỗi cạnh đúng một lần. Một đồ thị gọi là nửa Euler nếu nó có một hành trình đi qua mỗi cạnh đúng một lần.

(a) Hãy chứng minh rằng một đồ thị có hướng là Euler nếu và chỉ nếu $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$ với mọi đỉnh v, và đồ thị vô hướng nền của nó có đúng một thành phần liên thông.

(b) Tìm tiêu chuẩn đề một đồ thị có hướng là nửa Euler.

4. Chứng minh rằng mọi u, v-hành trình có hướng đều chứa một u, v-đường đi có hướng.

5. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng: Nếu D là một đồ thị định hướng của một đồ thị vô hướng với 10 đỉnh, vậy thì các bậc ra của D không thể đôi một khác nhau.

6. Chứng minh rằng: Tồn tại đồ thị thi đấu n đỉnh thỏa mãn mọi đỉnh đều có bậc vào bằng bậc ra nếu và chỉ nếu n lẻ.

7. Với $n \geq 1$, hãy chứng minh hoặc bác bỏ rằng: mọi đồ thị có hướng với n đỉnh đều có hai đỉnh có cùng bậc ra hoặc hai đỉnh có cùng bậc vào.

8. Chứng minh rằng đồ thị có hướng là liên thông mạnh nếu với mọi cách phân hoạch tập đỉnh thành hai tập khác rỗng S và T, có một cahnh từ S tới T.

9. Chứng minh rằng trong đồ thị thi đấu $G = (V, E)$ ta luôn có

$$\sum_{v \in V} \text{indeg}(v)^2 = \sum_{v \in V} \text{outdeg}(v)^2$$

10. Hãy thiết kế một thuật toán để kiểm tra xem một đồ thị có hướng cho trước có liên thông mạnh.

11. Hãy chứng minh rằng mọi đồ thị có hướng liên thông mạnh đều có chu trình Hamilton.

Toán rời rạc: *Hàm sinh*
Bài tập 14

1 Ứng dụng của đa thức trong tổ hợp

1. Xét hai đa thức

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

Hãy viết ra công thức tính hệ số của x^k trong tích $a(x)b(x)$ với $0 \leq k \leq n+m$.

2. Biểu diễn số nghiệm nguyên của các phương trình sau như hệ số của số mũ x thích hợp trong tích các đa thức:

(a) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = r, \quad 0 \leq e_i \leq 4$

(b) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \quad 0 < e_i < 4$

(c) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \quad 2 \leq e_i \leq 8, \quad e_1$ chẵn, $\quad e_2$ lẻ

(d) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \quad 0 \leq e_i$

(e) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \quad 0 < e_i, \quad e_2, e_4$ lẻ, $\quad e_4 \leq 3$

(f) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \quad -3 \leq e_i \leq 3$

3. Một quán cà phê có bán ba loại bánh: táo, mứt, và kem. Có bao nhiêu cách mua 12 chiếc bánh sao cho mỗi loại có ít nhất hai chiếc **và** số bánh táo không vượt quá ba? Hãy biểu diễn số này như hệ số của số mũ x thích hợp trong tích các đa thức thích hợp.

4. Có bao nhiêu cách để phát hết 10 quả bóng giống nhau cho 2 cậu bé và 2 cô bé sao cho mỗi cậu bé được ít nhất một quả **và** mỗi cô bé được ít nhất hai quả? Hãy biểu diễn số này như hệ số của số mũ x thích hợp trong tích các đa thức thích hợp.

5. Tính tổng $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$.

6. Tìm hệ số của $x^{10}y^5$ trong $(19x+4y)^{15}$.

2 Hàm sinh

1. Hãy tìm công thức đóng cho hàm sinh của các dãy sau và sau đó kiểm tra lại kết quả dùng Wolfram|Alpha:

(a) $\langle\, 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 6,\ -6,\ 6,\ -6,\ 6,\ \cdots\,\rangle$

(b) $\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots \rangle$

(c) $\langle 1, 2, 1, 4, 1, 8, \cdots \rangle$

(d) $\langle 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \cdots \rangle$

(e) (bình phương hoàn hảo)

$$\langle 0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots\rangle = \langle 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ \cdots\rangle.$$

2. (a) Chứng minh rằng nếu

$$\langle g_0,\ g_1,\ g_2,\ \ldots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad G(x)$$

thì

$$\langle g_0,\ g_0+g_1,\ g_0+g_1+g_2,\ \ldots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x}G(x).$$

(b) Dùng kết quả trên hãy tìm $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(c) Dùng kết quả trên hãy tìm $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

(d) Với n và m là các số tự nhiên, hãy tính $\sum_{k=1}^{n}(-1)\binom{n}{k}$.

(e) Có vẻ như với phương pháp này ta có thể tính mọi tổng, nhưng thực tế không đơn giản như vậy! Chuyên gì xảy ra nếu bạn dùng phương pháp này để tính tổng $\sum_{k=1}^{n} 1/k$?

3. Dãy $r_0, r_1, r_2, \cdots$ được định nghĩa một cách đệ quy bởi luật sau: $r_0 = r_1 = 0$ và

$$r_n = 7r_{n-1} + 4r_{n-2} + (n+1),$$

với $n \geq 2$. Hãy biểu diễn hàm sinh của dãy này như thương của hai đa thức hoặc tích của các đa thức. Bạn không cần tìm dạng tường minh cho r_n

4. Xét $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ta có thể kiểm tra được rằng

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!},$$

với $A^{(n)}$ là đạo hàm cấp n của A. Hãy dùng kết quả trên (thay vì luật tích) để chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^n.$$

3 Tính hệ số của hàm sinh

1. Hãy tính

(a) $[x^{15}](x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots)^4$.

(b) $[x^{50}](x^7+x^8+x^9+x^{10}\cdots)^6$.

(c) $[x^5](1-2x)^{-2}$.

(d) $[x^4]\sqrt[3]{1+x}$.

(e) $[x^3]\big((2+x)^{3/2}/(1-x)\big)$.

(f) $[x^4]\big((2+3x)^5\sqrt{(1-x)}\big)$

(g) $[x^3]\big(1-x+2x^2\big)^9$.

2. (a) Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}$, hàm sinh cho dãy các số nguyên dạng mũ k là thương của hai đa thức theo x. Có nghĩa rằng, với mọi $k \in \mathbb{N}$ có đa thức $R_k(x)$ và $S_k(x)$ sao cho

$$[x^n]\left(\frac{R_k(x)}{S_k(x)}\right) = n^k$$

Gợi ý: Để ý rằng đạo hàm của thương hai đa thức cũng là thương của hai đa thức. Ta không cần phải chỉ rõ tường minh $R_k(x)$ và $S_k(x)$ để chứng minh điều này.

(b) Chứng minh rằng nếu $f(n)$ là một hàm trên các số nguyên không âm định nghĩa đệ quy dưới dạng

$$f(n) = f(n-1) + bf(n-2) + cf(n-3) + p(n)\alpha^n$$

với $a, b, c, \alpha \in \mathbb{C}$ và p là một đa thức với hệ số phức, vậy hàm sinh cho dãy

$$f(0), f(1), f(2), \ldots$$

sẽ là thương của hai đa thức theo x, và vậy có một biểu thức dạng tường minh cho $f(n)$.

Gợi ý: Xét

$$\frac{R_k(x)}{S_k(x)}$$

3. (a) Xét

$$S(n) = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}.$$

Hệ số x^n trong hàm sinh trên là gì?

(b) Giải thích xem tại sao $S(x)/(1-x)$ là hàm sinh cho các tổng của các bình phương. Có nghĩa rằng hệ số của x^n trong chuỗi $S(x)/(1-x)$ là $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(c) Dùng phần trước, hãy chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4 Đếm dùng hàm sinh

1. Đặt g_n là số cách trả lại n đồng chỉ dùng các tờ một đồng, các tờ hai đồng, và/hoặc các tờ năm đồng.

(a) Hãy viết ra hàm sinh cho dãy $\langle\, g_0,\ g_1,\ g_2,\ \cdots \rangle$.

(b) Dùng kết quả của câu 1a, hãy tìm công thức cho g_n.

2. Các ngày phải đi học trong năm tới có thể đánh số $1, 2, \cdots, 300$. Tôi muốn trốn học càng nhiều càng tốt.

- Những ngày chẵn, tôi nói "bị ốm".
- Những ngày là bội của 3, tôi nói "bị tắc đường".

- Những ngày là bội của 5, tôi kiên quyết không ra khỏi chăn ấm.

Cuối cùng thì có bao nhiêu ngày tôi trốn học trong năm tới?

3. Sơn đang lên kế hoạch cho một chuyến đi xa bằng tàu biển, và anh ta cần quyết định xem nên mang gì theo.

- Anh chắc chắn phải mang mỳ tôm, được đóng 6 gói một.
- Anh và hai người bạn không biết nên ăn mặc lịch sự hay thoải mái. Vậy nên hoặc anh mang 0 đôi tông, hoặc anh mang 3 đôi.
- Do không có nhiều chỗ trong vali để khăn tắm, nên anh mang nhiều nhất 2 chiếc.
- Có lẽ sẽ dừng ở nhiều bãi biển đẹp và đông người, anh quyết định mang ít nhất 1 quần bơi.

(a) Xét g_n là số cách khác nhau để Sơn mang n đồ vật (gói mỳ, đôi tông, khăn tắm, quần bơi) theo. Hãy biểu diễn hàm sinh $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ dưới dạng thương của hai đa thức.

(b) Tìm công thức tường minh cho số cách Sơn mang đúng n đồ vật.

4. Bạn đang muốn mua một bó hoa. Bạn tìm thấy một cửa hàng trên mạng bó hoa từ hoa ly, hoa hồng, và hoa tulip, và bán theo ràng buộc sau

- chỉ có nhiều nhất ba bông hoa ly,
- phải có một số lẻ hoa tulip,
- số lượng hoa hông tuỳ ý.

Ví dụ: một bó gồm 3 bông tulip, không có bông ly nào, và 5 bông hồng thoả mãn ràng buộc trên.

Xét f_n là số bó hoa gồm n bông hoa thoả mãn rằng buộc này. Hãy biểu diễn hàm sinh $F(n)$ tương ứng với dãy $\langle f_0, f_1, f_2, \cdots \rangle$ theo thương của hai đa thức (hoặc tích của các đa thức). Bạn không cần đơn giản biểu thức này.

5 Số Fibonacci

1. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n mà không chứa hai số 0 liên tiếp?

2. Hãy tìm số các tập con (kể cả tập rỗng) của tập $\{1, 2, \cdots, n\}$ mà không chứa hai số nguyên dương liên tiếp.

3. Tìm công thức tường minh cho các dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

(a) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$

(b) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$

(c) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$.

4. Giải các hệ thức truy hồi

(a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 1$.

(b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + \cdots + a_1 + a_0$ $(n \geq 3)$ với $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

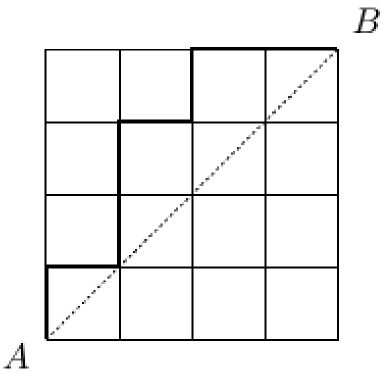
5. Giải hệ thức truy hồi

$$a_{n-2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$$

với điều kiện ban đầu $a_0 = 2, a_1 = 8$.

6 Số Catalan

1. Cho bàn cờ $n \times n$ như sau:



Xét đường đi ngắn nhất từ góc A tới góc B đi qua các cạnh (mỗi đường qua $2n$ cạnh).

(a) Có bao nhiêu đường như vậy?

(b) Chứng minh rằng số đường không xuống dưới đường chéo chính là số Catalan C_n.

2. Hãy tìm cách chứng minh số cách đặt dấu ngoặc là số Catalan mà không dùng hàm sinh.

3. Có $2n$ người đứng đợi mua vé xem phim. Mỗi vé giá 5 đồng. Mọi người đều muốn mua vé; trong đó n người đều chỉ có một tờ 10 đồng và n khác người đều chỉ có một tờ 5 đồng. Ban đầu người bán vé không có đồng nào.

(a) Có bao nhiêu cách xếp hàng cho $2n$ người này sao cho người bán vé luôn trả được 5 đồng cho những người chỉ có tờ 10 đồng.

(b) Hãy tính xác suất để người bán vé có thể trả tiền được cho mọi người khi họ đứng xếp hàng một cách ngẫu nhiên.

4. Có bao nhiêu dãy gồm n số nguyên $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ thỏa mãn $a_i \leq i$? Ví dụ, có 5 dãy độ dài 3:

111 112 113 122 123

5. Có bao nhiêu dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_1 = 0$ và $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$? Ví dụ,

000 001 010 011 012