

Toán rời rạc phần Công thức truy hồi và Hàm sinh
Bài tập 16

1. Có $2n$ người đứng đợi mua vé xem phim. Mỗi vé giá 5 đồng. Mọi người đều muốn mua vé; trong đó n người đều chỉ có một tờ 10 đồng và n khác người đều chỉ có một tờ 5 đồng. Ban đầu người bán vé không có đồng nào.
 - (a) Có bao nhiêu cách xếp hàng cho $2n$ người này sao cho người bán vé luôn trả được 5 đồng cho những người chỉ có tờ 10 đồng.
 - (b) Hãy tính xác suất để người bán vé có thể trả tiền được cho mọi người khi họ đứng xếp hàng một cách ngẫu nhiên.
2. Có bao nhiêu dãy gồm n số nguyên $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ thỏa mãn $a_i \leq i$? Ví dụ, có 5 dãy độ dài 3:

111 112 113 122 123
3. Có bao nhiêu dãy số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n thỏa mãn $a_1 = 0$ và $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$? Ví dụ,

000 001 010 011 012
4. Dãy số $\langle a_n \rangle$ thỏa mãn $a_0 = 1$ và $a_j - ja_{j-1} - 1 = 0$ cho mọi $j \geq 1$. Hãy tìm công thức tính a_j qua j .
5. Dãy số $\langle a_n \rangle$ thỏa mãn $a_0 = 2$ và $a_j - 2a_{j-1} - 3^j = 0$ cho mọi $j \geq 1$. Hãy tìm công thức tính a_j qua j .
6. Dãy số $\langle a_n \rangle$ thỏa mãn $a_0 = 5$ và $a_j - 3a_{j-1} - 2^j = 0$ cho mọi $j \geq 1$. Hãy tìm công thức tính a_j qua j .
7. Dãy số $\langle a_n \rangle$ thỏa mãn $a_0 = 2, a_1 = 2$ và $a_j = a_{j-1}^3 a_{j-2}^2$ cho mọi $j \geq 2$. Hãy tìm công thức tính a_j qua j .
8. Dãy số $\langle a_n \rangle$ thỏa mãn $a_0 = 2, a_1 = 2, a_2 = 4$ và $a_j = 3a_{j-1} - 3a_{j-2} + a_{j-3}$ cho mọi $j \geq 2$. Hãy tìm công thức tính a_j qua j .
9. Dãy số $\langle a_n \rangle$ thỏa mãn $a_0 = 0, a_1 = 1$ và $a_{j+2} - 5a_{j+1} + 6a_j = 0$ cho mọi $j \geq 0$.
 - (a) Hãy xác định hàm sinh thông thường cho dãy này.
 - (b) Tìm công thức tính a_j qua j .