Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI
VÀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM CẤP HAI TRONG VẬT LÍ

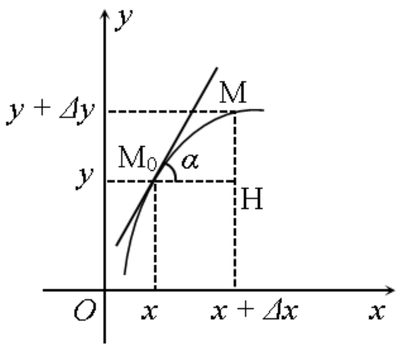
Nguyễn Đình Tấn – Chuyên Võ Nguyên Giáp Quảng Bình

Đạo hàm có ý nghĩa rất quan trọng trong việc giải các bài tập vật lí. Nhưng trong hầu hết các bài toán, nếu ứng dụng ý nghĩa của đạo hàm, thì chúng ta thường đề cập đến đạo hàm bậc nhất. Bài viết này, tác giả xin giới thiệu ý nghĩa của đạo hàm cấp hai, và ứng dụng của nó trong việc giải quyết một số bài toán vật lí.

Chúng ta sẽ bắt đầu từ đạo hàm bậc nhất

Xét hàm số $y = f(x)$ có một phần đồ thị như hình vẽ (đường cong).

Đoạn M_0M là một đoạn cong, nhưng nếu cho M tiến dần về M_0 thì khi M_0M rất nhỏ, đoạn này là một đoạn thẳng, nó bị chứa bởi một đường thẳng chính là tiếp tuyến của đồ thị tại M_0.



Tức là khi đó, hình M_0MH là một tam giác vuông, có

$$tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx và Δy rất nhỏ ($\Delta x \to 0$), ta gọi chúng là các *vi phân* và kí hiệu là *dx và dy*, ta có

$$tan\alpha = \frac{dy}{dx} = y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Đây chính là đạo hàm của hàm số *y = f(x)*

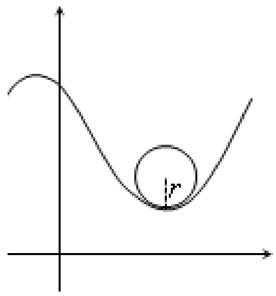
Về mặt hình học, đạo hàm của hàm số tại một điểm nào đó, chính là hệ số góc của đường tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó. Tức là:

+ *Nếu* $\frac{dy}{dx} > 0$ *thì đồ thị dốc lên, hàm tăng (đồng biến).*

+ *Nếu* $\frac{dy}{dx} < 0$ *thì đồ thị dốc xuống, hàm nghịch biến.*

+ *Nếu* $\frac{dy}{dx} = 0$ *thì đồ thị nằm ngang, tại đó là cực trị.*

Ý nghĩa của đạo hàm bậc hai



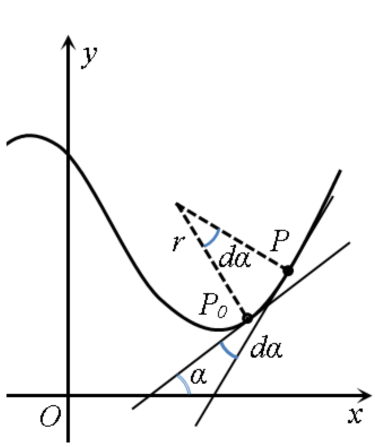
+ Đạo hàm bậc hai

$$y'' = \left(y'(x)\right)' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

+ Bây giờ ta tìm hiểu ý nghĩa của đạo hàm bậc hai:

Như đã biết, "độ dốc" và "hướng dốc" của đồ thị được xác định bằng đạo hàm bậc nhất. Bây giờ ta đặt ra câu hỏi, liệu có xác định được "độ cong" và "hướng cong" của đồ thị tại mỗi điểm hay không.

Ta coi rằng, mỗi đoạn nhỏ của đồ thị là một đoạn của một đường tròn bán kính *r*, khi đó độ cong của đồ thị tại đó là $\frac{1}{r}$ và ta tính độ cong này như sau:



Xét một cung nhỏ P_0P có độ dài *ds*, ta có

$$r = \frac{ds}{d\alpha}$$

Trong đó

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$tan\alpha = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$d\alpha = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Thay vào ta được

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Biểu thức này cho thấy ý nghĩa của đạo hàm bậc hai là cho ta biết độ cong của đồ thị tại bất kì điểm nào.

Cũng cần lưu ý rằng, trong biểu thức tính bán kính cong r thì $ds > 0$, nhưng $d\alpha$ có thể dương (nếu bề lõm của đồ thị hướng lên trên) hoặc âm (nếu bề lõm quay xuống dưới). Tức là:

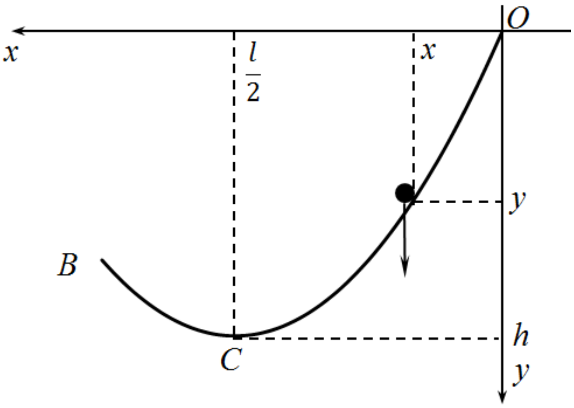
+ Tâm của đoạn cong ở phía trên đồ thị thì r > 0

+ Tâm của đoạn cong ở phía dưới đồ thị thì r < 0

+ Tại các cực trị $\frac{dy}{dx} = 0$ *nên* $\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2}$, *nếu* $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ *thì bề lõm quay lên, đó là cực tiểu, ngược lại nếu* $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ *thì bề lõm quay xuống, đó là cực đại.*

Một số bài toán minh họa

Bài 1. *Một hòn bi nhỏ khối lượng m bắt đầu lăn từ điểm O trên một máng trơn OCB như hình vẽ. Hãy tính áp lực của bi lên máng tại C biết hình cắt của máng là một đường được xác định bằng phương trình* $y = h\sin(\frac{\pi x}{l})$, *với* $h = \frac{l}{3}$.



Giải

Trước hết ta xác định độ dốc của máng tại C

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi h}{l}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Tại điểm C thì $x = \frac{l}{2}$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Chọn mốc thế năng tại C, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ở O và C ta có

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gh = \frac{2gl}{3}$$

Phương trình động lực học tại C:

$$N - mg = \frac{mv^2}{r}$$

Trong đó r là bán kính cong của quỹ đạo tại C, nó được tính bằng công thức

$$r = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Với $\frac{dy}{dx}$=*0* và

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2 h}{l^2}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) = -\frac{\pi^2}{3l}$$

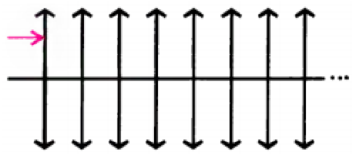
Dấu ‘-‘ chỉ có ý nghĩa rằng bề lõm của quỹ đạo tại C quay lên trên, ta chỉ lấy độ lớn của bán kính cong

$$r = \frac{3l}{\pi}$$

Khi đó áp lực lên máng

$$N = mg + \frac{mv^2}{r} = m\left(g + \frac{2gl}{3}.\frac{\pi^2}{3l}\right) = mg\left(1 + \frac{2\pi^2}{9}\right)$$

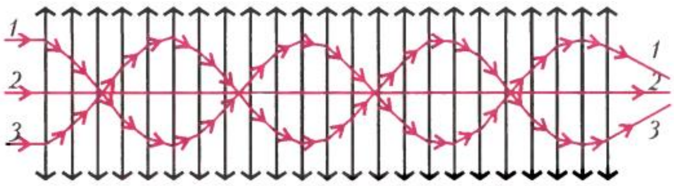
Bài 2. *Một lượng lớn thấu kính hội tụ mỏng có tiêu cự f được đặt cách đều nhau khoảng l sao cho trục chính của tất cả thấu kính trùng nhau. Khoảng l nhỏ hơn rất nhiều so với f. Một chùm sáng chiếu vuông góc tới mặt phẳng thấu kính thứ nhất (hình vẽ). Hãy vẽ tiếp tia sáng và xác định khoảng cách giữa các điểm tia sáng cắt trục chính của hệ lần thứ ba và lần thứ tư.*



Giải

Các tia sáng hội tụ nên bẻ cong dần về phía trục chính. Sau khi cắt trục chính, chúng lại hội tụ theo hướng ngược lại,… cứ như vậy tia sáng có dạng tuần hoàn như hình vẽ.

Ta chứng minh tia sáng có dạng hình sin.

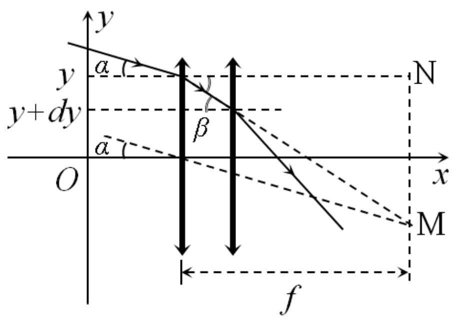


Ta xét sự khúc xạ của một tia sáng trên hai thấu kính liên tiếp, tại hai tọa độ *(x, y) và (x + dx, y + dy)*, trong đó $dx = l$ (vì l rất nhỏ).

Trên hình vẽ ta có

$$tan\beta = \frac{MN}{f} = \frac{y + ftan\alpha}{f} = tan\alpha + \frac{y}{f}$$

Trong đó *tanα* và *tanβ* lần lượt là hệ số góc của tia sáng tại *(x, y)* và *(x + dx, y + dy)*.



Và do tại đó y đang giảm nên $dy < 0$, ta có

$$tan\alpha = -\frac{dy}{dx} = -f'(x)$$

Tương tự

$$tan\beta = -f'(x + l) = -f'(x + dx)$$

Thay trở lại biểu thức mới tìm

$$tan\alpha - tan\beta = -\frac{y}{f}$$

$$f'(x + dx) - f'(x) = -\frac{y}{f}$$

Chia cả hai vế cho l, nhưng ở vế trái ta xem $l = dx$

$$\frac{f'(x + dx) - f'(x)}{dx} = -\frac{y}{lf}$$

Vế trái chính là đạo hàm bậc hai của y theo x

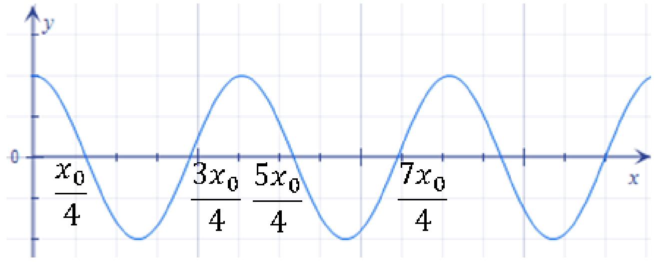
$$y'' = -\frac{1}{lf}y$$

Phương trình vi phân quen thuộc này suy ra được

$$y = y_0 \cos(\omega x)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{lf}}$$

Tức là đường truyền các tia sáng có dạng hình sin, nhận Ox làm trục đối xứng.



Từ hình vẽ ta thấy khoảng cách giữa các điểm tia sáng cắt trục chính của hệ lần thứ ba và lần thứ tư là

$$\Delta x = \frac{7x_0}{4} - \frac{5x_0}{4} = \frac{x_0}{2}$$

Trong đó

$$x_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{lf}$$

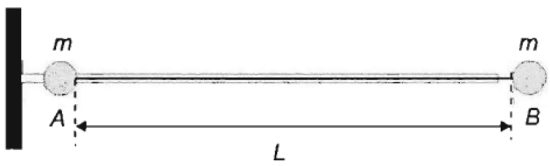
Vậy

$$\Delta x = \pi\sqrt{lf}$$

Bài 3. *Một quả cầu sắt (A) khối lượng m = 2 kg có thể trượt không ma sát dọc theo một thanh cố định nằm ngang, thanh xuyên qua quả cầu. Một quả cầu (B) cùng khối lượng m, được nối với quả cầu (A) bằng một sợi dây mảnh, không dãn, chiều dài L = 1,6 m. Ban đầu các quả cầu đứng yên, sợi dây nối căng ngang và tổng chiều dài đúng bằng chiều dài thanh, như hình vẽ. Khi đó thả nhẹ quả cầu (B) để nó bắt đầu rơi với vận tốc ban đầu bằng không. Lấy g = 10 m/s^2.*

a) Hãy xác định dạng quỹ đạo chuyển động cuả quả cầu (B).

b) Tính áp lực của thanh lên quả cầu (A) và lực căng sợi dây lúc đó.



Giải

a) Dạng quỹ đạo chuyển động của quả cầu (B)

Chọn hệ trục tọa độ xOy sao cho, O ở trung điểm của thanh, Ox trùng với thanh hướng sang phải, Oy thẳng đứng hướng xuống.

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ hai quả cầu theo phương ngang ta có

$$mv_A + mv_{Bx} = 0$$
$$\Rightarrow v_{xB} = -v_A$$

tức là $x_A = -x_B$ ở mọi thời điểm, và ta có

$$y^2 + (2x)^2 = L^2$$

Hay

$$\frac{x^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{L^2} = 1$$

Đây là phương trình của một êlip.

b) Áp lực của thanh lên quả cầu (A) và lực căng sợi dây

Đối với chuyển động của hệ đã cho thì quỹ đạo của (B) là một phần của elip này, với $y \geq 0$.

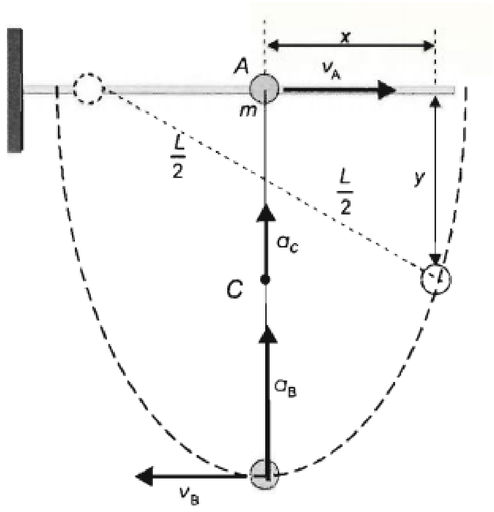
Cũng vì thế mà ta có thể viết

$$y = \sqrt{L^2 - 4x^2}$$

Đạo hàm hai lần hàm số này ta có

$$y''(x) = -\frac{4L^2}{(L^2 - 4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Bán kính cong của quỹ đạo tại điểm thấp nhất của (B) là



$$r = \frac{1}{y''(0)} = -\frac{L}{4}$$

Dấu ‘-’ chỉ có ý nghĩa là bề lõm quay về gốc tọa độ, tức là ta lấy

$$r = \frac{L}{4}$$

Gia tốc hướng tâm tại B

$$a_B = \frac{v^2}{r} = \frac{4v^2}{L}$$

Khi sợi dây thẳng đứng thì $v_{Bx} = v_B = -v_A = v$

Bảo toàn cơ năng cho hệ:

$$2\frac{1}{2}mv^2 = mgL \Rightarrow v = \sqrt{gL} = \sqrt{10.1{,}6} = 4\ m/s$$

Vậy ta có

$$a_B = a_{\text{n/A}} = \frac{4v^2}{L^2}.L = \frac{4v^2}{L} = 40\ m/s^2$$

Áp dụng định luật II Niu-tơn cho vật (B) ta có

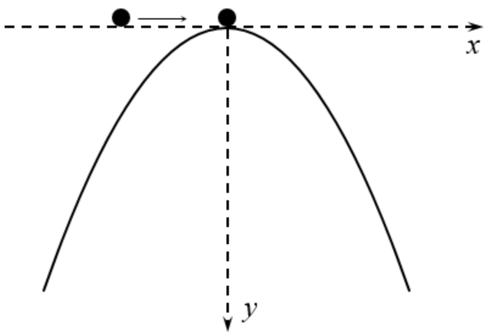
$$T - mg = ma_B$$

$$\Rightarrow T = m(g + a_B) = 100\ N$$

Còn đối với vật (A) thì áp lực lên thanh được tính :

$$N = mg + T = 120\ N$$

Bài 4*. Một vật khối lượng 2m được coi là chất điểm đặt ở đỉnh của một đường trượt (C) có dạng parabol với phương trình trong hệ toạ độ oxy (trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ bên): $y = ax^2$ (m); $a = 20$ (m^{-1}), x tính bằng m . Một viên đạn khối lượng m bay theo phương ngang với vận tốc v_0 đến va chạm mềm với chất điểm nói trên. Tìm điều kiện v_0 để vật luôn trượt trên đường (C) nói trên . Bỏ qua ma sát.*



Giải

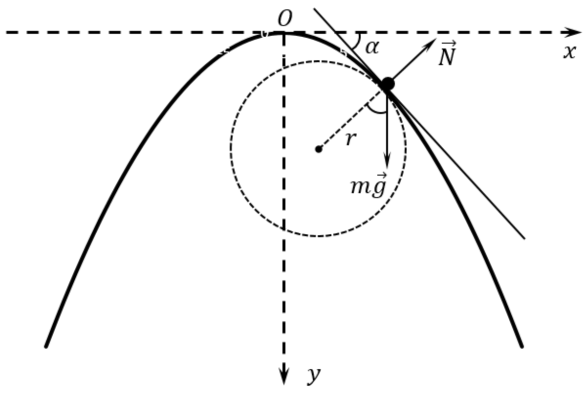
Giả sử sau khi va chạm, vật trượt trên đường trượt, tại tọa độ *x, y* bất kì ta có

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Tại mỗi vị trí, vật đang trượt trên mặt cong có bán kính *r* được tính bằng công thức

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{\sqrt{(1 + 4a^2x^2)^3}}$$

Chiếu phương trình vectơ lên trục hướng tâm tại vị trí đó ta được



$$mg.cos\alpha - N = \frac{mv^2}{r}$$

Trong đó

$$tan\alpha = \frac{dy}{dx} = 2ax$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}$$

Thay vào phương trình ta có

$$N = \frac{m}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}\left(g - \frac{2av^2}{1 + 4a^2x^2}\right)$$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hai vật trước và sau va chạm ta được

$$mv_0 = 3mv \Rightarrow v_1 = \frac{v_0}{3}$$

Định luật bảo toàn cơ năng thì

$$\frac{1}{2}3mv_1^2 = \frac{1}{2}3mv^2 - 3mgy$$

Hay

$$\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = v^2 + 2gax^2 \Rightarrow v^2 = \frac{v_0^2}{9} - 2agx^2$$

Khi đó áp lực của đường trượt lên vật là

$$N = \frac{m}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\left(g - \frac{2a\left(\frac{v_0^2}{9} - 2agx^2\right)}{1+4a^2x^2}\right)$$

Điều kiện để vật không rời đường trượt là $N > 0, \forall x$, tức là

$$g - \frac{2a\left(\frac{v_0^2}{9} - 2agx^2\right)}{1+4a^2x^2} > 0, \forall x$$

$$8ga^2x^2 > \frac{2av_0^2}{9} - g, \forall x$$

Điều này đúng khi

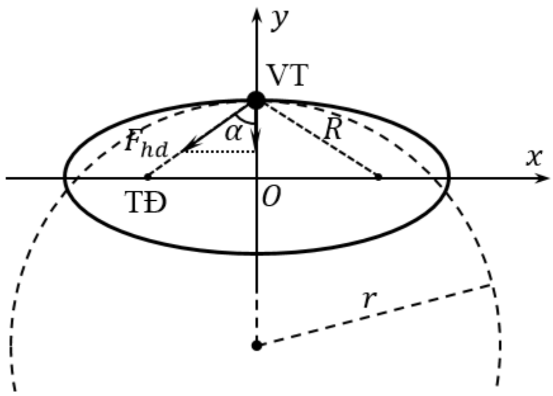
$$\frac{2av_0^2}{9} - g \le 0$$

$$\Rightarrow v_0 \le \sqrt{\frac{9g}{2a}} = \sqrt{\frac{9.10}{2.20}} = 1{,}5\ m/s$$

Bài 5. *Một vệ tinh nhân tạo khối lượng m chuyển động theo quỹ đạo êlip quanh Trái Đất. Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vị trí gần nhất và xa nhất của vệ tinh là h và H. Biết khối lượng của Trái Đất là M. Xác định tốc độ dài của vệ tinh khi nó đi qua vị trí cách đều hai tiêu điểm của êlip.*

Giải

Chọn hệ trục tọa độ *xOy* như hình vẽ.



Bán trục nhỏ và bán trục lớn của *êlíp* lần lượt là

$$a = \frac{H+h}{2} \text{ và } b = \sqrt{hH}$$

Phương trình của *êlíp* là

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hay } \frac{4x^2}{(H+h)^2} + \frac{y^2}{Hh} = 1$$

Ta suy ra

$$y = \pm\sqrt{Hh - \frac{4Hhx^2}{(H+h)^2}}$$

Có hai điểm cách đều các tiêu điểm, tốc độ dài tại hai điểm này như nhau, nên ta chỉ cần xét tại một điểm, ứng với *y > 0*. Mặt khác để biểu thức gọn, ta đặt

$$A = Hh, \qquad B = \frac{4Hh}{(H+h)^2}$$

Khi đó ta có

$$y = \sqrt{A - Bx^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Bx}{\sqrt{A - Bx^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{B}{\sqrt{a - Bx^2}} - \frac{B^2x}{\sqrt{(A-Bx^2)^3}} = -\frac{B}{\sqrt{A-Bx^2}}\left(1 + \frac{Bx}{A - Bx^2}\right)$$

Tại tọa độ *x = 0* thì

$$y'(0) = 0$$

$$y''(0) = -\frac{B}{\sqrt{A}} = -\frac{4\sqrt{Hh}}{(H+h)^2}$$

Độ cong của quỹ đạo tại đó là

$$\frac{1}{r} = \frac{y''(0)}{\left[1 + \left(y'(0)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{4\sqrt{Hh}}{(H+h)^2}$$

Dấu " $-$ " chỉ cho ta biết bề lõm quỹ đạo quay xuống, ta chỉ cần lấy độ lớn khi tính lực pháp tuyến.

Lực pháp tuyến tác dụng lên vệ tinh chính là một thành phần của lực hấp dẫn giữa vệ tinh và Trái Đất, ta có

$$G\frac{mM}{R^2}.cos\alpha = \frac{mv^2}{r}$$

Trong đó y

$$R = \frac{H+h}{2} \text{ và } cos\alpha = \frac{b}{R} = \frac{2\sqrt{Hh}}{H+h}$$

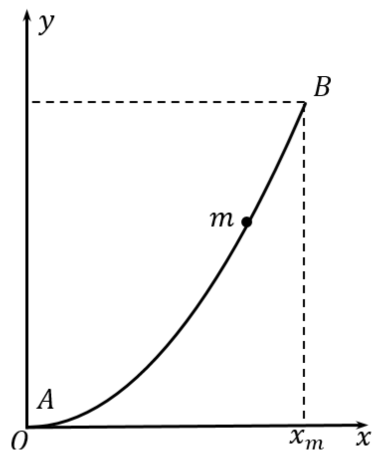
Thay vào phương trình trên ta suy ra được

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{H+h}}$$

Một số bài tập tự giải

Bài 1. Một thanh kim loại AB cứng, mảnh, được uốn sao cho trùng với đồ thị hàm số $y = ax^2$, $0 \le x \le x_m$, với $x_m = 0{,}5\ m$ là tọa độ của đầu B của thanh, $a = 5\ m^{-1}$ (hình vẽ). Một hạt nhỏ khối lượng $m = 500\ g$ được lồng vào thanh, hạt có thể chuyển động tới mọi điểm trên thanh. Mặt phẳng xOy thẳng đứng, Oy thẳng đứng đi lên, thanh được giữ cố định. Thả nhẹ vật từ B để nó trượt không ma sát dọc theo thanh. Tính gia tốc của vật và áp lực của vật lên thanh tại tọa độ $x = 0{,}2\ m$. Lấy $g = 10\ m/s^2$ và bỏ qua ma sát.

ĐS: 11,62 N



Bài 2. Người ta vẽ lại quỹ đạo của hòn đá được ném với vận tốc 20 *m/s* và với một góc 45^0 so với mặt đất lên một tờ giấy. Tỉ lệ vẽ là 1: 10 (giảm đi 10 lần). Có một con bọ bò theo quĩ đạo được vẽ trên giấy này với vận tốc không đổi 0,02 *m/s*. Hãy tính gia tốc của con bọ tại điểm tương ứng với điểm cao nhất trên quĩ đạo của hòn đá.

ĐS: $2.10^{-4}\ m/s^2$

Bài 3. Một con tàu vũ trụ được phóng lên chuyển động quanh trái đất theo quỹ đạo êlíp có bán trục lớn *a*, bán trục nhỏ *b*. Biết trái đất có khối lượng *M* và nằm một trong hai tiêu điểm êlíp. Hãy xác định vận tốc của tàu tại cận điểm A và viễn điểm B.

ĐS: $v_A = \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}.\sqrt{\frac{GM}{a}}$; $v_B = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}.\sqrt{\frac{GM}{a}}$

Bài 4. Trên một mặt phẳng ngang có một chiếc nêm khối lượng *m* mà mặt cắt của nó có dạng *parabol* với phương trình trong hệ toạ độ *oxy* (trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ): $y = ax^2$ (m); $a = 5$ m, x tính bằng *m*. Một vật nhỏ khối lượng *m* chuyển động trên mặt phẳng ngang rồi trượt lên nêm, vận tốc của vật lúc tiếp xúc với nêm là $v_0 = 4\ m/s$. Khi vật nhỏ có tọa độ $x = 0{,}5\ m$ thì nêm bắt đầu trượt trên mặt phẳng ngang. Lấy $g = 10\ m/s^2$ và bỏ qua ma sát giữa nêm với vật nhỏ. Tính hệ số ma sát trượt giữa nêm và mặt phẳng ngang.

ĐS: $\mu = 0{,}12$