Toán cao cấp A2

§1: Số phức

Dạng đại số của số phức

z=a+bi

Dạng lượng giác của số phức

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Trong đó:

-
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
 module của z

- Góc φ với $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ gọi là argument của số phức z Ta có

$$\begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Giải hệ tìm góc φ

hoặc
$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \leftrightarrow \varphi = \arctan \frac{b}{a} (a < 0)$$

Các phép toán trên dạng lượng giác (NHÓ) Phép nhân:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Phép chia:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

Công thức Moivre

Lũy thừa số phức dạng lượng giác

$$z^{n} = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{n}$$
$$= r^{n}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n}$$
$$z^{n} = r^{n}[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

§2: Ma trận

Định nghĩa

Một ma trận, đặt tên A (hay, B, C,..)

Có kích cỡ $m \times n$ gồm \mathbf{m} dòng và \mathbf{n} cột là bảng hình chữ

nhật sau:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

- * Phần tử $a_i j$ nằm tại dòng i và cột j của ma trận A.
- * Khi số dòng = số cột (m = n) thì A gọi là ma trận **vuông cấp n**.

Một số ma trận có dạng đặc biệt

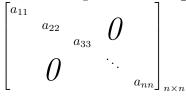
1⁰. Ma trận dòng **thì chỉ có 1 dòng**:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

 2^0 . Ma trận cột **chỉ có 1 cột**:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

- $3^0.$ Ma trận không (0) có mọi phần tử là số 0: $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}_{2\times 2}, \begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}_{1\times 2}$
- 4⁰. Ma trận đường chéo **thì vuông**



5⁰. Ma trận đơn vị (kí hiệu I) thì vuông và **trên đường** chéo chính toàn số 1:

+ Cấp 2:
$$I = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = I_2$$

+ Cấp 3: $I = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = I_3$

 6^0 . Ma trận chuyển vị: Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ tùy ý. Nếu đổi (viết) dòng của A thành cột tương ứng sẽ thu được ma trận chuyển vị của A. Kí hiệu A^{T}

được ma trận chuyển vị của A. Kí h
 Gặp
$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \Rightarrow A^{\intercal} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

* Tính chất $(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$ $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$ $(A.B)^{\mathsf{T}} = \begin{cases} A^{\mathsf{T}}.B^{\mathsf{T}} \text{ sai} \\ B^{\mathsf{T}}.A^{\mathsf{T}} \text{ đúng} \end{cases}$

Các phép toán trên ma trận

1. So sánh bằng Hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. Bằng nhau viết: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{cũng cỡ m x} \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j \end{cases}$

2. Phép cộng (trừ) 2 ma trận cùng cỡ: *Tổng $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ *Hiệu $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$ *Tính chất ! A + B = B + A giao hóa ! A + B + C = (A + B) + C kết hợp ! $A + \emptyset = A$

3. Phép nhân 1 số với ma trận

Tích: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$

*Chú ý: Không có phép toán (1 số) \pm (Ma trận)

*Tính chất

! $(\alpha\beta).A = \alpha(A_{\beta}) = \beta(\alpha A)$

! $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

! 0.A = 0; (-1).A = -A; A+(-A) = 0

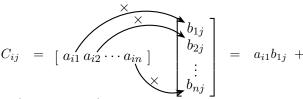
4. Phép toán hai ma trận

Cho $A = [a_{ij}]_{m \times \underline{n}}; B = [b_{ij}]_{\underline{n} \times p}$

Khi đó, tích: $A.B = [C_{ij}]_{m \times p}$

Trong đó phần tử C_{ij} nằm tại dòng i và cột j tính bởi:

 $C_{ij} = [\text{dòng i của A}] \times [\text{cột j của B}]$



 $a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$!Cần nhớ:

- Muốn A.B (A bên trái B) thì điều kiện số cột của A phải bằng số dòng của B.
- Nói chung kết quả $A.B \neq B.A$

!Tính chất

- A.B.C = (A.B).C kết hợp.
- A.(B+C) = A.B + A.C phân phối.
- A.I = I.A = A.
- Lũy thừa của ma trận vuông Ta cố $A^1=A,A^2=A.A,A^3=A^2.A,\cdots$ $\boxed{A^k=A^{k-1}\times A}\qquad 1\leq k\in\mathbb{N}$ *Nhớ $A^0=I.$ Với I ma trận đơn vị cùng cấp A

§3: Định thức của ma trận vuông