Toán cao cấp A2

§1: Số phức

Dạng đại số của số phức

$\boxed{z=a+bi}$

Dạng lượng giác của số phức

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

Trong đó:

- $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ module của z
- Góc φ với $-\pi \le \varphi \le \pi$ gọi là argument của số phức z

Ta có

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Giải hệ tìm góc φ

hoặc $\tan\varphi = \dfrac{b}{a} \leftrightarrow \varphi = \arctan\dfrac{b}{a} (a<0)$

Các phép toán trên dạng lượng giác (NHỚ)

Phép nhân:

$$\boxed{z_1.z_2 = r_1.r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]}$$

Phép chia:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]}$$

Công thức Moivre

Lũy thừa số phức dạng lượng giác

$$\boxed{\begin{aligned} z^n &= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n \\ &= r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ z^n &= r^n\left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right] \end{aligned}}$$

§2: Ma trận

Định nghĩa

Một ma trận, đặt tên A (hay, B, C,..)

Có kích cỡ $m\times n$ gồm **m dòng** và **n cột** là bảng hình chữ nhật sau: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$

* Phần tử a_ij nằm tại dòng i và cột j của ma trận A.

* Khi số dòng = số cột ($m = n$) thì A gọi là ma trận **vuông cấp n**.

Một số ma trận có dạng đặc biệt

1^0. Ma trận dòng **thì chỉ có 1 dòng**:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

2^0. Ma trận cột **chỉ có 1 cột**:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

3^0. Ma trận không ($\mathbb{0}$) có mọi phần tử là số 0: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 2}$

4^0. Ma trận đường chéo **thì vuông**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & 0 & \\ & & a_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

5^0. Ma trận đơn vị **(kí hiệu I)** thì vuông và **trên đường chéo chính toàn số 1**:

\+ Cấp 2: $I = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{2\times 2} = I_2$

\+ Cấp 3: $I = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{3\times 3} = I_3$

6^0. Ma trận chuyển vị: Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ tùy ý. Nếu đổi (viết) dòng của A thành cột tương ứng sẽ thu được ma trận chuyển vị của A. Kí hiệu $A^\intercal$

Gặp $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \Rightarrow A^\intercal = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3\times 1}$

* Tính chất

$(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$

$(A^\intercal)^\intercal = A$

$(A.B)^\intercal = \begin{cases} A^\intercal.B^\intercal \text{ sai} \\ B^\intercal.A^\intercal \text{ đúng} \end{cases}$

Các phép toán trên ma trận

1. So sánh bằng
   Hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Bằng nhau viết: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{cũng cỡ m x} \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j \end{cases}$

2. Phép cộng (trừ) 2 ma trận cùng cỡ:
   *Tổng $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$
   *Hiệu $A-B = [a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$
   *Tính chất
   ! A + B = B + A giao hóa
   ! A + B + C = (A + B) + C kết hợp
   ! A + $\mathbb{0}$ = A

3. Phép nhân 1 số với ma trận
   Tích: $\alpha.A = [\alpha.a_{ij}]_{m\times n}$
   *Chú ý: Không có phép toán (1 số) ± (Ma trận)
   *Tính chất
   ! $(\alpha\beta).A = \alpha(A_\beta) = \beta(\alpha A)$
   ! $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
   ! 0.A = $\mathbb{0}$; (-1).A = -A; A+(-A) = $\mathbb{0}$

4. Phép toán hai ma trận
   Cho $A = [a_{ij}]_{m\times \underline{n}}; B = [b_{ij}]_{\underline{n}\times p}$
   Khi đó, tích: $A.B = [C_{ij}]_{m\times p}$
   Trong đó phần tử C_{ij} nằm tại dòng i và cột j tính bởi:
   C_{ij} = [dòng i của A] × [cột j của B]

   $$C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1}\, a_{i2} \cdots a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

   !Cần nhớ:

   - Muốn $A.B$ (A bên trái B) thì điều kiện số cột của A phải bằng số dòng của B.
   - Nói chung kết quả $A.B \neq B.A$

   !Tính chất

   - $A.B.C = (A.B).C$ kết hợp.
   - $A.(B+C) = A.B + A.C$ phân phối.
   - $A.I = I.A = A$.
   - Lũy thừa của ma trận vuông
     Ta có $A^1 = A, A^2 = A.A, A^3 = A^2.A, \cdots$
     $\boxed{A^k = A^{k-1}\times A}$ $\quad 1 \le k \in \mathbb{N}$
     *Nhớ $A^0 = I$. Với I ma trận đơn vị cùng cấp A

§3: Định thức của ma trận vuông