VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

TRUNG TÂM VŨ TRỤ VIỆT NAM

XÁC ĐỊNH QUỸ ĐẠO VỆ TINH

PHƯƠNG PHÁP GAUSS

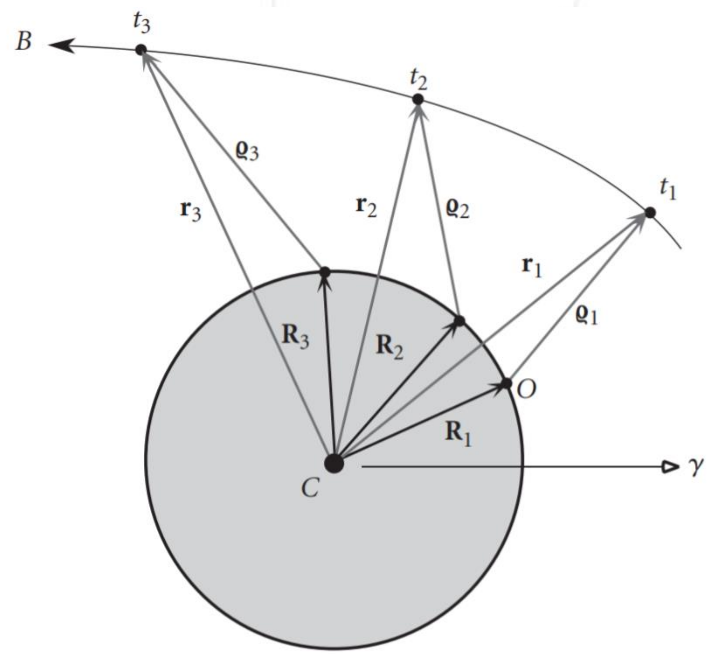
ThS. Trịnh Hoàng Quân

Nội dung

- Đặt vấn đề
- Tính C_1 và C_3 theo r_2
- Tính ρ_1, ρ_2, ρ_3 theo r_2
- Tính r_2
- Tổng kết

Đặt vấn đề

- Giả sử chúng ta có **ba quan sát** của một vệ tinh tại các thời điểm t_1, t_2, t_3
- $\mathbf{r}_\mathrm{i}$ là vector vị trí của vệ tinh, $\mathbf{R}_\mathrm{i}$ là vector vị trí của đài quan sát
- $\boldsymbol{\rho}_\mathrm{i}$ và ρ_i lần lượt là vector đơn vị chỉ hướng và khoảng cách từ đài quan sát tới vệ tinh



$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 + \rho_1 \boldsymbol{\rho}_1$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \rho_2 \boldsymbol{\rho}_2$$
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_3 + \rho_3 \boldsymbol{\rho}_3$$

Thiết lập hệ phương trình (1)

- Ta có:
  - 3 vector $\mathbf{R}_{\mathrm{i}}$ có thể tính được từ vị trí của các đài quan sát
  - 3 vector $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{i}}$ có thể tính được từ góc nghiêng và góc ngẩng của kính thiên văn khi quan sát vệ tinh
  - **3 vector $\mathbf{r}_i$ là ẩn số cần tìm của bài toán này**
  - **3 giá trị ρ_i cũng là các đại lượng chưa biết**
- Như vậy:
  - Chúng ta có tổng cộng 12 ẩn số
  - Hiện tại mới chỉ có 9 phương trình

Thiết lập hệ phương trình (2)

- Do vệ tinh chuyển động trên mặt phẳng quỹ đạo của mình, vì vậy ba vector $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ và $\mathbf{r}_3$ phải nằm trên một mặt phẳng.
- Có nghĩa là:

$$\mathbf{r}_2 = C_1\mathbf{r}_1 + C_3\mathbf{r}_3$$

- Như vậy, chúng ta có 14 ẩn số và 12 phương trình

Hệ số Lagrange (1)

- Giả sử chúng ta biết được vector vị trí $\mathbf{r}_0$ và vector vận tốc $\mathbf{v}_0$ của vệ tinh tại thời điểm $t = t_0$
- Làm thế nào để tính vector vị trí $\mathbf{r}$ của vệ tinh tại thời điểm $t = t_0 + \Delta t$ nếu Δt là rất nhỏ?
- Khai triển Taylor:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{r}^{(n)}(t_0) \Delta t^n$$

Hệ số Lagrange (2)

- Ta có:

$$\mathbf{r}(\mathrm{t}) \approx \mathbf{r}(\mathrm{t}_0) + \dot{\mathbf{r}}(\mathrm{t}_0)\Delta\mathrm{t} + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(\mathrm{t}_0)\Delta\mathrm{t}^2 + \frac{1}{6}\dddot{\mathbf{r}}(\mathrm{t}_0)\Delta\mathrm{t}^3$$

- Trong đó:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathrm{t}_0) &= \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(\mathrm{t}_0) &= \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

Hệ số Lagrange (3)

- Theo định luật vạn vật hấp dẫn:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$$

Với μ là thông số trọng trường của Trái Đất:

$$\mu = \mathrm{GM}$$

- Như vậy ta có:

$$\ddot{\mathbf{r}}(\mathrm{t}_0) = -\frac{\mu}{r_0}\mathbf{r}_0$$

Hệ số Lagrange (4)

- Ta cũng tính được:

$$\ddot{\mathbf{r}}(\mathrm{t}_0) = -\mu\frac{\mathbf{v}_0}{{r_0}^3} + 3\mu\frac{\mathbf{r}_0.\mathbf{v}_0}{{r_0}^5}\mathbf{r}_0$$

- Như vậy:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\Delta\mathrm{t} - \frac{\mu}{2r_0}\mathbf{r}_0\Delta\mathrm{t}^2 + \frac{1}{6}\left(-\mu\frac{\mathbf{v}_0}{{r_0}^3} + 3\mu\frac{\mathbf{r}_0.\mathbf{v}_0}{{r_0}^5}\mathbf{r}_0\right)\Delta\mathrm{t}^3$$

$$= \left(1 - \frac{\mu}{2r_0}\Delta\mathrm{t}^2 + \frac{\mu}{2}\frac{\mathbf{r}_0.\mathbf{v}_0}{{r_0}^5}\Delta\mathrm{t}^3\right)\mathbf{r}_0 + \left(\Delta\mathrm{t} - \frac{\mu}{6{r_0}^3}\Delta\mathrm{t}^3\right)\mathbf{v}_0$$

$$\approx \left(1 - \frac{\mu}{2r_0}\Delta\mathrm{t}^2\right)\mathbf{r}_0 + \left(\Delta\mathrm{t} - \frac{\mu}{6{r_0}^3}\Delta\mathrm{t}^3\right)\mathbf{v}_0$$

Hệ số Lagrange (5)

- Nói cách khác, ta có thể viết mối quan hệ giữa $\mathbf{r}$ và $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ dưới dạng:

$$\mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0$$

- Với f và g được gọi là các hệ số Lagrange:

$$f = 1 - \frac{\mu}{2r_0^3}\Delta t^2$$

$$g = \Delta t - \frac{\mu}{6r_0^3}\Delta t^3$$

Thiết lập hệ phương trình (3)

- Quay trở lại với bài toán thiết lập hệ phương trình, ta có thể biểu diễn $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_3$ dưới dạng:

$$\mathbf{r}_1 = f_1\mathbf{r}_2 + g_1\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{r}_3 = f_3\mathbf{r}_2 + g_3\mathbf{v}_2$$

- Các hệ số Lagrange f_1, g_1, f_3, g_3 chỉ phụ thuộc vào khoảng cách r_2
- Chúng ta có thêm 6 phương trình, trong khi chỉ có thêm 3 ẩn số mới, như vậy chúng ta đã có đủ phương trình để giải

Mục tiêu

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 + \rho_1 \boldsymbol{\rho}_1 \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \rho_2 \boldsymbol{\rho}_2 \\ \mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_3 + \rho_3 \boldsymbol{\rho}_3 \\ \mathbf{r}_2 = C_1 \mathbf{r}_1 + C_3 \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1 = f_1 \mathbf{r}_2 + g_1 \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{r}_3 = f_3 \mathbf{r}_2 + g_3 \mathbf{v}_2 \end{cases}$$

Mục đích cuối cùng là cần tính $\mathbf{r}_2$ và $\mathbf{v}_2$.

r_2

Nội dung

- Đặt vấn đề
- Tính C_1 và C_3 theo r_2
- Tính ρ_1, ρ_2, ρ_3 theo r_2
- Tính r_2
- Tổng kết

Thế C_1 và C_3 (1)

$$\mathbf{r}_2 = C_1\mathbf{r}_1 + C_3\mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = C_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) + C_3(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_3)$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = C_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3)$$

$$C_1 = \cancel{\frac{(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3).(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3)}{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3)^2}}$$

Thế C_1 và C_3 (2)

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 = (f_1\mathbf{r}_2 + g_1\mathbf{v}_2) \times (f_3\mathbf{r}_2 + g_3\mathbf{v}_2)$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 = (f_1 g_3 - f_3 g_1)(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2)$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 = (f_1 g_3 - f_3 g_1)\mathbf{h}$$

Với $\mathbf{h}$ là mômen động lượng riêng của vệ tinh.

Thế C_1 và C_3 (3)

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 \times (f_3\mathbf{r}_2 + g_3\mathbf{v}_2) = g_3\mathbf{h}$$

$$C_1 = \frac{g_3\mathbf{h}.(f_1g_3 - f_3g_1)\mathbf{h}}{(f_1g_3 - f_3g_1)^2h^2} = \frac{g_3}{f_1g_3 - f_3g_1}$$

Tương tự ta có:

$$C_3 = \frac{g_1}{f_3g_1 - f_1g_3}$$

Hệ số Lagrange

Đặt:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= t_1 - t_2 \\
\tau_3 &= t_3 - t_2 \\
\tau &= \tau_3 - \tau_1
\end{aligned}
$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 1 - \frac{\mu}{2r_2}{\tau_1}^2 \\
g_1 &= \tau_1 - \frac{\mu}{6{r_2}^3}{\tau_1}^3 \\
f_3 &= 1 - \frac{\mu}{2r_2}{\tau_3}^2 \\
g_3 &= \tau_3 - \frac{\mu}{6{r_2}^3}{\tau_3}^3
\end{aligned}
$$

Thế C_1 và C_3 (4)

Ta có thể tính được:

$$f_1 g_3 - f_3 g_1 \approx \tau - \frac{\mu}{6{r_2}^3}\tau^3$$

Từ đó suy ra:

$$C_1 \approx \frac{\tau_3}{\tau}\left[1 + \frac{\mu}{6{r_2}^3}(\tau^2 - {\tau_3}^2)\right]$$

$$C_3 \approx -\frac{\tau_1}{\tau}\left[1 + \frac{\mu}{6{r_2}^3}(\tau^2 - {\tau_1}^2)\right]$$

Nội dung

- Đặt vấn đề
- Tính C_1 và C_3 theo r_2
- Tính ρ_1, ρ_2, ρ_3 theo r_2
- Tính r_2
- Tổng kết

Thế ρ_1, ρ_2, ρ_3 (1)

$$(\mathbf{R}_2 + \rho_2\boldsymbol{\rho}_2) = C_1(\mathbf{R}_1 + \rho_1\boldsymbol{\rho}_1) + C_3(\mathbf{R}_3 + \rho_3\boldsymbol{\rho}_3)$$

$$C_1\rho_1\boldsymbol{\rho}_1 - \rho_2\boldsymbol{\rho}_2 + C_3\rho_3\boldsymbol{\rho}_3 = -C_1\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 - C_3\mathbf{R}_3$$

Nhân vô hướng cả hai vế với $\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3$, ta được:

$$C_1\rho_1\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3) = (-C_1\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 - C_3\mathbf{R}_3)(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3)$$

Thế ρ_1, ρ_2, ρ_3 (2)

Đặt:

$$D_0 = \boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3) = \boldsymbol{\rho}_2(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_1) = \boldsymbol{\rho}_3(\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2)$$

$$D_{11} = \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3);\ D_{21} = \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3);\ D_{31} = \mathbf{R}_3(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3)$$
$$D_{12} = \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_1);\ D_{22} = \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_1);\ D_{32} = \mathbf{R}_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_1)$$
$$D_{13} = \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2);\ D_{23} = \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2);\ D_{33} = \mathbf{R}_3(\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2)$$

Thế ρ_1, ρ_2, ρ_3 (3)

Ta có:

$$\rho_1 = \frac{1}{D_0}\left(-D_{11} + \frac{1}{C_1}D_{21} - \frac{C_3}{C_1}D_{31}\right)$$

Biến đổi tương tự với ρ_2 và ρ_3, ta có:

$$\rho_2 = \frac{1}{D_0}(-C_1 D_{12} + D_{22} - C_3 D_{32})$$

$$\rho_3 = \frac{1}{D_0}\left(-\frac{C_3}{C_1}D_{13} + \frac{1}{C_3}D_{23} - D_{33}\right)$$

Nội dung

- Đặt vấn đề
- Tính C_1 và C_3 theo r_2
- Tính ρ_1, ρ_2, ρ_3 theo r_2
- Tính r_2
- Tổng kết

Tính r_2 (1)

- Như vậy, ta đã biểu diễn được f_1, g_1, f_3, g_3, C_1, C_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 theo r_2
- Do đó, ta chỉ cần tính được r_2 là sẽ có thể tính được tất cả những ẩn số còn lại

Tính r_2 (2)

Ta có:

$$\rho_2 = \frac{1}{D_0}(-C_1 D_{12} + D_{22} - C_3 D_{32})$$

Thay biểu diễn của C_1 và C_3 theo r_2 vào biểu thức trên:

$$\rho_2 = \frac{1}{D_0}\left(-D_{12}\frac{\tau_3}{\tau} + D_{22} + \frac{\tau_1}{\tau}D_{32}\right)$$

$$+\frac{1}{6D_0}\left(-D_{12}(\tau^2 - {\tau_3}^2)\frac{\tau_3}{\tau} + (\tau^2 - {\tau_1}^2)\frac{\tau_1}{\tau}D_{32}\right)\frac{\mu}{{r_2}^3}$$

Tính r_2 (3)

Đặt:

$$A = \frac{1}{D_0}\left(-D_{12}\frac{\tau_3}{\tau} + D_{22} + \frac{\tau_1}{\tau}D_{32}\right)$$

$$B = \frac{1}{6D_0}\left(-D_{12}(\tau^2 - {\tau_3}^2)\frac{\tau_3}{\tau} + (\tau^2 - {\tau_1}^2)\frac{\tau_1}{\tau}D_{32}\right)$$

Ta được:

$$\rho_2 = A + \frac{\mu B}{{r_2}^3}$$

Tính r_2 (4)

Mặt khác:

$$r_2{}^2 = \mathbf{r}_2 . \mathbf{r}_2 = (\mathbf{R}_2 + \rho_2 \boldsymbol{\rho}_2)(\mathbf{R}_2 + \rho_2 \boldsymbol{\rho}_2)$$

Đặt:

$$E = \mathbf{R}_2 \boldsymbol{\rho}_2$$

Ta được:

$$r_2{}^2 = \rho_2{}^2 + 2E\rho_2 + R_2{}^2$$

$$r_2{}^2 = \left(A + \frac{\mu B}{r_2{}^3}\right)^2 + 2E\left(A + \frac{\mu B}{r_2{}^3}\right) + R_2{}^2$$

Tính r_2 (5)

Như vậy r_2 là nghiệm của phương trình:

$$x^8 + ax^6 + bx^3 + c = 0$$

Với:

$$a = -\left(A^2 + 2AE + {R_2}^2\right)$$

$$b = -2\mu B(A + E)$$

$$c = -\mu^2 B^2$$

Nội dung

- Đặt vấn đề
- Tính C_1 và C_3 theo r_2
- Tính ρ_1, ρ_2, ρ_3 theo r_2
- Tính r_2
- Tổng kết

Bước 1

Tính:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t_1 - t_2 \\ \tau_3 &= t_3 - t_2 \\ \tau &= \tau_3 - \tau_1 \end{aligned}$$

Bước 2

Tính:

$$D_0 = \boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3)$$

$$D_{11} = \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3);\ D_{21} = \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3);\ D_{31} = \mathbf{R}_3(\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3)$$

$$D_{12} = \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_1);\ D_{22} = \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_1);\ D_{32} = \mathbf{R}_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_1)$$

$$D_{13} = \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2);\ D_{23} = \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2);\ D_{33} = \mathbf{R}_3(\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2)$$

Bước 3

Tính:

$$A = \frac{1}{D_0}\left(-D_{12}\frac{\tau_3}{\tau} + D_{22} + \frac{\tau_1}{\tau}D_{32}\right)$$

$$B = \frac{1}{6D_0}\left(-D_{12}(\tau^2 - {\tau_3}^2)\frac{\tau_3}{\tau} + (\tau^2 - {\tau_1}^2)\frac{\tau_1}{\tau}D_{32}\right)$$

$$E = \mathbf{R}_2\boldsymbol{\rho}_2$$

Bước 4

Tính:

$$a = -\left(A^2 + 2AE + {R_2}^2\right)$$

$$b = -2\mu B(A + E)$$

$$c = -\mu^2 B^2$$

Bước 5

Giải phương trình:

$$x^8 + ax^6 + bx^3 + c = 0$$

Chọn r_2 là nghiệm dương hợp lý nhất.

Bước 6

Tính:

$$C_1 = \frac{\tau_3}{\tau}\left[1 + \frac{\mu}{6{r_2}^3}(\tau^2 - {\tau_3}^2)\right]$$

$$C_3 = -\frac{\tau_1}{\tau}\left[1 + \frac{\mu}{6{r_2}^3}(\tau^2 - {\tau_1}^2)\right]$$

Bước 7

Tính:

$$\rho_1 = \frac{1}{D_0}\left(-D_{11} + \frac{1}{C_1}D_{21} - \frac{C_3}{C_1}D_{31}\right)$$

$$\rho_2 = A + \frac{\mu B}{{r_2}^3}$$

$$\rho_3 = \frac{1}{D_0}\left(-\frac{C_3}{C_1}D_{13} + \frac{1}{C_3}D_{23} - D_{33}\right)$$

Bước 8

Tính:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 + \rho_1 \boldsymbol{\rho}_1$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \rho_2 \boldsymbol{\rho}_2$$
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_3 + \rho_3 \boldsymbol{\rho}_3$$

Bước 9

Tính:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 1 - \frac{\mu}{2r_2}{\tau_1}^2 \\
g_1 &= \tau_1 - \frac{\mu}{6{r_2}^3}{\tau_1}^3 \\
f_3 &= 1 - \frac{\mu}{2r_2}{\tau_3}^2 \\
g_3 &= \tau_3 - \frac{\mu}{6{r_2}^3}{\tau_3}^3
\end{aligned}
$$

Bước 10

Tính:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{f_1\mathbf{r}_3 - f_3\mathbf{r}_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1}$$

Như vậy, ta đã tính được $\mathbf{r}_2$ và $\mathbf{v}_2$.