Chương 2. **GIỚI HẠN**

2.1. Giới hạn của dãy số thực

Tự đọc {[1]. Chương 1 (1.3.)}

2.1.1. Dãy số hội tụ, các tính chất của dãy hội tụ

Một dãy số thực (hay dãy số) là một ánh xạ f: **N***→**R**. Ký hiệu $\{x_n\}$ với n∈**N*** là dãy số, khi đó $x_n = f(n)$ với n∈**N***.

Một dãy số có thể được cho bằng một trong hai cách: (1) Dưới dạng tường minh $x_n = f(n)$; (2) Dưới dạng truy hồi $x_{n+1} = f(x_n)$.

Ví dụ **2.1.1.1.** Các dãy số sau đây được cho dưới dạng tường minh

+ $\{x_n\}$: $x_n = f(n) = \frac{1}{n}$, tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = f(1) = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = f(2) = \frac{1}{2}$, $x_3 = f(3) = \frac{1}{3}$, …

+ $\{x_n\}$: $x_n = f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = f(1) = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$, $x_2 = f(2) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = f(3) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$, …

+ $\{x_n\}$: $x_n = f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, n = 2k-1 \\ \frac{n}{n+2}, n = 2k \end{cases}$ với k∈**N*** tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = f(1) = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = f(2) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$, $x_3 = f(3) = \frac{1}{3}$, $x_4 = f(4) = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$, …

Ví dụ **2.1.1.2.** Các dãy số sau đây được cho dưới dạng truy hồi

+ $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = f(x_{n-1}) = \dfrac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}} (n \ge 2) \end{cases}$ tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = 2$, $x_2 = f(x_1) = f(2) = \frac{2^2+2}{2.2} = \frac{3}{2}$,

$$x_3 = f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}{2.\frac{3}{2}} = \frac{17}{12}, \ldots$$

+$\{x_n\}$: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \\ x_n = \sqrt{ax_{n-1}} (n \ge 2) \end{cases}$ với a > 0, tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{ax_1} = \sqrt{a\sqrt{a}}$,

$$x_3 = \sqrt{ax_2} = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}, \ldots, x_n = \sqrt{ax_{n-1}} = \underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}_{n} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2^2}}\ldots a^{\frac{1}{2^n}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

Định nghĩa. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy số hội tụ, nếu ∃a∈**R** sao cho với ∀ε > 0 bé tùy ý cho trước, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in$**N*** sao cho với $\forall n \ge n_0$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$.

Khi đó ta nói dãy số $\{x_n\}$ hội tụ đến a, hoặc a là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ và viết $x_n \to a$ khi $n\to\infty$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Vì $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, nên ta còn có thể phát biểu khái niệm dãy số hội tụ như sau: Dãy số $\{x_n\}$ hội tụ đến a nếu ∀ε – lân cận của a đều chứa mọi phần tử của dãy số, trừ một số hữu hạn phần tử đầu dãy.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là phân kỳ nếu nó không hội tụ.

Ví dụ **2.1.1.3.** Dùng định nghĩa để chứng minh dãy số $\{x_n\}$: $x_n = f(n) = \frac{1}{n}$ hội tụ đến a = 0

Ta có $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|$. Giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, khi đó $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ và do đó nếu ta lấy $n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ thì với $\forall n \geq n_0$ ta có $|x_n - 0| < \varepsilon$, điều này có nghĩa là $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (đpcm).

2.1.2. Các tính chất của dãy số hội tụ

(1) Nếu một dãy số hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

(2) Nếu một dãy số hội tụ thì nó giới nội, tức là tồn tại một khoảng (b,c) chứa mọi phần tử của dãy số.

(3) Giả sử hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy số hội tụ, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Khi đó

(3.1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y$

(3.2) $\lim_{n\to\infty}(Cx_n) = C\lim_{n\to\infty} x_n = Cx$ với C là hằng số

(3.3) $\lim_{n\to\infty}(C + x_n) = C + \lim_{n\to\infty} x_n = C + x$ với C là hằng số

(3.4) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = xy$

(3.5) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{1}{y}$ với $y_n \neq 0$ và $y \neq 0$

(3.6) $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{x}{y}$ với $y_n \neq 0$ và $y \neq 0$

(4) Giả sử hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy số hội tụ, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Khi đó, nếu $x_n \geq y_n$ với $\forall n$ thì $a \geq b$.

(5) Nguyên lý kẹp. Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$. Khi đó nếu hai dãy số $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ hội tụ đến cùng một giới hạn a, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$ và $x_n \leq y_n \leq z_n$ với $\forall n$ thì dãy số $\{y_n\}$ cũng hội tụ đến giới hạn a, tức là $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Chứng minh

(1) Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ và giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước. Khi đó, theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in$ **N*** và $\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in$ **N*** sao cho, với $\forall n \geq n_1$ thì $|x_n - a| < \varepsilon/2$ và với $\forall n \geq n_2$ thì $|x_n - b| < \varepsilon/2$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$, với $n \geq n_0$ thì cả hai bất đẳng thức trên đồng thời thỏa mãn, do đó $|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| = |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Bất đẳng thức này đúng với mọi ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước nên $|a - b| = 0 \Rightarrow a = b$ (đpcm).

(2) Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, khi đó $\exists n_0 \in$ **N*** sao cho với $\forall n \geq n_0$ thì $|x_n - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x_n < a + 1$. Nếu đặt $b = \min\{a-1, x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, a+1\}$, $c = \max\{a-1, x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, a+1\} \Rightarrow b < x_n < c$ (đpcm).

(3) Giả sử hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy số hội tụ, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

(3.1) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)\in$ **N*** và $\exists n_2 = n_2(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho, với $\forall n \ge n_1$ thì $|x_n - x| < \varepsilon/2$ và với $\forall n \ge n_2$ thì $|x_n - y| < \varepsilon/2$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1,n_2)$, với $\forall n \ge n_0$ thì cả hai bất đẳng thức trên đồng thời thỏa mãn, do đó $|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ (đpcm).

(3.2) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho, với $\forall n \ge n_0$ thì $|x_n - x| < \varepsilon/|C|$.

Do đó $|Cx_n - Cx| = |C(x_n - x)| = |C||x_n - x| < |C|\frac{\varepsilon}{|C|} = \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = Cx$ (đpcm).

(3.3)Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho, với $\forall n \ge n_0$ thì $|x_n - x| < \varepsilon$.

Do đó $|(C + x_n) - (C + x)| = |C + x_n - C - x| = |x_n - x| < \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty}(C + x_n) = C + x$ (đpcm).

(3.4) Theo tính chất (1), các dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ hội tụ nên chúng giới nội, do đó $\exists M > 0$ sao cho $|x_n| \le M$, $|y_n| \le M$ với $\forall n \Rightarrow |x| \le M$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)\in$ **N*** và $\exists n_2 = n_2(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho, với $\forall n \ge n_1$ thì $|x_n - x| < \varepsilon/2M$ và với $\forall n \ge n_2$ thì $|y_n - y| < \varepsilon/2M$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1,n_2)$, với $\forall n \ge n_0$ thì cả hai bất đẳng thức trên đồng thời thỏa mãn, do đó

$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - xy_n + xy_n - xy| = |(x_n y_n - xy_n) + (xy_n - xy)| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \le$

$|(x_n - x)y_n| + |x(y_n - y)| = |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| \le \frac{\varepsilon}{2M}M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$ (đpcm).

(3.5) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \ne 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|y_n| = |y| > 0$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho với $\forall n \ge n_1$ thì $|y_n| > |y|/2 \Rightarrow \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y_n y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n||y|} < \frac{2|y_n - y|}{y^2}$. Đồng thời $\exists n_2 = n_2(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho với $\forall n \ge n_2$ thì $|y_n - y| < \frac{\varepsilon y^2}{2}$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1,n_2)$, với $\forall n \ge n_0$ thì cả hai bất đẳng thức trên đồng thời thỏa mãn, do đó $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| < \frac{2|y_n - y|}{y^2} < \frac{2}{y^2}.\frac{\varepsilon y^2}{2} = \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$ (đpcm).

(3.6) Tính chất này là hệ quả của các tính chất (3.4) và (3.5). Thật vậy, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n.\frac{1}{y_n} (3.4) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} (3.5) = x.\frac{1}{y} = \frac{x}{y}$ (đpcm).

(4) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại a < b, khi đó ∃r sao cho a < r < b. Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ và a < r nên $\exists n_1 \in$ **N*** sao cho với $\forall n \geq n_1$ thì $x_n < r$, cũng vì $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ và r < b nên $\exists n_2 \in$ **N*** sao cho với $\forall n \geq n_2$ thì $r < y_n$. Do đó nếu đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$ thì với $\forall n \geq n_0$ ta được $x_n < r < y_n$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_n \geq y_n$. Như vậy, với các giả thiết đã cho thì suy ra a ≥ b (đpcm).

(5) Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$. Khi đó nếu hai dãy số $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ hội tụ đến cùng một giới hạn a, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$ và $x_n \leq y_n \leq z_n$ với ∀n thì dãy số $\{y_n\}$ cũng hội tụ đến giới hạn a, tức là $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in$ **N*** và $\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in$ **N*** sao cho, với $\forall n \geq n_1$ thì $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon - a < x_n < \varepsilon + a$ và với $\forall n \geq n_2$ thì $|z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon - a < z_n < \varepsilon + a$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$, với $\forall n \geq n_0$ thì các bất đẳng thức $\varepsilon - a < x_n < \varepsilon + a$, $\varepsilon - a < z_n < \varepsilon + a$ đồng thời thỏa mãn, do đó $\varepsilon - a < x_n \leq y_n \leq z_n < \varepsilon + a$ với $\forall n \geq n_0 \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ (đpcm).

2.1.3. Sự hội tụ của dãy đơn điệu

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là tăng nếu $x_n \leq x_{n+1}$ với ∀n, là giảm nếu $x_n \geq x_{n+1}$ với ∀n. Dãy số tăng hay dãy số giảm được gọi là dãy số đơn điệu.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu ∃c∈**R** mà $x_n \leq c$ với ∀n, bị chặn dưới nếu ∃d∈**R** mà $x_n \geq d$ với ∀n. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn nếu nó là dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

Nhận xét: Dãy số tăng bị chặn dưới bởi phần tử thứ nhất của nó và dãy số giảm bị chặn trên bởi phần tử thứ nhất của nó.

Ví dụ **2.1.3.1.**

(a) Dãy số $\{x_n\}$ với $x_n = 1/n$ (n∈**N***) là dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi số 0 và bị chặn trên bởi số 1.

(b) Dãy số $\{x_n\}$ với $x_n = (-1)^n$ (n∈**N**) là dãy không đơn điệu, bị chặn dưới bởi số -1 và bị chặn trên bởi số 1.

(c) Dãy số $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$ (n∈**N**) là dãy đơn điệu tăng, bị chặn dưới bởi số 0 và không bị chặn trên.

Định lý (*Sự hội tụ của dãy đơn điệu*). Dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ. Nói cách khác (1) Dãy số đơn điệu tăng và bị chặn trên thì hội tụ; (2) Dãy số đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Chứng minh

(1) Giả sử dãy số $\{x_n\}$ là dãy số tăng và bị chặn trên, ta chứng minh nó hội tụ. Thật vậy, vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên, nên theo tiên đề về cận trên đúng thì $\exists l = \sup\{x_n, n \in$ **N***$\}$, tức là $x_n \leq l$ với ∀n. Khi đó với ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước thì l - ε không phải là cận trên đúng của $\{x_n\}$, do đó $\exists n_0 \in$ **N*** sao cho $x_{n_0} > l - \varepsilon$. Mặt khác, vì $\{x_n\}$ là dãy số tăng nên $x_{n_0} \leq x_n$ với $\forall n \geq n_0$. Từ ba bất đẳng thức trên ta được $1 - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l \Rightarrow 1 - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - l| < \varepsilon$ với $\forall n \geq n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ tức là dãy số $\{x_n\}$ hội tụ (đpcm).

(2) Chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ **2.1.3.2.** Chứng minh dãy số $\{x_n\}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ hội tụ.

Ta có $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3} + ... +$

$+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.\frac{1}{n^k} + ... + \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{n!}.\frac{1}{n^n} =$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + ... +$

$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$

Tương tự $x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + ... +$

$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$

$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$

So sánh x_n và x_{n+1} trong hai khai triển trên ta thấy khai triển của x_{n+1} nhiều hơn khai triển của x_n một số hạng, đồng thời từ số hạng thứ ba của mỗi khai triển trở đi thì $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}$ nên các số hạng của x_n nhỏ hơn số hạng tương ứng của x_{n+1}, do đó $x_{n+1} > x_n$ với $\forall n$, suy ra dãy số $\{x_n\}$ là dãy số đơn điệu tăng và bị chặn dưới bởi $x_1 = 2$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh dãy số này bị chặn trên bởi số 3. Thật vậy, ở trên đã có khai triển

$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + ... +$

$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ và nếu đặt $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$ thì dễ thấy rằng $x_n < y_n$, hơn nữa ta thấy $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} < \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{n!} = \frac{1}{2.3...n} < \frac{1}{2.2...2} = \frac{1}{2^{n-1}}$ nên suy ra

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 2 + 1 = 3 \Rightarrow x_n < 3.$$

Vậy dãy số $\{x_n\}$: $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ là dãy số tăng và bị chặn trên, nên nó hội tụ, nếu ký hiệu e là giới hạn của dãy số này thì ta có thể viết $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Ví dụ **2.1.3.3.** Cho a > 0, chứng minh dãy số $\begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \\ x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} (n \ge 2) \end{cases}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Dễ thấy rằng dãy số đã cho là dãy số tăng và bị chặn dưới bởi $x_1 = \sqrt{a} > 0$

Ta sẽ chứng minh dãy số đã cho là bị chặn bằng phương pháp quy nạp toán học.

- Khi n = 1 ta có $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1$

- Khi n = 2 ta có $x_2 = \sqrt{a + x_1} = \sqrt{a + \sqrt{a}} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + 1\right)^2} = \sqrt{a} + 1$

- Giả sử $x_n < \sqrt{a} + 1$ là đúng

- Ta phải chứng minh $x_{n+1} < \sqrt{a} + 1$, thật vậy $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{a} + 1\right)^2} = \sqrt{a} + 1$ (đpcm).

Như vậy, theo định lý về sự hội tụ của dãy đơn điệu, dãy số đã cho hội tụ, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ nào đấy mà $0 < x < \sqrt{a} + 1$.

Để tìm giá trị x ta xét đẳng thức

$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a + x_n} = \sqrt{a + \lim\limits_{n\to\infty} x_n}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{a + x} \Leftrightarrow x^2 = a + x \Leftrightarrow x^2 - x - a = 0$, phương trình bậc hai này có hai nghiệm phân biệt là $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$, vì x > 0 nên giới hạn cần tìm là $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Ví dụ **2.1.3.4.** Tìm giới hạn của dãy số $x_n = \dfrac{[nx]}{n}$ với $n \in \mathbf{N}^*$, trong đó $[\alpha]$ là hàm phần nguyên.

Ta đã biết $0 \le \{\alpha\} < 1$ hay $0 \le \alpha - [\alpha] < 1 \Leftrightarrow -1 < [\alpha] - \alpha \le 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 < [\alpha] \le \alpha$, do đó

$nx - 1 < [nx] \le nx \Rightarrow \dfrac{nx - 1}{n} < \dfrac{[nx]}{n} \le \dfrac{nx}{n} \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{n} < \dfrac{[nx]}{n} \le x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(x - \dfrac{1}{n}\right) < \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx]}{n} \le x$,

vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x - \dfrac{1}{n}\right) = x - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = x - 0 = x$ do $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx]}{n} = x$.

Ví dụ **2.1.3.5.** Tìm giới hạn của các dãy số sau

$x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$, $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ và $z_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$

và $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$

Mặt khác

$y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = x_n$

và $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = z_n$

Suy ra $x_n < y_n < z_n$ với $\forall n$, và vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

2.1.4. Giới thiệu tiêu chuẩn Cauchy, giới hạn vô hạn

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi với $m \ge n_0$ và $n \ge n_0$ thì $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Định lý (*Tiêu chuẩn Cauchy*). Dãy số $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là vô cùng bé (VCB) nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi $n \ge n_0$ thì $|x_n| < \varepsilon$ và viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) nếu với $\forall A > 0$ lớn tùy ý cho trước, $\exists n_0=n_0(A)\in\mathbf{N^*}$ sao cho khi $n \ge n_0$ thì $|x_n| > A$ và viết $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = +\infty$, khi đó ta nói dãy $\{x_n\}$ có *giới hạn vô hạn*.

Nhận xét:

- Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ thì dãy $\{x_n - 1\}$ là một VCB.
- Nghịch đảo của một VCB là một VCL và ngược lại, nghịch đảo của một VCL là một VCB.

Chú ý. Ta công nhận một số giới hạn sau, để sử dụng:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$ với $a > 1$ (khi $n\to\infty$, a^n tăng nhanh hơn n^k)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$ với $a > 0$ (khi $n\to\infty$, $n!$ tăng nhanh hơn a^n)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$ (khi $n\to\infty$, n^n tăng nhanh hơn $n!$)

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n} = 0$ với $a > 1$ (khi $n\to\infty$, n tăng nhanh hơn $\log_a n$)

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ với $|q| < 1$

2.2. Giới hạn của hàm số một biến

2.2.1. Định nghĩa giới hạn hàm số, các tính chất của giới hạn

Tự đọc {[1]. Chương 3 (3.1., 3.2.)}

Xét hàm số thực $y = f(x)$ với $D(f)\in\mathbf{R}$ và $R(f)\in\mathbf{R}$ tức là ánh xạ $f: D(f)\to R(f)$, trong trường hợp tổng quát nhất thì $D(f) = R(f) = \mathbf{R}$, tương ứng với ánh xạ $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, khi đó đối số x và giá trị hàm số f(x) tương ứng có thể nhận các giá trị {-∞, <một số hữu hạn>, +∞}. Như vậy, có nhiều nhất 9 định nghĩa về giới hạn của hàm số f(x) tương ứng với 9 trường hợp sau đây:

x \ f(x)	-∞	L (hữu hạn)	+∞
-∞	1	2	3
x_0 (hữu hạn)	4	**5**	6
+∞	7	8	9

Một cách tự nhiên, trường hợp 5 được xét đầu tiên.

Định nghĩa. (Trường hợp 5) Cho hàm số f(x) với D(f) = (a,b) (a, b là các số hữu hạn), số hữu hạn L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) tại x_o ($x_0\in[a,b]$ là một số hữu hạn) và viết là $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, nếu với $\forall\varepsilon > 0$ cho trước bé tùy ý, mà tìm được số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho khi $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ví dụ **2.2.1.1.**

(a) Cho hàm số f(x) = x ($f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$). Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$ với x_0 là một số hữu hạn.

Ta thấy $D(f) = \mathbf{R}$ nên $x_0\in D(f)$. Giả sử cho trước $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, nếu chọn $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ thì $|x - x_0| < \delta$ đồng thời với $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$ suy ra theo định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$.

(b) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

Ta thấy D(f) = **R**\{2} tức là điểm $x_0 = 2 \notin D(f)$. Giả sử cho trước số ε > 0 bé tùy ý, ta phải tìm số δ = δ(ε) > 0 sao cho khi $|x-2| < \delta$ thì $\left|\frac{x^2+x-6}{x-2} - 5\right| < \varepsilon$. Thật vậy, ta có $\left|\frac{x^2+x-6}{x-2} - 5\right| = \left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right| = \left|\frac{(x-2)^2}{x-2}\right| = |x-2| < \varepsilon$, khi đó ta lấy δ = δ(ε) = ε thì $|x-2| < \delta$. Theo định nghĩa thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$.

(c) Cho hàm số $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Ta thấy D(f) = **R**\{0} tức là điểm $x_0 = 0 \notin D(f)$. Giả sử cho trước số ε > 0 bé tùy ý, ta phải tìm số δ = δ(ε) > 0 sao cho khi $|x-0| < \delta$ thì $|f(x) - 0| = \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Thật vậy, ta có $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|.1 = |x|$ vì $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ với ∀x∈D(f). Từ đó, nếu |x - 0| = |x| < δ ≤ ε thì suy ra $|f(x) - 0| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, nghĩa là ta có thể lấy δ = δ(ε) < ε. Theo định nghĩa thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Định nghĩa. (Trường hợp 2) Cho hàm số f(x) với D(f) = (-∞,b) (b có thể là số hữu hạn hoặc là +∞), số hữu hạn L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) tại điểm âm vô cùng (-∞) và viết là $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$, nếu với ∀ε > 0 cho trước bé tùy ý, mà tìm được số N < 0 có |N| đủ lớn sao cho khi x < N thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Định nghĩa. (Trường hợp 8) Cho hàm số f(x) với D(f) = (a,+∞) (a có thể là -∞ hoặc là số hữu hạn), số hữu hạn L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) tại điểm dương vô cùng (+∞) và viết là $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$, nếu với ∀ε > 0 cho trước bé tùy ý, mà tìm được số N > 0 đủ lớn sao cho khi x > N thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nhận xét. Hai định nghĩa trên có thể viết chung như sau: Cho hàm số f(x) với D(f) = (a,b) (a có thể là -∞ hoặc là số hữu hạn, b có thể là số hữu hạn hoặc là có thể là +∞, a và b không đồng thời hữu hạn), số hữu hạn L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) tại điểm vô cùng (∞) và viết là $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$, nếu với ∀ε > 0 cho trước bé tùy ý, mà tìm được số N > 0 đủ lớn sao cho khi |x| > N thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ví dụ **2.2.1.2.** Cho hàm số $f(x) = 2 + 1/x$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

Ta thấy D(f) = **R**\{0}. Giả sử cho trước ε > 0 bé tùy ý, ta thấy $|f(x) - 2| = |(2 + 1/x) - 2| = |1/x|$ nên nếu ta lấy N < 0 mà |N| đủ lớn thì $|f(x) - 2| = |1/x| < \varepsilon$. Muốn vậy, ta chỉ cần lấy N sao cho $|N| > 1/\varepsilon$ là được. Khi đó, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$. Tương tự, ta chỉ cần lấy N sao cho $N > 1/\varepsilon$ thì chứng minh được $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

Coi như bài tập, sinh viên tự định nghĩa 6 trường hợp còn lại.

Các tính chất của giới hạn

Từ đây trở đi, khi viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ nếu không viết gì thêm thì ta hiểu rằng L là một số hữu hạn, còn a có thể là số hữu hạn hoặc ±∞.

Cho $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_2$. Khi đó

(1) $\lim_{x\to a} Cf_1(x) = C\lim_{x\to a} f_1(x) = CL_1$ với C là hằng số

(2) $\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) = L_1 + L_2$

(3) $\lim_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)] = \left[\lim_{x\to a} f_1(x)\right]\left[\lim_{x\to a} f_2(x)\right] = L_1L_2$

(4) $\lim_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ với $L_2 \neq 0$

(5) Giả sử ba hàm số f(x), g(x), h(x) thỏa mãn $f(x) \le g(x) \le h(x)$ với $x\in(a,b)$. Khi đó với $x_0\in[a,b]$ mà $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.

(6) Cho f(x) là hàm số tăng (giảm) trên **R**; khi đó, nếu f(x) bị chặn trên (chặn dưới) nghĩa là $\exists M$ sao cho $f(x) \le M$ ($\exists N$ sao cho $f(x) \ge N$) với $\forall x\in\mathbf{R}$ thì $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right)$.

Chứng minh tương tự như chứng minh các tính chất của dãy hội tụ.

Ví dụ **2.2.1.3.** Chứng minh rằng $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ và $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

- Chứng minh $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. Thật vậy, với $\forall x > 0$ bao giờ cũng $\exists n\in\mathbf{N}$ sao cho $n \le x < n+1$, suy ra $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{n+1} < 1+\dfrac{1}{x} \le 1+\dfrac{1}{n}$. Vì $1+\dfrac{1}{n+1} > 1, 1+\dfrac{1}{x} > 1, 1+\dfrac{1}{n} > 1$ và $n \le x < n+1$ nên $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Mặt khác, khi $x\to+\infty$ thì $n \to +\infty$ nên $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} < \lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < \lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

Ta có $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{e}{1+0} = e \\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.\left(1+\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\right) = e(1+0) = e \end{cases}$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ (đpcm).

- *Việc chứng minh* $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ *và* $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ *coi như bài tập.*

Nếu $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (L là số hữu hạn) thì viết ghép $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Chẳng hạn, ta viết $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ chung cho $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ và $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Ví dụ **2.2.1.4.** Tìm giới hạn $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2}\right)$

Đặt $t = x^2$ suy ra khi $x\to\pm\infty$ thì $t\to+\infty$, do đó $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2}\right) =$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}-\sqrt{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}-\sqrt{t}\right)\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t}}=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}}+1}=\frac{\sqrt{1+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{1+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{1+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}}}+1}=$$

$$\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0.\sqrt{1+0}}+1}=\frac{1}{2}\text{ vì }\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}=0.$$

2.2.2. Giới hạn một phía, giới hạn vô cùng

Khi $x\to x_0$ có hai khả năng: Hoặc $x\to x_0$ từ phía trái x_0, được viết là $x\to x_0-0$, hoặc $x\to x_0$ từ phía phải x_0, được viết là $x\to x_0+0$. Khi đó, nếu tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ thì ta nói rằng đó là các *giới hạn một phía*, giới hạn trái (nếu $\exists\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$) và giới hạn phải (nếu $\exists\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$)

Người ta đã chứng minh được rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=L$ (L là số hữu hạn).

Nếu $f(x)\to-\infty$ hoặc $f(x)\to+\infty$ khi $x\to x_0$ (x_0 có thể hữu hạn, hoặc là $-\infty$, hoặc là $+\infty$) thì ta nói hàm f(x) có *giới hạn vô cùng* (sáu trường hợp còn lại: 1, 3, 4, 6, 7, 9) và viết là $f(x)\to\infty$ khi $x\to x_0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty\right)$.

Ví dụ **2.2.2.1.** Tìm các giới hạn trái và phải của hàm $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$ khi $x\to 3$. Có tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ không?

- Nếu $x\to 3-0$ thì $\dfrac{1}{x-3}\to-\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-3}}\to 0$ do đó $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\dfrac{1}{3+0}=\dfrac{1}{3}$

- Nếu $x\to 3+0$ thì $\dfrac{1}{x-3}\to+\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-3}}\to+\infty$ do đó $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\dfrac{1}{3+\infty}=0$

- Không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ vì $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$.

2.2.3. Khái niệm vô cùng bé và vô cùng lớn

Hàm số f(x) được gọi là một *vô cùng bé* (VCB) khi $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, hàm số f(x) được gọi là một *vô cùng lớn* (VCL) khi $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ với x_0 có thể hữu hạn, hoặc là $-\infty$, hoặc là $+\infty$).

Nhận xét:

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì hàm số f(x) – L là một VCB khi $x\to x_0$.

- Nghịch đảo của một VCB là một VCL và ngược lại, nghịch đảo của một VCL là một VCB, tức là, nếu f(x) là một VCB khi $x\to x_0$ thì $1/f(x)$ là một VCL khi $x\to x_0$ và ngược lại, nếu f(x) là một VCL khi $x\to x_0$ thì $1/f(x)$ là một VCB khi $x\to x_0$.

2.2.4. Các dạng vô định

Các tính chất của giới hạn của hàm số ở trên chỉ đúng khi giới hạn L_1, L_2 tương ứng của các hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$ là hữu hạn, tuy nhiên, trong thực tế, các hàm này có thể là VCB hoặc VCL, do đó ta cần phải nghiên cứu chi tiết các trường hợp này.

Từ tính chất (2) - phép cộng hai biểu thức, mỗi biểu thức có thể nhận các giá trị (-∞, 0, +∞), được viết theo cột thứ nhất và hàng thứ nhất, ta có

+	-∞	0	+∞	
-∞	-∞	-∞	?	$\Rightarrow$ dạng vô định $\infty-\infty$
0	-∞	0	+∞	
+∞	?	+∞	+∞	

Từ tính chất (3) - phép nhân hai biểu thức, mỗi biểu thức có thể nhận các giá trị (-∞, 0, +∞), được viết theo cột thứ nhất và hàng thứ nhất, ta có

×	-∞	0	+∞	
-∞	+∞	?	-∞	$\Rightarrow$ dạng vô định $0.\infty$
0	?	0	?	
+∞	-∞	?	+∞	

Từ tính chất (4) - phép chia hai biểu thức, mỗi biểu thức có thể nhận các giá trị (-∞, 0, +∞), ta có hai dạng vô định $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$

Chú ý **2.2.1.** Các bài toán tìm giới hạn chủ yếu là việc khử các dạng vô định.

Để khử dạng vô định $\infty-\infty$ khi tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, trong đó $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, nói chung, ta có thể biến đổi hiệu f(x) – g(x) thành tích $f(x)-g(x)=f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]$ hoặc $f(x)-g(x)=g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]$ hoặc $f(x)-g(x)=f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]$. Đối với các dạng mới này, có nhiều khả năng dễ tính giới hạn hơn.

Để khử dạng vô định $0.\infty$ khi tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$, trong đó $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ ta có thể biến đổi tích f(x)g(x) thành $f(x)g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}$ (dạng $\frac{0}{0}$) hoặc $f(x)g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$). Đối với các dạng mới này, có nhiều khả năng dễ tính giới hạn hơn.

Chú ý **2.2.2.** Việc sử dụng định nghĩa khi tìm giới hạn, nói chung là bài toán khó, do đó chủ yếu là biến đổi biểu thức cần tìm về các dạng giới hạn cơ bản đã biết và áp dụng.

Các giới hạn cơ bản

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \text{ và } \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\Rightarrow\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\ (0<a\neq 1) \text{ đặc biệt, khi } a=e \text{ ta được } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (0<a\neq 1) \text{ đặc biệt, khi } a=e \text{ ta được } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

Chú ý **2.2.3.** Bằng cách đổi biến, các giới hạn cơ bản trên có thể được sử dụng dưới dạng

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1,\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1$$

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e,\ \lim_{f(x)\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=e$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\log_a\left[1+f(x)\right]}{f(x)}=\frac{1}{\ln a}\ (0<a\neq 1),\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{\ln\left[1+f(x)\right]}{f(x)}=1$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a\ (0<a\neq 1),\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\left[1+f(x)\right]^a-1}{f(x)}=a$$

Chú ý **2.2.4.** Ngoài các giới hạn cơ bản trên, ta công nhận một số giới hạn sau, để sử dụng:

$$\lim_{x\to 0}a^x=1\ (0<a\neq 1),\ \lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty\ (a>1),\ \lim_{x\to-\infty}a^x=0\ (a>1)$$

$$\lim_{x\to 0+0}x^k\log_a x=0 \text{ với } a>1, k>0$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0$ với $a>1, k>0$ (khi $x\to+\infty$, hàm x^k tăng nhanh hơn hàm $\log_a x$)

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0$ với $a>1$ (khi $x\to+\infty$, hàm a^x tăng nhanh hơn hàm x^k)

Ví dụ **2.2.4.1.** Tìm các giới hạn

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ dạng vô định $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$ dạng vô định $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}=$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\frac{4}{\sqrt{1+4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}+1}=\frac{4}{\sqrt{1+4.0}+1}=2 \text{ vì } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin 2x}-\cot x\right)$ dạng vô định $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin 2x}-\cot x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{2\sin x\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\tan x=0$$

Ví dụ **2.2.4.2.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$ dạng vô định $0.\infty$

- Đặt u = 1 – x nên khi x→1 thì u →0 $\Rightarrow \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{u\to 0} u.\tan\frac{\pi(1-u)}{2} =$

$$\lim_{u\to 0} u.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right) = \lim_{u\to 0} u.\cot\frac{\pi}{2}u = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan\frac{\pi}{2}u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\tan\frac{\pi}{2}u}{u}} =$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\pi}{2}\frac{\tan\frac{\pi}{2}u}{\frac{\pi}{2}u}} = \lim_{u\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\frac{\tan\frac{\pi}{2}u}{\frac{\pi}{2}u}}$$

- Đặt $v = \frac{\pi}{2}u$ nên khi u→0 thì v→0 $\Rightarrow \lim_{u\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\frac{\tan\frac{\pi}{2}u}{\frac{\pi}{2}u}} = \frac{2}{\pi}\lim_{v\to 0}\frac{1}{\frac{\tan v}{v}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\lim_{v\to 0}\frac{\tan v}{v}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1} = \frac{2}{\pi}$

(b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot 2x\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ dạng vô định $0.\infty$

- Đặt $u = \frac{\pi}{4}-x$ nên khi $x\to\frac{\pi}{4}$ thì u →0 $\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot 2x\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right) =$

$$\lim_{u\to 0}\cot 2\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\cot u = \lim_{u\to 0}\cot\left(\frac{\pi}{2}-2u\right)\cot u = \lim_{u\to 0}\tan 2u\cot u = \lim_{u\to 0}\frac{\sin 2u}{\cos 2u}\frac{\cos u}{\sin u} =$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin 2u}{\cos 2u}\frac{\cos u}{\sin u} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin 2u}{\sin u}\frac{\cos u}{\cos 2u} = \lim_{u\to 0}\frac{\frac{\sin 2u}{u}}{\frac{\sin u}{u}}\frac{\cos u}{\cos 2u} = \frac{\lim_{u\to 0}\frac{\sin 2u}{u}}{\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}}\frac{\cos u}{\cos 2u} =$$

$$\frac{\lim_{u\to 0}2\frac{\sin 2u}{2u}}{\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}}\frac{\cos u}{\cos 2u} = \frac{2\lim_{u\to 0}\frac{\sin 2u}{2u}}{\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}}\frac{\cos u}{\cos 2u} = \frac{2.1}{1}.\frac{1}{1} = 2$$

Ví dụ **2.2.4.3.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$ dạng vô định $\frac{0}{0}$ vì $x^3+3x^2-9x-2\big|_{x=2} = 0$ và $x^3-x-6\big|_{x=2} = 0$

do đó nếu chia lần lượt các biểu thức x^3+3x^2-9x-2, x^3-x-6 cho $x-2$

thì ta được các kết quả là x^2+5x+1, x^2+2x+3 nên ta được

$x^3+3x^2-9x-2 = (x-2)(x^2+5x+1)$ và $x^3-x-6 = (x-2)(x^2+2x+3)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}\bigg|_{x=2} = \frac{15}{11}$$

(b) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ dạng vô định $\frac{0}{0}$

Đặt $x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}$ nên khi x→1 thì t→1 $\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2} = \lim_{t\to 1}\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)} =$

$$\lim_{t\to 1}\frac{1+t+t^2}{1+t}=\left.\frac{1+t+t^2}{1+t}\right|_{t=1}=\frac{3}{2}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Ta biến đổi $\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$

$\dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1-\cos x}{x^2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\dfrac{1}{1}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}.1=\dfrac{1}{2}$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1.1.\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

(d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$ dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Biến đổi $\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=\dfrac{(x^x-x^a)+(x^a-a^a)}{x-a}=\dfrac{x^x-x^a}{x-a}+\dfrac{x^a-a^a}{x-a}$

$+\ \dfrac{x^x-x^a}{x-a}=\dfrac{x^a(x^{x-a}-1)}{x-a}=\dfrac{x^a\left[e^{(x-a)\ln x}-1\right]}{x-a}=\dfrac{x^a\left[e^{(x-a)\ln x}-1\right]}{(x-a)\ln x}.\ln x=\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}.x^a\ln x$

Đặt u = (x-a)lnx $\Rightarrow$ khi $x\to a$ thì $u\to 0$, $\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}=\dfrac{e^u-1}{u}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to a}x^a\ln x=a^a\ln a$, do đó $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}.x^a\ln x=$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}.\lim\limits_{x\to a}x^a\ln x=1.a^a\ln a=a^a\ln a$.

$+\ \dfrac{x^a-a^a}{x-a}=\dfrac{a^a\left[\left(\frac{x}{a}\right)^a-1\right]}{x-a}=\dfrac{a^a\left[\left(1+\frac{x}{a}-1\right)^a-1\right]}{x-a}=\dfrac{a^a\left[\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1\right]}{x-a}=$

$\dfrac{a^a\left[\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1\right]}{a.\frac{x-a}{a}}=a^{a-1}\dfrac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1}{\frac{x-a}{a}}$

Đặt $v=\dfrac{x-a}{a}\Rightarrow$ khi $x\to a$ thì $v\to 0$, $\dfrac{x^a-a^a}{x-a}=a^{a-1}\dfrac{(1+v)^a-1}{v}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}=\lim\limits_{v\to 0}a^{a-1}\dfrac{(1+v)^a-1}{v}=a^{a-1}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+v)^a-1}{v}=a^{a-1}.a=a^a$.

Vậy $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^x-x^a}{x-a}+\dfrac{x^a-a^a}{x-a}\right)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-x^a}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}=a^a\ln a+a^a=$

$a^a(\ln a+1)=a^a(\ln a+\ln e)=a^a\ln(ae)$

Ví dụ **2.2.4.4.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Chia cả tử số và mẫu số của phân thức $\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$ cho x^2 thì được $\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}$, do đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}{2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}}=\frac{1+2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=$$

$\dfrac{1+2.0+3.0}{2+3.0+4.0}=\dfrac{1}{2}$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Chia cả tử số và mẫu số của phân thức $\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$ cho x^2 thì được $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}$, do đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}{2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=$$

$\dfrac{0+3.0}{2+3.0+4.0}=\dfrac{0}{2}=0$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Chia cả tử số và mẫu số của phân thức $\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$ cho x^3 thì được $\dfrac{1+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}$, do đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^3}}=\frac{1+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1+5.0}{0+3.0}=\frac{1}{0}=\infty$$

vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Chia cả tử số và mẫu số của phân thức $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ cho $\sqrt{x}$ thì được

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}$$, do đó $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}}=\frac{1}{1}=1$$

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$ dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Biến đổi $\frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}=$

$$\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{1}{2}.\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x}{\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1^2}=1$$

Giới hạn có dạng $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$: Nếu $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$ với f(a) và g(a) hữu hạn thì $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=[f(a)]^{g(a)}$. Tuy nhiên, có trường hợp khi thay a vào các hàm này thì lại nhận được kết quả là $1^{+\infty}$ [f(x)→1, g(x)→+∞] hoặc 0^0 [f(x)→0, g(x)→0] hoặc ∞^0 [f(x)→∞, g(x)→0], vì các biểu thức $1^{+\infty}$, 0^0, ∞^0 không thể xác định được giá trị, nên nó là các dạng vô định.

Trong các trường hợp này, ta có thể biến đổi các dạng này về dạng vô định 0.∞ nhờ phép biến đổi $[f(x)]^{g(x)}=e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln[f(x)]}$, khi đó $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln[f(x)]}$, trong đó giới hạn $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln[f(x)]$ có nhiều khả năng dễ tính hơn.

Nói riêng, muốn khử dạng vô định $1^{+\infty}$, hầu như cần dùng đến giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ hoặc $\lim\limits_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$ bằng cách biến đổi biểu thức đã cho như sau $[f(x)]^{g(x)}=\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)[f(x)-1]}$, khi đó $\lim\limits_{f(x)-1\to 0}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}=e$. Như vậy, ta đã chuyển giới hạn cần tính $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ về dạng $\lim\limits_{x\to a}e^{g(x)[f(x)-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)[f(x)-1)]}$ có nhiều khả năng dễ tính hơn.

Ví dụ **2.2.4.5.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos ax}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$

$$\left(\frac{\cos ax}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}=\left(1+\frac{\cos ax}{\cos(a-2)x}-1\right)^{\frac{1}{x\sin x}}=\left(1+\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}=$$

$$\left(1+\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{\cos(a-2)x}{\cos ax-\cos(a-2)x}\cdot\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\cdot\frac{1}{x\sin x}}=$$

$$\left[\left(1+\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{\cos(a-2)x}{\cos ax-\cos(a-2)x}}\right]^{\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{x\sin x\cos(a-2)x}}=\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{x\sin x\cos(a-2)x}}$$

với $t=\dfrac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}$ khi $x\to0$ thì $t\to0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{\cos(a-2)x}{\cos ax-\cos(a-2)x}}=$

$\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$, do đó $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos ax}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{x\sin x\cos(a-2)x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin(a-1)x\sin x}{x\sin x\cos(a-2)x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin(a-1)x}{x\cos(a-2)x}}=$

$$e^{\lim\limits_{x\to0}2(1-a)\frac{\sin(a-1)x}{(a-1)x}\frac{1}{\cos(a-2)x}}=e^{2(1-a)\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(a-1)x}{(a-1)x}\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\cos(a-2)x}}=e^{2(1-a).1.\frac{1}{1}}=e^{2(1-a)}$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x-4}$

$$\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-4}=\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{3x-4}=\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}\cdot\frac{-3}{x+1}.(3x-4)}=\left[\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right]^{\frac{-9x+12}{x+1}}=\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{-9x+12}{x+1}}$$

với $t=\dfrac{-3}{x+1}$ khi $x\to+\infty$ thì $t\to0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$,

do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right]^{\frac{-9x+12}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9x+12}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9+\frac{12}{x}}{1+\frac{1}{x}}}=$

$$e^{\frac{-9+12\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}}=e^{\frac{-9+12.0}{1+0}}=e^{-9}=1/e^9$$

2.3. Hàm số liên tục

2.3.1. Khái niệm hàm số liên tục và gián đoạn, phân loại điểm gián đoạn

Định nghĩa **2.3.1.1.** Hàm số f(x) xác định trong lân cận điểm $x_0\in D(f)$, được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Nói cách khác, hàm số f(x) xác định trong lân cận điểm $x_0\in D(f)$, được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu với $\forall\varepsilon>0$ bé tùy ý cho trước, mà $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ và với $\forall x\in D(f)$ sao cho $|x-x_0|<\delta$ thì $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Nếu gọi hiệu $x-x_0=\Delta x$ là số gia của đối số và gọi hiệu $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f$ là số gia của của hàm số tại điểm x_0 tương ứng với số gia của Δx thì định nghĩa trên có thể được phát biểu như sau: Hàm f(x) xác định trong lân cận của điểm $x_0\in D(f)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta f=0$.

Định lý **2.3.1.1.** Hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_0 \in D(f)$ khi và chỉ khi hàm f(x) đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(1) f(x) xác định trong một lân cận nào đó của điểm x_0

(2) f(x) có giới hạn trái và giới hạn phải tại điểm x_0, bằng nhau và bằng $f(x_0)$, tức là $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\exists f(x_0)$ và $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Định nghĩa **2.3.1.2.** Giả sử hàm số f(x) xác định trong nửa lân cận bên phải (bên trái) của điểm $x_0 \in D(f)$, tức là xác định trên $[x_0, x_0+\delta)$ (tương ứng, $(x_0-\delta, x_0]$) nào đó. Khi đó, hàm số f(x) được gọi là liên tục bên phải (bên trái) điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ $\left[\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)\right]$.

Định lý **2.3.1.2.** Hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_0 \in D(f)$ khi và chỉ khi hàm số f(x) đồng thời liên tục bên phải và liên tục bên trái điểm x_0.

Định nghĩa **2.3.1.3.** Hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b) được gọi là liên tục trong khoảng (a,b) nếu hàm số f(x) liên tục tại mọi điểm $x \in (a,b)$.

Ví dụ **2.3.1.1.** Bằng định nghĩa hãy chứng minh: Hàm số f(x) = sinx liên tục trên toàn miền xác định của nó là D(f) = **R**.

Giả sử $x_0 \in D(f)$ là một điểm bất kỳ, ta có $|f(x)-f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$

$\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$, do đó với $\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, ta chọn $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ thì khi $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Theo định nghĩa, hàm số f(x) = sinx liên tục tại điểm x_0, và vì $x_0 \in D(f)$ là một điểm bất kỳ, nên hàm số f(x) = sinx liên tục trên toàn miền xác định của nó là D(f) = **R**.

Định nghĩa **2.3.1.4.** Hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b] nếu f(x) xác định và liên tục trong khoảng (a,b) đồng thời liên tục bên phải điểm a và liên tục bên trái điểm b.

Ký hiệu $C_{[a,b]}$ là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên đoạn [a,b].

Ý nghĩa hình học: Nếu hàm số $f(x) \in C_{[a,b]}$ thì đồ thị của hàm số y = f(x) là một đường thẳng hoặc một đường cong liền nét có điểm đầu là A(a,f(a)) và điểm cuối là B(b,f(b)).

Định nghĩa **2.3.1.5.** Hàm số f(x) liên tục trên [a,b) nếu f(x) xác định và liên tục trong khoảng (a,b) đồng thời liên tục bên phải điểm a.

Định nghĩa **2.3.1.6.** Hàm số f(x) liên tục trên (a,b] nếu f(x) xác định và liên tục trong khoảng (a,b) đồng thời liên tục bên trái điểm b.

Sử dụng các tính chất về giới hạn của tổng, tích, thương và định nghĩa liên tục của hàm số, suy ra 2 định lý sau đây.

Định lý **2.3.1.3.**

(1) Giả sử các hàm số f(x) và g(x) liên tục tại điểm $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, khi đó các hàm số f(x) + g(x), f(x).g(x), $\frac{f(x)}{g(x)}\left(g(x_0) \ne 0\right)$ liên tục tại điểm x_0.

(2) Giả sử hàm số $y = \varphi(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in D(\varphi)$, còn hàm số u = f(y) có $D(f) \subset R(\varphi)$, liên tục tại điểm $y_0 = \varphi(x_0) \in D(f)$. Khi đó hàm hợp $u = f[\varphi(x)]$ liên tục tại điểm x_0. Từ đây suy ra rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = f\left[\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)\right]$.

Định lý **2.3.1.4.** Giả sử f(x), g(x) là hai hàm số liên tục trong (a,b) ([a,b], [a,b), (a,b]), khi đó các hàm số f(x) + g(x), f(x).g(x), $\frac{f(x)}{g(x)}$ (trừ ra những điểm x làm cho g(x) = 0) liên tục trong (a,b) ([a,b], [a,b), (a,b]).

Từ các định lý trên suy ra: *Các đa thức là những hàm số liên tục, phân thức hữu tỷ là hàm số liên tục (trừ ra những điểm x làm cho đa thức ở mẫu số bằng không), các hàm số lượng giác liên tục trong miền xác định của nó.*

Định nghĩa **2.3.1.7.** Hàm số f(x) không liên tục tại điểm x_0 thì được gọi là gián đoạn tại điểm x_0 và điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số f(x). Như vậy, x_0 là điểm gián đoạn của hàm số f(x) trong 3 trường hợp:

(1) hoặc x_0 không thuộc miền xác định của f(x) $\left[x_0 \notin D(f)\right]$;

(2) hoặc x_0 thuộc miền xác định của f(x) $\left[x_0 \in D(f)\right]$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nhưng giới hạn này khác giá trị f(x_0) $\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)\right]$;

(3) hoặc x_0 thuộc miền xác định của f(x) $\left[x_0 \in D(f)\right]$ nhưng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Phân loại điểm gián đoạn:

(1) Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn khử được của hàm số f(x), nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ nhưng hoặc f(x) không xác định tại x_0, hoặc $f(x_0) \neq L$.

Khi đó, nếu gán $f(x_0) = L$ thì f(x) trở nên liên tục tại điểm x_0, tức là gián đoạn có thể khử được.

(2) Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số f(x), nếu f(x) có giới hạn trái và giới hạn phải tại điểm x_0, nhưng hai giá trị này khác nhau, tức là $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ và $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ nhưng $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Hiệu số $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ được gọi là bước nhảy của f(x) tại điểm x_0.

(3) Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số f(x), nếu nó không thuộc hai loại trên, tức là điểm x_0 không phải là điểm gián đoạn khử được và cũng không phải là điểm gián đoạn loại 1. Nói cách khác, điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số f(x) tại điểm x_0 khi ít nhất một trong các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ không tồn tại hữu hạn.

Ví dụ **2.3.1.2.** Khảo sát tính liên tục của các hàm số

(a) $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3}$

Hàm số f(x) có $D(f) = R \setminus \{3/2\}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq 3/2$ vì biểu thức tạo nên f(x) là hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định của nó.

Ta có $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3} = \dfrac{(2x-3)\operatorname{sgn}(2x-3)}{2x-3} = \operatorname{sgn}(2x-3) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad x > 3/2 \\ -1 & \text{khi} \quad x < 3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3/2^{+0}} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3/2^{-0}} f(x) = -1 \end{cases}$ do đó, tại điểm $x = 3/2$ hàm số có gián đoạn loại 1, và có bước nhảy là $\lim\limits_{x\to 3/2^{+0}} f(x) - \lim\limits_{x\to 3/2^{-0}} f(x) = 1-(-1) = 2.$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ a & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$

Hàm số f(x) có D(f) = **R** liên tục tại mọi điểm x ≠ 0 vì các biểu thức tạo nên f(x) là các hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định tương ứng của nó. Tại điểm x = 0 ta có f(0) = a,

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) \neq f(0)$ nếu a ≠ 1 thì f(x) gián đoạn tại điểm x = 0, còn $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = f(0)$ nếu a = 1 thì f(x) liên tục tại điểm x = 0, khi đó hàm f(x) liên tục trên toàn miền xác định D(f) = **R** của nó. Vì vậy đối với hàm số f(x), điểm gián đoạn x = 0 là điểm gián đoạn khử được.

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi} \quad x < -1 \\ 1/x & \text{khi} \quad -1 \le x \end{cases}$

Hàm số f(x) có D(f) = **R**\{0} liên tục tại mọi điểm x ≠ 0 vì các biểu thức tạo nên f(x) là các hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định tương ứng của nó. Điểm gián đoạn của hàm số có thể có tại điểm x = -1 và tại điểm x = 0.

Tại điểm x = -1 ta có $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} (2x+5) = 3$ và $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} 1/x = -1$ do đó, tại điểm x = -1 hàm số f(x) có gián đoạn loại 1 và có bước nhảy là $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) - \lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = -1 - 3 = -4.$

Điểm x = 0 là điểm gián đoạn của hàm số f(x) đã cho vì điểm này không thuộc D(f), tức là không tồn tại giá trị f(0). Điểm gián đoạn này là điểm gián đoạn loại 2 vì $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} 1/x = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} 1/x = +\infty$ tức là cả hai giới hạn này không tồn tại hữu hạn.

Ví dụ **2.3.1.3.** Xác định giá trị của tham số a để các hàm số sau đây, liên tục trên miền xác định của nó

(a) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3} & \text{khi} \quad x \neq -1 \\ a & \text{khi} \quad x = -1 \end{cases}$ có D(f) = **R** liên tục tại mọi điểm x ≠ -1 vì các biểu thức tạo nên f(x) là các hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định tương ứng của nó. Điểm gián đoạn của hàm số có thể có tại điểm x = -1.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{1+x}{1+x^3} = \lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{1+x}{(1+x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1}{1-1+1^2} = 1$ và $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} a = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$ khi a ≠ 1 và $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = f(-1)$ khi a = 1. Do đó, để hàm số f(x) đã cho liên tục tại mọi điểm trong miền xác định của nó thì nó phải liên tục tại điểm x = 0, tức là giá trị của tham số a phải bằng 1 (a = 1). Vì vậy đối với hàm số f(x), điểm gián đoạn x = 0 là điểm gián đoạn khử được.

(b) Hàm số $f(x) = \begin{cases} (x^2-4)/(x-2) & \text{khi} \quad x < 2 \\ ax^2 + bx - 3 & \text{khi} \quad 2 \le x \le 4 \\ x - a + 2b & \text{khi} \quad x > 4 \end{cases}$ có D(f) = **R** liên tục tại mọi điểm x thuộc miền **R**\{2;4} vì các biểu thức tạo nên f(x) là các hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định tương ứng của nó. Điểm gián đoạn của hàm số có thể có tại điểm x = 2 và tại điểm x = 4.

Tại điểm x = 2 ta có $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-0} (x+2) = 4$

và $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} (ax^2 + bx - 3) = 4a + 2b - 3$ do đó, để f(x) liên tục tại điểm x = 2 thì phải có $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = f(2)$ tức là $4 = 4a + 2b - 3$ hay 4a + 2b = 7.

Tại điểm x = 4 ta có $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4-0} (ax^2 + bx - 3) = 16a + 4b - 3$ và $\lim\limits_{x\to 4+0} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to 4+0} (x - a + 2b) = 4 - a + 2b$ do đó, để f(x) liên tục tại điểm x = 4 thì phải có $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = f(4)$ tức là 16a + 4b – 3 = 4 – a + 2b hay 17a + 2b = 7.

Như vậy, để hàm số f(x) đã cho liên tục trên toàn miền xác định của nó là D(f) = **R** thì giá trị của các tham số a, b phải là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4a + 2b = 7 \\ 17a + 2b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3{,}5 \end{cases}$

2.3.2. Các tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

Định lý **2.3.2.1.** Giả sử $f(x)\in C_{[a,b]}$ thì

(1) f(x) bị chặn trên [a,b], tức là $\exists M > 0$ mà $|f(x)| < M$ với $\forall x\in[a,b]$;

(2) f(x) đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên [a,b], tức là $\exists x_1$, x_2 mà $f(x_1) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$;

(3) f(x) nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của nó trên [a,b], tức là, nếu $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ và $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ thì với $\forall\mu$ mà $m \le \mu \le M$, $\exists x_0\in[a,b]$ sao cho $f(x_0) = \mu$.

Hệ quả. Giả sử hàm số $f(x)\in C_{[a,b]}$; giả sử $\alpha, \beta\in[a,b]$ $(\alpha < \beta)$ và $f(\alpha).f(\beta) < 0$ thì tồn tại một số $c\in(\alpha,\beta)$ sao cho $f(c) = 0$.

2.3.3. Tính liên tục của các hàm số sơ cấp

Các hàm số sau đây được gọi là các *hàm số sơ cấp cơ bản*: Hàm số lũy thừa $[f(x) = x^\alpha, \alpha\in\mathbf{R}]$; hàm số mũ $[f(x) = a^x, 0 < a \ne 1]$; hàm số logarit $[f(x) = \log_a x, 0 < a \ne 1]$; các hàm số lượng giác [f(x) = sinx, f(x) = cosx; f(x) = tanx; f(x) = cotx] và các hàm số lượng giác ngược [f(x) = arcsinx, f(x) = arccosx; f(x) = arctanx; f(x) = arccotx].

Hàm số sơ cấp là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn phép tính số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

Trong các hàm số sơ cấp, người ta đặc biệt chú ý đến hai loại hàm số: *đa thức* và *phân thức hữu tỷ*, vì khi tính giá trị của các hàm số này, chỉ cần thực hiện các phép tính số học đối với biến.

Định lý **2.3.3.1.** Hàm số sơ cấp liên tục trong miền xác định của nó.

Bài tập

2.1. Tìm giới hạn của các dãy số sau

(a) $x_n = \sqrt{n^2 - n} - n$; (b) $x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$; (c) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$;

(d) $\begin{cases} x_1 = \sqrt{a}, (a > 0) \\ x_n = \sqrt{a x_{n-1}}, (n \ge 2) \end{cases}$; (e) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}}, (n \ge 2) \end{cases}$; (f) $x_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} a^k}{\sum_{k=0}^{n} b^k}, (|a| < 1, |b| < 1)$;

(g) $x_n = \dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left[k^2 x\right]$ trong đó $[\alpha]$ là hàm phần nguyên

HD: (d) Cách 1. Để ý rằng $x_n = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}$. Cách 2. Xét 3 trường hợp 0 < a < 1 (chứng minh $\{x_n\}$ là dãy số giảm), a = 1, a > 1 (chứng minh $\{x_n\}$ là dãy số tăng) và sử dụng định lý về "Sự hội tụ của dãy đơn điệu"; (e) Chứng minh $\{x_n\}$ là dãy số giảm và bị chặn dưới ; (g) Hãy chứng minh $\alpha - 1 < [\alpha] \le \alpha$ và sử dụng tổng đã biết $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.2. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{m+1}} S_n^{(m)} (m\in\mathbf{N^*})$ với $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)...(k+m-1)$ là tổng đã tính ở Ví dụ 0.3.6.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(m)} (m\in\mathbf{N^*})$ với $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+m)}$ là tổng đã tính ở Bài tập 0.12.

2.3. Tìm các giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ với

(a) $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$; (b) $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$; (c) $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i}\right)$; (d) $P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

HD: (a) Đặt $u_k = 1-\frac{1}{(k+1)^2}$ và để ý rằng $u_k = \frac{k}{k+1}.\frac{k+2}{k+1}$, (b) Đặt $u_k = 1-\frac{1}{k^2}$ và để ý rằng $u_k = \frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$, (c) Đặt $u_k = 1-\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i}$ và để ý rằng $u_k = \frac{k-1}{k}.\frac{k+2}{k+1}$, (d) Đặt $u_k = \frac{k^3-1}{k^3+1}$ và để ý rằng $u_k = \frac{k-1}{k+1}.\frac{k^2+k+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}$

2.4. Tìm các giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n$ với

(a) $S_n = \sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}$

(b) $S_n(a_1, d) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ trong đó $\{a_n\}$ là cấp số cộng có $a_1 \neq 0$ và công sai $d \neq 0$

(c) $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^{\left[\frac{k}{2}\right]} y^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}$ với $|xy| < 1$

HD: (a) Tổng đã tính ở Bài tập 0.11.(a); (b) Tổng đã tính ở Bài tập 0.14.; (c) Trước hết, hãy chứng minh $\left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right]$ khi k chẵn và $\left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right]+1$ khi k lẻ.

2.5. (a) Tính tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} kq^{k-1}$ với $\forall q \in \mathbf{R}$, (b) Tìm $\lim_{n\to\infty} S_n$ với $|q| < 1$.

HD: (a) Tính $S_n - qS_n$, (b) Sử dụng giới hạn $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$ với $|q| < 1$.

2.6. Tìm giới hạn của các hàm dưới đây (nếu có):

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{khi} \quad x \le 1 \\ 3x-5 & \text{khi} \quad x > 1 \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ với $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ với $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

(d) $\lim_{x\to a} f(x)$ với $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$

(e) $\lim_{x\to 4} f(x)$ với $f(x) = (3x + |x-4|)$

(f) $\lim_{x\to 0} f(x)$ với $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$

(g) $\lim_{x\to 3} f(x)$ với $f(x) = \frac{3-|x|}{3-x}$

2.7. Tìm các giới hạn

(a) $\lim_{x\to 4}[x]$, (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$ (a > 0, b > 0), (c) $\lim_{x\to 0}\left(x^4\left(1+2+3+\ldots+\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)\right)$, trong đó $[\alpha]$ là hàm phần nguyên.

2.8. Giả sử $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_n \neq 0)$, chứng minh rằng $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$.

2.9. Cho $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ với m, n∈**N*** và $P_m(x)$, $Q_n(x)$ là các đa thức bậc m, n tương ứng; tức là $P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^k\ (a_m\neq 0)$, $Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k\ (b_n\neq 0)$.

(a) Tìm $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ nếu a đồng thời là nghiệm đơn của các phương trình $P_m(x) = 0$, $Q_n(x) = 0$.

(b) Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$,

HD: (b) Xét 3 trường hợp (m < n, m = n, m > n), đối với mỗi trường hợp chia cả tử số và mẫu số cho $x^{\max(m,n)}$.

2.10. Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4+2x^2-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m, n∈**N***) (e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}x^k\right)-n}{x^n-1}$, n∈**N*** (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n∈**N***)

(g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (m, n∈**N***)

2.11. Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2-5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$

2.12. Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right)$ (d) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{7}}{x+7}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x}-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}$ (m, n∈**N***) (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{x+1}-\sqrt[n]{x+1}}{x}$ (m, n∈**N***)

2.13. Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(8x^3+1)}{\tan x\tan 2x\tan 3x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\tan bx}$ (c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x}$ (g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$ (h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x-3x^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ (a > 0) (k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

2.14. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2\left(\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2x^4}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x+1}$, (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$

2.15. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{1-\cot x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$ (i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2-x+1}\right)^{\frac{1}{3x+\sin x}}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cot x\left(e^{\sin 3x}-1\right)\right]$ (m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

(n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ (o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\tan^2 2x}$ (p) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

2.16. Xác định giá trị của tham số a để các hàm số dưới đây, liên tục trên miền xác định của nó

(a) $f(x)=\begin{cases} 2e^x & \text{khi } x<0\\ a+2x & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2} & \text{khi } x\ne 0\\ a & \text{khi } x=0\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x & \text{khi } x<2\\ x^3-ax & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ (d) $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{khi } x\le 0\\ a(x-1) & \text{khi } x>0\end{cases}$

(e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{2+x}-1}{x+1} & \text{khi } x<-1\\ ax^2+b & \text{khi } -1\le x\le 0\\ \dfrac{e^{3x}-1}{x} & \text{khi } 0<x\end{cases}$ (f) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } 1<x\le 2\\ \dfrac{4}{x} & \text{khi } 2<x\end{cases}$

2.17. Xác định giá trị của tham số a để các hàm số dưới đây

(a) $f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{khi } x\in[0,1]\\ x^2+2 & \text{khi } x\in[1,2]\end{cases}$, liên tục trên đoạn [0,2].

(b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} & \text{khi } x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right], x\ne 0, x\ne\pi\\ a & \text{khi } x=0\\ b & \text{khi } x=\pi\end{cases}$, liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

2.18. Xác định f(2) để hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ liên tục tại x = 2.

2.19. Khảo sát sự liên tục, gián đoạn và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số

(a) $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$ (b) $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x^3}$

(c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$ (d) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|}$

(e) $f(x) = \text{sgn}^2(x)$

(f) $f(x) = [x]$

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x-1} & \text{khi} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{khi} \quad x = 1 \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi} \quad x \leq 1 \\ 1/x & \text{khi} \quad 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{khi} \quad x \geq 3 \end{cases}$