Phần 1: GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

1. Giới hạn hàm số:

Định nghĩa: Cho hàm số y = f(*x*) xác định trên D

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in D: |x-x_0| < \delta \to |f(x)-a| < \varepsilon$$

Giới hạn một bên:

- Giới hạn trái:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in D: x_0 - x < \delta \to |f(x)-a| < \varepsilon$$

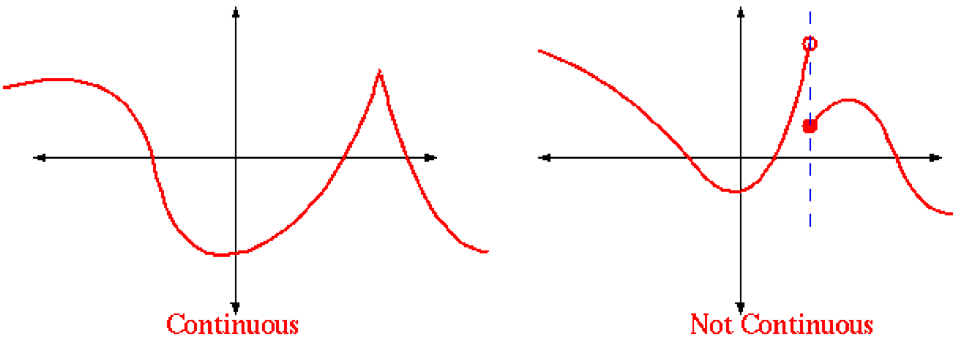
- Giới hạn phải: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in D: x-x_0<\delta \to |f(x)-a| < \varepsilon$

Định lý: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$

2. Hàm số liên tục:

- Hàm số f(x) gọi là liên tục tại x_0 nếu: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

  Nếu f(*x*) không liên tục tại x_0 thì ta nói f(*x*) gián đoạn tại x_0.



- Hàm số f(x) gọi là liên tục trái tại x_0 nếu: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

- Hàm số f(x) gọi là liên tục phải tại x_0 nếu: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Chú ý: Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu:

i) $f(x)$ xác định tại x_0

ii) tồn tại $\lim_{x\to x_0} f(x)$

iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

iv) $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu nó vừa liên tục trái, vừa liên tục phải tại x_0.

Định lí giá trị trung gian:

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó, $f(x)$ có ít nhất một nghiệm trong (a,b).

Định nghĩa: Cho x_0 là điểm gián đoạn của đồ thị hàm số y = f(x):

1. Điểm gián đoạn loại 1: $f(x_0^-), f(x_0^+)$ tồn tại và hữu hạn.
- x_0 là điểm khử được: $f(x_0^-), f(x_0^+) \neq f(x_0)$
- x_0 là điểm nhảy: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+) \Rightarrow$ Bước nhảy: $h = f(x_0^+) - f(x_0^-)$
2. Điểm gián đoạn loại 2: $(x_0^-), f(x_0^+)$ không tồn tại hoặc vô hạn.

3. Ví dụ áp dụng:

Cho Huber loss:

$$L_\delta(y, f(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y - f(x))^2 \;\; for\ |y - f(x)| \le \delta, \\ \delta|y - f(x)| - \frac{1}{2}\delta^2 \;\; otherwise. \end{cases}$$

Chứng minh hàm L_δ liên tục trên miền xác định ℝ.

Lời giải:

Đặt $a = y - f(x)$, khi đó:

$$L_\delta(a) = \begin{cases} \frac{1}{2}a^2 \;\; for\ |a| \le \delta, \\ \delta|a| - \frac{1}{2}\delta^2 \;\; otherwise. \end{cases}$$

Ta chỉ cần chứng minh L_δ liên tục tại $|a| = \delta$:

Ta có:

$$\lim_{|a| \to \delta^-} L_\delta = \frac{1}{2}\delta^2$$

$$\lim_{|a| \to \delta^+} L_\delta = \frac{1}{2}\delta^2$$

Do đó:

$$L_\delta(\delta) = \frac{1}{2}\delta^2$$

Bởi vì:

$$\lim_{|a| \to \delta^-} L_\delta = \lim_{|a| \to \delta^+} L_\delta = L_\delta(\delta) = \frac{1}{2}\delta^2$$

Nên L_δ liên tục tại $|a| = \delta$ (đpcm).

Phần 2: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

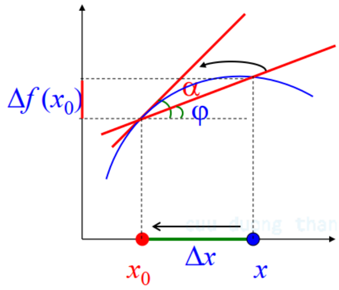
1. Đạo hàm:

Định nghĩa: (Đạo hàm tại một điểm)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ *gọi là gia số của hàm tại* x_0. $\Delta x = x - x_0$ *gọi là gia số của biến tại* x_0.

Ý nghĩa hình học đạo hàm:



$$\tan\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \xrightarrow{x \to x_0} \quad \tan\alpha = f'(x_0)$$

$f\ '(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong (C):

$y = f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0, f(x_0))$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Đạo hàm một bên:

Đạo hàm phải tại x_0:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Đạo hàm trái tại x_0:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Hàm f có đạo hàm tại x_0 nếu nó có đạo hàm trái và đạo hàm phải và chúng bằng nhau.

Tính chất: Hàm số có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại đó

(⇔ Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại đó)

Ví dụ áp dụng:

Cho hàm số $f(x) = |x|$. Tính $f'(0)$.

Ta có

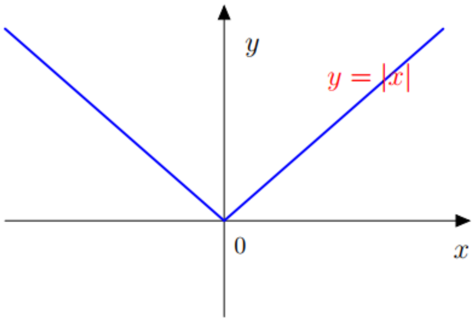
$\Delta f = f(x) - f(0) = |x| - |0| = |x|$ $\quad \Delta x = x - 0 \Longrightarrow \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{|x|}{x}$

Ta không thể tích giới hạn trực tiếp khi $x \to 0$ mà phải tính giới hạn trái và giới hạn phải.

$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} = -1$

Vì đạo hàm trái và phải khác nhau nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.



Đạo hàm cấp cao:

Đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa theo truy hồi

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

2. **Vi phân:**

Vi phân cấp 1

$f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $f(x)$ có đạo hàm tại x_0

$$df(x_0) = f'(x_0).dx$$

Công thức gần đúng

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Vi phân cấp cao

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx$$

3. **Định lý giá trị trung bình:**

Định lý Fermat:

Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì

$$f'(x_0) = 0.$$

Định lý Rolle:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) thỏa $f(a) = f(b)$.

Khi đó:

$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Định lý Lagrange:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b).

Khi đó:

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

Định lý Cauchy:

Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $g'(x) \neq 0 \forall, x \in (a.b)$
Khi đó

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ví dụ áp dụng:

Chứng minh bất đẳng thức $\left|\arctan x - \arctan y\right| \leq \left|x - y\right|, \forall x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x < y$

Xét $f(x) = \arctan x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \leq 1$

Áp dụng đính lý Lagrange

$$\exists c \in (x, y) : \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \leq 1 \Longrightarrow \left|\arctan x - \arctan y\right| \leq \left|x - y\right|$$

4. Công thức H'Lopital:

Quy tắc L'Hopital:

Cho giới hạn $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

Giả sử $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm tại x_0 và giới hạn $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại hữu hạn hoặc vô hạn thì:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ví dụ áp dụng:

Tính giới hạn:

1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{2012} - 1}{\sqrt{x} - 1} \text{ (Dạng } \frac{0}{0}) \quad = \lim_{x \to 1} \frac{(x^{2012} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{2012.x^{2011}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 4024$$

2.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x \text{ (Dạng } 0.\infty) \quad = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \text{ (Dạng } \frac{\infty}{\infty}) \quad = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

5. Công thức Taylor:

Công thức taylor của hàm $y = f(x)$ đến cấp n tại x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}.(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n,$$

Trong đó: $o(x-x_0)^n$ là một hàm VCB cấp cao hơn $(x-x_0)^n$ khi $x \to x_0$.

công thức Maclaurint là công thức taylor với $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Ví dụ áp dụng:

1.

Khai triển Maclaurint hàm số $f(x) = e^x - 1$ đến các cấp 1,2,3.

Bài làm

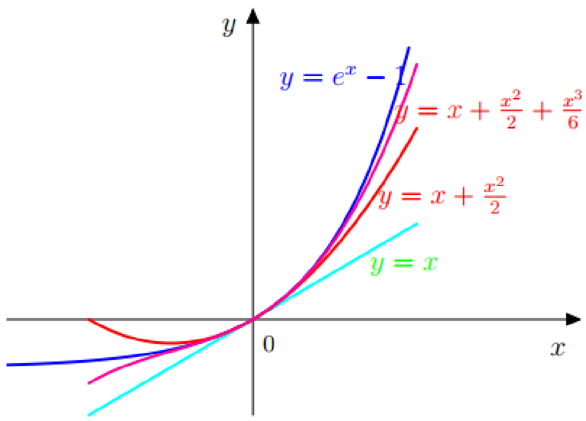
$f(0) = 0.$ $\quad f'(x) = e^x \implies f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \implies f''(0) = 1.$ $\quad f'''(x) = e^x \implies f'''(0) = 1$

Khai triển Maclaurint đến cấp 1: $f(x) = 0 + 1.x + o(x^1) = x + o(x)$.

Khai triển Maclaurint đến cấp 2: $f(x) = 0 + 1.x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Khai triển Maclaurint đến cấp 3: $f(x) = 0 + 1.x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!} + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.



- Hình vẽ minh họa cho các đa thức trong khai triển Maclaurint xấp xỉ với hàm $f(x)$ trong lân cận $x_0 = 0$.
- Cấp khai triển càng cao thì xấp xỉ càng chính xác.

2. Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{x^3}{3}) - (x - \frac{x^3}{6}) + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$$

3. Trích từ https://machinelearningcoban.com/2017/01/12/gradientdescent/ :

Kiểm tra đạo hàm

Việc tính đạo hàm của hàm nhiều biến thông thường khá phức tạp và rất dễ mắc lỗi, nếu chúng ta tính sai đạo hàm thì thuật toán GD không thể chạy đúng được. Trong thực nghiệm, có một cách để kiểm tra liệu đạo hàm tính được có chính xác không. Cách này dựa trên định nghĩa của đạo hàm (cho hàm 1 biến):

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

Một cách thường được sử dụng là lấy một giá trị ε rất nhỏ, ví dụ 10^{-6}, và sử dụng công thức:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (2)$$

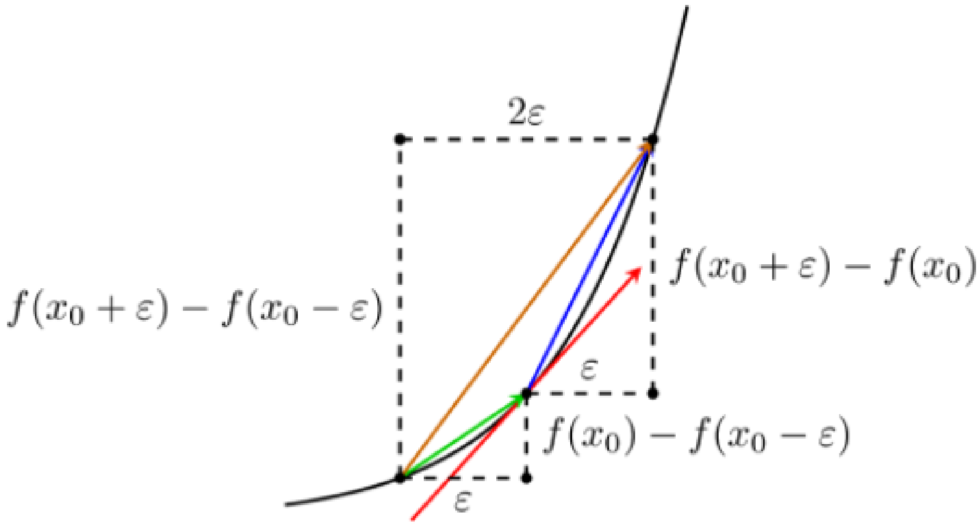
Cách tính này được gọi là *numerical gradient*.

Câu hỏi: Tại sao công thức xấp xỉ hai phía trên đây lại được sử dụng rộng rãi, sao không sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm bên phải hoặc bên trái?

Có hai các giải thích cho vấn đề này, một bằng hình học, một bằng giải tích.

Giải thích bằng hình học

Quan sát hình dưới đây:



Trong hình, vector màu đỏ là đạo hàm *chính xác* của hàm số tại điểm có hoành độ bằng x_0. Vector màu xanh lam (có vẻ là hơi tím sau khi convert từ .pdf sang .png) thể hiện cách xấp xỉ đạo hàm phía phải. Vector màu xanh lục thể hiện cách xấp xỉ đạo hàm phía trái. Vector màu nâu thể hiện cách xấp xỉ đạo hàm hai phía. Trong ba vector xấp xỉ đó, vector xấp xỉ hai phía màu nâu là gần với vector đỏ nhất nếu xét theo hướng.

Sự khác biệt giữa các cách xấp xỉ còn lớn hơn nữa nếu tại điểm x, hàm số bị *bẻ cong* mạnh hơn. Khi đó, xấp xỉ trái và phải sẽ khác nhau rất nhiều. Xấp xỉ hai bên sẽ *ổn định* hơn.

Giải thích bằng giải tích

Chúng ta cùng quay lại một chút với Giải tích I năm thứ nhất đại học: Khai triển Taylor.

Với ε rất nhỏ, ta có hai xấp xỉ sau:

$$f(x+\varepsilon) \approx f(x) + f'(x)\varepsilon + \frac{f"(x)}{2}\varepsilon^2 + \dots$$

và:

$$f(x-\varepsilon) \approx f(x) - f'(x)\varepsilon + \frac{f"(x)}{2}\varepsilon^2 - \dots$$

Từ đó ta có:

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \approx f'(x) + \frac{f"(x)}{2}\varepsilon + \dots = f'(x) + O(\varepsilon) \quad (3)$$

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} \approx f'(x) + \frac{f^{(3)}(x)}{6}\varepsilon^2 + \dots = f'(x) + O(\varepsilon^2) \quad (4)$$

Từ đó, nếu xấp xỉ đạo hàm bằng công thức (3) (xấp xỉ đạo hàm phải), sai số sẽ là $O(\varepsilon)$. Trong khi đó, nếu xấp xỉ đạo hàm bằng công thức (4) (xấp xỉ đạo hàm hai phía), sai số sẽ là $O(\varepsilon^2) \ll O(\varepsilon)$ nếu ε nhỏ.

Cả hai cách giải thích trên đây đều cho chúng ta thấy rằng, xấp xỉ đạo hàm hai phía là xấp xỉ tốt hơn.

Với hàm nhiều biến

Với hàm nhiều biến, công thức (2) được áp dụng cho từng biến khi các biến khác cố định. Cách tính này thường cho giá trị khá chính xác. Tuy nhiên, cách này không được sử dụng để tính đạo hàm vì độ phức tạp quá cao so với cách tính trực tiếp. Khi so sánh đạo hàm này với đạo hàm chính xác tính theo công thức, người ta thường giảm số chiều dữ liệu và giảm số điểm dữ liệu để thuận tiện cho tính toán. Một khi đạo hàm tính được rất gần với *numerical gradient*, chúng ta có thể tự tin rằng đạo hàm tính được là chính xác.

Phần 3: TÍCH PHÂN

1. Tích phân bất định:

Định nghĩa:

- Nguyên hàm: Hàm F(x) gọi là một nguyên hàm của f(x) nếu F'(x) = f(x).
- Tích phân bất định: Nếu hàm F(x) là một nguyên hàm của f (x) thì F(x) + C (C: hằng số) được gọi là tích phân bất định của f(x), kí hiệu

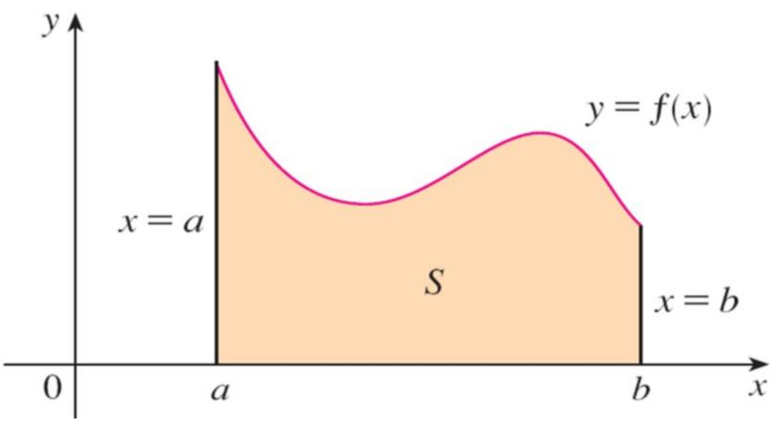
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

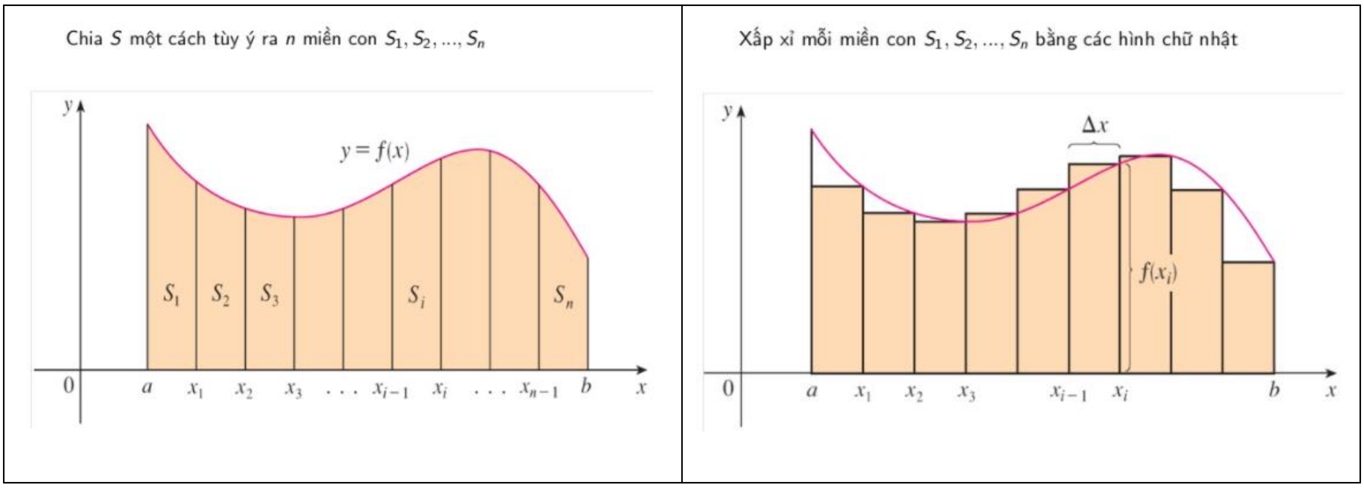
- Phương pháp tính tích phân: Phương pháp đổi biến & Phương pháp tích phân từng phần.

2. Tích phân xác định:

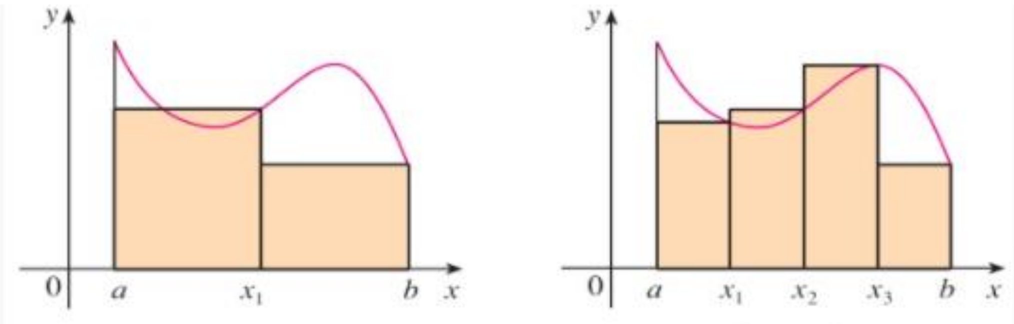
Bài toán diện tích hình thang cong:

> **Bài toán**
>
> *Tính diện tích S của miền phẳng giới hạn bởi: đường cong $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$*



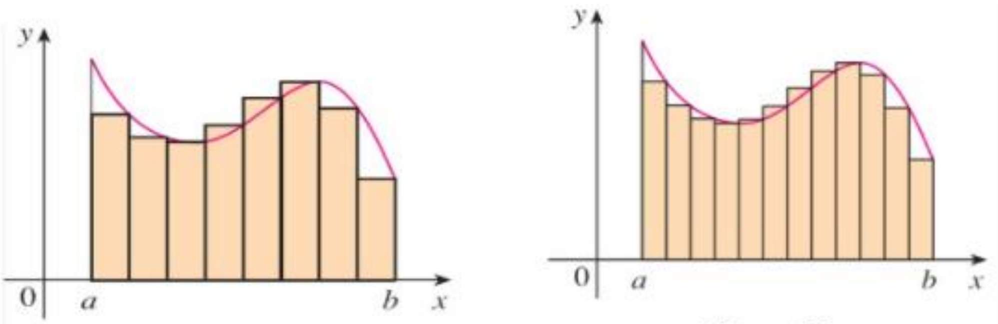


Hình dưới là các trường hợp chia S thành 2 và 4 phần



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$

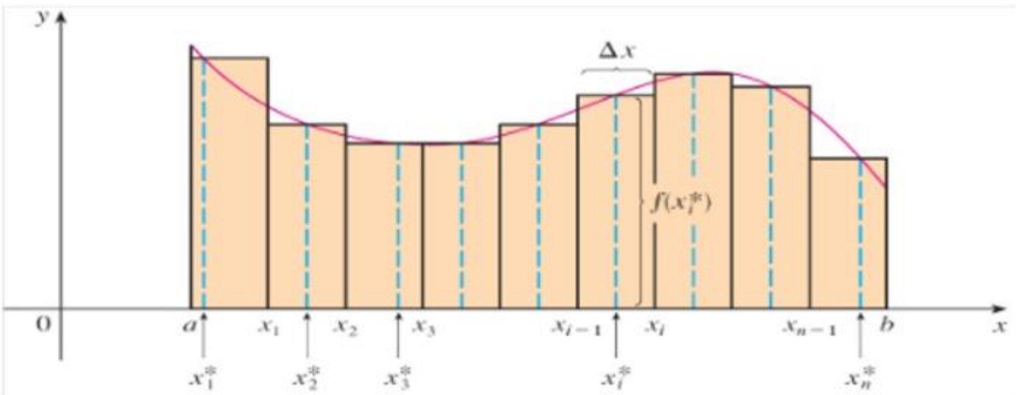
Hình dưới là các trường hợp chia S thành 8 và 12 phần



(c) $n = 8$ (d) $n = 12$

Với n càng lớn, diện tích tính được càng chính xác

Trên mỗi miền con $S_1, S_2, ..., S_n$ lấy một điểm tùy ý



Ta có $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

$$S \simeq f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + \cdots f(x_n^*)(x_n - x_{n-1})$$

$$S \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

Định nghĩa:

Cho hàm số f(x) và bị chặn trong khoảng đóng [a, b], chia [a, b] thành những khoảng nhỏ bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, trong mỗi khoảng $[x_{i-1};x_i]$ lấy một điểm ξ_i tùy ý sao cho:

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

và lập tổng $$\sigma := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

với $$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1,n})$$

Dĩ nhiên tổng σ là một số xác định; số đó phụ thuộc ξ_i và phụ thuộc cách chọn phân điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Nếu khi n tăng vô hạn ($n \to \infty$) sao cho $\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i := \lambda, \lambda \to 0$; với $\lambda_i := \Delta x_i$ ($i = \overline{1,n}$), σ có giới hạn (hữu hạn) I, và giới hạn I này không phụ thuộc cách chọn điểm ξ_i, và không phụ thuộc cách chọn phân điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sigma = I$$

thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số f(x) lấy trên khoảng đóng [a, b] và ký hiệu là $I = \int_a^b f(x)dx$

Khi đó ta cũng nói rằng hàm số f(x) khả tích trên [a, b], [a, b] là khoảng lấy tích phân, a là cận dưới, b là cận trên của tích phân, x là biến số lấy tích phân và f(x)dx là biểu thức dưới dấu tích phân.

Ví dụ: Tính tích phân sau bằng định nghĩa $I_1 = \int_0^1 2^x dx$

Chia [0,1] thành n phần bằng nhau thì các điểm chia sẽ là $$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \ldots < x_k = \frac{k}{n} < \ldots < x_n = 1$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} 2^{k/n}$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 + 2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \ldots + 2^{\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{2^{1/n} - 1} = \frac{1}{n}\frac{1}{e^{1/n \ln 2} - 1}$$

$$\Rightarrow I_1 = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\ln 2}$$

Định lý giá trị trung bình:

(i) Định lí trung bình thứ nhất.

Giả sử f(x) khả tích trên [a, b], (a < b) và giả sử $m \le f(x) \le M$, với $x \in [a, b]$, khi đó tồn tại μ:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),\ m \le \mu \le M.$$

Đặc biệt nếu f(x) liên tục trong [a, b], tồn tại $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

(ii) Định lý trung bình thứ hai.

Giả sử:

(1) f(x) và tích f(x).g(x) khả tích trên [a, b].

(2) $m \le f(x) \le M$.

(3) g(x) không đổi dấu trong [a, b]: $g(x) \ge 0$ $(g(x) \le 0)$.

Khi đó:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,\ m \le \mu \le M.$$

Đặc biệt nếu f(x) liên tục trong [a, b], có:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx,\ a \le c \le b.$$

Điều kiện để f khả tích trên [a, b]

Hàm f liên tục trên [a, b] ngoại trừ 1 số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 thì khả tích trên [a,b].

Công thức Newtom-Leibnitz:

Nếu f(x) liên tục và F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b] thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Isaac Newton
(1642 – 1726)

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646 – 1716)

Công thức đạo hàm dưới dấu tích phân:

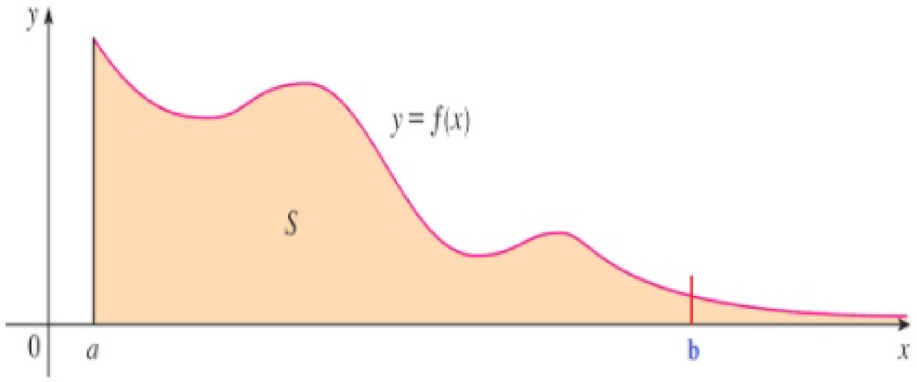
$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right)' = f(b(x)).b'(x) - f(a(x)).a'(x)$$

3. **Tích phân suy rộng:**

a. **Tích phân suy rộng loại 1:**

Bài toán:

Tính diện tích S miền vô hạn giới hạn bởi: đường cong $y = f(x) \geq 0$, trục hoành, đường thẳng $x = a$



$$S = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Định nghĩa:

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng $[a, +\infty)$ và khả tích trên [a, t] với mọi t > a

Nếu tồn tại $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f(x) trong khoảng $[a, +\infty)$ và ký hiệu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Khi đó, ta cũng nói rằng tích phân hội tụ và viết $\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$

Tương tự $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx, \ \forall a$$

Sự hội tụ:

Định lí. (tiêu chuẩn so sánh).

Cho hai hàm số f(x) và g(x) không âm và khả tích trên [a, t] với mọi t > a. Giả sử tồn tại số M sao cho $f(x) \le c.g(x)$ với mọi $x \ge M$. Khi đó,

Nếu $\int_a^{-\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{-\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Hệ quả: Cho f(x) và g(x) là hai hàm số dương khả tích trên $[a;t], \forall t > a$. Giả sử

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$$

i) Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{-\infty} g(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

ii) Nếu $k = 0$ thì tồn tại M sao cho $f(x) \le c.g(x)\ \forall x \ge M$ (kết luận như định lí)

iii) Nếu $k = +\infty$ thì tồn tại M sao cho $f(x) \ge c.g(x)\ \forall x \ge M$ (đổi vài trò của f và g)

Định lí: Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Ví dụ áp dụng:

Chứng minh tích phân $K = \int_3^{\infty}\frac{2x^2-4x-1}{16x^4-32x^3+63x^2-46x+35}dx$ hội tụ. Tính K:

$$= \int_3^{\infty}\frac{(8x-5).(4x^2-3x+5)-(8x-3).(4x^2-5x+7)}{(4x^2-5x+7).(4x^2-3x+5)}dx$$

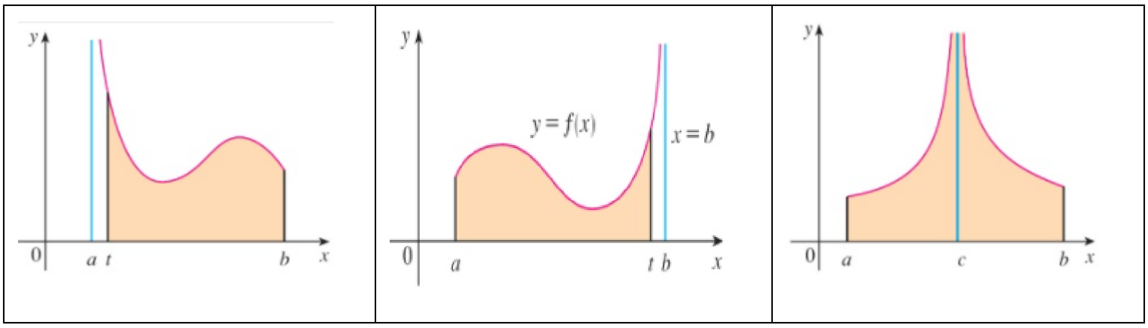
$$= \int_3^{\infty}\frac{(8x-5)}{(4x^2-5x+7)}dx - \int_3^{\infty}\frac{(8x-3)}{(4x^2-3x+5)}dx$$

$$= \ln(4x^2-5x+7) - \ln(4x^2-3x+5)$$

$$= \ln\frac{4x^2-5x+7}{4x^2-3x+5}\Bigg|_3^{\infty} = -\frac{7}{8}$$

Dạng tích phân: $K = \int_a^{\infty}\frac{u'.v-u.v'}{u.v}dx = \int_3^{\infty}\frac{u'}{u}dx - \int_3^{\infty}\frac{v'}{v}dx = \ln u - \ln v = \ln\frac{u}{v}$

b. Tích phân suy rộng loại 2:



Định nghĩa:

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng [a;b) và khả tích trên [a, t] với mọi a< t < b

Nếu tồn tại $\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f(x) trong khoảng [a, b] và ký hiệu $\int_a^b f(x)dx$

Khi đó, ta cũng nói rằng tích phân hội tụ và viết $\int_a^b f(x)dx := \lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$

Tương tự, nếu f(a)=+∞ ta có: $\int_a^b f(x)dx := \lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$

Nếu f(c)=+∞ (c∈ (a;b)) ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Định lý: (Tiêu chuẩn so sánh)

Cho f(x) và g(x) là hai hàm số không âm, khả tích trên [t;b] với mọi t ∈ (a;b] (a là điểm bất thường). Giả sử tồn tại c ∈ (a;b] sao cho f(x) ≤ k.g(x), ∀x∈(a;c]. Khi đó,

Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ;

Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ.

Hệ quả:

Cho f(x) và g(x) là hai hàm số không âm, khả tích trên [t;b] với mọi t ∈ (a;b] (a là điểm bất thường). Giả sử

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = k$$

i) Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

ii) Nếu k=0 thì tồn tại c∈(a;b] sao cho f(x)≤ k.g(x),∀x∈(a;c] (kết luận như định lí)

iii) Nếu k=+∞ thì tồn tại c∈(a;b] sao cho f(x)≥ k.g(x),∀x∈(a;c] (ngược với định lí)

4. Ứng dụng hình học của tích phân:

a. Diện tích hình phẳng:

Diện tích miền phẳng D giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ là

$$S(D) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

b. Độ dài đường cong:

Cho đường cong $C : y = f(x), x \in [a, b]$. Độ dài đường cong C là

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

c. Thể tích vật thể tròn xoay:

Cho miền D giới hạn bởi $y = f(x), Ox, x = a, x = b$. Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi cho D quay quanh Ox và Oy là

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx$$
$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b |xy|dx$$

Chú ý

- Khi D quay quanh Ox thì không được cắt Ox. Tương tự cho Oy.
- Miền D giới hạn bởi Ox thì công thức tích phân theo x. Nếu D giới hạn bởi Oy thì ta có công thức tương tự bằng cách đổi vai trò x,y cho nhau.

d. Diện tích mặt tròn xoay:

Diện tích mặt tròn xoay khi cho $C : y = f(x), x \in [a, b]$ quay quanh trục Ox và Oy là

$$S_{Ox} = 2\pi \int_a^b |y|\sqrt{1 + y'^2}dx$$
$$S_{Oy} = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1 + y'^2}dx$$

Phần 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

1. Phương trình vi phân tách biến:

Phương trình vi phân **Tách biến** dạng

$$f(x)dx = g(y)dy$$

Nghiệm

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

Ví dụ 1:

Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y' = 3x^2y, y(0) = 2$

Bài giải

Phương trình được viết lại

$$\frac{dy}{y} = 3x^2dx \iff \ln|y| = x^3 + C \iff |y| = e^{x^3+C} = e^C.e^{x^3}$$

$y(0) = 2 \implies |2| = e^C.e^0 \implies e^C = 2$

Vậy nghiệm của phương trình là $|y| = 2e^{x^3}$.

Ví dụ 2:

Tối ưu hàm mất mát

Chúng ta lại sử dụng phương pháp Stochastic Gradient Descent (SGD) ở đây (*Bạn đọc được khuyến khích đọc SGD trước khi đọc phần này*) . Hàm mất mát với chỉ một điểm dữ liệu $(\mathbf{x}_i, y_i)$ là:

$$J(\mathbf{w}; \mathbf{x}_i, y_i) = -(y_i \log z_i + (1 - y_i)\log(1 - z_i))$$

Với đạo hàm:

$$\frac{\partial J(\mathbf{w}; \mathbf{x}_i, y_i)}{\partial \mathbf{w}} = -(\frac{y_i}{z_i} - \frac{1 - y_i}{1 - z_i})\frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{w}} = \frac{z_i - y_i}{z_i(1 - z_i)}\frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{w}} \quad (3)$$

Để cho biểu thức này trở nên *gọn* và *đẹp* hơn, chúng ta sẽ tìm hàm $z = f(\mathbf{w}^T\mathbf{x})$ sao cho mẫu số bị triệt tiêu. Nếu đặt $s = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$, chúng ta sẽ có:

$$\frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial z_i}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial z_i}{\partial s}\mathbf{x}$$

Một cách trực quan nhất, ta sẽ tìm hàm số $z = f(s)$ sao cho:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = z(1 - z) \quad (4)$$

để triệt tiêu mẫu số trong biểu thức (3). Chúng ta cùng khởi động một chút với phương trình vi phân đơn giản này. Phương trình (4) tương đương với:

$$\frac{\partial z}{z(1 - z)} = \partial s \Leftrightarrow (\frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z})\partial z = \partial s \Leftrightarrow \log z - \log(1 - z) = s \Leftrightarrow \log\frac{z}{1 - z} = s \Leftrightarrow \frac{z}{1 - z} = e^s$$

$$\Leftrightarrow z = e^s(1 - z) \Leftrightarrow z = \frac{e^s}{1 + e^s} = \frac{1}{1 + e^{-s}} = \sigma(s)$$

2. Phương trình vi phân đẳng cấp:

Dạng

$$\boxed{y' = f(\frac{y}{x})}$$

PP: đặt $u = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = x.u \Longrightarrow y' = u + xu'$
Thay vào phương trình:

$$u + xu' = f(u) \Longleftrightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

Rút gọn đưa về phương trình tách biến theo x, u

$$\boxed{\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}}$$

Ví dụ:

Giải phương trình vi phân $xy' = x + 2y, y(1) = 3$

Bài giải
Chia 2 vế cho x ta được $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$
Đặt $u = \frac{y}{x} \Longrightarrow f(u) = 1 + 2u$
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{du}{1 + 2u - u} = \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x} \\ \Longleftrightarrow\ & \ln|u+1| = \ln|x| + C \Longleftrightarrow |u+1| = e^C|x| \\ \Longleftrightarrow\ & |\frac{y}{x} + 1| = e^C|x| \end{aligned}$$

$y(1) = 3 \Longrightarrow |3 + 1| = e^C.|1| \Longrightarrow e^C = 4$
Vậy nghiệm là $|\frac{y}{x} + 1| = 4|x|$.

3. Phương trình vi phân toàn phần:

Dạng

$$\begin{cases} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \\ P'_y = Q'_x \end{cases}$$

Nghiệm là $U(x,y) = C$. Trong đó

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \\ &= \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy \end{aligned}$$

với (x_0, y_0) được chọn tùy ý. Thường chọn $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Ví dụ:

Giải phương trình vi phân $(3x + 2y)dx + (2x - 9y)dy = 0$

Bài giải

Ta có $P'_y = Q'_x = 2$ do đó nghiệm tổng quát có dạng $U(x, y) = C$.

Trong đó $U(x, y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$

Chọn đường đi $(0, 0) \longrightarrow (x, 0) \longrightarrow (x, y)$

$$U(x, y) = \int_0^x 3xdx + \int_0^y (2x - 9y)dy = \frac{3x^2}{2} + 2xy - \frac{9y^2}{2}$$

Nghiệm tổng quát là $\frac{3x^2}{2} + 2xy - \frac{9y^2}{2} = C$

4. Phương trình vi phân tuyến tính:

Dạng

$$y' + p(x)y = q(x)$$

- Tìm hàm $h(x) = e^{\int p(x)dx}$
- Suy ra nghiệm

$$y(x) = \frac{1}{h(x)} \left[\int h(x)q(x)dx + C \right]$$

Chú ý: *có nhiều hàm $h(x)$. Ta có thể chọn một hàm $h(x)$ tùy ý.*

Ví dụ:

Giải phương trình vi phân $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$.

Bài giải

Phương trình được viết lại $y' + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{3}{x^2+1}$.

$p(x) = \frac{4x}{x^2+1}, q(x) = \frac{3}{x^2+1}$.

$h(x) = e^{\int \frac{4x}{x^2+1}dx} = e^{2\ln|x^2+1|} = e^{\ln(x^2+1)^2} = (x^2+1)^2$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow y(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(\int \frac{3}{x^2+1}.(x^2+1)^2 dx + C\right) \\ &= \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(\int (3x^2+3)dx + C\right) = \frac{1}{(x^2+1)^2}(x^3 + 3x + C) \end{aligned}$$

5. Phương trình vi phân Bernulli:

Phương trình Bernouli có dạng

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x).y^{\alpha}, \alpha \neq 0, 1.}$$

Phương pháp: Đặt $z = y^{1-\alpha}$ đưa về dạng tuyến tính.

Ví dụ:

Giải phương trình vi phân $xy' + y = xy^2 \ln x, y(1) = 1$

Bài giải
Ta có $\alpha = 2$ nên nhân 2 vế cho y^{-2}, ta được

$$y^{-2}y' + \frac{y^{-1}}{x} = \ln x$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} = y^{-1} \Longrightarrow z' = -1.y^{-2}.y'$. Ta viết lại phương trình

$$-z' + \frac{z}{x} = \ln x \Longleftrightarrow z' - \frac{1}{x}z = -\ln x$$

Giải phương trình tuyến tính

$$h(x) = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$$

Nghiệm tổng quát là

$$z(x) = x(\int -\ln x.\frac{1}{x}dx + C) = x(-\frac{\ln^2 x}{2} + C) \Longrightarrow \frac{1}{y} = x(-\frac{\ln^2 x}{2} + C)$$

$y(1) = 1 \Longrightarrow 1 = 1(-0 + C) \Longrightarrow C = 1$
Vậy nghiệm cần tìm là $\frac{1}{y} = x(-\frac{\ln^2 x}{2} + 1)$.