

Thống kê Bayes

Bài tập buổi 07 - Kiểm định cổ điển và Bayes - DS303.M21

Trần Phan Quốc Bảo
Sinh viên: Phạm Đức Thế - 19522253

Thứ 4, ngày 27 tháng 04 năm 2022

Bài tập 1

Cho mẫu ngẫu nhiên với cỡ $n = 20$, có phân phối Bernoulli

$$P(X, p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, x = \{0, 1\} \\ 0, x \neq \{0, 1\} \end{cases}, p \text{ là tham số } (0 < p \leq \frac{1}{2})$$

- $H_0 : p = \frac{1}{2}$
- $H_1 : p < \frac{1}{2}$
- $R = \sum_{i=1}^{20} X_i \leq 6$

Tính xác suất sai lầm loại 1 $P(\text{Sai lầm loại 1}) = P(\text{Bác bỏ } H_0 | H_0 \text{ đúng}) = P(\sum_{i=1}^{20} X_i \leq 6 | p = \frac{1}{2})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \leq 6 | p = \frac{1}{2}\right) &= P\left(\hat{x} \leq \frac{6}{20} | p = \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{\hat{x} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{20}}} \leq \frac{0.3 - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{20}}} | p = \frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow P\left(\frac{\hat{x} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{20}}} \leq \frac{0.3 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{20}}}\right) = P(Z \leq -1.788) = 0.036 \end{aligned}$$

Bài tập 2

Giả sử ta có chuỗi 5 ($n = 5$) phép thử $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6$ với $x_i \sim N(\theta, 4)$. Giả sử $\theta \sim N(2, 5)$. Ta có hai giả thuyết sau:

- $H_0 : \theta \in \Theta_0 = (2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$
- $H_1 : \theta \in \Theta_1 = [2 - \epsilon, 2 + \epsilon]$

Kiểm định giả thuyết H_0 và H_1 . Ta sẽ ưu tiên hay không ưu tiên H_0 ?

Lời giải.

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6 \text{ với } x_i \sim N(\theta, 4) \sim N(\theta, \Theta)$$

$$\text{Với } \theta \sim N(2, 5) \rightarrow \theta_0 = 2, \psi = 5, n = 5, \Theta = 4.$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\left(\frac{2\pi\theta}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\frac{1}{2}(\bar{x}-\theta_0)^2}{\frac{\theta}{n}}\right]}{\left[2\pi\left(\psi + \frac{\theta}{n}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\frac{1}{2}(\bar{x}-\theta_0)^2}{\psi + \frac{\theta}{n}}\right]} = \left(\frac{2\pi 4}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(4-2)^2}{\frac{4}{5}}} \frac{1}{\left[2\pi\left(5 + \frac{4}{5}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(4-2)^2}{5 + \frac{4}{5}}}} \\ &= 0.312 < 1 \text{ (Không ưu tiên } H_0, \text{ ưu tiên } H_1) \end{aligned}$$