

Đề ôn tập

Môn: Thống kê Bayes

Thời gian làm bài: 10 ngày

Câu 1 Xét biến ngẫu nhiên X_1, X_2, \dots, X_n có phân phối hình học:

$$X_i|\theta \sim \text{Geometric}(\theta)$$

Với biến X_i , ta có x_i phép thử thành công. Khi đó ta có hàm:

$$p(X_i|\theta) = \theta^{x_i}(1 - \theta).$$

Ta cho phân phối tiên nghiệm $\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ với hàm mật độ xác suất:

$$p(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1}(1 - \theta)^{\beta-1}$$

- Ước lượng tham số θ theo maximum likelihood với biến X .
- Tìm phân phối xác suất hậu nghiệm cho X .
- Tìm trung bình và phương sai của phân phối hậu nghiệm gồm n biến này.
- Cho $n = 15$, $x_i = i$. Tính toán maximum likelihood với 10 biến X_1, \dots, X_{15} trên.
- Từ mẫu $n = 15$, ta cập nhật thêm 5 mẫu nữa với $X_i = i + 1$. Tính maximum likelihood với 20 biến X_1, \dots, X_{20} .

Câu 2 Cho biến $X|\theta \sim \text{Gamma}(\frac{n}{2}, 2\theta)$ và phân phối tiên nghiệm $\theta \sim \text{InverseGamma}(\alpha, \beta)$ với:

$$p(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha\theta^{\alpha+1}} \cdot e^{-\frac{1}{\theta\beta}}$$

- Tìm ước lượng Bayes theo hàm loss $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$.
- Tìm ước lượng Bayes theo hàm loss $L(\theta, a) = |\theta - a|$.

Câu 3 (2 điểm) Giả sử ta đang nghiên cứu một hiện tượng trong khoa học với 5 phép thử. Gọi X_i là biến cố hiện tượng trong phép thử thứ i . Biết $X_i \sim N(\theta; 5)$. Theo các dữ liệu trong quá khứ, người ta nhận thấy rằng $\theta \sim N(6; 4)$. Giá trị các phép thử qua mỗi lần thí nghiệm là:

5, 3, 4, 2, 9

- a) *Tìm phân phối xác suất hậu nghiệm cho các hiện tượng trên.*
- b) *Ta có hai giả thuyết như sau: $H_0 : \theta \leq 4$ và $H_1 : \theta > 4$. Hãy kiểm tra xem giả thuyết nào hợp lí hơn.*
- c) *Ta có hai giả thuyết như sau: $H_0 : \theta = 4$ và $H_1 : \theta \neq 4$. hãy kiểm tra xem giả thuyết nào hợp lí hơn.*