

Name: Phạm Đức Thế

ID: 19522253

Class: DS303.M21


Thống Kê Bayes

SUMMARY

Task		Status	Page
Kiểm Tra Giữa Kỳ	Câu 1	Hoàn thành	2
	Câu 2	Hoàn thành	4
	Câu 3	Không hoàn thành	
	Câu 4	Hoàn thành	6
	Câu 5	Hoàn thành	8
	Câu 6	Hoàn thành 6a	9
...	...		
	...		
	...		

Kiểm Tra Giữa Kỳ

1. Câu 1



Date: _____

DS 303. M21 - Thống Kê Bayes

Họ và Tên: Phạm Đức Thái

MSSV: 19522253.

Câu 1:

Ta có: $\begin{cases} X_i | \theta \sim \text{Poisson}(\theta) \\ p(X_i | \theta) = \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x_i}}{x_i!} \end{cases}$

phân phối tiên nghiệm: $\begin{cases} \theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \\ p(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \cdot \theta^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{\theta}{\beta}} \end{cases}$

a)

- Hàm likelihood:

$$L(\theta | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{x_i!} \right)$$

- Ta chuyển về hàm log-likelihood:

$$\begin{aligned} \log [L(\theta | x_1, \dots, x_n)] &= \ln \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{x_i!} \right) \right] = \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{x_i!} \right) \\ &= -n \cdot \theta + \ln(\theta) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) \end{aligned}$$

www.dektechnologies.com
www.facebook.com/DEKTechnologiesGlobal

Hình 1: Câu 1

dek
TECHNOLOGIES

Date:

- Để tìm maximum likelihood to tìm các trị theo θ

+ Tìm nghiệm của đạo hàm:

$$\frac{\partial \log [L(\theta | x_1, \dots, x_n)]}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

+ Kết luận: vậy $\hat{\theta} = \arg \max \log [L(\theta | x_1, \dots, x_n)] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

b)

$$\begin{aligned} P(\theta | x_1, \dots, x_n) &\sim P(x_1, \dots, x_n | \theta) \cdot P(\theta) \\ &\sim \theta^{n\bar{x}} \cdot e^{-n\theta} \cdot \theta^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta\theta} \\ &\sim \theta^{n\bar{x} + \alpha - 1} \cdot e^{-(n + \beta)\theta} \end{aligned}$$

Từ đó, ta lại có được:

$$P(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim \text{Gamma}(n\bar{x} + \alpha, n + \beta)$$

Hay xác suất hậu nghiệm $\theta | x_1, \dots, x_n$ là một phân phối Gamma với $\mu = [(n\bar{x} + \alpha)/(n + \beta)]$, $\sigma^2 = [(n\bar{x} + \alpha)/(n + \beta)^2]$

Hình 2: Câu 1

2. Câu 2

dek
TECHNOLOGIES

Date:

Câu 2:

Ta có: $\begin{cases} n = 100 \\ X_i = i \\ \theta \sim \text{Gamma}(50, 100) \end{cases}$

a)

- $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{100 \cdot 50.5}{100} = 50.5$

- phân phối xác suất hậu nghiệm.

$$p(\theta | x_1, \dots, x_{100}) \sim \theta^{n \cdot \bar{x} + \alpha - 1} \cdot e^{(-n - \beta) \cdot \theta}$$

$$\sim \theta^{100 \cdot 50.5 + 50 - 1} \cdot e^{(-100 - 100) \theta}$$

$$\sim \theta^{5099} \cdot e^{-200\theta}$$

$$\sim \text{Gamma}(5100, 200)$$

- $\mu = \left[\frac{n \cdot \bar{x} + \alpha}{n + \beta} \right] = 25.5$

- $\sigma^2 = \left[\frac{n \cdot \bar{x} + \alpha}{(n + \beta)^2} \right] = 0.1275$

b)

Ta có: $\begin{cases} X_{100+j} = 100+j \quad (j \leq 5) \\ n' = 105 \end{cases}$

www.dektechnologies.com www.facebook.com/DEKTechnologiesGlobal

Hình 3: Câu 2

- Tính maximum likelihood:

$$\hat{\theta}' = \frac{\sum_{i=1}^{n'} x_i}{n'} = \frac{\sum_{i=1}^{100} i + \sum_{j=1}^{m=5} (100+j)}{105} = 53$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}' > \hat{\theta} \quad (53 > 50.5)$$

Ta thấy quy luật của dãy số không đổi so với câu a
 Có thể viết lại: $n' = 105$, $X_i = i$.

Câu 3

$$\text{Ta có: } \begin{cases} X \sim B(5, \theta) \\ \theta \sim \text{Beta}(1, 9) \end{cases}$$

$$a) L(\theta, a) = (\theta - a)^2$$

3. Câu 3

4. Câu 4

dek
TECHNOLOGIES

Date:

Câu 4

Ta có:

$$\begin{cases} P(\theta=0) = 0.2 \\ P(\theta) = \frac{0.1}{3000} \cdot e^{-\frac{\theta}{3000}} \\ P(x|\theta) = 0.6 \cdot e^{-\frac{\theta}{1000}} \end{cases}$$

a) $L(\theta, a_1) = 100000$, $\theta = 0$ và $100000 - 2\theta$, $\theta > 0$.
Hàm hợp xác suất được tính như sau.

$$P(x|\theta) = p(x|\theta) \cdot p(\theta)$$

$$= \begin{cases} 0.2 \cdot 0.6 \cdot e^{-\frac{\theta}{1000}} = 0.12, & \theta = 0 \\ \frac{0.1}{3000} \cdot e^{-\frac{\theta}{3000}} \cdot 0.6 \cdot e^{-\frac{\theta}{1000}} = \frac{1}{50000} \cdot e^{-\frac{\theta}{750}}, & \theta > 0 \end{cases}$$

$$m(x) = p(x) = 0.12 + \int_0^{\infty} 0.015 \cdot \frac{1}{750} \cdot e^{-\frac{\theta}{750}} \cdot \theta d\theta$$

$$= 0.12 + 0.015 = 0.135$$

Xác suất hậu nghiệm là:

$$p(x|\theta) = \frac{P(x, \theta)}{P(\theta)} = \begin{cases} \frac{8}{9}, & \theta = 0 \\ \frac{1}{50000} \cdot e^{-\frac{\theta}{750}} \cdot \frac{200}{27}, & \theta > 0 \end{cases}$$

www.dektechnologies.com www.facebook.com/DEKTechnologiesGlobal

Hình 5: Câu 4

Date:

• Với hàm loss cho a_1 , ta có Bayesian loss cho a_1 là:

$$E^{P(\theta|x)}[L(\theta, a_1)] = \frac{8}{9} \cdot 100000 + \int_0^{\infty} (100000 - 2\theta) \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{750} e^{-\frac{\theta}{750}} d\theta$$

$$= \frac{800000}{9} + 99500 = \frac{898500}{9}$$

• Tương tự với a_2 và a_3

$$E^{P(\theta|x)}[L(\theta, a_2)] = \frac{8}{9} \cdot 40000 + \int_0^{\infty} (100000 - 1,1\theta) \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{750} e^{-\frac{\theta}{750}} d\theta$$

$$= \frac{320000}{9} + 99175 = \frac{419175}{9}$$

$$E^{P(\theta|x)}[L(\theta, a_3)] = \frac{8}{9} \cdot (-5000) + \int_0^{\infty} (100000 - 0,3\theta) \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{750} e^{-\frac{\theta}{750}} d\theta$$

$$= \frac{-40000}{9} + 99775 = \frac{59775}{9}$$

$$\min \left(E^{P(\theta|x)}[L(\theta, a_i)] \right) = E^{P(\theta|x)}[L(\theta, a_3)] = \frac{59775}{9}$$

Do đó ta chọn a_3

5. Câu 5

dek
TECHNOLOGIES

Date:

Câu 5

$X_i \sim \text{poisson}(\theta)$

Ta có: $11, 21, 35, 40, 60, 68, 61, 43, 23, 23, 21, 41$

$X_1 = 11, X_2 = 21, X_3 = 35, \dots$

$\theta \sim \chi^2(24)$

Tìm phân phối xác suất hậu nghiệm $\theta | X_1, \dots, X_{12}$?

$$\begin{aligned}
 p(\theta | X_i) &\sim p(X_i | \theta) \cdot p(\theta) \\
 &= \theta^T \cdot e^{-n \cdot \theta} \cdot \theta^{\frac{\alpha}{2} - 1} e^{-\frac{1}{2} \theta} \quad (T \sim \sum X_i) \\
 &= \theta^{T + \frac{\alpha}{2} - 1} \cdot e^{-n\theta - \frac{1}{2} \theta} \\
 &= \theta^{417 + \frac{24}{2} - 1} \cdot e^{(-12 - \frac{1}{2}) \theta} \\
 &= \theta^{458} \cdot e^{-\frac{25}{2} \theta}
 \end{aligned}$$

Từ đó, ta có: $p(\theta | X_i) \sim \text{Gamma}(459, \frac{25}{2})$

$$\sim \frac{1}{24} \chi^2(918)$$

Hình 7: Câu 5

6. Câu 6

dek
TECHNOLOGIES

Date:

Câu 6

Ta có $\left\{ \begin{array}{l} 15, 18, 22, 14, 17 \quad \bar{x} = 17.2 \\ X_i \sim N(\theta; 2,5) \Rightarrow \mu^2 = 2,5 = \phi \\ \theta \sim N(19; 3) \Rightarrow \theta_0 = 19, \mu_0^2 = 3 = \psi \end{array} \right.$

a) $\left\{ \begin{array}{l} H_0: \theta = 19 \\ H_1: \theta \neq 19 \end{array} \right.$

Tỉ số Bayes là:

$$B = \frac{\left(\frac{2\pi \cdot \phi}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left[-\frac{\frac{1}{2} (\bar{x} - \theta_0)^2}{\frac{\phi}{n}} \right]}{\left[2\pi \left(\psi + \frac{\phi}{n} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left[-\frac{\frac{1}{2} (\bar{x} - \theta_0)^2}{\psi + \frac{\phi}{n}} \right]} \quad (1)$$

Đặt $z = \frac{|\bar{x} - \theta_0|}{\sqrt{\frac{\phi}{n}}} = \frac{|17.2 - 19|}{\sqrt{\frac{2.5}{5}}} = \frac{9\sqrt{2}}{5}$

Thay z vào biểu thức (1), ta được:

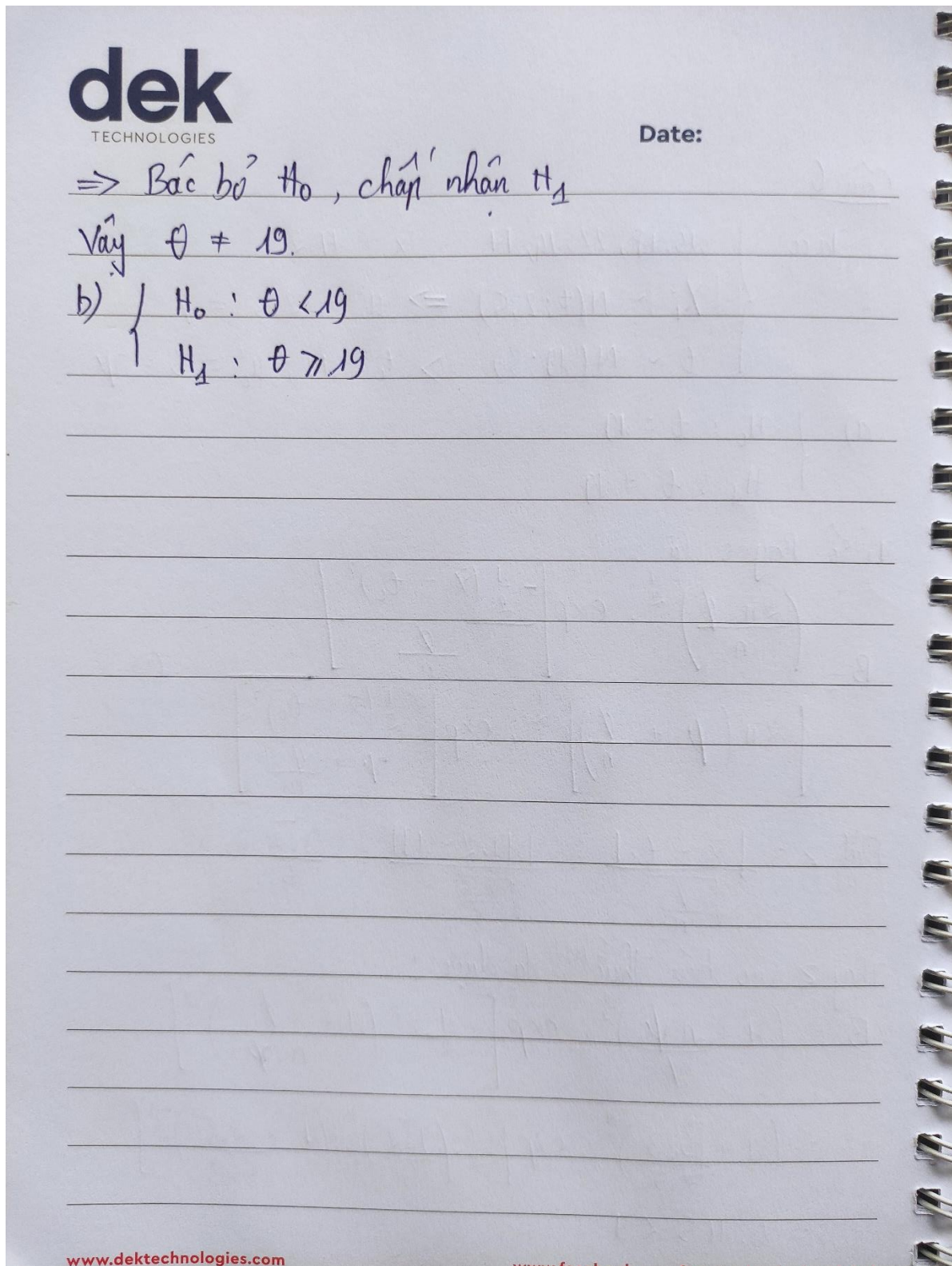
$$B = \left(1 + \frac{n\psi}{\phi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot z^2 \cdot \left(1 + \frac{\phi}{n\psi} \right)^{-1} \right]$$

$$= \left(1 + \frac{5 \cdot 3}{2.5} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9\sqrt{2}}{5} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2.5}{5 \cdot 3} \right)^{-1} \right]$$

$$= 0.165 < 1$$

www.dektechnologies.com www.facebook.com/DEKTechnologiesGlobal

Hình 8: Câu 6a



Hình 9: Câu 6a

...