Một số xác suất tiên nghiệm

1. Xác suất tiên nghiệm trong trường hợp tổng quát:

- Như bài trước ta đã biết:

❖Ý tưởng tiếp cận của trường phái Bayes.

❖Ví dụ về bài toán tung đồng xu (phân phối nhị thức).

❖Sử dụng phương pháp tiếp cận của Bayes, ta đã thấy phân phối xác suất tiên nghiệm trong bài toán tung đồng xu nói riêng hay trong những bài toán liên quan đến phân phối nhị thức nói chung.

- Ta sẽ tiếp tục tìm hiểu về phương pháp tiếp cận Bayes trong các bài toán có phân phối xác suất khác.
- Các trường hợp cần chú ý:

❖Phân phối chuẩn.

❖Phân phối Poisson.

❖Xác suất tiên nghiệm có phân phối không xác định.

Bài toán tổng quát:

- Nhắc lại phương pháp tiếp cận xác suất theo Bayes:

❖Cho θ là một tham số của mô hình, theo ý tưởng của phương pháp Bayes, ta coi θ như một biến ngẫu nhiên.

❖Khi đó ta có công thức:

$$\mathrm{P}(\theta|\mathrm{x}) \sim \mathrm{P}(\mathrm{x}|\theta).\mathrm{P}(\theta)$$

❖Trong đó: $\mathrm{P}(\theta)$ là xác suất tiên nghiệm, $\mathrm{P}(\theta|\mathrm{x})$ là xác suất hậu nghiệm.

- Như vậy $P(\theta)$ là một xác suất và sự thay đổi của theta sẽ dẫn đến sự thay đổi của $P(\theta)$.
- Tham số theta sẽ có phân phối xác suất riêng, bên cạnh phân phối xác suất $\mathrm{P}(\theta|\mathrm{D})$.
- Ta sẽ phải ước lượng tham số cho θ.

2. Suy luận Bayes với các phân phối chuẩn:

- Xét phân phối chuẩn:

$$X \sim N(\phi, \mu^2)$$

- Ta có $\theta = (\phi, \mu)$ chính là cặp tham số của bài toán phân phối chuẩn.
- Ta sẽ phải tìm hiểu và ước lượng cặp tham số này.
- Tuy nhiên hiện tại ta chưa nói về bước ước lượng.

- Để bài toán dễ tiếp cận hơn, ta giả sử phương sai cho phân phối của một biến ngẫu nhiên X cũng đã được tìm ra (cố định μ).
- Như vậy trong trường hợp này ta hoàn toàn có thể viết lại thành $\theta = \phi$.
- Tham số trong bài toán sẽ là θ trong $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\theta, \mu^2)$.

- Theo phương pháp tiếp cận của trường phái Bayes (suy luận Bayes), ta có một “niềm tin” rằng θ sẽ có phân phối chuẩn.
- Khi đó, ta được:

$$\theta \sim \mathrm{N}(\theta_0, \mu_0^2)$$

- Trong đó θ_0 và μ_0 đều đã được biết và cố định.

- Theo phân phối dành cho $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\theta, \mu^2)$ và $\theta \sim \mathrm{N}(\theta_0, \mu_0^2)$, ta có các công thức sau:

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}|\theta) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x}-\theta)^2}{2\mu^2}}$$

$$\mathrm{p}(\theta) = \frac{1}{\mu_0\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2\mu_0^2}}$$

- Theo công thức tổng quát về suy luận Bayes, ta có:

$$\mathrm{P}(\theta|\mathrm{x}) \sim \mathrm{P}(\mathrm{x}|\theta).\,\mathrm{P}(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{P}(\theta|\mathrm{x}) \sim \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x}-\theta)^2}{2\mu^2}}.\,\frac{1}{\mu_0\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2\mu_0^2}}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{P}(\theta|\mathrm{x}) \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta^2\left(\mu^{-1}+\mu_0^{-1}\right)+\theta\left(\frac{\theta_0}{\mu_0}+\frac{\mathrm{x}}{\mu}\right)}$$

- Như vậy, ta có thể viết lại thành:

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu^{-1} + \mu_0^{-1}}$$

$$\frac{\theta_0}{\mu_0} + \frac{\mathrm{x}}{\mu} = \frac{\theta_1}{\mu_1}$$

- Từ đẳng thức ở trên, ta được:

$$p(\theta|\mathrm{x}) \sim \mathrm{e}^{-\frac{\frac{1}{2}\theta^2}{\mu_1} + \theta\frac{\theta_1}{\mu_1}}$$

- Vì ta có $\frac{\theta_1^2}{\mu_1}$ được coi như là một hằng số vì trong trường hợp này ta cố định x và cho θ chạy, nên ta hoàn toàn có thể nhân thêm $\mathrm{e}^{-\frac{\frac{1}{2}\theta_1^2}{\mu_1}}$

- Như vậy, ta được:

$$p(\theta|\mathrm{x}) \sim \mathrm{e}^{-\frac{\frac{1}{2}\theta^2}{\mu_1}+\theta\frac{\theta_1}{\mu_1}+-\frac{\frac{1}{2}\theta_1^2}{\mu_1}} = \mathrm{e}^{-\frac{\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)^2}{\mu_1}}$$

- Vì hiện tại $p(\theta|\mathrm{x})$ đang được xấp xĩ với $\mathrm{e}^{-\frac{\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)^2}{\mu_1}}$ nên ta hoàn toàn có thể nhân thêm hằng số $\frac{1}{\mu_1\sqrt{2\pi}}$.

- Cuối cùng, ta sẽ được kết quả:

$$\mathrm{p}(\theta|\mathrm{x}) = \frac{1}{\mu_1\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)^2}{\mu_1}}$$

- Như vậy ta có thể thấy: $\theta|\mathrm{x} \sim \mathrm{N}(\theta_1, \mu_1)$

Trường hợp n mẫu:

- Bài toán ở trên ta chỉ xét với việc thử nghiệm trên 1 mẫu.
- Bây giờ ta sẽ xét trường hợp n mẫu độc lập với từng mẫu có phân phối chuẩn.
- Khi đó từ công thức của suy luận Bayes, ta có:

$$\mathrm{P}(\theta|\mathrm{x}) \sim \mathrm{P}(\mathrm{x}|\theta).\mathrm{P}(\theta) \sim \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P}(\mathrm{x_i}|\theta).\mathrm{p}(\theta)$$

Trường hợp n mẫu:

- Bằng một vài tính toán, ta thu được:

$$\mathrm{P}(\theta|\mathrm{x}) \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{\mathrm{n}}{\mu}\right)+\theta\left(\frac{\theta_0}{\mu_0}+\frac{\sum \mathrm{x_i}}{\mu}\right)}$$

- Như bài toán 1 phép thử, ta đặt

$$\theta|\mathrm{x} \sim \mathrm{N}(\theta_1, \mu_1)$$

- Như vậy ta sẽ có các đại lượng:

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu^{-1} + \mathrm{n}.\mu_0^{-1}}$$

$$\frac{\theta_0}{\mu_0} + \frac{\sum \mathrm{x}}{\mu} = \frac{\theta_1}{\mu_1}$$

- Nếu ta lấy trung bình $\overline{\mathrm{x}} = \frac{\sum \mathrm{x_i}}{\mathrm{n}}$, ta sẽ được:

$$\theta_1 = \mu_1 \left(\frac{\theta_0}{\mu_0} + \frac{\overline{\mathrm{x}}}{\frac{\mu}{n}} \right)$$

- Như vậy trong trường hợp n mẫu, thay vì ta sử dụng phân phối x như bài toán 1 phép thử, ta sẽ sử dụng:

$$\overline{\mathrm{x}} \sim \mathrm{N}\left(\theta, \frac{\mu}{\mathrm{n}} \right)$$

- Như vậy trong trường hợp bài toán ta gặp là bài toán thử nghiệm với n mẫu, ta sẽ sử dụng phân phối trung bình mẫu:

$$\bar{\mathrm{x}} \sim \mathrm{N}\left(\theta, \frac{\mu}{\mathrm{n}}\right)$$

Cũng như là các đại lượng mang tính trung bình (chia n) khác để tiện cho việc tính toán.

- Ta có thể kết luận rằng phân phối xác suất hậu nghiệm trong trường hợp này cũng sẽ có kết quả tương tự như phân phối xác suất tiên nghiệm.
- Lưu ý rằng điều này có được vì ta xấp xỉ các kết quả liên tục bằng việc nhân cho các hằng số. Nếu trong quá trình vận dụng kĩ thuật lại yêu cầu ta phải nhân cho một hàm số có biến thì không thể làm được.

- Như vậy ta đã có công thức cho bài toán suy luận Bayes với phân phối chuẩn.
- Trên thực tế, ta hoàn toàn có thể thay thế phân phối chuẩn của theta bằng những phân phối khác.
- Tuy nhiên, trong thực tế thì các phân phối liên tục thường được cố gắng xấp xỉ thành phân phối chuẩn nên ta có thể giả định xác suất tiên nghiệm có phân phối chuẩn.

Ví dụ:

- Ví dụ kinh điển của Robinson và Whittaker (1940).
- Ông Robinson tham gia việc đo kích cỡ ngực của đàn ông, tính theo đơn vị Inch.
- Ông ta đo đạc dựa trên một bộ dữ liệu gồm kích cỡ ngực của 10000 người đàn ông khác nhau.
- Khi giải quyết vấn đề này, ông Robinson và ông Whittaker đã thiết lập phương sai cố định là 2 và mẫu ngực trung bình của 10000 người là 39,8.

Ví dụ:

- Như vậy bài toán ta đang xét sẽ là một bài toán có 10.000 mẫu (10000 phép thử).
- Nếu gọi $\mathrm{D_i} \sim \mathrm{N}(\theta, \mu)$ với $1 \leq \mathrm{i} \leq 10000$ là phân phối chuẩn về kích cỡ ngực của đàn ông và $\overline{\mathrm{D}} = \frac{\sum \mathrm{D_i}}{10000}$, thì khi đó, ta có:

$$\overline{\mathrm{D}} \sim \mathrm{N}(39{,}8\,;2)$$

Ví dụ:

- Theo kinh nghiệm về đo đạc kích cỡ thường thấy của những nhóm người đàn ông khác nhau, người giải quyết bài toán cảm thấy rằng :

$$\theta \sim \mathrm{N}(38, 9)$$

- Như vậy để tính được xác suất hậu nghiệm, ta sẽ phải áp dụng kết quả từ phần lý thuyết.

Ví dụ:

- Ta có các kết quả sau:

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu^{-1} + \mathrm{n}.\mu_0^{-1}} = \frac{1}{3^{-2} + 1000.2^{-2}} = \frac{1}{2500}$$

$$\theta_1 = \mu_1\left(\frac{\theta_0}{\mu_0} + \frac{\bar{\mathrm{x}}}{\frac{\mu}{n}}\right) = \frac{1}{2500}\left(\frac{38}{9} + \frac{39.8}{\frac{2^2}{10000}}\right) = 39.8$$

Ví dụ:

- Như vậy sau một số tính toán nhất định, ta có:

$$\theta|\overline{\mathrm{D}} \sim \mathrm{N}\left(39.8, \frac{1}{2500}\right) \sim \mathrm{N}\left(39.8, \frac{2^2}{10000}\right)$$

- Để ý rằng $\theta|\overline{\mathrm{D}} = \frac{\sum \theta|\mathrm{D_i}}{10000}$.

- Trên thực tế nếu ta cho phân phối xác suất tiên nghiệm tương đối gần với phân phối xác suất của từng trường hợp riêng biệt độc lập trong n mẫu, ta sẽ đạt được phân phối của xác suất hậu nghiệm với giá trị tham số gần như là bằng với giá trị tham số đã đo đạc được trên data.
- Tuy nhiên không phải lúc nào ta cũng sẽ đi đến những tình huống rất đẹp như vậy.

2. Xác suất tiên nghiệm của phân phối Poisson:

- Xét phân phối Poisson :

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

- Trong phân phối Poisson, ta có λ chính là tham số của bài toán.
- Thông thường khi làm bài tập, λ được cố định. Trong phần này, ta sẽ xét λ như một biến ngẫu nhiên.

Phân phối Poisson:

- Phân phối tiên nghiệm $\mathrm{P}(\lambda)$ cũng có những tính chất riêng về phân phối xác suất của nó.
- Vì $\mathrm{Y} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ nên phân phối của λ cũng sẽ liên quan đến một phân phối rời rạc.
- Như bài trước đã nêu, phân phối xác suất tiên nghiệm thường được quy về một dạng phân phối xác suất tương đồng với phân phối xác suất của dữ liệu.

Phân phối Poisson:

- Trong trường hợp này, λ sẽ có phân phối xác suất là dạng mở rộng của phân phối Poisson.
- Ta thường gọi phân phối này là phân phối Gamma với siêu tham số α_1, α_2.
- Kí hiệu:

$$\lambda \sim \gamma(\alpha_1, \alpha_2)$$

Phân phối Gamma:

- Nét tương đồng với phân phối Beta: nếu phân phối Beta là phân phối mở rộng của phân phối Bernouli thì phân phối Gamma sẽ là phân phối mở rộng của phân phối Poisson.
- Nói cách khác, các phép thử có phân phối Gamma là **Trung bình** của các phép thử có phân phối Beta.

Tiên nghiệm liên hợp:

- Một phân phối xác suất tiên nghiệm được gọi là liên hợp (conjugate prior) nếu nó có cùng dạng phân phối xác suất với phân phối hậu nghiệm.
- Khi đi vào tìm hiểu về các bài toán sử dụng phương pháp của trường phái Bayes, ta sẽ luôn bắt đầu với trường hợp Tiên Nghiệm Liên Hợp như trên.

Tiên nghiệm liên hợp:

- Ví dụ: trong bài toán tung đồng xu, ta có:

$$\lambda \sim \ \mathrm{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\mathrm{P}(\lambda|\mathrm{D}) \sim \mathrm{Beta}(\mathrm{s} + \alpha_1, \mathrm{t} + \alpha_2)$$

Trong đó dữ liệu D chính là quá trình tung đồng xu s+t lần với s lần sấp và t lần ngửa.

Ví dụ:

- Ví dụ: trong bài toán đo kích cỡ ngực đàn ông, ta có:

$$\theta \sim \mathrm{N}(38, 9)$$

$$\theta|\overline{\mathrm{D}} \sim \mathrm{N}\left(39.8, \frac{1}{2500}\right) \sim \mathrm{N}\left(39.8, \frac{2^2}{10000}\right)$$

Phân phối Poisson:

- Quay trở lại với phân phối Poisson, ta có ý tưởng tiếp cận như sau:

❖Với phân phối xác suất likelihood có dạng:

$$P(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

❖ Xét một chuỗi n phép thử với mỗi phép thử tuân theo phân phối Poisson $x = (x_1, \ldots, x_n)$

❖Khi đó ta có phân phối của likelihood:

$$p(x|\lambda) = \frac{\lambda^{\sum x_i}}{(\sum x_i)!}\ e^{-n\lambda}$$

❖ Ta có thể viết lại thành:

$$l(\lambda|x) \sim \lambda^{T}.\,e^{-n\lambda}$$

- ❖Trong trường hợp này ta có thể viết $\mathrm{T} \sim \sum \mathrm{x_i}$ với ý nghĩa T là một phân phối xác suất.
- ❖Với trường phái tần suất, λ là trung bình của x và λ được cố định hoàn toàn.
- ❖Các giá trị $\mathrm{x_i}$ có thể thay đổi nhưng λ không đổi. Đây cũng là dạng bài tập thường thấy.

- Tuy nhiên ta sẽ xét bài toán trên quan điểm của trường phái Bayes, đó là λ là một biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất.
- Như đã trình bày, λ sẽ có phân phối xác suất Gamma với các tham số k và α :

$$\lambda \sim \mathrm{Gamma}\ (\mathrm{k}, \alpha)$$

Phân phối gamma:

- Phân phối Gamma là một phân phối xác suất có tính tổng quát rất cao.
- Các phân phối xác suất Poisson, phân phối mũ, phân phối chi bình phương (và còn nhiều phân phối xác suất khác nữa) là trường hợp đặc biệt của phân phối Gamma.
- Vì thế phân phối Gamma là một phân phối xác suất rất quan trọng đối với hướng tiếp cận của trường phái Bayes.

Phân phối Gamma:

- Phân phối Gamma, kí hiệu là $\mathrm{Gamma}(\mathrm{k}, \theta)$, hoặc là $\gamma(\mathrm{k}, \theta)$ là phân phối xác suất gồm hai (siêu) tham số.
- Tham số k được gọi là tham số định dạng và θ là tham số phạm vi.
- Đôi khi phân phối Gamma cũng được viết dưới dạng:

❖ $\mathrm{k} = \alpha$ là tham số định dạng và $\beta = \frac{1}{\theta}$ là tham số phạm vi ngược.

❖ $\mathrm{k} = \alpha$ là tham số định dạng và $\mu = \frac{\mathrm{k}}{\beta}$ là tham số trung bình.

Phân phối Gamma:

Phân phối Gamma:

- Ta có một vài công thức tính toán cho phân phối Gamma:

❖Với trường hợp $\gamma(\alpha, \beta)$ (tham số định dạng và tham số tỉ lệ), ta có công thức về hàm phân phối xác suất:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \alpha, \beta) = \frac{\mathrm{x}^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta \mathrm{x}}\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$$

Trong đó, ta có $\mathrm{x}, \alpha, \beta > 0$.

Như vậy ta cũng có thể đưa ra công thức hàm mật độ xác suất của phân phối $\gamma(\alpha, \beta)$:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}, \alpha, \beta) = \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{f}(\mathrm{u}, \alpha, \beta)\, \mathrm{du} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{u}^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta \mathrm{u}} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{du}$$

Lưu ý rằng tất cả giá trị đang xét đều là các số thực dương.

- Công thức hàm phân phối ở trên được tính toán và cho kết quả là một **hàm Gamma thấp chưa hoàn chỉnh :**

$$\int_0^{x} \frac{u^{\alpha-1} e^{-\beta u} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} du = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)}$$

$\gamma(\alpha, \beta x)$ là kí hiệu cho hàm gamma thấp chưa hoàn chỉnh:

- Trong trường hợp α là một số nguyên dương (và trong trường hợp này ta được phân phối xác suất gọi là phân phối Erlang) khi đó ta có:

$$F(x, \alpha, \beta) = 1 - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\beta x)^{i}}{i!} . e^{-\beta x}$$

$$= e^{-\beta x} . \sum_{i=\alpha}^{\infty} \frac{(\beta x)^{i}}{i!}$$

- Trong trường hợp ta dùng tham số định dạng k và tham số phạm vi θ, có dạng $\mathrm{Gamma}(\mathrm{k}, \theta)$ thì ta sẽ có các công thức sau:

❖Hàm mật độ xác suất:

$$f(x, k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}$$

Với các tham số mang giá trị là các số thực dương.

❖ Như vậy ta cũng được hàm phân phối xác suất:

$$F(x, k, \theta) = \int_0^x \frac{u^{k-1} e^{-\frac{u}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} du = \frac{\gamma\left(k, \frac{x}{\theta}\right)}{\Gamma(k)}$$

Trong đó $\gamma\left(k, \frac{x}{\theta}\right)$ là hàm Gamma thấp chưa hoàn chỉnh.

- Với trường hợp α nguyên dương, ta có:

$$F(x, k, \theta) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{i}}{i!} . e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$= e^{-\frac{x}{\theta}} . \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{i}}{i!}$$

Chú thích

- Hàm Gamma chưa hoàn chỉnh chia ra làm hai dạng thấp và cao với hai công thức:

❖ Hàm Gamma cao chưa hoàn chỉnh :

$$\gamma(\mathrm{s},\mathrm{x}) = \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{u}^{\mathrm{s}-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}\mathrm{du}$$

❖Hàm Gamma cao chưa hoàn chỉnh :

$$\Gamma(\mathrm{s},\mathrm{x}) = \int_{\mathrm{x}}^{\infty} \mathrm{u}^{\mathrm{s}-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}\mathrm{du}$$

Phân phối gamma:

- Cho $\mathrm{Y} \sim \mathrm{Gamma}(\mathrm{k}, \theta)$ hoặc $\mathrm{Y} \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$ hoặc $\mathrm{Y} \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \mu)$, ta có một số công thức như sau :

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \mathrm{k}.\theta = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\mathrm{E}[\ln \mathrm{X}] = \Psi(\mathrm{k}) + \ln(\theta) = \Psi(\alpha) - \ln(\beta)$$

Một số liên hệ của phân phối Gamma với các phân phối khác:

- Cho $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ là n biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số tỉ lệ λ, khi đó, ta có công thức:

$$\sum_{\mathrm{i}} \mathrm{X}_\mathrm{i} \sim \mathrm{Gamma}(\mathrm{n}, \lambda)$$

- Trung bình của công thức này sẽ có giá trị:

$$\overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{Gamma}(\mathrm{n}, \mathrm{n}\lambda)$$

- Cho phân phối Gamma $\mathrm{Y} \sim \mathrm{Gamma}(\frac{\mathrm{v}}{2}, 2)$, khi đó, ta được :

$$\mathrm{Y} \sim \chi^2(\mathrm{v})$$

Với $\mathrm{v} \in \mathbb{N}$ là bậc tự do của phân phối chi bình phương.

- Hãy chứng minh điều trên (thông qua so sánh công thức của hai phân phối xác suất).

- Cho phân phối Gamma $\mathrm{Y} \sim \mathrm{Gamma}\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$, với λ là tham số mang tỉ lệ khi đó, ta được :

$$\mathrm{Y} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

- Bài tập: chứng minh điều trên thông qua so sánh các công thức.

- Trong trường hợp k là một số nguyên, ta được phân phối Erlang $\mathrm{E}(\mathrm{k}, \lambda)$ có hàm mật độ xác suất:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{k}, \theta) = \frac{\lambda^{\mathrm{k}} \mathrm{x}^{\mathrm{k}-1} \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}}}{\mathrm{k}!}$$

- Đặc biệt với trường hợp x =1, ta được phân phối Poisson.

- Như vậy ta đã thấy phân phối Gamma có mức ảnh hưởng rất lớn và là dạng tổng quát của hầu như mọi phân phối xác suất dạng mũ.
- Vì thế, ta hoàn toàn có nhiều lựa chọn cho xác suất tiên nghiệm trong bài toán liên quan đến phân phối Poisson.
- Tuỳ thuộc vào mức độ phức tạp của việc tính toán, ta sẽ chọn xác suất tiên nghiệm phù hợp.

Tính toán xác suất hậu nghiệm:

- Tiếp tục với phân phối Poisson, ta sẽ tính toán phân phối hậu nghiệm dựa trên một vài lựa chọn khác nhau cho xác suất tiên nghiệm.
- Ta sẽ bắt đầu với trường hợp:

$$\lambda \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$$

Tính toán xác suất hậu nghiệm:

- Khi đó, ta sẽ có:

$$p(x|\lambda) = \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod_i (x_i)!}\ e^{-n\lambda}$$

$$\sim \lambda^{\sum x_i}.\, e^{-n\lambda} = \lambda^{n\bar{x}}.\, e^{-n\lambda}$$

- Lúc này, ta có:

$$P(\lambda|x) \sim P(x|\lambda).\,P(\lambda)$$

$$= \lambda^{n\bar{x}}.\,e^{-n\lambda}.\,\lambda^{\alpha-1}.\,e^{-\beta\lambda}$$

$$= \lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}.\,e^{(-n-\beta)\lambda}$$

- Từ đó, ta lại có được :

$$\lambda|\mathrm{x} \sim \mathrm{Gamma}(\mathrm{n}\overline{\mathrm{x}} + \alpha - 1, \mathrm{n} + \beta)$$

- Như vậy với trường hợp cho λ là một tham số có xác suất tiên nghiệm là một phân phối Gamma, ta được phân phối xác suất hậu nghiệm cũng là một phân phối Gamma.

- Ta sẽ xét một trường hợp đặc biệt hơn:

$$\lambda \sim \chi^2(\mathrm{v}) \sim \mathrm{Gamma}(\frac{\mathrm{v}}{2}, 2)$$

Như ta đã biết, phân phối xác suất chi bình phương thực ra cũng chỉ là trường hợp đặc biệt của phân phối Gamma, vậy nên ta thử xét trường hợp này để xem kết quả thu được là gì.

- Lưu ý, ta vẫn xét $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ là n biến ngẫu nhiên với phân phối Poisson và đại lượng $\mathrm{T} \sim \sum \mathrm{x}_\mathrm{i}$.
- Vì ta cho $\lambda \sim \chi^2(\mathrm{v})$, vậy nên, ta được

$$\mathrm{P}(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{\mathrm{v}}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda}}{2^{\frac{\mathrm{v}}{2}} \Gamma\left(\frac{\mathrm{v}}{2}\right)} \sim \lambda^{\frac{\mathrm{v}}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda}$$

- Như vậy ta sẽ được xác suất hậu nghiệm:

$$\mathrm{p}(\lambda|\mathrm{x}) \sim \mathrm{p}(\mathrm{x}|\lambda).\,\mathrm{p}(\lambda)$$

$$= \lambda^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}\lambda}.\,\lambda^{\frac{\mathrm{v}}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda}$$

$$= \lambda^{\mathrm{T}+\frac{\mathrm{v}}{2}-1}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{n}\lambda-\frac{1}{2}\lambda}$$

$$= \lambda^{\frac{2\mathrm{T}+\mathrm{v}}{2}-1}.\,\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{n}+1}{2}\lambda}$$

- Như vậy ta lại được phân phối xác suất hậu nghiệm là:

$$\lambda|x \sim (2n)^{-1}\chi^2_{v'},$$

Với $v' = v + 2T$.

- Nếu $\lambda \sim m\chi^2(v)$, khi đó ta được:

$$\lambda|x \sim (2n+m)^{-1}\chi^2_{v'},$$

- Như vậy với trường hợp đặc biệt gán phân phối chi bình phương cho phân phối tiên nghiệm, một phân phối có vẻ như không có nhiều sự liên quan tới phân phối Poisson, ta vẫn được kết quả là một phân phối hậu nghiệm là một phân phối chi bình phương.
- Như vậy tính chất liên hợp của hai phân phối tiên nghiệm và hậu nghiệm thể hiện rất rõ trong bài toán này.

Ví dụ:

- Ta sẽ tìm hiểu một vài ví dụ.
- Ta có một quyển sách đã được xuất bản, khi lật vài trang đầu, ta thấy số lỗi ở mỗi trang in sẽ là:

$$3 - 4 - 2 - 1 - 2 - 3$$

- Tuy chưa kiểm tra hết quyển sách, nhưng ta cũng có thể thấy rằng số lỗi trung bình mỗi trang có thể được biểu diễn dưới dạng biến ngẫu nhiên $\mathrm{X} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, ở đây λ là lỗi trung bình theo từng trang sách.

Ví dụ:

- Vì quá mệt mỏi với việc phải đi xét n tờ giấy, ta chỉ xét phân phối Poisson trên 6 trang đầu tiên ta đã đọc.
- Trong trường hợp này, ta có: $\mathrm{n} = 6$ và $\mathrm{T} = \sum \mathrm{x_i} = 15$.
- Như vậy ta sẽ đi tìm con số lỗi trung bình của từng trang, biết data chúng ta đang xét chính là:

$$3 - 4 - 2 - 1 - 2 - 3$$

Ví dụ:

- Bây giờ, dựa vào kinh nghiệm của một người đã biết một chút về in sách, ta biết thông thường với một quyển sách 150 trang thì sẽ có tổng cộng khoảng 400 lỗi in sai. Ở đây, ta có:

$$\alpha = 400, \beta = 150$$

- Như vậy ta có phân phối tiên nghiệm là $\lambda \sim \mathrm{Gamma}(400, 150)$

- Như vậy ta được kết quả cho phân phối xác suất hậu nghiệm:

$$\mathrm{p}(\lambda|\mathrm{D}) \sim \ \mathrm{p}(\mathrm{D}|\lambda).\,\mathrm{p}(\lambda) = \lambda^{\mathrm{T}+\alpha-1}.\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{n}-\beta)\lambda}$$

$$= \lambda^{15+400}.\,\mathrm{e}^{(-150-6)\lambda}$$

$$= \lambda^{415}.\,\mathrm{e}^{-156\lambda}$$

- Hiển nhiên, có được phân phối hậu nghiệm cũng chưa đủ, trên thực tế, ta cần sử dụng các phần mềm để tìm ra đồ thị của phân phối hậu nghiệm $\lambda|\mathrm{D}$.
- Kiểm tra đỉnh của đồ thị, và giá trị có xác suất cao nhất sẽ là số lỗi trung bình của bài toán.
- Như vậy với khả năng quan sát và kinh nghiệm về số lỗi trên quyển sách, ta đã tìm ra xác suất hậu nghiệm và tìm được λ sao cho con số này làm $\mathrm{p}(\lambda|\mathrm{D})$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập:

1. Làm các câu hỏi tính toán so sánh công thức ở trên. (2 câu)

2. Một trạm thuê xe ô tô có 3 xe. Chủ trạm có một bảng thống kê về số xe được thuê mỗi ngày trong 8 ngày đầu tháng theo thứ tự:

$$3 - 1 - 2 - 1 - 0 - 3 - 0 - 2$$

Ông chủ cần dự đoán doanh thu của ông ta trong tháng này để tìm ra mô hình kinh doanh phù hợp. Doanh thu này sẽ bằng 30 x doanh thu trung bình 1 ngày với giá thuê mỗi xe là 250k. Ông ta đã có công thức tính doanh thu trung bình 1 ngày (bài tập cũ), tuy nhiên, dù có biết xác suất thuê xe theo mỗi ngày chính là phân phối Poisson, ông ta không biết cách nào để ước lượng λ. Dưới tư cách là kế toán của ông ta, và bạn biết được rằng tháng trước có 30 ngày, và tổng số lượt thuê xe là 75, hãy tìm ra λ khả dĩ nhất theo niềm tin của bạn.