BÀI 2 CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

Hướng dẫn học

Với bài học trước sinh viên đã có các khái niệm và cách tính xác suất cơ bản, dựa trên những biến cố đơn giản. Sinh viên cũng đã được làm quen với mối quan hệ của các biến cố. Các biến cố đơn giản sẽ kết hợp để tạo thành những biến cố phức tạp hơn, và cách tính xác suất các biến cố đó sẽ được đề cập đến trong bài này. Do đó cần nắm chắc các mối quan hệ đã đề cập ở bài trước. Các ví dụ ở bài trước cũng được sử dụng ở bài này. Để tính toán chính xác, cần theo dõi các bài tập cẩn thận và lần lượt theo từng bước, mở rộng và suy luận với những tình huống khác nhau.

Để học tốt bài này, sinh viên cần tham khảo các phương pháp học sau:

- Học đúng lịch trình của môn học theo tuần, làm các bài luyện tập đầy đủ và tham gia thảo luận trên diễn đàn.
- Đọc tài liệu: Giáo trình Lý thuyết xác suất và thống kê toán của NXB Đại học KTQD.
- Sinh viên làm việc theo nhóm và trao đổi với giảng viên trực tiếp tại lớp học hoặc qua email.
- Tham khảo các thông tin từ trang Web môn học.

Nội dung

Bài này trình bảy các định lý, hay các công thức tính xác suất, bao gồm:

- Định lý nhân xác suất, định lý cộng xác suất;
- Định lý về nhóm đầy đủ;
- Định lý Bernoulli;
- Công thức xác suất đầy đủ.

Mục tiêu

Sau khi học xong bài này, sinh viên cần đáp ứng được các yêu cầu sau:

- Biết cách biểu diễn biến cố đang quan tâm qua tổng hoặc tích của các biến cố liên quan.
- Nắm được nội dung của định lý nhân xác suất và định lý cộng xác suất.
- Biết vận dụng định lý nhân với tích các biến cố và định lý cộng với tổng các biến cố để tính xác suất của biến cố trong từng bài toán cụ thể.
- Nhận dạng được bài toán theo lược đồ Bernoulli, biết áp dụng công thức và tra bảng trong các bài toán tuân theo lược đồ này.
- Biết xác định nhóm biến cố đầy đủ có ảnh hưởng đến biến cố đang quan tâm và biết áp dụng công thức xác suất đầy đủ để giải quyết bài toán.

Tình huống dẫn nhập

Đánh giá khả năng mua hàng của khách hàng

Một doanh nghiệp phỏng vấn khách hàng về sản phẩm mới trước khi đưa sản phẩm ra thị trường. Trong số những khách hàng được phỏng vấn ngẫu nhiên xem có mua hàng không nếu doanh nghiệp tung ra sản phẩm mới hay không, thì một số trả lời "sẽ mua", một số trả lời "có thể sẽ mua" và còn lại trả lời "không mua". Tuy nhiên không phải người trả lời "sẽ mua" là chắc chắn sẽ mua, mà chỉ có khả năng mua với xác suất nào đó. Tương tự, không phải nhóm trả lời "không mua" là chắc chắn không mua, mà vẫn có thể sẽ mua với một xác suất nào đó.

Vậy tỷ lệ khách hàng tiềm năng sẽ mua sản phẩm mới là bao nhiêu?

Để xác định xác suất của một biến cố đơn giản ta có thể áp dụng trực tiếp định nghĩa cổ điển về xác suất hoặc định nghĩa thống kê về xác suất. Nhưng với những biến cố phức hợp thì thường áp dụng phương pháp gián tiếp. Phương pháp này cho phép tính xác suất của một biến cố dựa vào xác suất đã biết của các biến cố có liên quan với nó thông qua định lí cộng xác suất và định lí nhân xác suất.

Trước khi đi vào bài số 2, ta nhắc lại sơ lược một số khái niệm quan trọng:

- *Tích của hai biến cố*: khi cả hai biến cố cùng xảy ra.
- *Tổng của hai biến cố*: khi ít nhất một trong hai biến cố xảy ra.
- *Tính độc lập*: Biến cố này không tác động đến xác suất biến cố kia và ngược lại.
- *Tính xung khắc*: Hai biến cố không có kết cục chung.
- *Tính đối lập*: Không phải biến cố này thì phải là biến cố kia.
- *Nhóm đầy đủ*: Nhóm lấp đầy toàn bộ và không trùng nhau.

Về mặt khoa học, có sự phân biệt rõ ràng giữa các Định lý và Hệ quả. Tuy nhiên để tránh rắc rối, trong bài giảng này ta gọi chung là Định lý cho dễ phân biệt và đánh số thứ tự.

2.1. Định lý nhân xác suất

Định lý Nhân xác suất hay còn gọi là Công thức nhân xác suất, là cách tính xác suất của tích của hai hay nhiều biến cố. Trước hết ta xét khái niệm xác suất có điều kiện.

Định nghĩa 2.1 – Xác suất có điều kiện: *Xác suất biến cố B được tính với giả thiết biến cố A đã xảy ra gọi là xác suất của B với điều kiện A, ký hiệu P(B | A).*

Trong giáo trình có dùng ký hiệu *P*(A/B), tuy nhiên để tránh nhầm lẫn với ký hiệu chia, ta dùng dấu gạch đứng, cũng là một ký hiệu phổ biến, đọc là "với điều kiện".

Ví dụ 2.1. Một hộp đựng 10 sản phẩm trong đó có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm, lấy ra lần lượt hai sản phẩm theo phương thức không hoàn lại. Tìm xác suất để:

(a) Lần thứ hai lấy được chính phẩm biết rằng lần thứ nhất lấy được chính phẩm.
(b) Lần thứ hai lấy được chính phẩm biết rằng lần thứ nhất lấy được phế phẩm.
(c) Tìm xác suất của câu (a) và (b) khi lấy theo phương thức có hoàn lại.

Giải:

Đặt: A là biến cố "lần thứ nhất lấy được chính phẩm".
B là biến cố "lần thứ hai lấy được chính phẩm".

(a) Xác suất lần thứ hai lấy được chính phẩm trong điều kiện lần thứ nhất được chính phẩm chính là xác suất của A trong điều kiện B, hay *P*(A | B).

Sau khi lần thứ nhất lấy được chính phẩm (tức là biến cố A đã xảy ra) thì trong hộp chỉ còn lại 9 sản phẩm, trong đó có 5 chính phẩm. Vì vậy, xác suất để lần thứ hai lấy được chính phẩm trong điều kiện lần thứ nhất đã lấy được chính phẩm là:

$$P(B|A) = \frac{5}{9} \approx 0,556$$

(b) Nếu lần thứ nhất lấy được phế phẩm thì tức là biến cố $\bar{A}$ xảy ra, tìm xác suất của B trong điều kiện $\bar{A}$, hay $P(B \mid \bar{A})$.

Nếu lần thứ nhất lấy được phế phẩm thì trong hộp còn 9 sản phẩm, trong đó còn nguyên 6 chính phẩm, do đó xác suất là:

$$P(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0,667$$

So sánh với câu (a) ta thấy việc lần thứ nhất lấy được gì có ảnh hưởng trực tiếp đến khả năng lấy được chính phẩm ở lần thứ hai. Theo khái niệm từ bài trước, thì biến cố A và B là không độc lập, hay phụ thuộc nhau, cụ thể là B phụ thuộc vào A.

(c) Trong trường hợp lấy có hoàn lại, dù lần đầu được chính phẩm hay phế phẩm thì sau đó cũng bỏ lại hộp, do đó đến khi lấy lần thứ hai trong hộp vẫn còn nguyên 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm.

Do đó: $P(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}}) = \frac{6}{10} = 0,6$ và $P(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}}) = \frac{6}{10} = 0,6$

Ta thấy nếu A và B độc lập nhau thì xác suất của biến cố B xảy ra không phụ thuộc vào việc A xảy ra hay không, hay xác suất có điều kiện bằng với xác suất không điều kiện.

Định lý 2.1 – Hai biến cố độc lập: *Nếu hai biến cố là độc lập thì xác suất có điều kiện của chúng cũng bằng xác suất không điều kiện.*

A và B độc lập thì: $P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$ và $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})$

Lưu ý rằng phải cả hai điều cùng phải xảy ra, nếu chỉ có một điều thỏa mãn thì A và B vẫn là không độc lập.

Từ khái niệm xác suất có điều kiện, định lý nhân xác suất ta có định lý về xác suất tích.

Định lý 2.2 – Xác suất tích: *Xác suất của tích hai biến cố bằng tích xác suất của một trong hai biến cố đó với xác suất có điều kiện của biến cố còn lại.*

- Tức là với hai biến cố A và B thì:

$$P(\mathrm{A.B}) = P(\mathrm{A}).P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$$

- Do A và B đổi chỗ cho nhau thì khái niệm không đổi nên:

$$P(\mathrm{A.B}) = P(\mathrm{B}).P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$$

- Kết hợp với định lý 2.1 về hai biến cố độc lập ta có:

Định lý 2.3 – Xác suất tích hai biến cố độc lập: Xác suất của tích hai biến cố độc lập bằng tích hai xác suất của các biến cố thành phần.

Nghĩa là, với A và B độc lập thì:

$$P(\mathrm{A.B}) = P(\mathrm{A}).P(\mathrm{B})$$

Từ đó có thể mở rộng với n biến cố độc lập toàn phần gồm $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ thì:

$$P(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_\mathrm{n}) = P(\mathrm{A}_1).P(\mathrm{A}_2)\ldots P(\mathrm{A}_\mathrm{n})$$

Ví dụ 2.2. Một hộp đựng 10 sản phẩm trong đó có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Lần lượt lấy ra 2 sản. Tính xác suất để lấy được 2 chính phẩm trong hai trường hợp:

(a) Lấy lần lượt không hoàn lại

(b) Lấy lần lượt có hoàn lại

Giải:

Đặt: A là biến cố "lần thứ nhất lấy được chính phẩm"

B là biến cố "lần thứ hai lấy được chính phẩm"

Như vậy biến cố "lấy được 2 chính phẩm" chính là A.B

Theo công thức ta có $P(\mathrm{A.B}) = P(\mathrm{A}).P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$

(a) Khi lấy lần lượt không hoàn lại:

$$P(A)=\frac{6}{10} \text{ và } P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{5}{9}$$

Do đó $P(A.B)=P(A).P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}=0,333$

(b) Khi lấy lần lượt không hoàn lại, dù lần thứ nhất lấy được gì thì lần thứ hai xác suất lấy được chính phẩm vẫn không thay đổi:

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=P(B)=\frac{6}{10}$$

Do đó $P(A.B)=P(A).P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=P(A.B)=P(A).P(B)=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{36}{100}=0,36$

Nhận thấy câu (b) chính là áp dụng công thức trong định lý 2.3.

Từ các định lý trên suy ra:

Định lý 2.4 – Tính xác suất có điều kiện: *Nếu hai biến cố A và B có xác suất dương thì*:

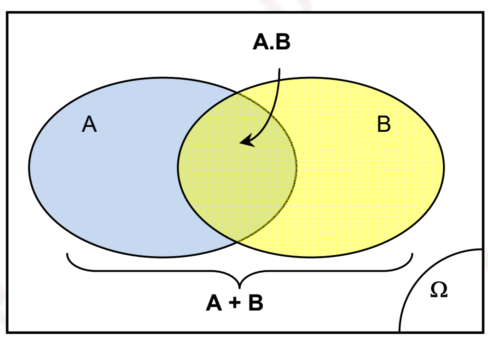
$$P(A|B)=\frac{P(A.B)}{P(B)} \text{ và } P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{P(A.B)}{P(A)}$$

- Vậy nếu P(B) = 0 và P(A) = 0 thì P(A | B) và P(B | A) là không xác định.
- Trường hợp A và B độc lập thì:

$$P(A)=\frac{P(A.B)}{P(B)} \text{ và } P(B)=\frac{P(A.B)}{P(A)}$$

2.2. Định lý cộng xác suất

Xét hình minh họa 2.1 về biến cố tổng.



Hình 2.1. ***Xác suất tổng hai biến cố***

Với biến cố tổng của hai biến cố, khi tính xác suất của tổng hai biến cố A, B, ta thấy miền biến cố tổng A + B gồm miền A cộng với miền B, tuy nhiên phần ở giữa bị trùng nhau, do đó khi tính xác suất cần phải trừ đi miền ở giữa, chính là miền A.B. Từ đó ta có định tính cộng xác suất.

Định lý 2.5 – Xác suất tổng: Xác suất của tổng hai biến cố bằng tổng xác suất của từng biến *cố trừ đi xác suất của tích hai biến cố đó*.

Công thức tính xác suất tổng hai biến cố là:

$$P(\mathrm{A}+\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A.B})$$

Ví dụ 2.3. Một người đi chào hàng ở hai nơi độc lập nhau. Xác suất nơi thứ nhất đặt hàng là 0,3 và xác suất nơi thứ hai đặt hàng là 0,4. Tính xác suất để người đó có nhận được đơn đặt hàng.

Giải:

Đặt A là biến cố "nơi thứ nhất đặt hàng".

Đặt B là biến cố "nơi thứ hai đặt hàng".

Biến cố người đó "có nhận được đơn đặt hàng" chính là được ít nhất một trong hai nơi đặt hàng, hay A + B, do đó cần tính xác suất $P(\text{A} + \text{B})$

Theo giả thiết: $P(\text{A}) = 0{,}3$ và $P(\text{B}) = 0{,}4$

Theo công thức: $P(\text{A} + \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A.B})$

Do A và B độc lập nhau nên theo Định lý 2.3 về xác suất tích hai biến cố độc lập, ta có:

$$P(\text{A.B}) = P(\text{A}).P(\text{B}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$$

Vậy: $P(\text{A} + \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A.B}) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}58$

Từ Định lý 2.5, kết hợp với trường hợp A và B xung khắc thì tích của chúng bằng rỗng, xác suất của tích bằng 0: $P(\text{A.B}) = 0$, ta có định lý

Định lý 2.6 – Xác suất tổng hai biến cố xung khắc: *Xác suất của tổng hai biến cố xung khắc bằng tổng hai xác suất của hai biến cố thành phần*.

- Nếu A và B xung khắc thì:

$$P(\text{A} + \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B})$$

- Từ đó có thể mở rộng với n biến cố xung khắc từng đôi gồm $\text{A}_1, \text{A}_2, \ldots, \text{A}_n$ thì:

$$P(\text{A}_1 + \text{A}_2 + \ldots + \text{A}_n) = P(\text{A}_1) + P(\text{A}_2) + \ldots + \text{P}(\text{A}_n)$$

Ví dụ 2.4. Hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên hai sản phẩm, tính xác suất để hai sản phẩm lấy ra là cùng loại, trong hai trường hợp:

(a) Lấy lần lượt không hoàn lại.

(b) Lấy lần lượt có hoàn lại.

Giải:

Đặt C là biến cố "hai sản phẩm lấy ra đều là chính phẩm" (chữ C viết tắt cho 2 Chính phẩm) và F là biến cố "hai sản phẩm lấy ra đều là phế phẩm (chữ F viết tắt cho 2 Phế phẩm).

Biến cố "hai sản phẩm lấy ra là cùng loại" chính là A + B (hoặc lấy được 2 chính phẩm hoặc lấy được 2 phế phẩm). Ta cần tính $P(\text{C} + \text{F})$.

Hai biến cố A và B lại xung khắc, vì nếu đã lấy được 2 chính phẩm thì không thể lấy được 2 phế phẩm, và ngược lại. Do đó theo công thức ta có:

$$P(\text{C} + \text{F}) = P(\text{C}) + P(\text{F})$$

(a) Khi lấy lần lượt không hoàn lại, xác suất được hai chính phẩm đã được giải trong Ví dụ 2.2 câu (a), có:

$$P(\text{C})_{\text{lấy không hoàn lại}} = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90}$$

Tính hoàn toàn tương tự với trường hợp lấy hai phế phẩm, ta có:

$$P(\text{F})_{\text{lấy không hoàn lại}} = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

Vậy xác suất được hai sản phẩm cùng loại là:

$$P(\text{C} + \text{F})_{\text{lấy không hoàn lại}} = \frac{30}{90} + \frac{12}{90} = \frac{42}{90} \approx 0,467$$

(b) Khi lấy lần lượt có hoàn lại, xác suất được hai chính phẩm đã được giải trong ví dụ 2.2 câu (b), và tính tương tự cho trường hợp lấy được hai phế phẩm, ta có:

$$P(\text{C})_{\text{lấy có hoàn lại}} = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} \text{ và } P(\text{F})_{\text{lấy có hoàn lại}} = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$$

Vậy xác suất được hai sản phẩm cùng loại là:

$$P(\text{C} + \text{F})_{\text{lấy có hoàn lại}} = \frac{36}{100} + \frac{16}{100} = \frac{52}{100} = 0,52$$

Kết hợp hai câu có thể thấy khi lấy có hoàn lại thì dễ lấy được hai sản phẩm cùng loại hơn là khi lấy không hoàn lại.

Từ định lý 2.6 về xác suất tổng của nhiều biến cố xung khắc, xét trường hợp các biến cố đó tạo thành nhóm đầy đủ, khi đó biến cố tổng bằng biến cố chắc chắn Ω, có xác suất bằng 1. Do đó có Định lý về nhóm đầy đủ và biến cố đối lập.

Định lý 2.7 – Xác suất của nhóm đầy đủ: *Tổng các các suất của một nhóm đầy đủ bằng 1.*

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tạo thành nhóm đầy đủ thì:
  $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$
- Trường hợp nhóm đầy đủ gồm hai biến cố A và $\bar{A}$, tức là hai biến cố đối lập, thì:
  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ hay $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Ví dụ 2.5. Hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên hai sản phẩm theo cách không hoàn lại. Tính xác suất để:

(a) Trong hai sản phẩm có ít nhất một chính phẩm.

(b) Hai sản phẩm là khác loại.

Giải:

(a) Biến cố có ít nhất một chính phẩm gồm hai trường hợp riêng: có đúng 1 chính phẩm, hoặc có 2 chính phẩm. Nếu tính xác suất từng trường hợp sẽ dài hơn so với việc tính xác suất của biến cố ngược lại.

Ta thấy đối lập của biến cố "có ít nhất một chính phẩm" là biến cố "không có chính phẩm nào" hay cũng chính là "cả hai là phế phẩm".

P(có ít nhất 1 chính phẩm) = 1 – P(cả hai đều là phế phẩm)

Với P(cả hai đều là phế phẩm) $= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} \approx 0,133$ (đã giải trong ví dụ 2.4 câu (a))

Vậy P(có ít nhất 1 chính phẩm) = 1 – 0,133 = 0,867

(b) Trong ví dụ 2.4 câu (a) ta đã tính xác suất hai sản phẩm lấy ra không hoàn lại là cùng loại là bằng 0,467

Dễ thấy biến cố "hai sản phẩm khác loại" là đối lập của biến cố "hai sản phẩm cùng loại", do đó:

P(hai sản phẩm là khác loại) = 1 – P(hai sản phẩm là cùng loại) = 1 – 0,467 = 0,533

Ví dụ 2.6. Trong công ty có 50 người, trong đó có 32 người có học về kinh tế. Chọn ngẫu nhiên cùng lúc 4 người, tìm xác suất để trong đó có người học về kinh tế.

Giải:

Biến cố "trong đó có người học về kinh tế" được hiểu là "có ít nhất một người có học về kinh tế trong số 4 người chọn ra", đặt là biến cố A.

Trong 50 người, 32 người có học về kinh tế, suy ra 18 người không học về kinh tế.

Cách 1.

Ta thấy biến cố A xảy ra khi ít nhất một trong các trường hợp sau đây xảy ra:

Biến cố A_1: "có 1 người học về kinh tế" (và 3 người không học về kinh tế).

Biến cố A_2: "có 2 người học về kinh tế" (và 2 người không học về kinh tế).

Biến cố A_3: "có 3 người học về kinh tế" (và 2 người không học về kinh tế).

Biến cố A_4: "cả 4 người học về kinh tế".

Khi đó dễ thấy A_1, A_2, A_3, A_4 là xung khắc, do đó:

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_4) = P(\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2) + P(\mathrm{A}_3) + P(\mathrm{A}_4)$$

Theo công thức tổ hợp ta có:

$$P(A_1) = \frac{C_{32}^1 C_{18}^3}{C_{50}^4}; \quad P(A_2) = \frac{C_{32}^2 C_{18}^3}{C_{50}^4}; \quad P(A_3) = \frac{C_{32}^3 C_{18}^3}{C_{50}^4}; P(A_4) = \frac{C_{32}^4}{C_{50}^4}$$

Cách 2.

Thay vì tìm bốn xác suất thành phần, ta có thể xét biến cố $\bar{\mathrm{A}}$ là "trong 4 người không có ai học về kinh tế".

Khi đó $P(\mathrm{A}) = 1 - P(\bar{\mathrm{A}})$

Với: $P(\overline{A}) = \dfrac{C_{18}^4}{C_{50}^4} = \dfrac{18 \times 17 \times 16 \times 15}{50 \times 49 \times 48 \times 47}$

Việc tính toán kết quả cuối cùng bạn đọc tự thực hiện như một bài tập.

Ví dụ 2.7. Tại một cửa hàng, xác suất để khách hàng mua thiết bị điện tử là 0,3; xác suất khách hàng cài đặt phần mềm là 0,2; nhưng với khách đã mua thiết bị thì xác suất để sau đó cài đặt phần mềm là 0,5. Hãy tính xác suất một khách hàng:

(a) Mua thiết bị điện tử và cài đặt phần mềm.

(b) Có thực hiện ít nhất một giao dịch.

(c) Không thực hiện giao dịch nào.

(d) Chỉ thực hiện đúng một giao dịch.

Giải:

Đặt A là biến cố "khách mua thiết bị", B là biến cố "khách cài đặt phần mềm".

Đề bài cho: $P(\mathrm{A}) = 0,3$; $P(\mathrm{B}) = 0,2$ và $P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = 0,5$

(a) Biến cố "mua thiết bị và cài đặt phần mềm" là A.B

$$P(\mathrm{A.B}) = P(\mathrm{A}).P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

(b) Biến cố "có thực hiện ít nhất một loại giao dịch" là A + B

$$P(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A.B}) = 0,3 + 0,2 - 0,15 = 0,35$$

(c) Biến cố "không thực hiện giao dịch nào" là $\overline{\mathrm{A}}.\overline{\mathrm{B}}$

Nhận thấy đây chính là biến cố đối lập của "có thực hiện ít nhất một giao dịch", do đó:

$$P(\bar{A}.\bar{B}) = 1 - P(A + B) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$$

(d) Biến cố "chỉ thực hiện đúng một loại giao dịch" là $A.\bar{B} + \bar{A}.B$

Nhận thấy: ba biến cố "mua thiết bị và cài phần mềm", "không thực hiện giao dịch nào" và "chỉ thực hiện đúng một giao dịch" tạo thành một nhóm đầy đủ. Do đó:

$$P(A.\bar{B} + \bar{A}.B) = 1 - P(A.B) - P(\bar{A}.\bar{B}) = 1 - 0{,}15 - 0{,}65 = 0{,}2$$

Ta có thể mô tả toàn bộ thông tin tính từ bài tập này qua bảng sau:

	B (cài phần mềm)	$\bar{B}$	Xác suất
A (mua thiết bị)	A.B P(A.B) = 0,15	A. $\bar{B}$ P(A. $\bar{B}$) = 0,15	P(A) = 0,3
$\bar{A}$	$\bar{A}$.B P($\bar{A}$.B) = 0,05	$\bar{A}.\bar{B}$ P($\bar{A}.\bar{B}$) = 0,65	P($\bar{A}$) = 0,7
Xác suất	P(B) = 0,2	P($\bar{B}$) = 0,8	

Với bảng này: có hai dòng A và $\bar{A}$, do $P(A) = 0{,}3$ như đề bài cho nên suy ra $P(\bar{A}) = 0{,}7$

Có hai cột B và $\bar{B}$, do $P(B) = 0{,}2$ nên $P(\bar{B}) = 0{,}8$.

Theo cột B: do $P(A.B) = 0{,}15$ như tính từ câu (a) nên suy ra $P(\bar{A}.B) = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$

Theo cột A: do $P(A.B) = 0{,}15$ nên suy ra $P(A.\bar{B}) = 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}15$

Theo cả cột $\bar{B}$ và dòng $\bar{A}$ thì $P(\bar{A}.\bar{B}) = 0{,}65$; đây cũng là kết quả của câu (c).

Như vậy từ đây suy ra các xác suất:

- Xác suất khách không mua thiết bị: $P(\bar{A}) = 0{,}7$
- Xác suất khách không cài phần mềm: $P(\bar{B}) = 0{,}8$
- Xác suất khách chỉ mua thiết bị: $P(A.\bar{B}) = 0{,}15$
- Xác suất khách chỉ cài phần mềm: $P(\bar{A}.B) = 0{,}05$

Ví dụ 2.8. Một doanh nghiệp đi đấu thầu ở hai dự án. Xác suất để trúng thầu ở dự án thứ nhất là 0,6. Nếu đã trúng thầu dự án thứ nhất thì khả năng trúng thầu dự án thứ hai là 0,8. Tuy nhiên nếu trượt thầu ở dự án thứ nhất thì khả năng trúng thầu ở dự án thứ hai chỉ còn 0,4. Tính xác suất doanh nghiệp:

(a) Trúng thầu cả hai dự án.

(b) Chỉ trúng thầu dự án thứ hai.

(c) Trúng thầu ở ít nhất một dự án.

(d) Trúng thầu ở dự án thứ hai.

Giải:

Đặt A là biến cố "trúng thầu ở dự án thứ nhất" và B là "trúng thầu ở dự án thứ hai".

Đề bài cho thông tin:

$$P(A) = 0{,}6; \qquad P(B \mid A) = 0{,}8; \qquad P(B \mid \bar{A}) = 0{,}4$$

Lưu ý bài này không hề có giả thiết độc lập, và các xác suất cho thấy hai biến cố A và B không độc lập, nên không được sử dụng các công thức của các biến cố độc lập.

(a) Biến cố "trúng thầu ở cả hai dự án" chính là A.B

$$P(A.B) = P(A).P(B \mid A) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

(b) Biến cố "chỉ trúng thầu ở dự án thứ hai" là $\bar{A}.B$

$$P(\bar{A}.B) = P(\bar{A}).P(B \mid \bar{A}) = (1 - 0,6) \times 0,4 = 0,16$$

(c) Biến cố "trúng thầu ở ít nhất một dự án" là $A + B = A.\bar{B} + \bar{A}.B + A.B$

(chỉ trúng dự án thứ nhất + chỉ trúng dự án thứ hai + trúng ở cả hai dự án)

Do các biến cố là xung khắc nên:

$$P(A + B) = P(A.\bar{B}) + P(\bar{A}.B) + P(A.B)$$

Có $P(A.\bar{B}) = P(A).P(\bar{B} \mid A) = 0,6(1 - 0,8) = 0,12$

Do đó $P(A + B) = 0,12 + 0,16 + 0,48 = 0,76$.

(d) Biến cố "trúng thầu ở dự án thứ hai" là biến cố B

Ta có: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

Suy ra: $P(B) = P(A + B) - P(A) + P(A.B) = 0,76 - 0,6 + 0,48 = 0,64$.

Có thể lập bảng tương tự như trong bài tập trên:

	B (trúng dự án 2)	$\bar{B}$	Xác suất
A (trúng dự án 1)	$P(A.B) = 0,48$	$P(A.\bar{B}) = 0,12$	$P(A) = 0,6$
$\bar{A}$	$P(\bar{A}.B) = 0,16$	$P(\bar{A}.\bar{B}) = 0,24$	$P(\bar{A}) = 0,4$
Xác suất	$P(B) = 0,64$	$P(\bar{B}) = 0,36$	

2.3. Định lý Bernoulli

Trước khi tiếp tục với Định lý này, xét ví dụ sau và sẽ tổng quát hóa thành công thức:

Ví dụ 2.9. Một người đi chào hàng ở 3 nơi độc lập nhau, xác suất nhận được đơn đặt hàng ở mỗi nơi đều bằng nhau và bằng 0,4. Tính xác suất để người đó nhận được đơn đặt hàng ở đúng một nơi.

Giải:

Đặt A_i là biến cố nơi thứ i đặt hàng ($i = 1, 2, 3$)

Theo đề bài các A_i độc lập nhau và: $P(A_i) = 0,4$

Xác suất để từng nơi không đặt hàng là: $P(\bar{A}_1) = 1 - 0,4$

Biến cố A là "nhận được đơn đặt hàng ở đúng một nơi" gồm 3 trường hợp: (1) nơi thứ nhất đặt hàng, nơi thứ hai và thứ ba thì không, (2) nơi thứ hai đặt hàng, nơi thứ nhất và thứ hai thì không, (3) nơi thứ ba đặt hàng, nơi thứ nhất và thứ hai thì không. Do đó

$$P(A) = P(A_1.\bar{A}_2.\bar{A}_3 + \bar{A}_1.A_2.\bar{A}_3 + \bar{A}_1.\bar{A}_2.A_3)$$

Do các nhóm là xung khắc nên:

$$P(A) = P(A_1.\bar{A}_2.\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1.A_2.\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1.\bar{A}_2.A_3)$$

Do các biến cố độc lập nên:

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$$

$$= (0,4)(1 - 0,4)(1 - 0,4) + (1 - 0,4)(0,4)(1 - 0,4) + (1 - 0,4)(1 - 0,4)(0,4)$$

Ta thấy kết quả là ba cụm số hạng giống nhau về giá trị, chỉ khác nhau vị trí, do đó:

$$P(\text{A}) = 3 \times (0,4) \times (1 - 0,4)^2$$

Xét kỹ kết quả này, ta thấy con số 3 là do có 3 trường hợp, là do trong 3 nơi, có 1 nơi đặt hàng nên số trường hợp là bằng $C_3^1 = 3$; con số 0,4 có thể viết là $0,4^1$ tức là có 1 nơi đặt hàng với xác suất là 0,4; con số $(1 - 0,4)^2$ = tức là có 2 nơi đặt hàng với xác suất (1 – 0,4).

Kết quả có thể viết lại là:

$$P(A) = C_3^1(0,4)^1(1-0,4)^2$$

Từ đây có suy ra cách giải cho các câu hỏi tính xác suất sau:

Đi bán hàng ở 3 nơi, có đúng 2 nơi đặt hàng (1 nơi không đặt hàng), xác suất sẽ là:

$$C_3^2(0,4)^2(1-0,4)^1$$

Đi bán hàng ở 5 nơi, có đúng 3 nơi đặt hàng (2 nơi không đặt hàng), xác suất sẽ là:

$$C_5^3(0,4)^3(1-0,4)^2$$

Tổng quát, nếu đi bán hàng ở n nơi, có đúng x nơi đặt hàng ($n - x$ nơi không đặt hàng) thì xác suất sẽ là:

$$C_n^x(0,4)^x(1-0,4)^{n-x}$$

Và nếu xác suất bán được hàng tổng quát là p, ta sẽ có công thức Bernoulli.

Định nghĩa 2.2 – Lược đồ Bernoulli: *Thực hiện n phép thử độc lập, xác suất để biến cố A xảy ra trong mỗi phép thử đều bằng nhau và bằng p, thì ta có lược đồ Bernoulli, hay bài toán Bernoulli với hai tham số n và p, ký hiệu là B(n; p).*

Định lý 2.8 – Định lý Bernoulli: *Với lược đồ Bernoulli, B(n; p), xác suất để trong n phép thử, biến cố A xảy ra đúng x lần, ký hiệu là P(x | n, p), được tính theo công thức*

$$P(x|n,p) = C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

Ví dụ 2.10. Một người đi chào hàng ở 5 nơi độc lập nhau, xác suất mỗi nơi đặt hàng đều bằng 0,4. Tính xác suất để:

(a) Có đúng 1 nơi đặt hàng.

(b) Có đúng 2 nơi đặt hàng.

(c) Có nơi đặt hàng.

Giải:

Người đó bán hàng ở 5 nơi độc lập, ta có 5 phép thử độc lập. Với biến cố "đặt hàng" xác suất xảy ra tại mỗi nơi đều bằng 0,4 nên ta có một lược đồ Bernoulli với hai tham số $n = 5$ và $p = 0,4$, hay ký hiệu là B($n = 5$; $p = 0,4$).

(a) Xác suất có đúng 1 nơi đặt hàng là:

$$P(x=1|n=5, p=0,4) = C_5^1(0,4)^1(1-0,4)^4 = 5 \times 0,4 \times 0,1296 = 0,2592$$

(b) Xác suất có đúng 2 nơi đặt hàng là:

$$P(x=2|n=5, p=0,4) = C_5^2(0,4)^2(1-0,4)^3 = 10 \times 0,16 \times 0,216 = 0,3456$$

(c) Xác suất có nơi đặt hàng là gồm các trường hợp: 1 nơi, 2 nơi, 3 nơi, 4 nơi, 5 nơi đặt hàng. Tính lần lượt từng xác suất khá dài, có thể ngắn hơn qua việc tính xác suất biến cố đối lập:

P(có nơi đặt hàng) = 1 – P(không nơi nào đặt hàng) = 1 – $P(x = 0 \mid n = 5; p = 0,4)$

$$P(x=0|n=5,p=0,4)=C_5^0(0,4)^0(1-0,4)^5=0,6^5=0,0778$$

Vậy xác suất có nơi đặt hàng bằng 1 – 0,0778 = 0,9222.

Bên cạnh việc sử dụng máy tính bấm tay để tính các xác suất, với các bài toán có n đến 12 có thể sử dụng bảng Phụ lúc 1 để tra các xác suất, với p là các giá trị lẻ đến 0,5.

Muốn tra giá trị P(x = 1 | n = 5; p = 0,4):
Dòng lớn với n = 5,
Dòng chi tiết với x = 1,
Cột với p = 0,4
Đối chiếu được con số 0,2592
Tương tự:
P(x = 2 | n = 5; p = 0,4) = 0,3456
P(x = 3 | n = 5; p = 0,4) = 0,2304

n	x \ p	…	0.35	0.4	0.45
	…	…	…	…	…
5	0	…	0.1160	0.0778	0.0503
	1	…	0.3124	**0.2592**	0.2059
	2	…	0.3364	0.3456	0.3369
	3	…	0.1811	0.2304	0.2757
	…	…	…	…	…

Do đó muốn tính xác suất có nơi đặt hàng, cũng có thể tính tổng theo cột ứng với dòng k từ 1 đến 5, cũng được kết quả 0,9222.

Ví dụ 2.11. Một đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi độc lập, mỗi câu 1 điểm. Mỗi câu trắc nghiệm có 4 lựa chọn trong đó chỉ có 1 lựa chọn là đúng. Một người đi thi làm tất cả các câu bằng cách chọn bừa. Tính xác suất để người đó:

(a) Được đúng 6 điểm.

(b) Được từ 5 điểm trở lên.

Giải:

Có 10 câu hỏi độc lập tương đương với 10 phép thử. Vì mỗi câu có 4 lựa chọn và người đi thi chọn bừa nên xác suất đúng trong mỗi câu đều bằng 1/4 = 0,25. Vậy ta có một lược đồ Bernoulli: B(n = 10; p = 0,25).

(a) Xác suất người đó được đúng 6 điểm tức là đúng trong 6 câu, tra bảng ta có:

$P(x = 6 \mid n = 10; p = 0,25) = 0,0162$

(b) Xác suất được 5 điểm trở lên hay đúng từ 5 câu trở lên, ta cần tính tổng các xác suất với k từ 5 đến 10:

$P(x = 5) + P(x = 6) + \mathrm{P}(x = 7) + \mathrm{P}(x = 8) + \mathrm{P}(x = 9) + \mathrm{P}(x = 10)$

= 0,0584 + 0,0162 + 0,0031 + 0,0004 + 0,0000 + 0,0000 = 0,0781

Nhận thấy bảng số chỉ cho giá trị xác suất đến 0,5; vậy với xác suất lớn hơn 0,5 thì dùng bảng thế nào? Ta có thể tính qua biến cố đối lập để tận dụng bảng số. Xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.12. Xác suất để mỗi doanh nghiệp sản xuất có mua bảo hiểm cháy nổ là 0,7. Kiểm tra ngẫu nhiên 12 doanh nghiệp, tính xác suất để:

(a) Có đúng 9 doanh nghiệp có mua bảo hiểm cháy nổ.

(b) Có từ 9 doanh nghiệp trở lên có mua bảo hiểm cháy nổ.

Giải:

Với bài toán này dễ thấy nếu xét biến cố "có mua bảo hiểm cháy nổ" (gọi tắt là "có mua bảo hiểm") thì ta có lược đồ Bernoulli B(n = 12; p = 0,7)

(a) Xác suất để 9 doanh nghiệp có mua bảo hiểm là: $P(x = 9 \mid n = 12; p = 0{,}7)$. Trong bảng không có giá trị tương ứng, có thể tính theo công thức:

$$P(x=9\big|n=12, p=0,7)=C_{12}^{9}(0,7)^{9}(1-0,7)^{3}$$

Tuy nhiên có thể dùng cách sau để tận dụng bảng số:

Xét biến cố "doanh nghiệp *không* mua bảo hiểm", nếu xét trên biến cố này thì xác suất doanh nghiệp không mua bảo hiểm là 1 – 0,7 = 0,3 và ta có lược đồ Bernoulli:

B(n = 12; p = 0,3)

Biến cố: "có 9 doanh nghiệp mua bảo hiểm" cũng là biến cố "có 3 doanh nghiệp *không* bảo hiểm", vì vậy ta tính: $P(x' = 3 \mid n = 12; p' = 0{,}3)$

Tra bảng được: $P(x' = 3 \mid n = 12; p' = 0{,}3) = 0{,}2397$

Vậy có thể thấy: $P(x = 9 \mid n = 12; p = 0{,}7) = P(x' = 3 \mid n = 12; p' = 0{,}3)$

(b) Từ cách làm với câu (a), có thể thấy tính xác suất để có từ 9 doanh nghiệp trở lên có mua bảo hiểm cũng chính là xác suất để có từ 3 doanh nghiệp trở xuống không mua. Vậy tính xác suất với n = 12, p = 0,3 và x = 0, 1, 2, 3, tra bảng ta được xác suất bằng: 0,0138 + 0,0721 + 0,1678 + 0,2397 = 0,4934.

Tổng quát, với bài toán có p > 0,5 nếu muốn sử dụng bảng số, có thể quy đổi như sau:

$$P(x \mid n; p) = P(n - x \mid n; 1 - p)$$

2.4. Công thức xác suất đầy đủ

Trong một số bài toán, ta làm hai việc ngẫu nhiên kế tiếp nhau. Kết quả cuối cùng phụ thuộc vào kết quả của từng bước, do đó để tính xác suất ta phải tập hợp các trường hợp từ cả hai bước. Xác suất được xét trên tất cả các trường hợp đó thường có dạng bài toán xác suất đầy đủ. Để đi đến công thức, xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.13. Có hai hộp giống hệt nhau bề ngoài, một hộp chứa 6 chính phẩm và 4 phế phẩm (gọi là hộp loại I), hộp kia chứa 8 chính phẩm và 4 phế phẩm (gọi là hộp loại II). Một người kiểm tra phải chọn ngẫu nhiên một trong hai hộp, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm.

(a) Tính xác suất người đó chọn được chính phẩm.

(b) Xác suất người đó chọn được chính phẩm sẽ là bao nhiêu nếu có 5 hộp, 2 hộp loại I và 3 hộp loại II?

(c) Xác suất người đó chọn được chính phẩm sẽ là bao nhiêu nếu có 5 hộp, 2 hộp loại I, 2 hộp loại II và 1 hộp loại III – loại chứa 3 chính phẩm và 7 phế phẩm.

Giải:

(a) Việc lựa chọn của người đó gồm hai bước: Bước thứ nhất là chọn hộp, bước thứ hai là từ hộp chọn được mới chọn sản phẩm.

Xác suất chọn được hộp loại I là 1/2, xác suất từ hộp này lấy được chính phẩm là 6/10.

Xác suất chọn được hộp loại II là 1/2, xác suất từ hộp này lấy được chính phẩm là 8/10.

Do đó xác suất để chọn được chính phẩm là:

P(chọn được chính phẩm) = *P*(chọn được hộp loại I) × *P*(từ hộp loại I chọn được chính phẩm) + *P*(chọn được hộp loại II) × *P*(từ hộp loại II chọn được chính phẩm)

$= \frac{1}{2}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{10}=0,3+0,4=0,7$

Hoặc nếu đặt ký hiệu cho ngắn gọn thì:

Đặt A_1 là biến cố chọn được hộp loại I; A_2 là biến cố chọn được hộp loại II; B là biến cố chọn được chính phẩm, thì ta có:

$$P(A_1)=\frac{1}{2};\ P(A_2)=\frac{1}{2};\ P(B|A_1)=\frac{6}{10};\ P(B|A_2)=\frac{8}{10}$$

Do đó xác suất chọn được chính phẩm sau hai bước lựa chọn là:

$$P(A)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{8}{10}\right)=0,7$$

(b) Khi có 5 hộp, 2 hộp loại I và 3 hộp loại II, thì:

Xác suất chọn được hộp loại I là 2/5, xác suất từ hộp này lấy được chính phẩm là 6/10.

Xác suất chọn được hộp loại II là 3/5, xác suất từ hộp này lấy được chính phẩm là 8/10.

Do đó xác suất chọn được chính phẩm sau hai bước lựa chọn là:

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\left(\frac{2}{5}\times\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{3}{5}\times\frac{8}{10}\right)=0,24+0,48=0,72$$

(c) Khi có 5 hộp, 2 hộp loại I, 2 hộp loại II và 1 hộp loại III, ta cần quan tâm đến trường hợp hộp loại III. Xác suất lấy được chính phẩm từ hộp loại III là 3/10.

Xác suất chọn được hộp loại I là 2/5, xác suất từ hộp này lấy được chính phẩm là 6/10.

Xác suất chọn được hộp loại II là 2/5, xác suất từ hộp này lấy được chính phẩm là 8/10.

Xác suất chọn được hộp loại II là 1/5, xác suất từ hộp này lấy được chính phẩm là 3/10.

Do đó xác suất chọn được chính phẩm sau hai bước lựa chọn là:

$$P(A)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$
$$=\left(\frac{2}{5}\times\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{8}{10}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}\right)=0,24+0,32+0,06=0,62$$

Từ đây ta tổng quát hóa khi ở bước thứ nhất có *n* biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$, và ứng với mỗi trường hợp của biến cố A_i thì biến cố B xảy ra với xác suất *P*(B | A_i) bằng công thức xác suất đầy đủ.

Định lý 2.9 – Xác suất đầy đủ: *Với $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là nhóm đầy đủ các biến cố, biến cố B có thể xảy ra đồng thời với một trong các biến cố đó, thì xác suất của B được tính bởi:*

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+\ldots+P(A_n)P(B|A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

Ví dụ 2.14. Trong số khách vào cửa hàng tỷ lệ nam là 60%, nữ là 40%. Tỷ lệ nam mua hàng là 30% và tỷ lệ nữ mua hàng là 35%. Hãy tính tỷ lệ mua hàng trong số khách vào cửa hàng.

Giải:

Đề bài đặt dưới dạng tỷ lệ, ta đổi sang xác suất.

Đặt B là biến cố "khách mua hàng".

A_1 là biến cố: "khách là nam" thì $P(A_1) = 0,6$ và $P(B \mid A_1) = 0,3$

A_2 là biến cố: "khách là nữ" thì $P(A_2) = 0,4$ và $P(B \mid A_2) = 0,35$

Xác suất để một khách mua hàng là:

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)\,P(B \mid A_2) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,35 = 0,32$$

Vậy tỷ lệ khách mua hàng là 32%.

Ví dụ 2.15. Một nhà đầu tư nhà đất phải chờ phê duyệt dự án tại cơ quan chức năng. Xác suất dự án được phê duyệt nhanh (ít hơn 1 tháng) là 0,2; được phê duyệt bình thường (từ 1 tháng đến 3 tháng) là 0,45, còn lại là chậm. Khả năng để dự án kịp tiến độ trong ba trường hợp nhanh, bình thường, và chậm tương ứng là 0,8; 0,5 và 0,34. Tính xác suất để dự án kịp tiến độ.

Giải:

Đặt B là biến cố "dự án kịp tiến độ".

- A_1 là biến cố "phê duyệt nhanh", thì $P(A_1) = 0,2$ và $P(B \mid A_1) = 0,8$
- A_2 là biến cố "phê duyệt bình thường", thì $P(A_2) = 0,45$ và $P(B \mid A_2) = 0,5$
- A_3 là biến cố "phê duyệt chậm", thì $P(A_3) = 1 - 0,2 - 0,45 = 0,35$ và $P(B \mid A_3) = 0,34$.

Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)\,P(B \mid A_2) + P(A_3)\,P(B \mid A_3)$$
$$= (0,2 \times 0,8) + (0,45 \times 0,5) + (0,35 \times 0,34) = 0,504$$

Ví dụ 2.16 (Tình huống dẫn nhập). Một doanh nghiệp phỏng vấn khách hàng về sản phẩm mới trước khi đưa sản phẩm ra thị trường. Trong số những khách hàng được phỏng vấn ngẫu nhiên xem có mua hàng không nếu doanh nghiệp tung ra sản phẩm mới thì có 18% trả lời "sẽ mua", 48% trả lời "có thể sẽ mua" và còn lại là 34% trả lời "không mua". Theo kinh nghiệm của doanh nghiệp, tỷ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm mới tương ứng với ba nhóm trên lần lượt là 45%, 25% và 1%.

Vậy tỷ lệ khách hàng tiềm năng sẽ mua sản phẩm mới là bao nhiêu phần trăm?

Giải:

Đặt B là biến cố "khách hàng sẽ mua sản phẩm mới"

A_1 là biến cố "khách hàng trả lời "sẽ mua" thì $P(A_1) = 0,18$ và $P(B \mid A_1) = 0,45$

A_2 là biến cố "khách hàng trả lời "có thể sẽ mua" thì $P(A_1) = 0,48$ và $P(B \mid A_2) = 0,25$

A_3 là biến cố "khách hàng trả lời "không mua" thì $P(A_1) = 0,34$ và $P(B \mid A_3) = 0,01$

Ba biến cố A_1, A_2, A_3 tạo thành nhóm đầy đủ, do đó áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3)$

$= 0,18 \times 0,45 + 0,48 \times 0,25 + 0,34 \times 0,01 = 0,204$

Vậy tỷ lệ khách sẽ mua sản phẩm mới là 20,4%

Tóm lược cuối bài

- Khi một biến cố có thể xem như tích của các biến cố khác thì để tính xác suất của biến cố này ta sẽ áp dụng định lí nhân xác suất.
- Để áp dụng định lí nhân xác suất thì cần xác định mối quan hệ giữa các biến cố trong tích là độc lập hay phụ thuộc.
- Khi một biến cố có thể xem như tổng của các biến cố khác thì để tính xác suất của biến cố này ta sẽ áp dụng định lí cộng xác suất.
- Để áp dụng định lí cộng xác suất thì cần xác định mối quan hệ giữa các biến cố trong tổng là xung khắc hay không xung khắc.
- Trong những bài toán tuân theo lược đồ Bernoulli thì để tính xác suất biến cố đang quan tâm xuất hiện bao nhiêu lần trong tổng số phép thử ta sẽ áp dụng công thức Bernoulli.
- Công thức xác suất đầy đủ được dùng để tính xác suất của một biến cố mà nó có thể xảy ra đồng thời với một trong các biến cố của một nhóm đầy đủ trong phép thử.

Câu hỏi ôn tập

1. Thế nào là xác suất có điều kiện? Nếu hai biến cố độc lập thì sao?
2. Xác suất tích của hai biến cố được tính như thế nào? Nếu hai biến cố độc lập thì sao?
3. Xác suất tổng của hai biến cố được tính như thế nào? Nếu hai biến cố xung khắc thì sao?
4. Xác suất của biến cố đối lập được tính như thế nào?
5. Thế nào là lược đồ Bernoulli?
6. Tính xác suất theo bài toán Bernoulli như thế nào?
7. Tính xác suất đầy đủ như thế nào?