Bài 1: BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

Mục tiêu

Bài 1 giới thiệu cho học viên một số khái niệm (phép thử, biến cố, xác suất, …) và các công cụ tính toán (định lý, công thức tính xác suất, …) cơ bản của lý thuyết Xác suất. Với các kiến thức nền tảng đó, học viên sẽ thực hiện các bài tập ứng dụng đơn giản của xác suất trong nhiều lĩnh vực khác nhau (kinh tế, xã hội, kỹ thuật, quản lý ra quyết định, …).

Thời lượng

- 8 tiết

Các kiến thức cần có

- Nhắc lại về giải tích tổ hợp;
- Quy tắc nhân;
- Chỉnh hợp lặp;
- Phép thử ngẫu nhiên và các loại biến cố;
- Khái niệm phép thử;
- Xác suất của biến cố;
- Định nghĩa cổ điển về xác suất;
- Định nghĩa thống kê về xác suất;
- Nguyên lý xác suất lớn, xác suất nhỏ;
- Các định lý và công thức xác suất;
- Xác suất có điều kiện;
- Công thức nhân xác suất;
- Công thức cộng xác suất;
- Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes;
- Công thức Bernouli.

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI

Tình huống

Công ty xử lý nước thải Hà Nội cần tính diện tích mặt Hồ Gươm Hà Nội để xử lý nước.

Câu hỏi

1. Nếu coi Hồ Gươm là một hình tròn, thì diện tích Hồ Gươm tính như thế nào?
2. Thực tế, Hồ Gươm không phải hình tròn, cũng không biểu diễn được dưới dạng các hàm. Vậy làm cách nào để tính diện tích mặt hồ?
3. Bạn đưa ra đề xuất để tính được thể tích đá vôi có thể khai thác được từ một quả núi?

1.1. Nhắc lại về giải tích tổ hợp

1.1.1. Quy tắc nhân

Giả sử một công việc hoặc một quá trình nào đó được chia thành k giai đoạn: có n_1 cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, n_2 cách thực hiện giai đoạn thứ hai, …, n_k cách thực hiện giai đoạn thứ k.

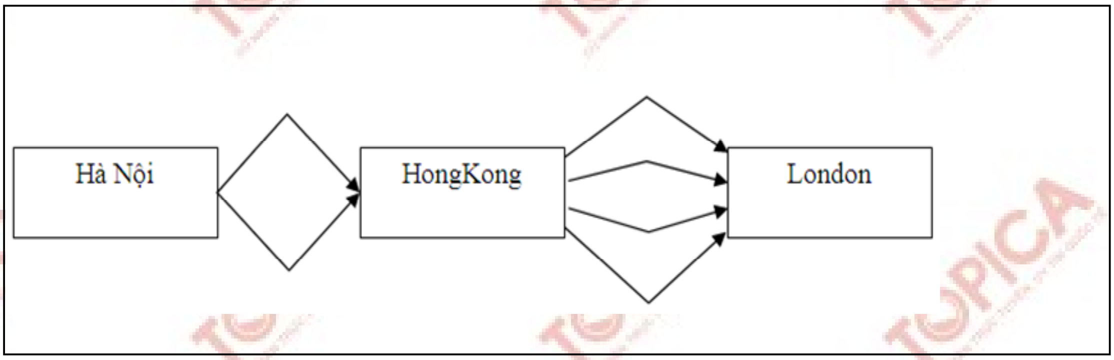
Khi đó ta có n cách thực hiện toàn bộ công việc (hoặc quá trình): $n = n_1\, n_2 \ldots n_k$

Ví dụ:

Để bay từ Hà Nội tới London phải qua trạm dừng chân tại Hong Kong, có 2 hãng hàng không phục vụ bay từ Hà Nội đến Hong Kong (Vietnam Airline và Pacific Airline) và có 4 hãng không phục vụ bay từ Hong Kong tới London (Air Hong Kong Limited, Cathay Pacific Airways, CR Airways và Hong Kong Airlines).

Vậy có n = 2 x 4 = 8 cách bay từ Hà Nội tới London (qua trạm dừng chân Hong Kong).

1.1.2. Chỉnh hợp



Hình 1.1: Giá trị của hàm phân phối F(x) xác định qua tích phân của hàm mật độ f(x)

Định nghĩa:

Chỉnh hợp chập k của n phần tử ($k \le n$) là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Ký hiệu A_n^k là chỉnh hợp chập k của n phần tử, lúc đó ta có công thức tính như sau:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1).$$

Ví dụ:

Có 5 đội bóng tham dự vòng chung kết bóng đá. Kết quả cuối cùng sẽ trao các huy chương “Vàng”, “Bạc” và “Đồng” cho 3 đội nhất, nhì và ba. Vậy có thể có bao nhiêu bộ ba các đội bóng được nhận huy chương “Vàng”, “Bạc” và “Đồng”?

Mỗi bộ ba các đội bóng được nhận huy chương "Vàng", "Bạc" và "Đồng" là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử, do đó số các khả năng chọn được các đội đoạt giải là:

$$A_5^3 = 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = 60.$$

1.1.3. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa:

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử $(k \le n)$ là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử không nhất thiết khác nhau, được chọn ra từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử được kí hiệu là $\overline{A}_n^k$ và có công thức tính là:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Ví dụ:

Có 6 ô tô cần sửa và ghé ngẫu nhiên vào 3 trung tâm bảo dưỡng trên cùng một tuyến phố. Có bao nhiêu trường hợp có thể xảy ra?

Ta thấy việc đưa 6 ô tô vào 3 trung tâm để sửa là một chỉnh hợp lặp chập 6 của 3 (mỗi lần đưa 1 ô tô vào 1 trung tâm sửa chữa xem như ta đã chọn 1 trong 3 trung tâm. Do có 6 chiếc xe nên việc chọn trung tâm sửa được tiến hành 6 lần).

Vậy số trường hợp có thể xảy ra là:

$$\overline{A}_3^6 = 3^6 = 729.$$

1.1.4. Hoán vị

Định nghĩa:

Hoán vị của m phần tử là một nhóm có thứ tự gồm đủ m phần tử đã cho.

Số hoán vị của m phần tử được ký hiệu là P_m và được tính bằng công thức:

$$P_m = m!$$

Ví dụ:

Một bàn trong lớp học có 5 sinh viên. Có mấy cách xếp chỗ ngồi?

Mỗi cách xếp chỗ của 5 sinh viên ở một bàn là một hoán vị của 5 phần tử. Số cách xếp sẽ là:

$$P_4 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120.$$

1.1.5. Tổ hợp

Định nghĩa:

Tổ hợp chập k của n phần tử $(k \le n)$ là một nhóm không phân biệt thứ tự, gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Số tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu là C_n^k và được tính qua công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

CHÚ Ý

Với công thức tổ hợp, có một số đẳng thức đáng nhớ sau đây:

$0! = 1$ (quy ước)

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (học viên có thể tự chứng minh)

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (học viên có thể tự chứng minh)

Ví dụ:

Một đề thi gồm 3 câu hỏi lấy trong một ngân hàng 50 câu hỏi cho trước. Có thể lập được bao nhiêu đề thi khác nhau?

Số đề thi có thể lập là:

$$C_{50}^3 = \frac{50!}{3!.(47)!} = \frac{50.49.48}{3.2.1} = 19600.$$

1.2. Phép thử ngẫu nhiên và các loại biến cố

1.2.1. Khái niệm phép thử

Khi tiến hành một thí nghiệm, một phép đo lường hoặc một lần quan sát, chúng ta có thể coi như đang thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản nào đó. Theo lý thuyết xác suất, đó là thực hiện một phép thử.

Định nghĩa :

Phép thử là sự thực hiện một nhóm các điều kiện xác định (có thể lặp lại nhiều lần) để quan sát một hiện tượng nào đó có xảy ra hay không. Hiện tượng có thể xảy ra hoặc không xảy ra trong kết quả của phép thử gọi là biến cố (hoặc gọi là kết cục).

Để làm rõ khái niệm này, chúng ta hãy xét các ví dụ sau đây:

Ví dụ 1:

Gieo một đồng xu (cân đối, đồng chất, trên một mặt phẳng cứng) chính là thực hiện một phép thử. Đồng xu lật mặt nào đó (sấp, ngửa) là các biến cố.

Ví dụ 2:

Gieo một con súc sắc (cân đối, đồng chất, trên một mặt phẳng cứng) là một phép thử. Súc sắc gieo được mặt mấy chấm (1, 2, 3, 4, 5, 6) là các biến cố.

Ví dụ 3:

Bắn một viên đạn vào một tấm bia là một phép thử. Viên đạn trúng hay trượt bia là các biến cố.

Hình 1.2: Mặt trời mọc từ đằng đông là một biến cố chắc chắn

Phân loại các biến cố

Tiếp theo, để đơn giản cho việc trình bày, khi đặt tên các biến cố ta thường dùng dấu bằng "=", chẳng hạn A ="lấy được sản phẩm tốt". Giả sử phép thử G được thực hiện, khi ấy biến cố xảy ra có thể được phân loại theo nhiều cách khác nhau:

CHÚ Ý

Trong nội dung bài giảng này, khi nói gieo đồng xu, gieo con súc sắc ta sẽ giả thiết các điều kiện “cân đối”, “đồng chất”, “trên một mặt phẳng cứng” được thoả mãn.

1.2.1.1. Xét dưới góc độ có xảy ra hay không trong kết quả phép thử G, ta có các loại biến cố

- ***Biến cố ngẫu nhiên*** là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi phép thử được thực hiện, thường được ký hiệu bằng các chữ in hoa: A, B, C,. .. Các biến cố ngẫu nhiên được gọi là *đồng khả năng* nếu chúng có khả năng xuất hiện như nhau trong một phép thử.
- ***Biến cố chắc chắn*** là biến cố nhất định sẽ xảy ra trong kết quả phép thử. Biến cố chắc chắn được ký hiệu là Ω hay U.
- ***Biến cố không thể có*** là biến cố nhất định không xảy ra trong kết quả phép thử và được ký hiệu là $\varnothing$ hay V.

  Ví dụ 4:

  Thực hiện phép thử tung 1 con súc sắc cân đối, đồng chất. Khi ấy :
  - Biến cố tung được mặt chẵn chấm là biến cố ngẫu nhiên,
  - Biến cố tung được mặt có số chấm nhỏ hơn 7 là biến cố chắc chắn,
  - Biến cố tung được mặt 8 chấm là biến cố không thể có.

1.2.1.2. Xét dưới góc độ có thể phân tích nhỏ biến cố hay không, ta có các loại biến cố

- ***Biến cố sơ cấp*** là một biến cố không thể phân tích thành các biến cố nhỏ hơn.

- ***Biến cố phức hợp*** là một biến cố có thể phân tích thành các biến cố nhỏ hơn.

  Ví dụ 5:

  Biến cố đồng xu tung được mặt sấp hay ngửa là biến cố sơ cấp.

  Ví dụ 6:

  Tung con súc sắc được mặt có số chấm là chẵn là một biến cố phức hợp, vì có thể phân tích nó thành các biến cố tung được mặt có 2, 4 và 6 chấm.

1.2.1.3. Xét dưới góc độ kết hợp giữa các biến cố khác, ta có các loại biến cố

- ***Biến cố tổng***: Biến cố C được gọi là tổng 2 biến cố A và B, ký hiệu là $C = A + B$, nếu C xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Biến cố tổng cũng là biến cố phức hợp.

  Một cách tổng quát, tổng của n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ là một biến cố mà nó xảy ra nếu ít nhất một trong các biến cố A_i xảy ra, ký hiệu

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 ... + A_n .$$

  Ví dụ 7:

  Một công ty có hai cửa hàng đại lý. Nếu gọi A là biến cố đại lý 1 bán được hàng, B là biến cố đại lý 2 bán được hàng, biến cố tổng $C = A + B$ sẽ là biến cố công ty bán được hàng.

  Ví dụ 8:

  Một người khách du lịch đến thăm quan một đất nước có 7 địa điểm du lịch nổi tiếng. Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_7$ lần lượt là các biến cố người khách du lịch thăm quan địa điểm du lịch thứ i, khi đó biến cố tổng là:

$$A = \sum_{i=1}^{7} A_i .$$

  A = "người khách du lịch đó ghé qua thăm ít nhất 1 trong số 7 địa điểm du lịch trên".

- ***Biến cố tích***: Biến cố C được gọi là tích của hai biến cố A và B, ký hiệu AB, nếu C xảy ra khi và chỉ khi cả A và B cùng xảy ra.

  Tích của n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ là một biến cố mà nó xảy ra nếu tất cả các biến cố A_i đồng thời xảy ra, ký hiệu:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 ... A_n .$$

Hình 1.3: Quay được ba số 7 và bạn trúng giải độc đắc

Ví dụ 9:

Gọi A_1 là biến cố đại lý 1 không tiêu thụ được sản phẩm của công ty, B_1 là biến cố đại lý 2 không tiêu thụ được sản phẩm của công ty, biến cố tích $C_1 = A_1B_1$ là biến cố công ty không tiêu thụ được sản phẩm.

- ***Biến cố hiệu:*** Hiệu của 2 biến cố A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra nhưng B không xảy ra.

Ví dụ 10:

Giả sử biến cố A = "gieo 1 súc sắc được mặt chẵn chấm" và biến cố B = "gieo 1 súc sắc được mặt 2 chấm". Khi đó biến cố $C = A \setminus B$ là biến cố "gieo 1 con súc sắc được mặt 4 chấm hoặc 6 chấm".

1.2.1.4. Xét quan hệ giữa các biến cố trong kết quả phép thử, ta có các loại biến cố

- ***Biến cố xung khắc***: Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc nhau* nếu chúng không thể đồng thời xảy ra khi phép thử được thực hiện, tức là nếu $AB = \phi$.

Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ gọi là *đôi một xung khắc nhau* (xung khắc từng đôi) nếu hai biến cố bất kỳ trong chúng xung khắc với nhau, tức là:

$$A_iA_j = \phi \qquad (\forall i \neq j; i, j = 1 \div n).$$

Ví dụ 11:

Quan sát một doanh nghiệp hoạt động trong 1 năm, A là biến cố doanh nghiệp làm ăn có lãi, B là biến cố doanh nghiệp làm ăn thua lỗ. Khi đó A và B là 2 biến cố xung khắc và $AB = \phi$.

Định nghĩa :

Nhóm biến cố $A_1, A_2 ..., A_n$ lập nên một hệ đầy đủ các biến cố (nhóm đầy đủ các biến cố), nếu thỏa mãn hai điều kiện:

- o Tổng của chúng là biến cố chắc chắn:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$$

- o Các biến cố $A_1, A_2, ... A_n$ đôi một xung khắc với nhau.

Ví dụ 12:

Gieo một con xúc sắc và ký hiệu

A_i = "xuất hiện mặt có i chấm", i = 1,...,6;

A = "xuất hiện mặt có số chấm chẵn";

B = "xuất hiện mặt có số chấm lẻ";

Các biến cố A_1, A_2,... ,A_6 lập nên một hệ đầy đủ các biến cố; các biến cố A, B cũng lập nên một hệ đầy đủ các biến cố.

- ***Biến cố đối lập***: Biến cố không xảy ra biến cố A được gọi là biến cố đối lập với biến cố A, ký hiệu là $\overline{A}$. Ta có:

$$A + \overline{A} = \Omega \text{ và } A\overline{A} = \phi.$$

- ***Biến cố độc lập***: Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không ảnh hưởng gì đến xác suất xảy ra biến cố kia và ngược lại.

  Khái niệm độc lập có thể tổng quát cho nhiều biến cố:

  - Các biến cố $A_1, A_2 ... A_n$ được gọi là *độc lập từng đôi* nếu mỗi cặp biến cố bất kỳ trong chúng độc lập với nhau.
  - Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi *là độc lập toàn phần* (độc lập trên toàn thể) nếu mỗi biến cố trong chúng độc lập với tổ hợp của một số bất kỳ các biến cố còn lại.

Hình 1.4: Thành tích của một vận động viên trong mỗi lần chạy là độc lập với nhau

- ***Biến cố phụ thuộc***: Hai biến cố A và B không độc lập được gọi là 2 *biến cố phụ thuộc nhau.*

Ví dụ 13:

Có hai hộp sản phẩm. Hộp I chứa 6 sản phẩm tốt và 4 sản phẩm xấu, hộp II chứ 7 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên ở mỗi hộp ra một sản phẩm. Gọi A = "lấy được sản phẩm tốt từ hộp I", B = "lấy được sản phẩm tốt từ hộp II". Khi đó dễ thấy A và B là hai biến cố độc lập.

Trong trường hợp thực hiện phép thử lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm ở hộp I bỏ sang hộp II, rồi lấy từ hộp II 1 sản phẩm nữa thì 2 biến cố A và B nói trên là 2 biến cố phụ thuộc nhau.

Một số khái niệm khác về quan hệ giữa các biến cố được đưa ra trong định nghĩa tiếp theo đây:

Định nghĩa :

- Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B nếu A xảy ra dẫn đến B xảy ra. Khi đó ta ký hiệu $A \subset B$.
- Biến cố A và B được gọi là tương đương khi $A \subset B$ và $B \subset A$. Khi ấy ta ký hiệu A = B.
- Mọi biến cố ngẫu nhiên A đều biểu diễn được dưới dạng tổng của một 1 số biến cố sơ cấp nào đó. Các biến cố sơ cấp trong tổng này được gọi là các biến cố thuận lợi cho biến cố A.
- Biến cố chắc chắn Ω là tổng của mọi biến cố sơ cấp có thể. Do đó biến cố Ω còn được gọi là không gian các biến cố sơ cấp.

Ví dụ 14:

Trong phép thử gieo một đồng xu thì không gian biến cố sơ cấp là:

$$\Omega = \{S; N\}.$$

Trong phép thử gieo một con súc sắc thì không gian biến cố sơ cấp là:

$$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}.$$

Nhận xét

Qua nội dung đã trình bày trên đây, ta thấy:

- Các khái niệm biến cố tổng, tích, hiệu, đối lập tương ứng với các khái niệm hợp, giao, hiệu, phần bù của lý thuyết tập hợp. Ta có thể áp dụng các phép toán trên các tập hợp cho các phép toán trên các biến cố. Cụ thể ta có

$$A \subset A+B; \qquad AB \subset A;$$
$$A(B+C) = AB + AC; \qquad A+B = B+A$$
$$A(B+C) = (A+B)+C; \qquad AB = BA;$$
$$A(BC) = (AB)C = (AC)B$$

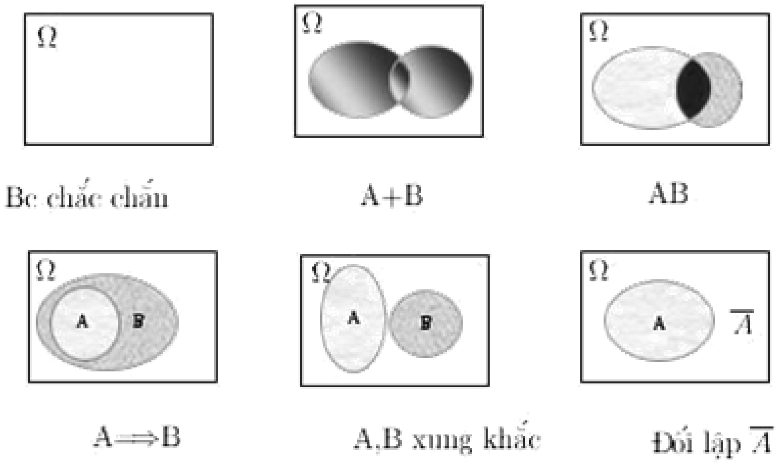
- Hai biến cố đối lập nhau lập thành một hệ đầy đủ biến cố.
- Quy tắc đối ngẫu De Morgan có thể áp dụng được cho các biến cố:

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}\ ; \qquad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Quy tắc de Morgan cũng đúng với n biến cố.

Augustus De Morgan(1806 -1871)

- Có thể dùng biểu đồ *Venn* để miêu tả các biến cố:



Hình 1.5: Biểu diễn các loại biến cố bằng biểu đồ Venn

1.3. Xác suất của biến số

Cho A là một biến cố trong phép thử G. Rõ ràng việc A xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện phép thử là không thể đoán trước được. Tuy nhiên vẫn có thể quan tâm tới khả năng xảy ra biến cố A trong phép thử đã cho, khả năng này được gọi là xác suất của biến cố A, ký hiệu là P(A) (P là viết tắt của từ *Probability*). Trong mục này sẽ chỉ đề cập một số định nghĩa đơn giản về xác suất.

1.3.1. Định nghĩa cổ điển về xác suất

Định nghĩa :

Giả sử phép thử có n kết cục duy nhất đồng khả năng có thể xảy ra, trong đó có m kết cục đồng khả năng thuận lợi cho biến cố A xảy ra. Khi đó xác suất của biến cố A là tỷ số giữa số kết cục thuận lợi cho A trong phép thử và tổng số các kết cục duy nhất đồng khả năng xảy ra trong phép thử đó:

$$P(A)=\frac{m}{n}\ . \qquad (1.1)$$

Ví dụ 1:

Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để:

- Xuất hiện mặt 6 chấm,
- Xuất hiện mặt có số chấm chẵn.

Giải: Khi gieo con xúc sắc thì có 6 kết cục duy nhất đồng khả năng xảy ra, n = 6.

- Gọi A là biến cố "xuất hiện mặt 6 chấm", khi đó số kết cục thuận lợi cho A là $m_A = 1$. Vậy $P(A)=\frac{1}{6}$.

- Gọi B là biến cố "xuất hiện mặt có số chấm chẵn", khi đó số kết cục thuận lợi cho B là $m_B = 3$. Vậy:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2:

Một hộp có 6 sản phẩm tốt và 4 sản phẩm xấu.

- Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra một sản phẩm, tính xác suất để lấy được sản phẩm tốt.
- Lấy ngẫu nhiên đồng thời từ hộp ra hai sản phẩm, tính xác suất để lấy được hai sản phẩm tốt.
- Lấy ngẫu nhiên có hoàn lại lần lượt từ hộp ra hai sản phẩm, tính xác suất để lấy được hai sản phẩm tốt.

Giải: Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố ở câu hỏi a, b, c.

- Khi lấy ngẫu nhiên từ hộp ra một sản phẩm, có 10 sự lựa chọn đồng khả năng, trong đó có 6 cách thuận lợi để lấy được sản phẩm tốt. Vậy:

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

- Khi lấy ngẫu nhiên từ hộp ra hai sản phẩm, có C_{10}^2 sự lựa chọn đồng khả năng, trong đó có C_6^2 cách thuận lợi để lấy được hai sản phẩm tốt. Vậy:

$$P(B) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{5.6}{9.10} = \frac{1}{3}.$$

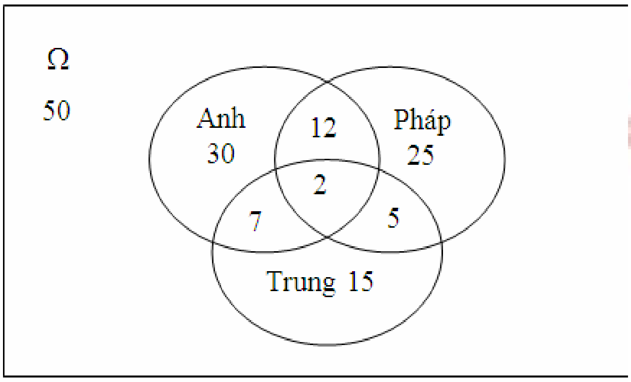
- Lần thứ nhất lấy ngẫu nhiên từ hộp ra một sản phẩm, ta có 10 sự lựa chọn đồng khả năng, khi đã biết sản phẩm thứ nhất là tốt hay xấu rồi hoàn lại sản phẩm này vào hộp sau đó lấy ngẫu nhiên lần thứ hai, rõ ràng lần này cũng có 10 sự lựa chọn đồng khả năng. Vậy khi lấy ngẫu nhiên có hoàn lại, lần lượt từ hộp ra hai sản phẩm ta có 10.10 sự lựa chọn đồng khả năng. Lập luận tương tự ta thấy có 6.6 cách thuận lợi để cả hai lần đều lấy được sản phẩm tốt. Vậy:

$$P(C) = \frac{6.6}{10.10} = \frac{9}{25}.$$

Ví dụ 3:

Một lớp gồm 50 học sinh trong đó có 30 học sinh giỏi tiếng Anh, 25 học sinh giỏi tiếng Pháp, 15 học sinh giỏi tiếng Trung, 12 học sinh giỏi tiếng Anh và tiếng Pháp, 7 học sinh giỏi tiếng Anh và tiếng Trung, 5 học sinh giỏi tiếng Pháp và tiếng Trung, 2 học sinh giỏi cả ba thứ tiếng trên. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp để kiểm tra. Tính xác suất để:

- Học sinh đó giỏi ít nhất một trong ngoại ngữ trên.
- Học sinh đó chỉ giỏi tiếng Anh
- Học sinh đó giỏi hai trong ba ngoại ngữ trên.



Hình 1.7: Biểu đồ về phân bố trình độ ngoại ngữ

Giải:

Gọi A, B, C tương ứng là biến cố trong câu hỏi a, b, c. Sử dụng sơ đồ Venn như hình vẽ, ta có các kết quả thu được là:

$$P(A)=\frac{48}{50}=\frac{24}{25};$$

$$P(B)=\frac{13}{50};$$

$$P(C)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}.$$

Ví dụ 4:

Trong một nhóm gồm N sản phẩm cùng loại có M sản phẩm đạt tiêu chuẩn và $N-M$ sản phẩm không đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc n sản phẩm. Tính xác suất trong số sản phẩm lấy ra có m sản phẩm đạt tiêu chuẩn $(0 \le m \le n)$.

Giải:

Gọi A là biến cố "trong n sản phẩm lấy ra có m sản phẩm đạt tiêu chuẩn". Phép thử có tất cả C_N^n kết cục đồng khả năng. Do có thể lấy m sản phẩm đạt tiêu chuẩn từ M sản phẩm theo C_N^m cách, còn $n-m$ sản phẩm không đạt tiêu chuẩn có thể lấy từ $N-M$ sản phẩm theo C_{N-M}^{n-m} cách, nên có $C_M^m.C_{N-M}^{n-m}$ thuận lợi cho biến cố A. Vậy:

$$P(A)=\frac{C_M^m.C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

CHÚ Ý

Định nghĩa cổ điển về xác suất có ưu điểm là dễ vận dụng tuy nhiên định nghĩa này chỉ áp dụng được với các phép thử có hữu hạn kết cục đồng khả năng xảy ra, trong nhiều bài toán thực tế, việc tính hết các kết cục của một phép thử không dễ dàng, bên cạnh đó điều kiện các kết cục đồng khả năng trên thực tế thường khó thỏa mãn. Bên cạnh định nghĩa xác suất cổ điển, ta sẽ xét thêm định nghĩa thống kê về xác suất

1.3.2. Định nghĩa thống kê về xác suất

Tiến hành phép thử n lần, giả sử có m lần biến cố A xuất hiện. Khi đó số m được gọi là tần số xuất hiện biến cố A và tỷ số $\frac{m}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện của biến cố A trong phép thử. Ký hiệu :

$$f(A) = \frac{m}{n} \quad (1.2)$$

Hình 1.7: Tỉ lệ nam nữ theo thống kê là xấp xỉ 1:1

Định nghĩa :

Khi cho số phép thử n tăng lên vô hạn thì tần suất xuất hiện của biến cố A sẽ hội tụ về một giá trị nhất định, đó chính là xác suất xuất hiện biến cố A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f(A) \quad (1.3)$$

Khi n khá lớn, với sai số cho phép, có thể lấy tần suất $f(A)$ thay thế cho $P(A)$.

Ví dụ 5:

Một xạ thủ bắn 1000 viên đạn vào bia. Có xấp xỉ 50 viên đạn trúng bia.
Khi đó xác suất để xạ thủ bắn trúng bia là 50/1000 = 5%.

Ví dụ 6

Khi gieo một đồng xu nhiều lần người ta thu được kết quả sau:

Người thí nghiệm	Số lần gieo (n)	Số lần sấp (m)	Tần suất (f)
Buffon	4040	2048	0,5080
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Từ đó có thể thấy rằng khi số lần gieo càng lớn, tần suất xuất hiện mặt sấp càng gần với xác suất xuất hiện mặt sấp là 0,5.

Từ các định nghĩa trên dễ dàng suy ra một số tính chất đơn giản của xác suất như sau:

- $0 \le P(A) \le 1$ với mọi biến cố A
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\phi) = 0$
- Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \le P(B)$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$

CHÚ Ý

Định nghĩa thống kê về xác suất không đòi phép thử phải có hữu hạn kết cục đồng khả năng nhưng lại yêu cầu phải lặp lại nhiều lần phép thử, trong một số trường hợp điều này là không hiện thực.

Để có một nghiên cứu đầy đủ về lý thuyết Xác suất, người ta thường sử dụng định nghĩa xác suất theo hệ tiên đề của Kolmogorov. Trong phạm vi bài giảng này sẽ không trình bày định nghĩa đó.

1.3.3. Nguyên lý xác suất lớn, xác suất nhỏ

Trên thực tế, các sự kiện mà khả năng xảy ra rất lớn (gần bằng 1) thì có thể coi như chắc chắn xảy ra trong kết quả 1 phép thử, các sự kiện mà khả năng xảy ra rất nhỏ (gần bằng 0) thì có thể coi như sẽ không xảy ra trong kết quả 1 phép thử. Tuỳ từng bài toán cụ thể mà có thể chấp nhận các mức xác suất lớn, nhỏ thích hợp.

1.4. Các định lý và công thức xác suất

1.4.1. Xác suất có điều kiện

Thông thường khi nói đến xác suất của biến cố A ta hiểu xác suất đó được tính trong một phép thử xác định. Trong nhiều bài toán, đôi khi ngoài các điều kiện ban đầu còn có thêm những điều kiện phụ có thể ảnh hưởng đến khả năng xuất hiện biến cố A.

Định nghĩa:

Xác suất của biến cố A được tính với giả thiết biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất của A với điều kiện B, ký hiệu là $P(A|B)$.

Ví dụ 1:

Có hai hộp sản phẩm. Hộp I có 7 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu, hộp II có 6 sản phẩm tốt và 4 sản phẩm xấu, lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ hộp I bỏ vào hộp II sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp II ra

Hình 1.8: Xác suất có điều kiện

một sản phẩm. Xét xác suất để sản phẩm lấy ra từ hộp II là tốt.

Gọi A = "sản phẩm từ hộp I bỏ sang hộp II là tốt", B = "sản phẩm lấy từ hộp II là tốt". Có hai trường hợp xảy ra.

- Nếu sản phẩm từ hộp I bỏ sang hộp II là tốt, ta có:

$$P(B|A) = \frac{7}{11}.$$

- Nếu sản phẩm từ hộp I bỏ sang hộp II là xấu, ta có:

$$P(B|\overline{A}) = \frac{6}{11}.$$

CHÚ Ý

Ta có thể định nghĩa lại khái niệm biến cố độc lập một cách chính xác như sau: Hai biến cố A và B *độc lập* là 2 biến cố thỏa mãn điều kiện

$$P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B}) \text{ và } P(B) = P(B|A) = P(B|\overline{A})$$

1.4.2. Công thức nhân xác suất

Cho A và B là hai biến cố trong một phép thử. Từ định nghĩa xác suất, ta chứng minh được định lý sau:

Định lý (Định lý nhân xác suất): Xác suất của tích hai biến cố bằng tích xác suất của một trong chúng nhân với xác suất có điều kiện của biến cố kia với giả thiết biến cố thứ nhất đã xảy ra:

$$P(AB) = P(A)\times P(B|A) = P(B)\times P(A|B) \qquad (1.4)$$

Hình 1.9: Nhân xác suất

Từ Định lý nhân xác suất, dễ dàng suy ra được các hệ quả sau:

Hệ quả 1:

- Nếu $P(B) = 0$ thì $P(A|B)$ không xác định.
- Nếu $P(B) > 0$ thì:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1.5)$$

- Tương tự, nếu $P(A) > 0$ thì:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Hệ quả 2:

Hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

$$P(AB) = P(A)\times P(B).$$

Bằng quy nạp có thể tổng quát định lý nhân xác suất với n biến cố như sau:

Định lý :

Nếu $P\left(A_1A_2...A_{n-1}\right)>0$ thì:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times...\times P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}). \qquad (1.6)$$

Từ đó dễ dàng thu được các hệ quả sau:

Hệ quả 3:

Nếu các biến cố $A_1, A_2..., A_n$ độc lập toàn phần thì ta có:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\times P(A_2)\times...\times P(A_n). \qquad (1.7)$$

Ví dụ 2:

Một hộp đựng 8 bi xanh và 7 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi sau đó lấy tiếp bi thứ hai. Tính xác suất lần thứ nhất lấy được bi xanh và lần thứ hai lấy được bi đỏ.

Giải: Gọi A là biến cố lần thứ nhất được bi xanh, B là biến cố lần thứ hai được bi đỏ. Ta có:

$$P(AB)=P(A)\times P(B|A)=\frac{8}{15}\times\frac{7}{14}=\frac{4}{15}.$$

Ví dụ 3:

Một công nhân đứng 3 máy, biết các máy hoạt động độc lập với nhau, xác suất để trong thời gian T máy 1, 2, 3 không bị hỏng hóc tương ứng là 0,9; 0,8; 0,7. Tính xác suất để cả 3 máy đều bị hỏng trong thời gian trên.

Giải: Gọi A, B, C tương ứng là sự kiện máy 1, 2, 3 không bị hỏng trong thời gian T. Theo giả thiết, ta có:

$$P(A)=0,9;$$
$$P(B)=0,8;$$
$$P(C)=0,7.$$

Xác suất tương ứng để mỗi máy bị hỏng trong thời gian T là:

$$P(\overline{A})=0,1;$$
$$P(\overline{B})=0,2;$$
$$P(\overline{C})=0,3.$$

Do các máy hoạt động độc lập với nhau nên các biến cố $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ độc lập toàn phần. Vậy xác suất để cả ba máy bị hỏng trong thời gian T là:

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A})\times P(\overline{B})\times P(\overline{C})=0,1\times 0,2\times 0,3=0,006.$$

CHÚ Ý

Hệ quả 3.2 cung cấp một phương pháp dễ thực hành để kiểm tra tính độc lập: Hai biến cố A và B là *độc lập* khi và chỉ khi

$$P(AB)=P(A)\times P(B)$$

1.4.3. Công thức cộng xác suất

Cho A và B là hai biến cố. Từ định nghĩa xác suất, ta chứng minh được định lý sau:

Định lý :

Xác suất của tổng hai biến cố bằng tổng các suất của chúng trừ đi xác suất của tích các biến cố ấy:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.8)$$

Từ định lý 3.3, dễ dàng suy ra được các hệ quả sau:

Hệ quả 4:

Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì ta có:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1.9)$$

Hệ quả 5:

Công thức tính xác suất của tổng n biến cố trong trường hợp các biến cố

$A_1, A_2,..., A_n$ đôi một xung khắc nhau. Cụ thể, ta có:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n). \qquad (1.10)$$

Hơn nữa, nếu $A_1, A_2,..., A_n$ là một hệ thống đầy đủ biến cố trong một phép thử thì:

$$P(A_1)+P(A_2)+...P(A_n)=1. \qquad (1.11)$$

Hệ quả 6:

Đối với mọi biến cố A ta đều có:

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (1.12)$$

Ví dụ 4:

Hai xạ thủ mỗi người bắn một phát vào bia. Xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,7 và của người thứ hai là 0.8. Tính xác suất để có ít nhất 1 phát đạn trúng bia.

Giải*:* Gọi A là biến cố xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia, B là biến cố xạ thủ thứ hai bắn trúng bia. Ta có:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Vì A và B độc lập nên:

$$P(AB)=P(A).P(B)=0,7\times 0,8=0,56.$$

Vậy: $\quad P(A+B)=0,7+0,8-0,56=0,94.$

Ví dụ 5:

Một sản phẩm xuất xưởng phải qua ba lần kiểm tra. Xác suất để một phế phẩm bị loại ở lần kiểm tra đầu là 0,8. Đồng thời, nếu ở lần kiểm tra đầu sản phẩm không bị loại thì xác suất nó bị loại ở lần thứ hai là 0,9. Tương tự nếu lần thứ hai nó cũng không bị loại thì xác suất nó bị loại ở lần kiểm tra thứ ba là 0,95. Tính xác suất để một phế phẩm bị loại qua ba lần kiểm tra.

Giải: Đặt A = "phế phẩm bị loại qua ba lần kiểm tra", A_i = "phế phẩm bị loại ở lần kiểm tra thứ i", i = 1, 2, 3. Ta có A là tổng của ba biến cố xung khắc

$$A = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 .$$

Do đó:

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$= 0,8 + 0,2 \times 0,9 + 0,2 \times 0,1 \times 0,95 = 0,999.$$

Tính theo cách khác, ta có:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) = 1 - 0,2 \times 0,1 \times 0,05 = 0,999.$$

1.4.4. Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

1.4.4.1. Công thức xác suất đầy đủ

Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là một hệ đầy đủ các biến cố trong một phép thử và *A* là một biến cố trong phép thử đó. Giả sử ta biết các xác suất $P(A_i)$ và $P(A|A_i)$ với mọi $i = 1,...,n$. Khi đó xác suất của biến cố A được tính theo công thức:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(A|A_i). \qquad (1.13)$$

Công thức trên được gọi là công thức xác suất đầy đủ.

Ví dụ 6:

Có 5 hộp bóng đèn, trong đó gồm 3 hộp loại 1 mỗi hộp có 9 bóng chất lượng tốt và 1 bóng chất lượng kém. Hai hộp loại 2 mỗi hộp gồm 4 bóng chất lượng tốt và hai bóng chất lượng kém. Lấy ngẫu nhiên một hộp và từ đó rút ra một bóng đèn. Tìm xác suất để bóng lấy ra là bóng đèn có chất lượng kém.

Giải: Gọi A là biến cố "bóng đèn lấy ra là bóng có chất lượng kém",

A_1 là biến cố "hộp lấy ra là hộp loại 1",

A_2 là biến cố "hộp lấy ra là hộp loại 2".

Vì việc chọn hộp bóng đèn chỉ có thể là hộp loại 1 hoặc loại 2 nên A_1 và A_2 lập thành một hệ đầy đủ các biến cố. Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(A) = P(A_1) \times P(A|A_1) + P(A_2) \times P(A|A_2).$$

Theo thông tin trên ta có:

$$P(A_1) = \frac{3}{5}; \qquad P(A_2) = \frac{2}{5};$$

$$P(A|A_1) = \frac{1}{10}; \qquad P(A|A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Vậy: $$P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{29}{150}.$$

Ví dụ 7:

Có 2 lô sản phẩm. Lô 1 có 50 sản phẩm trong đó có 20 sản phẩm xấu. Lô 2 có 40 sản phẩm, trong đó có 15 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên một lô và từ đó lấy ra 1 sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt.

Giải: Ký hiệu H_i là biến cố "Sản phẩm lấy ra từ lô i", i = 1, 2. Khi đó $\{H_1, H_2\}$ lập thành hệ đầy đủ các biến cố. Đặt A là biến cố "Sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt" thì theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A) = P(H_1)\times P(A|H_1) + P(H_2)\times P(A|H_2)$$

$$P(A) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{8} = \frac{49}{80}.$$

1.4.4.2. Công thức Bayes

Với cùng giả thiết như trong công thức xác suất đầy đủ, thêm điều kiện phép thử đã được thực hiện và kết quả là biến cố A xảy ra, ta quan tâm đến việc A xảy ra cùng với biến cố A_i nào của hệ đầy đủ biến cố trên. Theo định lý nhân xác suất ta có:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A_iA)}{P(A)} = \frac{P(A_i)\times P(A|A_i)}{P(A)}. \qquad (1.14)$$

Công thức trên gọi là công thức Bayes.

Trong công thức đó, các xác suất $P(A_i|A)$ thường được gọi là các *xác suất hậu nghiệm*, còn các xác suất $P(A_i)$ được gọi là *xác suất tiên nghiệm*.

Ví dụ 8:

Hai máy sản xuất ra cùng một loại linh kiện như nhau. Các linh kiện này được đóng chung vào một thùng. Năng suất của máy thứ hai gấp đôi năng suất của máy thứ nhất. Máy thứ nhất sản xuất trung bình được 63% linh kiện loại tốt, còn máy thứ hai được 81% linh kiện loại tốt. Từ thùng hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện thì thấy được linh kiện loại tốt. Tìm xác suất để linh kiện đó là do máy thứ nhất sản xuất.

Giải: Ký hiệu A_i là biến cố "linh kiện do máy thứ i sản xuất", i = 1, 2 và A là biến cố "linh kiện lấy ra thuộc loại tốt". Ta cần tìm $P(A_1|A)$

$$P(A_1) = \frac{1}{3}; \qquad P(A|A_1) = \frac{2}{3}; \qquad P(A) = \frac{1}{3}\times 0,63 + \frac{2}{3}\times 0,81 = 0,75.$$

Theo công thức Bayes ta có:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)\times P(A|A_1)}{P(A)}.$$

Vậy:

$$P(A_1|A) = \frac{\frac{1}{3}\times 0,63}{0,75} = 0,28.$$

Ví dụ 9:

Một dây chuyền sản xuất các loại bộ phận khác nhau của một thiết bị: các bộ phận phức tạp chiếm 35%, các bộ phận đơn giản chiếm 65% tổng số linh kiện của toàn bộ thiết bị. Xác suất hỏng sau khoảng 8 năm hoạt động của các loại bộ phận của thiết bị tương ứng là 15% và 35%. Máy đang hoạt động bỗng bị hỏng, hãy tính xác suất bị hỏng của từng loại bộ phận cấu tạo máy (giả thiết các loại bộ phận cấu tạo thiết bị không hỏng đồng thời).

Giải:

Gọi A là biến cố máy bị hỏng,

A_i là biến cố linh kiện bị hỏng thuộc loại i, với i = 1,2.

Khi đó các biến cố A_i lập nên một hệ đầy đủ biến cố. Ta cần tính các xác suất $P(A_i|A)$. Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A_1)\times P(A|A_1) + P(A_2)\times P(A|A_2)\\ &= 0,35\times 0,15 + 0,65\times 0,35 = 0,28.\end{aligned}$$

Áp dụng công thức Bayes ta lại có:

$$P(A_1|A) = \frac{0,35\times 0,15}{0,28} = 0,1875.$$

Tương tự ta tính được: $P(A_2|A) = 0,8125.$

Ví dụ 10:

Biết rằng tỷ lệ công nhân nghiện thuốc lá ở một nhà máy là 30%, tỷ lệ người viêm họng trong số công nhân nghiện thuốc là 60%, còn trong số người không nghiện thuốc là 40%.

- Chọn ngẫu nhiên một công nhân, thấy công nhân này viêm họng. Tính xác suất để công nhân đó nghiện thuốc.
- Nếu công nhân đó không bị viêm họng, hãy tính xác suất để công nhân đó nghiện thuốc.

  Giải: Gọi A là biến cố chọn ra được công nhân viêm họng, B là biến cố công nhân được chọn ra là người nghiện thuốc. Khi đó B và $\overline{B}$ lập thành một hệ đầy đủ biến cố. Ta có:

$$P(B) = 0,3 \qquad P(\overline{B}) = 0,7;$$
$$P(A|B) = 0,6 \qquad P(A|\overline{B}) = 0,4.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(A) = 0,3\times 0,6 + 0,7\times 0,4 = 0.46.$$

o Xác suất để người công nhân đó nghiện thuốc nếu viêm họng là:

$$P(B|A) = \frac{0,3\times 0,6}{0,46} = 0,39.$$

- o Xác suất để người công nhân đó nghiện thuốc nếu không bị viêm họng là:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,54$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B) \times P(\overline{A}|B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,54} = 0,222$$

1.4.5. Công thức Bernoulli

Thực hiện lặp lại n lần một phép thử một cách độc lập. Trong mỗi lần thử ta quan tâm sự xuất hiện biến cố A. Giả sử xác suất xuất hiện A trong mỗi lần thử là như nhau và bằng p (xác suất thành công). Khi đó, xác suất để trong n lần thử đã cho có đúng x lần biến cố A xuất hiện (x lần thành công) được tính bởi công thức Bernoulli:

$$P_n(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \text{ với } x = 0,1,2,...,n. \qquad (1.15)$$

Ví dụ 11:

Một người bắn 3 viên đạn vào một tấm bia với xác suất bắn trúng của mỗi viên đạn là 0,7.

- Tính xác suất để có 1 viên đạn trượt bia.
- Tính xác suất để bia bị trúng đạn.

Giải:

- o Gọi A_i là biến cố viên đạn thứ i bắn trượt bia với $i = 1,2,3$
- o Ta đang có 1 bài toán xác suất với lược đồ Bernoulli

$$\begin{cases} n = 3 \\ p(A_i) = 0,3 \\ p(\overline{A}_i) = 0,7 \end{cases} \qquad i = 1,2,3.$$

- o Gọi A là biến cố "trong 3 viên đạn bắn vào bia có 1 viên bị trượt". Khi ấy:

$$P(A) = P_3(1) = C_3^1 (0,3)^1 (0,7)^2 = 0,441.$$

Gọi B là biến cố "bia bị trúng đạn". Dễ dàng thấy:

$$P(B) = 1 - P_3(0) = 1 - C_3^0 (0,3)^0 (0,7)^3.$$

Ví dụ 12:

Một đại lý lấy hàng từ tổng kho của công ty SAMSUNG 14 chiếc ti vi. Giả sử việc các ti vi bị hỏng là độc lập với nhau và xác suất bị hỏng của mỗi chiếc ti vi là 0,04. Tính xác suất để:

- Có nhiều nhất một chiếc tivi bị hỏng,
- Có nhiều nhất là hai chiếc tivi bị hỏng.

Giải:

- o Gọi A là biến cố "có nhiều nhất một chiếc tivi bị hỏng" và A_i là biến cố "chiếc ti vi thứ i bị hỏng" với $i = 1,...,14$. Theo giả thiết $P(A_i) = 0,04$. Ta có một lược đồ Bernoulli với n = 14 như sau:

$$P(A) = P_{14}(0) + P_{14}(1) = C_{14}^0 (0,04)^0 (0,96)^{14} + C_{14}^1 (0,04)^1 (0,96)^{13}$$

- Gọi B là biến cố "trong 14 chiếc ti vi lấy ra có nhiều nhất là hai chiếc tivi bị hỏng". Ta có:

$$P(B) = P_{14}(0) + P_{14}(1) + P_{14}(2)$$
$$= C_{14}^{0}\left(0,04\right)^{0}\left(0,96\right)^{14} + C_{14}^{1}\left(0,04\right)^{1}\left(0,96\right)^{13} + C_{14}^{2}\left(0,04\right)^{2}\left(0,96\right)^{12}.$$

Ví dụ 13:

Tỷ lệ người mắc bệnh lao ở một vùng là 10%. Kiểm tra ngẫu nhiên 100 người vùng đó.

- Tính xác suất để trong 100 người được kiểm tra không người nào bị bệnh lao.
- Tính xác suất để trong 100 người được kiểm tra có ít nhất 1 người bệnh lao.

Giải:

- Gọi A là biến cố "người được kiểm tra bị bệnh lao, theo giả thiết P(A) = 0,1.
- Lập luận tương tự như trong ví dụ bên trên với n = 100, p = 0,1, ta có:
  - $P_{100}(0) = C_{100}^{0}(0,1)^{0}(0,9)^{100} = (0,9)^{100}$
  - Gọi B là biến cố "trong 100 người được kiểm tra có ít nhất 1 người mắc bệnh lao". Khi đó $\overline{B}$ là biến cố "trong 100 người được kiểm tra không có người nào mắc bệnh lao".

    Ta có: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_{100}(0) = 1 - (0,9)^{100}$.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Chương này giới thiệu những vấn đề mở đầu cơ bản nhất của lý thuyết xác suất thống kê, giới thiệu những khái niệm và công thức tính xác suất. Các bạn cần phải nắm vững các khái niệm và công thức trong mỗi bài học như các công thức cộng, nhân xác suất, công thức tính xác suất qua biến cố đối, công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes và công thức Bernoulli.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Cho 3 biến cố A, B, C. Biến cố "Có ít nhất một trong 3 biến cố A, B, C xảy ra" là:

a. $A\overline{B}\overline{C}$

b. $A \cup B \cup C$

c. $A\overline{B}\overline{C} \cup B\overline{A}\overline{C} \cup C\overline{A}\overline{B}$

d. ABC

2. Cho hai biến cố A và B. Khẳng định nào dưới đây là đúng

a. $\overline{AB} = \Omega \setminus AB$

b. Các biến cố A, $\overline{A}$ và $\overline{A \cup B}$, không xung khắc từng đôi

c. Các biến cố A, $\overline{A}$ và $\overline{A \cup B}$, tạo thành hệ đầy đủ các biến cố

d. Các biến cố $A \setminus B, \overline{A}B, AB$ và $\overline{A \cup B}$ tạo thành hệ đầy đủ các biến số

3. Cho các biến cố A, B thoả mãn 0 < P(A), P(B) < 1. Kết luận nào dưới đây kéo theo A và B xung khắc?

a. A và $\overline{B}$ xung khắc

b. $\overline{A}$ và $\overline{B}$ xung khắc

c. $P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

d. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(\overline{A}\overline{B})$

4. Cho A, B là các biến cố thoả mãn 0 < P(A), P(B) < 1. Khẳng định nào dưới đây là đúng

a. $P(AB) \le \min(P(A), P(B))$

b. Nếu $P(A) \le P(B)$ thì $A \subseteq B$

c. $P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(AB)$

d. $P(A) = P(A \cup B) \setminus P(B)$

5. Khẳng định nào dưới đây là đúng cho mọi biến cố A, B với 0 < P(A) < 1 và 0 < P(B) <1 ?

a. $P(A|B) + P(B|A) = 1$

b. $P(A \cap B) > P(A|B)$

c. Nếu P(A) = P(B) thì $P(A|B) = P(B|A)$

d. Nếu $P(A|B) = P(B|A)$ thì P(A) = P(B)

6. Cho các biến cố A và B thỏa mãn $0 < P(A), P(B) < 1$.Nếu $P(A|B) = P(B|A)$ thì:

a. A và B là các biến cố đọc lập

b. A và B là các biến cố xung khắc

c. $P(A|B) = P(B|A)$

d. $P(\overline{A}|B) = P(\overline{B}|A)$

7. Cho 2 biến cố A, B thoả mãn 0 < P(A) < 1 và 0 < P(B) <1. Khi đó:

a. Nếu $P(A\,|\,B) > P(A)$ thì A và B độc lập

b. Nếu $A \subset B$ thì $P(\overline{B}\,|\,\overline{A}) = 1$

c. Nếu A và B xung khắc thì $P(A\,|\,B) = 0$

d. $P(A\,|\,B) + P(A\,|\,\overline{B}) = 1$

8. Cho các biến cố A, B thoả mãn 0 < P(A), P(B) < 1. Khi đó:

a. $P(A)P(B\,|\,A) + P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B}) = 1$

b. $P(A\,|\,B) > P(A)$

c. $P(A)P(A\,|\,B) = P(B)P(B\,|\,A)$

d. $P(B)P(A\,|\,B) = P(A)P(B\,|\,A)$

9. Có hai thùng hàng, thùng A có 80 sản phẩm loại I và 40 sản phẩm loại II; thùng B có bao nhiêu sản phẩm loại I? có 70 sản phẩm loại II. Chọn ngẫu nhiên 1 thùng, từ đó lấy ra 1 sản phẩm thì thấy đó là sản phẩm loại II. Xác suất để đó là thùng B là:

a. 0,554

b. 0,555

c. 0,556

d. 0,557

10. Có 2 hộp sản phẩm: hộp thứ nhất có 7 chính phẩm và 3 phế phẩm; hộp thứ hai có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Người ta lấy mỗi hộp ra 2 sản phẩm. Xác suất để số phế phẩm còn lại hai hộp bằng nhau là:

a. 0,3

b. 0,31

c. 0,32

d. 0,33

BÀI TẬP

1. Một người mua lần lượt 3 sản phẩm cùng loại ở một cửa hàng. Gọi A_i là biến cố mua được sản phẩm tốt ở lần thứ i $(i = 1, 2, 3)$.

a. Hãy mô tả bằng lời các biến cố sau:

$A_1A_2A_3$

$A_1A_2\overline{A}_3$

$A_1 + A_2 + A_3$

$\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$

$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

b. Hãy biểu diễn các biến cố sau theo các biến cố A_i

A = "Có ít nhất 1 lần người ấy mua được sản phẩm tốt"

B = "Có đúng 1 lần người ấy mua được sản phẩm tốt"

C = "Có nhiều nhất 1 lần người ấy mua phải sản phẩm xấu"

D = "Có đúng lần thứ nhất mua được sản phẩm tốt".

2. Tung đồng thời 3 đồng xu (giống nhau; cân đối và đồng chất có 2 mặt sấp - ngửa).

a. Có bao nhiêu "kết cục duy nhất, đồng năng" có thể xảy ra. Hãy nêu một cách tính.

b. Có bao nhiêu kết cục thuận lợi cho biến cố A với A = "có ít nhất 2 đồng xu xuất hiện mặt ngửa"?

3. Gieo đồng thời hai con xúc sắc (giống nhau, cân đối và đồng chất). Tính xác suất của các biến cố sau:

a. Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc là 7 chấm

b. Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc là 8

c. Tổng số chấm xuất hiện trên hai con lớn hơn 7 chấm.

d. Tổng số chấm xuất hiện trên hai con bằng 10 biết rằng một con đã xuất hiện mặt 3 chấm.

e. Có ít nhất một con xuất hiện mặt 6 chấm biết rằng số chấm trên hai con là khác nhau.

f. Số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc hơn kém nhau đúng 2 chấm

g. Số chấm xuất hiện trên hai con là khác nhau.

4. Một người ngày nào cũng tung 5 con xúc xắc để cầu may vào buổi sáng sớm, anh ta cho rằng nếu tung được ít nhất 1 con xúc xắc có 6 thì ngày hôm đó là ngày may mắn của anh ta. Tuần vừa rồi anh ta có 3 ngày may mắn. Tính xác suất trong 3 lần đó không lần nào có nhiều hơn 1 con xúc xắc có mặt 6.

5. Có 12 khách hàng vào 1 siêu thị có 4 tầng một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để:

a. Mỗi tầng có 3 khách hàng

b. Một tầng có 6 khách hàng, một tầng có 4 khách hàng, hai tầng còn lại mỗi tầng có 1 khách hàng

6. Có mười tấm thẻ được đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên 2 tấm thẻ xếp thành 1 số gồm 2 chữ số. Tìm xác suất để số đó chia hết cho 18.

7. Cho ba biến cố A, B ,C có các xác suất:

P(A) = 0,525

P(B) = 0,302

P(C) = 0,48

P(AB) = 0,052

P(BC) = 0,076

P(CA) = 0,147

P(ABC) = 0,03

Chứng minh rằng các số liệu đưa ra là không chính xác.

8. Cho biết các câu sau đây câu nào đúng, câu nào sai, câu nào chưa xác định. Vì sao? Mỗi giải thích hãy cho 1 ví dụ.

a. Hai biến cố xung khắc thì phụ thuộc.

b. Hai biến cố độc lập thì không xung khắc.

c. Hai biến cố đối lập thì độc lập.

9. Chứng minh rằng: nếu A và B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau đều là các biến cố độc lập.

a. $\overline{A}$ và B.

b. A và $\overline{B}$

c. $\overline{A}$ và $\overline{B}$.

10. Có n thẻ đánh số từ 1 đến n được xếp ngẫu nhiên thành một hàng. Thẻ mang số k được gọi là "nằm đúng vị trí" nếu nó nằm đúng ở vị trí thứ k. Tính xác suất để khi xếp ngẫu nhiên n thẻ trên, ta có ít nhất một thẻ "nằm đúng vị trí".

11. Cho H_1; H_2 là hai biến cố tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, các câu sau đây câu nào là đúng, tại sao?

a. H_1 và H_2 là hai biến cố đối lập

b. H_1 và H_2 là hai biến cố độc lập

c. H_1 và H_2 là hai biến cố không xung khắc

12. Một hộp đựng 12 sản phẩm trong đó có 8 chính phẩm và 4 phế phẩm.

a. Lấy đồng thời hai sản phẩm từ hộp, tính xác suất lấy được 2 chính phẩm.

b. Lấy lần lượt hai sản phẩm từ hộp theo phương thức không hoàn lại, tính xác suất lấy được hai chính phẩm.

13. Một lô hàng trong đó có 80% chính phẩm và 20% phế phẩm.

a. Lấy đồng thời hai sản phẩm từ lô hàng, tính xác suất lấy được hai chính phẩm.

b. Lấy lần lượt hai sản phẩm từ lô hàng theo phương thức không hoàn lại, tính xác suất lấy được hai chính phẩm.

14. Một công ty cần tuyển nhân viên, sau khi hết hạn nhận hồ sơ dự tuyển, công ty đó thông báo:

một người muốn trúng tuyển phải qua ba vòng thi, trúng tuyển ở vòng trước mới được dự thi ở vòng sau, vòng 1 lấy 90% số người dự tuyển(lấy từ cao xuống thấp) vòng 2 lấy 80%, vòng 3 lấy 60%. Một người dự thi vào Công ty đó bị trượt, tính xác suất để người đó bị trượt ở vòng 2.

15. Một người có 1 chùm chìa khó gồm 15 chiếc trong đó có 2 chìa mở được một chiếc khoá, Anh ta thử lần lượt từng chìa cho đến khi mở được khoá(chiếc nào thử xong được đánh dấu). Tính xác suất để anh ta thử lần thứ 6 thì mở được kho.

16. Có hai túi hàng. Túi I có 6 sản phẩm tốt và 4 sản phẩm xấu còn túi II có 4 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu.

a. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ túi I cho sang túi II rồi từ túi II ta lại lấy ra 3 sản phẩm. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm chọn ra này ta có 2 sản phẩm tốt.

b. Từ mỗi túi lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm. Các sản phẩm còn lại được dồn vào túi III và từ túi III ta lấy ra 1 sản phẩm. Tính xác suất để sản phẩm chọn ra này là sản phẩm tốt.

17. Một hộp đựng m quả cầu trắng và n quả cầu đỏ ($m > 1$; $n > 1$). Lấy ra lần lượt từng quả cầu.

a. Tính xác suất để lần thứ nhất lấy được cầu trắng

b. Tính xác suất để lần thứ 3 lấy được cầu đỏ

c. Tính xác suất để lần cuối lấy được cầu trắng.

d. Khi lấy có hoàn lại, tính lại các xác suất trên

18. Một nhà máy sản xuất tivi có 4 máy sản xuất. Sau khi quan sát, thống kê được máy A sản xuất 30% số tivi của nhà máy, máy B sản xuất 40% số tivi của nhà máy. Tỷ lệ tivi chưa đạt tiêu chuẩn xuất xưởng của các máy tương ứng là 0,35% và 0,28%. Các máy khác cho tỷ lệ thành phẩm đạt chuẩn xấp xỉ 100% và có tỷ lệ sản xuất là ngang nhau.

a. Lấy ngẫu nhiên một tivi của nhà máy sản xuất, tính xác suất để lấy được bóng đèn tốt.

b. Tính xác suất để lấy được bóng đèn do máy A sản xuất biết rằng lấy được bóng bị hỏng.

c. Nếu tỷ lệ sản phẩm không đạt chuẩn của 2 máy còn lại lần lượt là 0,15% và 0,23%, hãy tính lại các xác suất trên.

19. Biết rằng tỷ lệ người mắc bệnh ung thư ở một địa phương là 1,2%. Người ta sử dụng một phản ứng mà nếu người bị bệnh thì phản ứng luôn luôn dương tính, nếu không bị bệnh thì phản ứng có thể dương tính với xác suất 0,2.

a. Tìm xác suất phản ứng dương tính.

b. Tìm xác suất bị bệnh, không bị bệnh trong nhóm người có phản ứng dương tính.

c. Nếu chọn ngẫu nhiên 1 người trong địa phương và kiểm tra anh ta 2 lần đều có phản ứng dương tính, tính xác suất anh ta không bị bệnh.

20. Để hoàn thành một môn học, mỗi sinh viên phải qua 3 lần thi và để được dự lần thi tiếp theo, người đó phải thi đỗ lần trước đó. Biết xác suất thi đỗ ở lần 1, 2 và 3 tương ứng là 0,9; 0,8 và 0,7. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên thấy sinh viên đó không hoàn thành môn học. Tính xác suất để sinh viên đó bị trượt ở lần thi thứ 2.

21. Biết rằng một người có nhóm máu AB có thể nhận máu của bất kỳ nhóm máu nào. Nếu người đó có các nhóm máu còn lại (A, B hay O) thì chỉ có thể nhận được máu của người có cùng nhóm máu với họ hoặc người có nhóm máu O. Cho biết tỷ lệ người có nhóm mãu O, A, B và AB tương ứng là 33,7% - 37,5% - 20,9% và 7,9%.

a. Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và một người cho máu. Tính xác suất để sự truyền máu được thực hiện.

b. Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và 2 người cho máu. Tính xác suất để sự truyền máu được thực hiện.

c. Chọn ngẫu nhiên 1 ca truyền máu đã được thực hiện thành công. Biết người cho máu thuộc nhóm máu B. Tính xác suất để người vừa nhận máu là thuộc nhóm máu AB.

d. Chọn ngẫu nhiên 1 ca truyền máu đã được thực hiện thành công. Biết người vừa nhận máu thuộc nhóm máu A. Tính xác suất để người vừa cho máu là thuộc nhóm máu O.

22. Một hộp chứa a bút đỏ và b bút đen. Chọn ngẫu nhiên ra một chiếc bút, xem là bút màu gì rồi trả lại vào hộp cùng với *c* chiếc bút khác cùng màu.

a. Tiếp tục chọn ngẫu nhiên ra một chiếc bút thấy đó là bút đỏ. Tính xác suất để chiếc bút chọn ra ở lần đầu là bút đen.

b. Giả sử ta lặp lại quá trình nêu trong đề bài nhiều lần. Tính xác suất để ở lần lấy thứ n, ta lấy được bút đỏ, $n \geq 1$

23. Hai công ty A và B cùng kinh doanh 1 sản phẩm. Xác suất thua lỗ của công ty A là 0,2 và xác suất thua lỗ của công ty B là 0,4. Tuy nhiên trên thực tế, xác suất để cả hai công ty cùng thua lỗ trên thị trường chỉ là 0,1. Tính xác suất của các biến cố sau :

a. Chỉ có 1 công ty thua lỗ

b. Có ít nhất 1 công ty làm ăn không thua lỗ

24. Chia đôi số quả cầu có trong thùng gồm 6 quả trắng và 4 quả xanh thành 2 phần đều nhau. Tìm xác suất các biến cố sau :

a. Cả hai phần có số quả đỏ như nhau

b. Một phần có 4 quả đỏ

25. Để thi nâng bậc, một công nhân chọn ngẫu nhiên 1 trong 3 loại sản phẩm để gia công hoàn thiện. Xác suất để một công nhân gia công sản phẩm đạt tiêu chuẩn với 3 loại sản phẩm trên lần lượt là 0.8, 0.9 và 0.95. Sau khi thi biết người công nhân đó thi đỗ, tìm xác suất người đó đã chọn được đúng loại sản phẩm mà anh ta thành thạo nhất, biết là khi thi thì cả 5 sản phẩm phải hoàn thiện đều phải đạt tiêu chuẩn.

26. Một bệnh nhân vào bệnh viện khám. Bác sỹ chuẩn đoán sơ bộ là người đó có thể mắc bệnh A với xác suất 1/2, bệnh B với xác suất 1/6 và bệnh C với xác suất 1/3. Biết khi xét nghiệm sinh hóa thì bệnh A có phản ứng dương tính là 10%, bệnh B có phản ứng dương tính là 20% còn bệnh C có phản ứng dương tính là 90%. Qua 3 lần xét nghiệm thì thấy có 2 lần phản ứng dương tính. Bác sỹ kết luậ bệnh nhân mắc bệnh C. Kết luận của bác sỹ đúng được bao nhiêu phần trăm?

27. Chiếc máy có ba bộ phận 1, 2, 3. Xác suất của các bộ phận trong thời gian làm việc bị hỏng tương ứng là 0.2, 0.4, 0.3. Cuối ngày làm việc có thông báo có 2 bộ phận bị hỏng. Tìm xác suất 2 bộ phận bị hỏng là 1 và 2.

28. Điều tra sở thích xem TV của các cặp vợ chồng cho thấy 30% ác bà vợ thường xem chương trình thể thao, 50% ông chồng thường xem chương trình này và khi thấy vợ xem thì chồng xem cùng là 60%. Lấy ngẫu nhiên 1 cặp vợ chồng. Tìm xác suất :

a. Cả hai cùng thường xem chương trình thể thao

b. Có ít nhất 1 người thường xem

c. Không có ai thường xem

d. Nếu chồng xem thì vợ xem cùng

e. Nếu chồng không xem thì vợ vẫn xem

29. Một công ty bảo hiểm chia đối tượng bảo hiểm làm 3 loại: ít rủi ro (chiếm 20%), rủi ro trung bình (chiếm 50%), rủi ro cao (chiếm 30%). Biết tỷ lệ khách hàng gặp rủi ro trong một năm tương ứng với các đối tượng trên là: 0.05, 0.15 và 0.3.

a. Tính tỷ lệ khách hàng gặp rủi trong 1 năm.

b. Gặp một khách hàng bị rủi ro, tính xác suất để người đó thuộc loại ít rủi ro.

30. Có hai học sinh có năng lực như nhau cùng tham dự một cuộc thi, mỗi người phải trả lời hai câu hỏi. Mỗi câu hỏi trả lời đúng ở 15 giây đầu được 20 điểm. Trả lời đúng ở 15 giây sau được 10 điểm, sau 30 giây không có câu trả lời hoặc trả lời hoặc trả lời sai được 0 điểm. Biết rằng khả năng của mỗi học sinh trả lời đúng câu hỏi ở 15 giây đầu là 0,4. Nội dung các câu độc lập.

Tính xác suất để hai học sinh có số điểm bằng nhau.