trung bình mẫu của một mẫu ngẫu nhiên gồm 9 ống nhựa lớn hơn 1.009 *inch* và nhỏ hơn 1.012 *inch*.

Bài tập 4.2 (*Có lời giải*)**.** Một mẫu ngẫu nhiên có cỡ mẫu là 25 được chọn từ một tổng thể có phân phối chuẩn với trung bình là 100 và độ lệch tiêu chuẩn là 10. Tính xác suất để trung bình mẫu có giá trị trong khoảng $[\mu_{\bar{X}} - 1.8\sigma_{\bar{x}}; \mu_{\bar{X}} + 1.0\sigma_{\bar{x}}$

Bài tập 4.3 (7.4 Douglas)**.** Một sợi tổng hợp được sử dụng trong sản xuất thảm có sức căng tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $75.5psi$ và độ lệch chuẩn $3.5psi$. Tìm xác suất để một mẫu thử gồm 6 mẫu sợi sẽ có sức căng trung bình mẫu vượt quá $75.75psi$.

Bài tập 4.4 (*Có lời giải*)**.** Một tổng thể có phân phối chuẩn với trung bình là 100 và phương sai là 25. Nếu chúng ta muốn sai số chuẩn của trung bình mẫu là 1.5 thì chúng ta phải chọn mẫu có kích thước là bao nhiêu?

Bài tập 4.5 (7.10 Douglas)**.** Một biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên $[0; 1]$. Giả sử, một mẫu ngẫu nhiên có kích thước là 12 được chọn từ phân phối này. Tìm phân phối xác suất xấp xỉ của $\bar{X} - 6$? Tìm trung bình và phương sai của đại lượng này?

Bài tập 4.6 (*Có lời giải*)**.** Thời gian mà khách hàng dành để chờ đợi tại quầy làm thủ tục tại sân bay là một biến ngẫu nhiên với trung bình là 8.2 phút và độ lệch chuẩn 1.5 phút. Giả sử rằng một mẫu ngẫu nhiên có kích thước $n = 49$ khách hàng được quan sát. Tìm xác suất để thời gian trung bình xếp hàng chờ đợi cho những khách hàng này là

(a) Ít hơn 10 phút

(b) hơn 5 phút và ít hơn 10 phút

(c) ít hơn 6 phút

4.2.2 Ước lượng điểm

Bài tập 4.7 (*Có lời giải*)**.** Dữ liệu về lực kéo (pound) cho các đầu nối được sử dụng trong động cơ ô tô như sau:

79.3; 75.1; 78.2; 74.1; 73.9; 75.0; 77.6; 77.3; 73.8;

74.6; 75.5; 74.0; 74.7; 75.9; 72.9; 73.8; 74.2; 78.1;

75.4; 76.3; 75.3; 76.2; 74.9; 78.0; 75.1; 76.8

(a) Tính ước lượng điểm cho lực kéo trung bình của các đầu nối trong tổng thể. Tính sai số chuẩn của ước lượng điểm

(b) Tính ước lượng điểm của phương sai tổng thể

(c) Tính ước lượng điểm của tỉ lệ những đầu nối có lực kéo nhỏ hơn 78 pound trong tổng thể .

Bài tập 4.8 (7.29 Douglas)**.** Dữ liệu về độ dày oxit của chất bán dẫn như sau:

425; 431; 416; 419; 421; 436; 418; 410; 431; 433; 423

426; 410; 435; 436; 428; 411; 426; 409; 437; 422; 428; 413; 416

(a) Tính ước lượng điểm cho đồ dày trung bình của oxit của chất bán dẫn trong tổng thể. Tính sai số chuẩn của ước lượng điểm

(b) Tính ước lượng điểm của phương sai tổng thể

(c) Tính ước lượng điểm của tỉ lệ chất bán dẫn có độ dày oxit lớn hơn 430 trong tổng thể.

Bài tập 4.9 (7.30 Douglas)**.** Giả sử X là ố quan sát " thành công" trong một mẫu gồm n quan sát, trong đó p là xác suất thành công của mỗi quan sát.

(a) Chứng minh rằng $\hat{P} = \frac{X}{n}$ là một ước lượng không chệch của p.

(b) Chứng minh rằng sai số chuẩn của $\hat{P}$ là $\sqrt{p(1-p)/n}$.

Bài tập 4.10 (7.18 Douglas)**.** X_1 và X_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập với trung bình μ và phương sai σ. Giả sử chúng ta có hai ước lượng của μ như sau

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{và } \hat{\Theta}_2 = \frac{X_1 + 3X_2}{4}$$

(a) Cả hai ước lượng trên có phải là ước lượng không chệch của μ ?

(b) Tính phương sai của mỗi ước lượng.

Bài tập 4.11 (7.19 Douglas)**.** Giả sử rằng chúng ta có mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma$. Tính độ chệch của $\hat{\Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{c}$.

Bài tập 4.12 (7.20 Douglas)**.** Giả sử rằng chúng ta có một mẫu gẫu nhiên có cỡ mẫu $2n$ được chọn tử tổng thể X, và $\mathbb{E}(X) = \mu$ và $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$. Giả sử chúng ta có hai ước lượng của μ như sau

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i \quad \text{và } \bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ước lượng nào tốt hơn? Giải thích?

Bài tập 4.13 (7.24 Douglas)**.** Giả sử $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_3$ là các ước lượng của θ. Biết rằng $\mathbb{E}(\hat{\Theta}_1) = \mathbb{E}(\hat{\Theta}_2) = \theta$; $\mathbb{E}(\hat{\Theta}_3) \neq \theta$; $\mathbb{V}(\hat{\Theta}_1) = 12$; $\mathbb{V}(\hat{\Theta}_2) = 10$ và $\mathbb{E}(\hat{\Theta}_3 - \theta)^2 = 6$. So sánh các ước lượng này. Ước lượng nào tốt hơn? Tại sao?

4.2.3 Ước lượng khoảng

4.2.3.1 Khoảng tin cậy cho trung bình μ

Bài tập 4.14 (8.1 Douglas)**.** Cho một tổng thể có phương sai đã biết, hãy tính độ tin cậy trong các trường hợp sau

(a) $\bar{x} - 2.14\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2.14\sigma/\sqrt{n}$

(b) $\bar{x} - 2.49\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2.49\sigma/\sqrt{n}$

(c) $\bar{x} - 1.85\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.85\sigma/\sqrt{n}$

Bài tập 4.15 (*Có lời giải*)**.** Một mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn và các khoảng tin cậy sau được xây dựng từ cùng một bộ dữ liệu (38.02; 61.98) và 39.95; 60.05)

(a) Tính giá trị trung bình mẫu

(b) Một trong hai khoảng tn cậy trên được xây dựng với độ tin cậy 95% và cái còn lại là 90%. Khoảng tn cậy nào tương ứng với 95% và giải thích?

Bài tập 4.16 (8.6 Douglas)**.** Một mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn và các khoảng tin cậy sau được xây dựng từ cùng một bộ dữ liệu (37.53; 49.87) và 35.59; 51.81)

(a) Tính giá trị trung bình mẫu

(b) Một trong hai khoảng tn cậy trên được xây dựng với độ tin cậy 95% và cái còn lại là 99%. Khoảng tin cậy nào tương ứng với 95% và giải thích?

Bài tập 4.17 (8.9 Douglas)**.** Giả sử đã lấy một mẫu nước ngẫu nhiên từ một hồ nước ngọt với cỡ mẫu 100 và đo nồng độ canxi (miligam/lít). Một khoảng tin cậy với độ tin cậy 95% cho nồng độ canxi trung bình là: $0.49 \leq \mu \leq 0.82$. Với cùng dữ liệu mẫu, khoảng tin cậy với độ tin cậy 99% là dài hơn hay ngắn hơn khoảng tin cậy trên.

Bài tập 4.18 (8.10 Douglas)**.** Kinh nghiệm trong quá khứ đã chỉ ra rằng sức bền của sợi được sử dụng trong sản xuất vật liệu màn treo có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là $2psi$. Một mẫu ngẫu nhiên gồm chín mẫu được thử nghiệm và sức bền trung bình được tìm thấy là $98psi$. Tìm khoảng tin cậy 95% cho sức bền trung bình.

Bài tập 4.19 (*Có lời giải*)**.** Đường kính của các lỗ cho một dây cáp được biết là có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là $0.01inch$. Một mẫu ngẫu nhiên có kích thước 10 được chọn có đường kính trung bình $1.5045inch$. Tìm khoảng tin cậy 99% cho đường kính trung bình.

Bài tập 4.20 (8.13 Douglas)**.** Một nhà sản xuất sản xuất ống piston cho động cơ tự động. Được biết, đường kính ống có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là $0.001mm$. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 15 ống piston có đường kính trung bình là $\bar{x} = 74.036mm$ Tìm hoảng tin cậy 99% cho đường kính trung bình của ống piston.

Bài tập 4.21 (*Có lời giải*)**.** Một mẫu ngẫu nhiên gồm chiều cao của 50 sinh viên của một trường cao đẳng cho thấy trung bình là $174,5$ cm và độ lệch chuẩn là 6.9 cm.

(a) Xây dựng khoảng tin cậy 98% cho chiều cao trung bình μ của tất cả các sinh viên trong trường cao đẳng này.

(b)

Bài tập 4.22 (1.2)**.** Giả sử tuổi thọ của bóng đèn do một công ty sản suất xấp xỉ phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 40 giờ. Một mẫu 30 bóng đèn cho thấy tuổi thọ trung bình là 780 giờ.

(a) hãy tìm khoảng tin cậy 96% cho tuổi thọ trung bình của tất cả các bóng đèn do công ty này sản xuất.

(b) Nếu muốn sai số ước lượng không quá 10 giờ, thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu bóng đèn?

Bài tập 4.23 (*Có lời giải*)**.** Một máy sản xuất ra các ống kim loại có dạng hình trụ. Một mẫu gồm các ống kim loại được chọn ra để khảo sát với các đường kính thu được là: 1..01, 0.97, 1.03, 1.04, 0.99, 0.98, 0.99, 1.01, và 1.03 cm.

(a) Tìm khoảng tin cậy 99% cho đường kính trung bình của ống kim loại được sản xuất từ máy này, giả sử đường kính của ống kim loại xấp xỉ phân phối chuẩn.

(b) Nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.0005 inch với độ tin cậy 95% thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu sản phẩm?

Bài tập 4.24 (1.4)**.** Một mẫu ngẫu nhiên của 100 chủ sở hữu ô tô ở bang Virginia cho thấy rằng một chiếc ô tô được lái trung bình 23500 km mỗi năm với độ lệch tiêu chuẩn là 3900 km. Giả sử phân bố các phép đo là xấp xỉ bình thường.

(a) Xây dựng một khoảng tin cậy 99% cho số km trung bình một ô tô được định hướng hàng năm ở Virginia.

(b) Những gì chúng ta có thể khẳng định với sự tự tin 99% về kích thước có thể có của lỗi của chúng ta nếu chúng ta ước tính số km trung bình của các chủ sở hữu xe ở Virginia là 23.500 km / năm?

Bài tập 4.25 (1.5)**.** Giả sử năng lượng của thanh Sô-cô-la là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 10 thanh sô cô la của một thương hiệu nào đó cho thấy năng lượng trung bình là 230 calo mỗi thanh, với độ lệch chuẩn là 15 calo. Xây dựng một khoảng tin cậy 99% cho con số calo trung bình thực sự của thương hiệu này.

Bài tập 4.26 (8.27-Douglas)**.** Một kỹ sư nghiên cứu cho một nhà sản xuất lốp xe đang nghiên cứu tuổi thọ lốp cho một hợp chất cao su mới và đã chế tạo 16 lốp xe và thử nghiệm chúng thì tháy giá trị trung bình mẫu và độ lệch chuẩn là $60139.7km$ và $3645.94km$. Tìm khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của lốp xe.

Bài tập 4.27 (8.28-Douglas)**.** Một thử nghiệm tác động của Izod đã được thực hiện trên 20 mẫu ống nhựa PVC. Giá trị trung bình của mẫu là $\bar{x} = 1.25$ và độ lệch chuẩn của mẫu là $s = 0,25$. Tìm khoảng tin cậy 99% cho sức mạnh tác động trùng bình của Izod.

Bài tập 4.28 (8.29-Douglas)**.** Một máy làm nước giải khát sau pha chế được điều chỉnh để giải phóng một lượng xi-rô nhất định vào một buồng nơi nó được trộn với nước có ga. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 25 loại đồ uống đã được tìm thấy có hàm lượng xi-rô trung bình là 1.10 ounce chất lỏng và độ lệch chuẩn là 0.015 ounce chất lỏng. Tìm khoảng tin cậy 95% cho thể tích trung bình của xi-rô được phân phối.

Bài tập 4.29 (8.36 Douglas)**.** Một thương hiệu đặc biệt của bơ thực vật để ăn kiêng đã được phân tích để xác định hàm lượng axit béo không bão hòa (tính theo phần trăm). Một mẫu gồm sáu gói được chon thu được các dữ liệu sau: 16.8, 17.2, 17.4, 16.9, 16.5, 17.1. Giả sử rằng hàm lượng axit béo tuân theo phân phối chuẩn. Xây dựng khoảng tin cậy 99% cho hàm lượng ãxit béo trung bình trong bơ thực vật.

Bài tập 4.30 (8.37 Douglas)**.** Cường độ nén của bê tông đang được thử nghiệm bởi một kỹ sư dân dụng. Anh ta kiểm tra 12 mẫu vật và thu được dữ liệu sau đây

2216	2237	2249	2204	2225	2301
2281	2263	2318	2255	2275	2295

Xây dựng khoảng tin cậy 95% cho cường độ nén trung bình.

Bài tập 4.31 (8.38 Douglas)**.** Một máy sản xuất các thanh kim loại được sử dụng trong một hệ thống treo ô tô. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 15 que được chọn để đo đường kính. Dữ liệu kết quả (tính bằng millime) như sau:

8.24	8.25	8.20	8.23	8.24	8.21	8.26
8.26	8.20	8.25	8.23	8.19	8.28	8.24

Xây dựng khoảng tin cậy 90% cho đường kính trung bình.

Bài tập 4.32. Đo lượng cholesterol (đơn vị $mg\%$) cho một số người, ta được

X ($mg\%$)	150–160	160–170	170–180	180–190	190–200	200–210
Số người	2	4	5	6	4	3

(a) Tính trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu.

(b) Một mẫu thứ nhì Y có 30 người cho trung bình $180mg\%$ và độ lệch chuẩn $16mg\%$. Nhập hai mẫu lại, tính trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu nhập.

(Đs: 181.25, 14.98; 180.55, 15.49)

Bài tập 4.33. Cho tổng thể có phân phối chuẩn với tham số σ^2 đã biết. Xác định

(a) Độ tin cậy của ước lượng khoảng $\overline{x} - 2.14\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{x} + 2.14\sigma/\sqrt{n}$.

(b) Độ tin cậy của ước lượng khoảng $\overline{x} - 2.49\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{x} + 2.49\sigma/\sqrt{n}$.

(c) Độ tin cậy của ước lượng khoảng $\overline{x} - 1.85\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{x} + 1.85\sigma/\sqrt{n}$.

(Đs: 96.76%; 98.72%; 93.56%)

Bài tập 4.34. Cho tổng thể có phân phối chuẩn với tham số σ^2 đã biết. Xác định

(a) Giá trị của $z_{\alpha/2}$ ứng với độ tin cậy 98% trong công thức xây dựng khoảng tin cậy.

(b) Giá trị của $z_{\alpha/2}$ ứng với độ tin cậy 80% trong công thức xây dựng khoảng tin cậy.

(c) Giá trị của $z_{\alpha/2}$ ứng với độ tin cậy 75% trong công thức xây dựng khoảng tin cậy.

(Đs: 2.33; 1.285; 1.151)

Bài tập 4.35. Ước lượng khoảng tin cậy cho độ hoàn thiện mạch của một thiết bị bán dẫn. Giả sử mức độ hoàn thiện tuân theo phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 20$. Tính

(a) Khoảng tin cậy 95% cho μ khi $n = 10$ và $\overline{x} = 1000$.

(b) Khoảng tin cậy 95% cho μ khi $n = 25$ và $\overline{x} = 1000$.

(c) Khoảng tin cậy 99% cho μ khi $n = 10$ và $\overline{x} = 1000$.

(d) Khoảng tin cậy 99% cho μ khi $n = 25$ và $\overline{x} = 1000$.

(e) Nhận xét độ rộng của khoảng tin cậy khi thay đổi cỡ mẫu và độ tin cậy.

(Đs: [987.6;1012.4]; [992.16;1007.84]; [983.71;1016.28]; [989.7;1010.3])

Bài tập 4.36 (*Có lời giải*)**.** Một mẫu ngẫu nhiên đã được lấy từ một tổng thể có phân phối chuẩn và các khoảng tin cậy sau được xây dựng bằng cách sử dụng cùng một dữ liệu: $(38.02, 61.98)$ và $(39.95, 60.05)$

(a) Xác định trung bình mẫu? (Đs: 50; 50)

(b) Giả sử hai khoảng tin cậy tương ứng với độ tin cậy 95% và 90%. Khoảng nào ứng với độ tin cậy 95%? Tại sao?

Bài tập 4.37. Một mẫu ngẫu nhiên đã được lấy từ một tổng thể có phân phối chuẩn và các khoảng tin cậy sau được xây dựng bằng cách sử dụng cùng một dữ liệu: $(37.53, 49.87)$ và $(35.59, 51.81)$

(a) Xác định trung bình mẫu? (Đs: 43.7; 43.7)

(b) Giả sử hai khoảng tin cậy tương ứng với độ tin cậy 95% và 99%. Khoảng nào ứng với độ tin cậy 95%? Tại sao?

Bài tập 4.38. Sử dụng lại số liệu của Bài tập 4.35. Tìm cỡ mẫu n để:

(a) Độ rộng của khoảng tin cậy 95% là 40.

(b) Độ rộng của khoảng tin cậy 99% là 40.

(Đs: 4; 7)

Bài tập 4.39. Giả sử người ta lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ $n = 100$ từ một hồ nước ngọt để đo nồng độ Canxi (mg/l). Khoảng tin cậy 95% cho nồng độ trung bình của Canxi là $0.49 \le \mu \le 0.82$.

(a) Khoảng tin cậy 99% được xây dựng từ cùng mẫu ngẫu nhiên trên có độ rộng lớn hơn hay nhỏ hơn trên? (Đs: lớn hơn)

(b) Xét phát biểu: "có 95% khả năng tìm thấy μ trong khoảng từ 0.49 tới 0.82". (Đs: sai)

(c) Xét phát biểu: "nếu lấy mẫu ngẫu nhiên với cỡ mẫu $n = 100$ rồi tính khoảng tin cậy 95% và cứ lặp lại quá trình này 1000 lần thì có 950 lần khoảng tin cậy này sẽ chứa giá trị μ chính xác". (Đs: đúng)

Bài tập 4.40. Đường kính của những cái lỗ trên dây nịt có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn 0.01 *inch*. Một mẫu ngẫu nhiên có cỡ là 10 với đường kính trung bình là 1.5054 *inch*. Tìm khoảng tin cậy 99% cho ước lượng trung bình đường kính lỗ. (Đs: [1.49725;1.51355])

Bài tập 4.41. Một kỹ sư xây dựng phân tích cường độ nén của bê tông. Cường độ nén thường có phân phối chuẩn 1000 $(psi)^2$. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 12 mẫu có cường độ nén trung bình $\overline{x} = 3250\ psi$.

(a) Xây dựng khoảng tin cậy 95% cho trung bình cường độ nén của bê tông. (Đs: [3232.11;3267.89])

(b) Xây dựng khoảng tin cậy 99% cho trung bình cường độ nén của bê tông và so sánh độ rộng với câu trên. (Đs: [3226.4;3273.6])

(c) Để có được ước lượng cho trung bình độ nén với sai số không vượt quá 15 *psi* ở dộ tin cậy 99% thì cỡ mẫu phải là bao nhiêu? (Đs: 30)

Định lý 1. *Khoảng tin cậy cho ước lượng trung bình của phân phối chuẩn khi không biết phương sai*

(i) *Phân phối student* $T \sim t(k)$ là phân phối có hàm mật độ là

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{x^2}{k}+1\right)^{(k+1)/2}},$$

với k là bậc tự do. Khi đó, T có trung bình 0 và phương sai $k/(k-2)$ với $k > 2$.

(ii) *Định lí:* cho $X_1, \cdots, X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên lấy từ phân phối chuẩn với hai tham số μ, σ^2 chưa biết. Khi đó, biến ngẫu nhiên

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

có phân phối Student $t(n-1)$ với $n-1$ bậc tự do.

(iii) *Khoảng tin cậy:* nếu $\overline{x}, s$ lần lượt là trung bình và độ lệch chuẩn mẫu của một mẫu ngẫu nhiên lấy từ phân phối chuẩn với hai tham số μ, σ^2 chưa biết thì khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ của μ được tính

$$\boxed{\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n}}$$

với $t_{\alpha/2,n-1}$ thỏa $\mathbb{P}(|T| > t_{\alpha/2,n-1}) = \alpha$ với $T \sim t(n-1)$.

Bài tập 4.42. Hãy tìm những giá trị của $t_{0.025,15}, t_{0.05,10}, t_{0.10,20}, t_{0.005,25}$ và $t_{0.001,20}$.

Bài tập 4.43. Xác định giá trị t trong xây dựng khoảng tin cậy tương ứng với:

(a) Độ tin cậy 95% với bậc tự do 12. (c) Độ tin cậy 99% với bậc tự do 13.

(b) Độ tin cậy 95% với bậc tự do 24. (d) Độ tin cậy 99.9% với bậc tự do 15.

(Đs: 2.179; 2.064; 3.012; 4.073)

Bài tập 4.44. Một mẫu ngẫu nhiên đã được lấy từ một phân phối chuẩn. Đầu ra từ một gói phần mềm xuất ra dưới đây:

Biến	N	Trung bình	SE mean	Độ lệch chuẩn	Phương sai	Tổng
x	10	?	0.507	1.605	?	251.848

với *SE mean là độ lệch chuẩn của trung bình* $\sigma_{\overline{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

(a) Điền cho đầy đủ bảng số liệu trên. (Đs: (a) Mean 25.1848, Variance 2.5760)

(b) Tìm khoảng tin cậy 95% cho ước lượng trung bình. (Đs: $24.037 \leq \mu \leq 26.333$)

Bài tập 4.45. Một mẫu ngẫu nhiên đã được lấy từ một phân phối chuẩn. Đầu ra từ một gói phần mềm xuất ra dưới đây:

Biến	N	Trung bình	SE mean	Độ lệch chuẩn	Phương sai	Tổng
x	?	?	1.58	6.11	?	751.40

(a) Điền cho đầy đủ bảng số liệu trên.

(b) Tìm khoảng tin cậy 95% cho ước lượng trung bình.

Bài tập 4.46. Kỹ sư nghiên cứu cho một nhà sản xuất lốp xe đang nghiên cứu tuổi thọ lốp làm từ một hợp chất cao su mới và đã chế tạo 16 lốp xe, thử nghiệm tuổi thọ khi chúng chạy trên đường. Giá trị trung bình mẫu và độ lệch chuẩn là 60139.7 và 3645.94 km. Tìm khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của lốp. (Đs: $[58197.33, 62082.07]$)

Bài tập 4.47. Cục Khí tượng của Chính phủ Úc đã cung cấp lượng mưa trung bình hàng năm (*milimet*) ở Úc 1983-2002 như sau (http://www.bom.gov.au/climate/chang

499.2, 555.2, 398.8, 391.9, 453.4, 459.8, 483.7, 417.6, 469.2, 452.4, 499.3, 340.6, 522.8, 469.9, 527.2, 565.5, 584.1, 727.3, 558.6, 338.6

Xây dựng khoảng tin cậy 95% cho lượng mưa trung bình hàng năm. Chú ý: ta có thể phải kiểm tra giả thiết tổng thể có phân phối chuẩn bằng cách vẽ đồ thị box-plot (xem Định nghĩa **??**) và đồ thị xác suất của phân phối chuẩn:trục hoành là x, trục tung là xác suất (xem Định nghĩa **??**). (Đs: $\overline{x} = 485.755, s^2 = 1149, 229, [469.89, 501.62]$)

Bài tập 4.48. Một bài báo trên Tạp chí Vật liệu tổng hợp (tháng 12 năm 1989, tập 23, trang 1200) mô tả ảnh hưởng của sự phân tách trên tần số tự nhiên của các chùm được làm từ các loại vật liệu composite. Năm chùm bị ô nhiễm như vậy đã chịu tải trọng, và kết quả tần số như sau (đơn vị $Hertz$):

230.66, 233.05, 232.58, 229.48, 232.58

Kiểm tra giả định về phân phối chuẩn của tổng thể. Tính khoảng tin cậy 90% cho trung bình tần số tự nhiên.

Bài tập 4.49. Độ sáng của ống hình ảnh của tivi có thể được đánh giá bằng cách đo lượng dòng điện cần thiết để đạt được một mức độ sáng cụ thể. Một mẫu của 10 ống cho kết quả độ lệch chuẩn là 15.7 và trung bình là 317.2. Tìm (trong $microamps$) khoảng tin cậy 99% cho trung bình thực tế yêu cầu. Nêu những giả định cần thiết về phân phối của dữ liệu. (Đs: $[301.06, 333.34]$)

Bài tập 4.50. Một bài báo về Kỹ thuật hạt nhân quốc tế (tháng 2 năm 1988, trang 33) mô tả một số đặc tính của các thanh nhiên liệu được sử dụng trong lò phản ứng thuộc sở hữu của một công ty điện ở Na Uy. Các phép đo về tỷ lệ làm giàu của 12 thanh đã được báo cáo như sau:

2.94; 3.00; 2.90; 2.75; 3.00; 2.95; 2.90; 2.75; 2.95; 2.82; 2.81; 3.05

(a) Sử dụng đồ thị của xác suất phân phối chuẩn để kiểm tra giả định phân phối chuẩn của số liệu.

(b) Tìm khoảng tin cậy 99% cho tỷ lệ phần trăm trung bình của làm giàu. Bạn có đồng ý với tuyên bố rằng tỷ lệ phần trăm trung bình của làm giàu là 2.95%? Tại sao? (Đs: $[2.813, 2.991]$)

Bài tập 4.51. Đo đường kính của một chi tiết máy do một máy tiện tự động sản xuất, ta ghi nhận được số liệu như sau:

X	12.00	12.05	12.10	12.15	12.20	12.25	12.30	12.35	12.40
N	2	3	7	9	10	8	6	5	3

với N chỉ số trường hợp tính theo từng giá trị của X (mm).

(a) Tính trung bình mẫu và độ lệch chuẩn của mẫu. (Đs: 12.21, 0.103)

(b) Ước lượng đường kính trung bình μ ở độ tin cậy 0.95. (Đs: $[12.18; 12.24]$)

(c) Nếu muốn sai số ước lượng không quá $E = 0.02\ mm$ ở độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy trường hợp. (Đs: 102)

Bài tập 4.52. Quan sát chiều cao X (cm) của một số người, ta ghi nhận

X	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170
Số người	1	3	7	9	5	2

(a) Tính trung bình mẫu và phương sai mẫu.(Đs: 156.2;37.68)

(b) Ước lượng trung bình và phương sai của tổng thể ở độ tin cậy 0.95.(Đs: [153.77;158.63])

Bài tập 4.53. Đem cân một số trái cây vừa thu hoạch, ta được kết quả sau

X (g)	200–210	210–220	220–230	230–240	240–250
Số trái	12	17	20	18	15

(a) Tìm khoảng ước lượng của trọng lượng trung bình của trái cây với độ tin cậy 0.95 và 0.99. (Đs: [222.98;228.72], [222.08;229.63])

(b) Nếu muốn sai số ước lượng không quá $E = 2g$ ở độ tin cậy 99% thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu trái? (Đs: 293)

Bài tập 4.54 (*Có lời giải*)**.** Người ta đo ion Na^+ trên một số người và ghi nhận lại được kết quả như sau

129, 132, 140, 141, 138, 143, 133, 137, 140, 143, 138, 140

(a) Tính trung bình mẫu và phương sai mẫu. (Đs: 137.83; 19.42)

(b) Ước lượng trung bình và phương sai của tổng thể ở độ tin cậy 0.95. (Đs: [135.01;140.63]; [9.76;56.1])

(c) Nếu muốn sai số ước lượng trung bình không quá $E = 1$ với độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát mẫu gồm ít nhất mấy người? (Đs: 75)

Bài tập 4.55. Quan sát tuổi thọ X (*giờ*) của một số bóng đèn do xí nghiệp A sản xuất, ta ghi nhận

X	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800
N	10	14	16	17	18	16	16	12	9

(a) Tính trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu.(Đs: 1391.41; 234.45)

(b) Ước lượng tuổi thọ trung bình của bóng đèn ở độ tin cậy 0.95.(Đs: [1350.79;1432.03])

(c) Nếu muốn sai số ước lượng trung bình không quá $E = 30$ với độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát mẫu gồm ít nhất mấy bóng đèn?(Đs: 235)

Bài tập 4.56. Có 3 mẫu quan sát sức nặng con người, kết quả ghi nhận

	Lần quan sát	Trung bình	Độ lệch chuẩn
Mẫu 1	70	55 kg	8.30 kg
Mẫu 2	75	57 kg	8.60 kg
Mẫu 3	90	54 kg	8.50 kg

Nhập chung 3 mẫu lại, tính trung bình và độ lệch mẫu nhập. Dựa vào mẫu nhập để ước lượng trung bình của tổng thể ở độ tin cậy 95% và 99%. (Đs: 55.25, 8.56; $[54.156; 56.344]$, $[53.81; 56.69]$)

4.2.3.2 Khoảng tin cậy cho tỉ lệ

Bài tập 4.57 (8.53 Douglas)**.** Một phần của các mạch tích hợp bị lỗi được tạo ra trong một quá trình quang khắc đang được nghiên cứu. Một thử nghiệm ngẫu nhiên gồm 300 mạch được thử nghiệm, cho thấy có 13 khuyết điểm. Xây dựng khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ mạch khuyết tậtđược sản xuất bởi công cụ đặc biệt này.

Bài tập 4.58 (8-54 Douglas)**.** Bài báo Knee Surgery, Sports Traumatology, Arthroscopy 2005, Vol. 13, pp. 273–279)] đã chỉ ra rằng chỉ có 25 trong số 37 vết rách (67.6%) nằm trong khoảng từ 3mm đến 6 mm từ vành sụn được chữa lành. Xây dựngkhoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ vết rách như vậy sẽ chữa lành.

Bài tập 4.59 (8-56 Dougla.)**.** Trong số 1000 trường hợp ung thư phổi được lựa chọn ngẫu nhiên, 823 trường hợp tử vong trong vòng 10 năm.

(a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ tử vong do ung thư phổi.

(b) Sử dụng ước lượng điểm của p thu được từ mẫu sơ bộ, cỡ mẫu nào là cần thiết để xác định rằng sai số khi ước tính giá trị thực của p nhỏ hơn $0,03$ với độ tin cậy 95% ?

(c) Mẫu phải lớn đến mức nào nếu chúng tôi muốn tự tin ít nhất 95% sai số khi ước tính p nhỏ hơn 0,03, bất kể giá trị thực của p là bao nhiêu?

Bài tập 4.60 (*Có lời giải*). Một mẫu ngẫu nhiên gồm 50 mũ bảo hiểm được sử dụng bởi người đi xe máy và người lái xe đua ô tô đã được thử nghiệm va chạm, và 18 trong số những chiếc mũ bảo hiểm đã bị thiệt hại.

(a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ mũ bảo hiểm loại này sẽ cho thấy thiệt hại từ thử nghiệm này.

(b) Sử dụng ước lượng điểm của p thu được từ mẫu thử trước của 50 mũ bảo hiểm, có bao nhiêu mũ bảo hiểm phải được kiểm tra để sai số khi ước tính giá trị thực của p nhỏ hơn 0,02 với độ tin cậy 95% ?

(c) Mẫu phải lớn đến mức nào nếu chúng tôi muốn tự tin rằng sai số khi ước tính p nhỏ hơn 0,02, bất kể giá trị thực của p là bao nhiêu, với độ tin cậy 95% ?

Bài tập 4.61 (8.59 Douglas). Bộ Giao thông Vận tải muốn khảo sát người dân để xác định tỷ lệ người dân muốn tăng giới hạn tốc độ từ 40 km/giờ lên 50 km/giờ. Họ cần khảo sát bao nhiêu người nếu họ muốn tự tin rằng sai số ước lượng không quá 0.05 với độ tin cậy 99% ?

Bài tập 4.62 (8.60 Douglas). Một nghiên cứu sẽ được thực hiện về tỷ lệ gia đình có ít nhất hai tivi. Một mẫu được yêu cầu lớn đến mức nào nếu chúng tôi muốn tự tin rằng sai số khi ước tính số lượng này nhỏ hơn 0.017 với độ tin cậy 99% ?

Bài tập 4.63. Phần nhỏ của các mạch tích hợp khiếm khuyết được tạo ra trong quá trình quang khắc được nghiên cứu. Một mẫu ngẫu nhiên của 300 mạch được kiểm tra đã phát hiện được 13 khiếm khuyết. Tính khoảng tin cậy 95% trên phần mạch bị lỗi do quá trình trên tạo ra. (Đs: $[0.02029, 0.06637]$)

Bài tập 4.64. Trong số liệu từ cuộc bầu cử tổng thống năm 2004, một bang quan trọng là bang Ohio đã cho kết quả sau đây: đã có 2020 người trả lời trong các cuộc thăm dò xuất cảnh và 768 là sinh viên tốt nghiệp đại học. Trong số các sinh viên tốt nghiệp đại học có 412 bầu cho George Bush. Xây dựng khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp đại học bầu cho George Bush.(Đs: [0.501;0.571])

Bài tập 4.65 (*Có lời giải*)**.** Trong số 1000 trường hợp ung thư phổi được chọn ngẫu nhiên, 823 kết quả tử vong trong vòng 10 năm

(a) Tính toán khoảng tin cậy 95% về tỷ lệ tử vong do ung thư phổi.

(b) Sử dụng ước tính điểm của p tính được từ mẫu sơ bộ, tính kích thước mẫu cần thiết để 95% tin rằng lỗi trong ước tính giá trị thực của p ít hơn hơn 0.03? (Đs: 622)

Bài tập 4.66. Một loại thuốc mới đem điều trị cho 50 người bị bệnh B, kết quả có 40 người khỏi bệnh.

(a) Ước lượng tỷ lệ khỏi bệnh p nếu dùng thuốc đó điều trị với độ tin cậy 0.95 và 0.99.(Đs: [0.65;0.946])

(b) Nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.02 ở độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy trường hợp ?(Đs: 1537)

Bài tập 4.67. Một loại bệnh có tỷ lệ tử vong là 0.01. Muốn chứng tỏ một loại thuốc có hiệu nghiệm (nghĩa là hạ thấp được tỷ lệ tử vong nhỏ hơn 0.005) ở độ tin cậy 0.95 thì phải thử thuốc đó trên ít nhất bao nhiêu người?(Đs: 1522)

Bài tập 4.68 (*Có lời giải*)**.** Ta muốn ước lượng tỷ lệ viên thuốc bị sức mẻ p trong một lô thuốc lớn.

(a) Nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.01 với độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy viên? (*Hướng dẫn:* tìm giá trị lớn nhất của $f(1-f)$. Đs: 9604)

(b) Quan sát ngẫu nhiên 200 viên, thấy có 18 viên bị sứt mẻ. Hãy ước lượng p ở độ tin cậy 0.95. Khi đó, nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.01 với độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy viên?(Đs:3147)

4.2.3.3 Khoảng tin cậy cho phương sai

Định lý 2. *(Khoảng tin cậy cho ước lượng phương sai của phân phối chuẩn)*

(i) *Phân phối chi bình phương* $X \sim \chi^2(k-1)$ là phân phối có hàm mật độ là

$$f(x) = \frac{x^{k/2-1}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \quad x > 0,$$

với k là bậc tự do. Khi đó, X có trung bình k và phương sai $2k$.

(ii) *Định lí:* cho $X_1, \cdots, X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên lấy từ phân phối chuẩn với hai tham số μ, σ^2. Nếu S^2 là phương sai mẫu thì biến ngẫu nhiên

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

(iii) *Khoảng tin cậy:* nếu s^2 là phương sai mẫu của mẫu ngẫu nhiên cỡ n được lấy từ tổng thể của một phân phối chuẩn với hai tham số μ và σ^2 thì khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ của σ^2 được tính

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}},}$$

trong đó $\chi^2_{\alpha/2,n-1}, \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ lần lượt thỏa:

$$\mathbb{P}\left(\chi > \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = \alpha/2, \qquad \mathbb{P}\left(\chi > \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha/2.$$

Bài tập 4.69. Xác định giá trị $\chi^2_{\alpha,n}$ trong các trường hợp sau:

$$\chi^2_{0.05,10}, \chi^2_{0.025,15}, \chi^2_{0.01,12}, \chi^2_{0.99,16}, \chi^2_{0.005,25}.$$

Bài tập 4.70 (*Có lời giải*)**.** Xác định giá trị $\chi^2_{\alpha/2,n}$ trong trường hợp sau: độ tin cậy 90% với bậc tự do 19.

Bài tập 4.71. Tỷ lệ titan trong một hợp kim được sử dụng trong đúc các bộ phận hàng không vũ trụ được đo bằng 51 mẫu được chọn ngẫu nhiên. Độ lệch chuẩn mẫu là $s = 0.37$. Xây dựng một khoảng tin cậy có độ tin cậy 95% cho σ. (Đs: $[0.31, 0.46]$)

Bài tập 4.72. Hàm lượng đường của xi-rô trong hộp thường có phân phối chuẩn. Một mẫu ngẫu nhiên với $n = 10$ lon mang lại độ lệch chuẩn của mẫu là 4.8 *miligam*. Tính toán khoảng tin cậy 95% cho σ.

Bài tập 4.73. Một bài báo trong tạp chí "hệ sinh thái đô thị": Đô thị hóa và sự ấm lên của Phoenix (Arizona, Mỹ): Tác động, phản hồi và giảm nhẹ (2002, Vol. 6, pp. 183–203), đề cập rằng Phoenix là lý tưởng để nghiên cứu ảnh hưởng của nhiệt độ của một đô thị hòn đảo vì nó đã phát triển từ dân số 300.000 đến gần 3 triệu trong 50 năm qua và đây là một khoảng thời gian thay đổi khí hậu liên tục. Trung bình 50 năm của nhiệt độ trung bình hàng năm tại tám địa điểm ở Phoenix được mô tả bởi một bảng dưới đây. Kiểm tra giả định về phân phối chuẩn. Xây dựng khoảng tin cậy 95% cho độ lệch chuẩn dựa trên dữ liệu tại vị trí có nhiệt độ trung bình hàng năm. (Đs: $[0.626, 1.926]$)

Vị trí	Trung bình nhiệt độ
Sky Harbor Airport	23.3
Phoenix Greenway	21.7
Phoenix Encanto	21.6
Waddell	21.7
Litchfield	21.3
Laveen	20.7
Maricopa	20.9
Harlquahala	20.1