BÀI 2: BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ QUY LUẬT PHÂN BỐ XÁC XUẤT

Mục tiêu

Thông qua các công cụ giải tích, bài này giới thiệu với học viên khái niệm về biến ngẫu nhiên, phân loại các biến ngẫu nhiên, các quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên, các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên và ý nghĩa của chúng. Hai nội dung quan trọng nhất của chương là quy luật phân phối xác suất và các tham số đặc trưng của một biến ngẫu nhiên.

Thời lượng

- 8 tiết

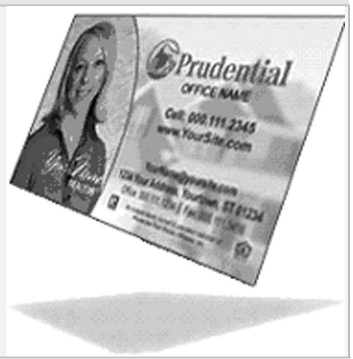
Các kiến thức cần có

- Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên;
- Định nghĩa biến ngẫu nhiên;
- Phân loại biến ngẫu nhiên;
- Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên;
- Bảng phân phối xác suất;
- Hàm phân phối xác suất;
- Hàm mật độ xác suất;
- Các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên;
- Kỳ vọng (giá trị trung bình);
- Trung vị;
- Mốt (Mode);
- Phương sai và độ lệch chuẩn;
- Giá trị tới hạn (critical value);
- Mômen trung tâm bậc cao;
- Biến ngẫu nhiên nhiều chiều;
- Biễn nhẫu nhiên k chiều;
- Bảng phân phối xác suất của biễn ngẫu nhiên hai chiều;
- Bảng phân phối xác suất có điều kiện của hai biến ngẫu nhiên;
- Bảng phân phối xác suất có điều kiện của hai biến ngẫu nhiên.

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI

Tình huống

Một công ty bảo hiểm bán thẻ bảo hiểm với giá 100000đ/1 người/1 năm. Nếu người tham gia bảo hiểm gặp rủi ro trong năm đó thì nhận được số tiền bồi thường là 1 triệu đồng. Theo thống kê biết rằng tỷ lệ người tham gia bảo hiểm bị rủi ro trong năm là 005, hãy tính tiền lãi trung bình khi bán mỗi thẻ bảo hiểm. Nếu bán bảo hiểm được cho 10000 khách hàng thì số tiền lãi trung bình thu về được là bao nhiêu?



Câu hỏi

1. Biểu diễn bảng phân phối xác suất giữa tiền lãi bảo hiểm và khả năng nhận được lãi?
2. Số tiền lãi trung bình là bao nhiêu?
3. Nếu bán bảo hiểm được cho 10000 khách hàng thì số tiền lãi trung bình thu về được là bao nhiêu?

2.1. Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên

2.1.1. Định nghĩa biến ngẫu nhiên

Trong thực tế người ta thường gặp rất nhiều đại lượng nhận các giá trị một cách ngẫu nhiên. Ta hãy bắt đầu làm quen với khái niệm biến ngẫu nhiên qua các ví dụ.

Ví dụ 1.1:

Gọi X là số chấm xuất hiện khi gieo một con xúc sắc thì X có thể nhận một trong các giá trị 1, 2, 3, 4, 5 và 6.

Ví dụ 1.2:

Bắn 3 viên đạn một cách độc lập vào mục tiêu, xác suất trúng bia của mỗi viên đạn đều bằng 0,8. Gọi Y là số viên đạn trúng bia. Lúc đó Y có thể nhận các giá trị 0, 1, 2 hoặc 3.

Ví dụ 1.3:

Một hộp có m sản phẩm tốt, n sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ra 2 sản phẩm. Nếu ký hiệu Z là số sản phẩm tốt lấy ra được thì Z có thể nhận các giá trị 0, 1 hoặc 2.

Ví dụ 1.4:

Bắn 1 viên đạn vào bia có bán kính là 20cm và giả sử viên đạn trúng vào bia. Gọi W là khoảng cách từ tâm bia tới điểm bia trúng đạn thì W có thể nhận các giá trị thuộc nửa đoạn [0; 20).

Các đại lượng X, Y, Z, W trong những ví dụ trên nhận mỗi giá trị có thể có của mình một cách ngẫu nhiên, tương ứng với một xác suất nào đó. Chúng được gọi là biến ngẫu nhiên hay đại lượng ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1.1:

Biến ngẫu nhiên là đại lượng mà việc nó có thể nhận một giá trị cụ thể nào đó, hoặc một giá trị nằm trong một khoảng nào đó thuộc miền các khoảng giá trị có thể có của nó, là một biến cố ngẫu nhiên nếu như phép thử chưa được thực hiện.

CHÚ Ý

Sau khi phép thử được thực hiện, biến ngẫu nhiên sẽ chỉ nhận một và chỉ một giá trị trong các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên đó.

Ta thường ký hiệu biến ngẫu nhiên bởi các chữ in hoa: X, Y, Z, ... hoặc X_1, X_2, … , Y_1, Y_2, ... và các giá trị của chúng bởi các chữ thường $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots z_1, z_2 \ldots$

Hình 2.1: Kết quả tung đồng xu chỉ có thể nhận được một trong hai giá trị: sấp và ngửa

CHÚ Ý

Để đơn giản, ta kí hiệu $(X = x)$ thay cho biến cố "biến ngẫu nhiên X nhận giá trị bằng x" và viết $(X < x)$ thay cho biến cố "biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn x".

Nếu biến ngẫu nhiên X chỉ nhận các giá trị: $x_1, x_2, ... x_n$ thì các biến cố $(X = x_1)$, $(X = x_2), ..., (X = x_n)$ tạo nên một hệ đầy đủ biến cố trong phép thử.

2.1.2. Phân loại biến ngẫu nhiên

Người ta thường chia các biến cố ngẫu nhiên làm hai loại: Biến ngẫu nhiên rời rạc và biến ngẫu nhiên liên tục.

- Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc khi các giá trị có thể có của nó xếp thành dãy hữu hạn hoặc vô hạn đếm được $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_k$. Nói cách khác, ta có thể liệt kê tất cả các giá trị của biến ngẫu nhiên đó. Các biến ngẫu nhiên X, Y, Z tương ứng trong các ví dụ 1.1, 1.2, 1.3 là các biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Biến ngẫu nhiên được gọi là *liên tục* trong một khoảng giá trị nếu như các giá trị có thể có của nó lấp đầy khoảng giá trị đó. Biến ngẫu nhiên W trong Ví dụ 1.4 là một biến ngẫu nhiên liên tục.

Hình 2.2: Số lượng cá câu được là một biến ngẫu nhiên rời rạc

2.2. Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

Như đã trình bày ở trên, biến ngẫu nhiên nhận mỗi giá trị của nó tương ứng với một biến cố ngẫu nhiên nào đó và do vậy tương ứng với một xác suất của biến cố đó. Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên là cách biểu diễn mối quan hệ giữa giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên và các xác suất tương ứng để biến ngẫu nhiên nhận các giá trị đó.

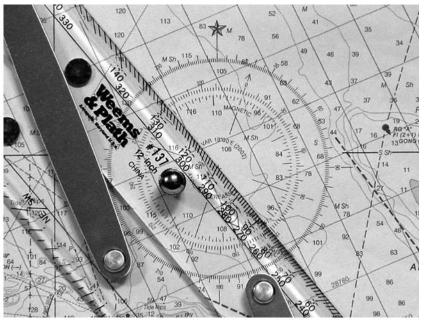
Các phương pháp được sử dụng phổ biến để mô tả quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên bao gồm:

- Bảng phân phối xác suất (áp dụng cho biến ngẫu nhiên rời rạc)
- Hàm phân phối xác suất (áp dụng cho cả hai loại biến ngẫu nhiên rời rạc và liên liên tục)
- Hàm mật độ xác suất (áp dụng cho biến ngẫu nhiên liên tục)

Hình 2.3: Chiều cao của người là một biến ngẫu nhiên liên tục

2.2.1. Bảng phân phối xác suất

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots x_n$ với các xác suất tương ứng $p_i = P(X = x_i), i = 1 \div n$. Khi đó bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X được trình bày như sau:



Hình 2.4: Quy luật phân phối của biến ngẫu nhiên

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Trong đó:

$$\begin{cases} 0 \le p_i \le 1 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$ (khi X nhận vô hạn đếm được các giá trị thì $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$).

CHÚ Ý

Nếu biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất như trên thì

$$p(a < X < b) = \sum_{a<x_i<b} P(X = x_i) = \sum_{a<x_i<b} p_i \qquad (2.1)$$

Ví dụ 2.1:

Tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi X là "số chấm của mặt trên cùng". Khi ấy X là một biến ngẫu nhiên, ta có bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ví dụ 2.2:

Với biến ngẫu nhiên Y trong Ví dụ 1.2, ta có:

$$P(Y = 0) = C_3^0 \times 0,8^0 \times 0,2^3 = 0,008$$

$$P(Y=1)=C_3^1\times 0,8^1\times 0,2^2=0,096$$
$$P(Y=2)=C_3^2\times 0,8^2\times 0,2^1=0,384$$
$$P(Y=3)=C_3^3\times 0,8^3\times 0,2^0=0,512.$$

Từ đó suy ra bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y có dạng:

Y	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

Ví dụ 2.3:

Với biến ngẫu nhiên Z trong ví dụ 1.3, ta có bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Z như sau:

Z	0	1	2
P	$\frac{C_m^0\times C_n^2}{C_{m+n}^2}$	$\frac{C_m^1\times C_n^1}{C_{m+n}^2}$	$\frac{C_m^2\times C_n^0}{C_{m+n}^2}$

Ví dụ 2.4:

Một người phải tiến hành thí nghiệm cho tới khi thành công thì dừng. Lập bảng phân phối xác suất của số lần tiến hành thí nghiệm. Biết rằng các lần tiến hành thí nghiệm là độc lập với nhau và xác suất thành công mỗi lần là p $(0 < p < 1)$.

Giải:

Gọi X là số lần phải tiến hành thí nghiệm. Các giá trị có thể có của X là 0, 1, 2, …, ,n …

Gọi A_i là biến cố ở lần thí nghiệm thứ i thì thành công $(i=1,2,...)$. Ta có:

$$P(X=1)=P(A_1)=p.$$

Biến cố $(X = 2)$ tương đương với biến cố $\overline{A}_1A_2$. Từ đó ta có:

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1A_2)=(1-p)\times p.$$

Tương tự, ta có bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X như sau:

X	1	2	3	…	n	…
P	p	$(1-p)\times p$	$(1-p)^2\times p$	…	$(1-p)^{n-1}\times p$	…

Ví dụ 2.5:

Một người được phát 3 viên đạn và lần lượt bắn một tấm bia đến khi nào trúng thì dừng. Lập bảng phân phối xác suất số viên đạn phải bắn, biết rằng các lần bắn độc lập với nhau và xác suất trúng đích của mỗi lần bắn là 0,7.

Giải:

Ký hiệu X là số viên đạn phải bắn, các giá trị mà X có thể nhận là 1, 2 và 3. Gọi A_i là biến cố viên đạn thứ i trúng bia $(i=1,2,3)$. Ta có $P(X=1)=P(A_1)=0,7$. Mặt khác ta thấy biến cố $(X = 2)$ tương đương với biến cố $\overline{A}_1A_2$.

Do vậy:

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1A_2)=0,3\times 0,7=0,21$$

Đồng thời, biến cố (X = 3) tương đương với biến cố $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

Từ đó:

$$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0,3\times 0,3\times 0,7+0,3\times 0,3\times 0,3=0,09$$

Tổng hợp các kết quả trên, ta lập được bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	1	2	3
P	0,7	0,21	0,09

Ví dụ 2.6:

Một người bắn một viên đạn vào bia với xác suất trúng bia là 0,7. Thử lập bảng phân phối xác suất của khoảng cách từ điểm bia trúng đạn tới tâm bia, biết bia có bán kính là 20cm.

Chúng ta dễ dàng thấy việc lập bảng phân phối xác xuất với một biến ngẫu nhiên liên tục như trong ví dụ này không thể thực hiện được. Vì vậy cần sử dụng công cụ thứ hai mô tả quy luật phân phối xác suất của các biến ngẫu nhiên, đó là hàm phân phối xác suất.

2.2.2. Hàm phân phối xác suất

2.2.2.1. Định nghĩa hàm phân phối xác suất

Hình 2.5: Hàm phân bố xác suất

Cho biến ngẫu nhiên X. Với mỗi số thực x, xác định duy nhất một biến cố (X < x) và do đó có tương ứng một và chỉ một xác suất $P(X<x)$. Quan hệ tương ứng này cho ta một hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, hàm số này được ký hiệu là F(x).

Định nghĩa 2.1:

Hàm số $F(x)=P(X<x)$, $x\in\mathbb{R}$, được gọi là hàm phân phối (hàm phân bố) xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Nếu X là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất ở mục 2.1 thì hàm phân phối xác suất của X xác định như sau:

$$F(x)=\sum_{x_i<x}p_i\,,\qquad x\in\mathbb{R}\tag{2.2}$$

Ví dụ 2.7:

Cho biết ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

Tìm hàm phân phối xác suất của X .

Giải:

Ta có

$$F(x)=\begin{cases}0 & ;\ x\le 0\\ 1/5 & ;\ 0<x\le 1\\ 1/2 & ;\ 1<x\le 2\\ 1 & ;\ x>2\end{cases}$$

2.2.2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

Từ định nghĩa, ta có thể chứng minh được hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên có một số tính cơ bản sau:

Hình 2.6: Tính chất của hàm Hàm phân phối xắc xuất

Tính chất 1:

$$0\le F(x)\le 1,\ \forall x.$$

Tính chất 2:

Nếu a là giá trị nhỏ nhất có thể có của X và b là giá trị lớn nhất có thể có của X thì:

$$F(x)=0 \qquad \text{với mọi } x\le a$$

$$F(x)=1 \qquad \text{với mọi } x>b$$

Chứng minh:

Vì a là giá trị nhỏ nhất của X nên với $x\le a$ thì biến cố $X<a$ là biến cố không thể có. Do vậy $F(x)=P(X<x)=P(V)=0$.

Tương tự, vì b là giá trị lớn nhất có thể có của X nên với $x>b$ thì $(X<x)=U$. Từ đó $F(x)=P(X<x)=P(U)=1$.

Tính chất 3:

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên là một hàm không giảm.

Thật vậy, giả sử $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ và $x_1<x_2$.

Ta có:

$$F(x_1)=P(X<x_1), \qquad F(x_2)=P(X<x_2).$$

Vì biến cố $(X<x_2)$ có thể tách thành hai biến cố xung khắc $(X<x_1)$ và $(x_1\le X<x_2)$ nên

$$P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1\le X\le x_2),$$

Do đó $F(x_2)=F(x_1)+P(x_1\le X<x_2)\ge F(x_1)$.

Vì vậy F(x) là hàm không giảm.

Hình 2.7: Hàm phân phối xắc suất của một biến ngẫu nhiên liên tục bên trái

Tính chất 4:

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục bên trái.

Từ các tính chất trên, ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 2.1:

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}P(X<x)=0 \qquad (2.3)$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}P(X<x)=1 \qquad 2.4)$$

Hệ quả 2.2:

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a) \qquad (2.5)$$

Hệ quả 2.3: Nếu X là một biến ngẫu nhiên liên tục thì $P(X=x)=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ý nghĩa của hệ quả này là trong quá trình nghiên cứu biến ngẫu nhiên liên tục ta không cần quan tâm đến xác suất để biến ngẫu nhiên đó nhận một giá trị cụ thể nào, mà cần quan tâm đến xác suất để nó nhận giá trị trong một khoảng giá trị nào đó.

Hệ quả 2.4:

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì ta có:

$$P(x_1<X<x_2)=P(x_1<X\le x_2)=P(x_1\le X<x_2)=P(x_1\le X\le x_2)$$

Ý nghĩa của hệ quả này là với biến ngẫu nhiên liên tục ta không cần phân biệt xác xuất để nó nhận giá trị trong đoạn hay trong khoảng giá trị nào đó của nó.

CHÚ Ý

Nếu hàm F(x) có các tính chất 1, 2, 3 thì nó là hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên nào đó.

Hàm F(x) cho biết tỷ lệ phần trăm giá trị của X nằm về bên trái của số thực x.

Ví dụ 2.8:

Biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân phối xác suất

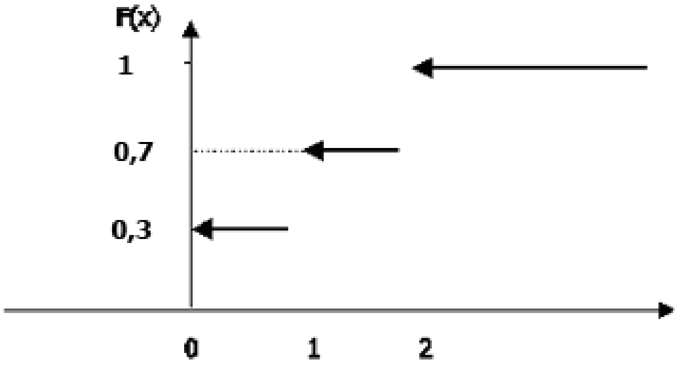
X	0	1	2
P	0,3	0,4	0,3

- Lập hàm phân phối xác suất của X .
- Tính $p(0<X\le 2)$ và $P(1<X<5)$

Giải:

- Ta có:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 0,3 & 0<x\le 1\\ 0,7 & 1<x\le 2\\ 1 & 2<x\end{cases}$$



Hình 2.8: Đồ thị hàm phân phối F(x) của biến ngẫu nhiên rời rạc

- Để tính $P(0<X\le 2)$ ta có thể sử dụng hai cách:

Cách 1: Tính thông qua hàm phân phối:

$$\begin{aligned}P(0<X\le 2) &= P(X<2)+P(X=2)-(P(X<0)+P(X=0))\\ &= F(2)+P(X=2)-F(0)-P(X=0)\\ &= 0,7+0,3-0-0,3=0,7\end{aligned}$$

Cách 2: Tính trực tiếp:

$$\begin{aligned}P(0<X\le 2) &= P(X=1)+P(X=2)\\ &= 0,4+0,3=0,7\end{aligned}$$

Tương tự ta tính được:

$$\begin{aligned}P(1<X<5) &= P(X<5)-P(X<1)-P(X=1)\\ &= F(5)-F(1)-P(X=1)=1-0,3-0,4=0,3\end{aligned}$$

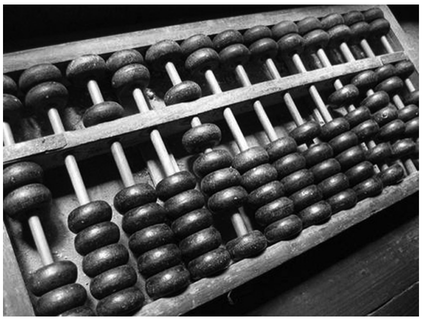
hoặc bằng cách khác: $P(1<X<5)=P(X=2)=0,3$

2.2.3. Hàm mật độ xác suất

Hình 2.9: Mật độ xe tại nút giao thông

2.2.3.1. Định nghĩa hàm mật độ xác suất

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất F(x). Nếu tồn tại hàm số f(x) sao cho:



$$f(x) = F'(x) \qquad (2.6)$$

thì hàm số f(x) được gọi là *hàm mật độ xác suất* của biến ngẫu nhiên X.

Trong định nghĩa trên yêu cầu đặt ra đối với F(x) là đây phải là hàm khả vi. Vì vậy F(x) phải là hàm liên tục, do đó X là biến ngẫu nhiên liên tục. Chính vì vậy khái niệm hàm mật độ xác suất chỉ được dùng với biến ngẫu nhiên liên tục.

2.2.3.2. Tính chất của hàm mật độ xác suất

Từ định nghĩa và tính chất của hàm phân phối xác suất có thể chỉ ra các tính chất sau của hàm mật độ xác suất:

- **Tính chất 1:**

$$f(x) \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

Thật vậy, do $f(x) = F'(x)$ mà F(x) là một hàm không giảm nên $f(x) \geq 0$.

- **Tính chất 2:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad (2.7)$$

Tính chất trên dễ dàng được suy ra từ các đẳng thức sau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < +\infty) = P(U) = 1$$

- **Tính chất 3:**

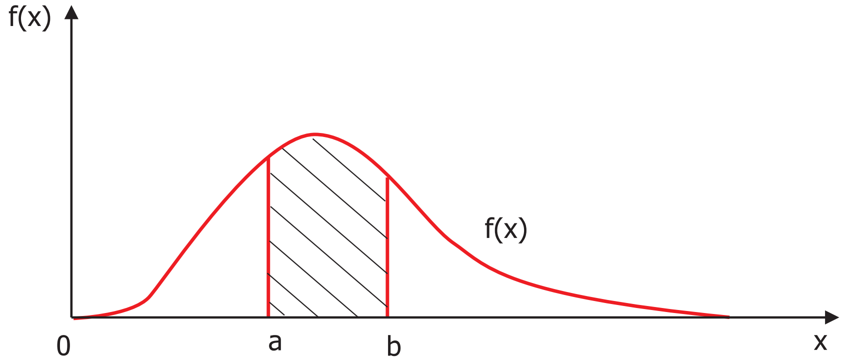
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (2.8)$$

Hiển nhiên ta có:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Từ đó dẫn đến điều phải chứng minh.

Về mặt hình học thì kết quả trên có thể minh họa như sau: Xác suất để biến ngẫu nhiên liên tục X nhận giá trị trong khoảng (a; b) bằng diện tích của hình thang cong giới hạn bởi trục Ox, đường cong f(x) và các đường thẳng $x = a$ và $x = b$.



Hình 2.10: Đồ thị hàm mật độ xác suất f(x)

- **Tính chất 4:**

  Với mọi số thực a ta đều có

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Thật vậy, ta thấy:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Công thức trên cho phép tìm hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục khi đã biết hàm mật độ xác suất của nó.

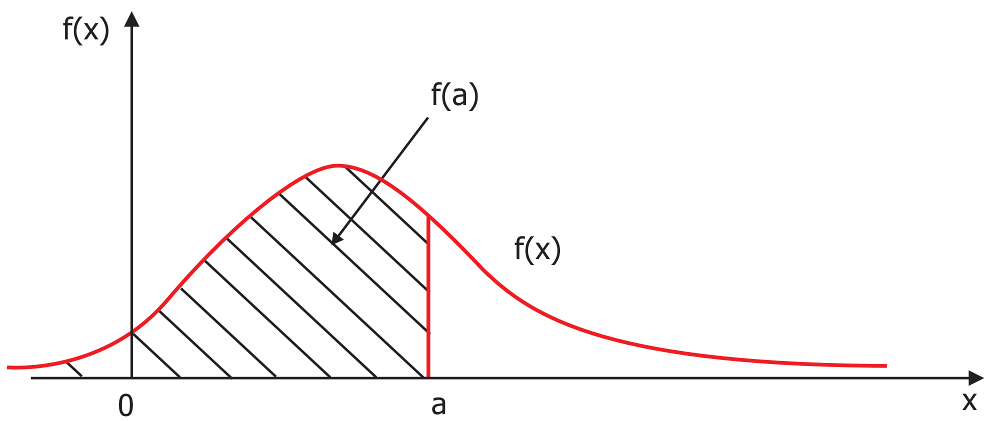
Về mặt hình học, công thức trên cho thấy giá trị của hàm phân bố xác suất F(x) tại điểm a bằng diện tích hình tam giác cong giới hạn bởi trục Ox, đường cong f(x) và đường thẳng x = a.

CHÚ Ý

Nếu hàm số f(x) có các tính chất 1 và 2 như ở trên thì nó là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên nào đó.

Nếu hàm mật độ liên tục tại x thì tại đó ta có $F'(x) = f(x)$.

Với biến ngẫu nhiên liên tục thì F(x) liên tục và $P(X = x_0) = 0$ đối mọi điểm x_0 nên các biến cố $(a < X < b), (a \le X < b), (a < X \le b), (a \le X \le b)$ có xác suất bằng nhau. Hàm mật độ xác suất phản ánh mức độ tập trung xác suất tại điểm x



Hình 2.11: Giá trị của hàm phân phối F(x) xác định qua tích phân của hàm mật độ f(x)

Hình 2.12: Thời gian tàu đến sớm (hay muộn) hơn giờ dự kiến cũng là một biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2.9:

Giả sử a < b là hai số thực. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a) & x\in(a;b)\\ 0 & x\notin(a;b)\end{cases}$$

Tìm hàm phân phối xác suất của X .

Giải:

Ta xét các trường hợp sau:

- Với $x\le a$ ta có:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0.dt=0$$

- Với a< x < b ta có:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0.dt+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}$$

- Với $x\ge b$ ta có:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} 0.dt+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int_{b}^{x}0.dt=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Vậy hàm phân phối xác suất của X xác định như sau:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)di=\begin{cases}0 & ,x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,a<x<b\\ 1 & ,x\ge b\end{cases}$$

Ví dụ 2.10:

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,x\notin[1;2]\\ \dfrac{A}{x^2} & ,x\in[1;2]\end{cases}$$

Hãy tìm A và tính xác suất $P(0 < X < \frac{3}{2})$.

Giải:

Vì f(x) là hàm mật độ xác suất nên

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{A}{x^2}dx = \frac{-A}{x}\Big|_1^2 = -A\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{A}{2}$$

Vậy, $A = 2$ và

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin [1;2] \\ \frac{2}{x^2} & , x \in [1;2] \end{cases}$$

Từ đó ta có:

$$P\left(0 < X < \frac{3}{2}\right) = \int_1^{3/2} f(x)dx = \int_1^{3/2} \frac{2}{x^2}dx = -\frac{2}{x}\Big|_1^{3/2} = -2\left(\frac{2}{3}-1\right) = \frac{2}{3}$$

Ví dụ 2.11:

Thời gian (phút) để một khách hàng xếp hàng chờ phục vụ là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác xuất

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ Ax^2 & , 0 < x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$$

- Tìm A và hàm mật độ xác suất của X
- Tính xác suất để trong 3 người xếp hàng thì có 2 người phải chờ không quá 2 phút.

Giải:

- Vì $\lim_{x \to 3^-} F(x) = F(3) <=> \lim_{x \to 3^-} Ax^2 = 1 <=> A = \frac{1}{9}$ nên ta có

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin (0;3] \\ \frac{2}{9}x & , 0 < x < 3 \end{cases}$$

- Xác suất để một khách hàng phải chờ không quá 2 phút là:

$$P(X \le 2) = F(2) = \frac{4}{9}$$

Vậy xác suất để trong 3 khách hàng có 2 người phải chờ không quá 2 phút là

$$P_2(2) = C_3^2\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^1 = \frac{3.16.5}{729} \cong 0,329.$$

Ví dụ 2.12:

Biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & ,x>0,\lambda>0\end{cases}$$

- Tìm hàm mật độ của X
- Tính xác suất $P(-1<X<1)$

Giải:

- Ta có hàm mật độ của X:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & ;x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & ;\ x>0,\lambda>0\end{cases}$$

- Xác suất cần tìm là:

Cách 1:

$$P(-1\le X<1)=F(1)-F(-1)=1-e^{-\lambda}-0=1-e^{-\lambda}$$

Cách 2:

$$P(-1\le X<1)=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$$

$$=0+\int_{0}^{1}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{1}=1-e^{-\lambda}.$$

Ví dụ 2.13:

Tuổi thọ X của một loại sản phẩm (giờ) là một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2} & ,\ x\ge 100\\ 0 & ,\ x<100\end{cases}$$

- Tìm hàm phân phối xác suất của X.
- Sản phẩm được bảo hành nếu tuổi thọ của nó dưới 120 giờ. Tính tỷ lệ sản phẩm phải bảo hành.

Giải:

- Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & ,x<100\\ \displaystyle\int_{100}^{x}\frac{100}{t^2}dt & ,x\ge 100\end{cases}$$

tức là:

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<100\\ 1-\dfrac{100}{x} & ,x\geq 100\end{cases}$$

- Tỷ lệ sản phẩm phải bảo hành là:

$$P(X<120)=F(120)=1-\frac{100}{120}=\frac{1}{6}$$

CHÚ Ý

Cho biết ngẫu nhiên X và φ là một hàm số nào đó, ta có thể chứng minh được rằng φ (X) cũng là một biến ngẫu nhiên. Hơn nữa, nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên thì các đại lượng $X+Y, X-Y$ và XY cũng là các biến ngẫu nhiên. Hơn nữa, nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có quy luật phân phối xác suất: $P(X=x_1)=P_i,\ i=1,2...$ và φ là một hàm số nào đó, thì biến ngẫu nhiên $\varphi(X)$ có qui luật phân phối xác suất là

$$P(\varphi(X)=x)=\sum_{\varphi(x_i)=x} p_i, i=1,2... \qquad (2.9)$$

Giả sử X và Y là 2 biến ngẫu nhiên rời rạc, có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	...	x_n
P	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$

Y	y_1	y_2	...	y_m
P	$p(y_1)$	$p(y_2)$	...	$P(y_n)$

và C là hằng số. Khi đó:

- CX là biến ngẫu nhiên có phân phối:

CX	Cx_1	Cx_2	...	Cx_n
P	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_n)$

- $X+Y$ là biến ngẫu nhiên có phân phối

$$P(X+Y=z)=\sum_{x_i+y_j=z} P(X=x_i, Y=y_j)=\sum_{x_i+y_j=z} P(x_i,y_j). \quad (2.10)$$

- XY là biến ngẫu nhiên có phân phối:

$$P(XY=z)=\sum_{x_iy_j=z} P(X=x_i, Y=y_j)=\sum_{x_iy_j=z} p(x_i,y_j) \qquad (2.11)$$

CHÚ Ý

Các biến ngẫu nhiên X và Y gọi là độc lập với nhau nếu phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên này không phụ thuộc vào việc biến ngẫu nhiên kia nhận giá trị bằng bao nhiêu. Nói cách khác, mọi biến cố liên quan đến X độc lập với biến cố bất kỳ liên quan đến Y. Có thể chứng minh được rằng hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y độc lập với nhau khi và chỉ khi

$$P(X = x_1; Y = y_j) = P(x_i; y_j) = p(x_i)p(y_j) = P(X = x_i).P(Y = y_j), \forall x_i, y_j$$

Một cách tổng quát, các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ độc lập với nhau nếu phân phối xác suất của mỗi biến ngẫu nhiên (hay một nhóm các biến ngẫu nhiên) không phụ thuộc vào việc các biến ngẫu nhiên còn lại nhận giá trị bằng bao nhiêu.

Hình 2.13: Mặt sấp mặt ngửa

Ví dụ 2.14:

Cho hai biến ngẫu nhiên độc lập X và Y có bảng phân phối như sau:

X	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

Y	−1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

Khi đó 2X là một biến ngẫu nhiên nhận các giá trị 0, 2 và 4 với các xác suất:

$$P(2X = 0) = P(X = 0) = 0,2$$
$$P(2X = 2) = P(X = 1) = 0,5$$
$$P(2X = 4) = P(X = 2) = 0,3$$

Từ đó, bảng phân phối xác suất của 2X là:

X	0	2	4
P	0,2	0,5	0,3

Ngoài ra, X + Y cũng là biến ngẫu nhận các giá trị: −1, 0, 1, 2 và 3 với các xác suất được tính tương ứng, chẳng hạn:

$$P(X + Y = -1) = \sum_{x_i + y_j = -1} P(X = x_i, Y = y_j)$$
$$= P(X = 0, Y = -1) = P(X = 0).P(Y = -1) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$$

Tương tự như vậy, ta có được các xác suất còn lại và xác định được bảng phân phối xác suất của X + Y là:

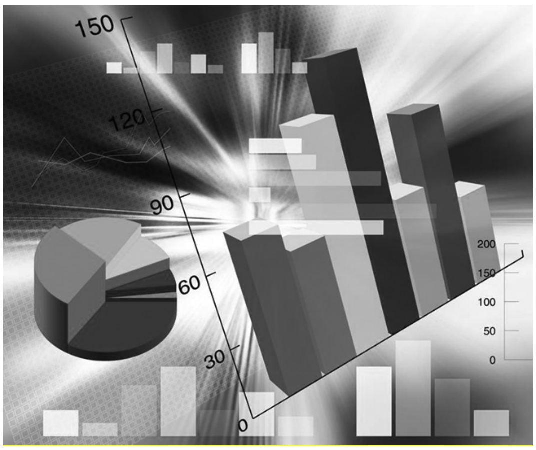
X + Y	−1	0	1	2	3
P	0,06	0,23	0,35	0,27	0,09

Hơn nữa, XY cũng là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị: −2, −1, 0, 1 và 2. Tương tự như trên ta có bảng phân phối xác suất của XY là:

XY	−2	−1	0	1	2
P	0,09	0,15	0,52	0,15	0,09

2.3. Các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Khi nghiên cứu các đại lượng ngẫu nhiên, ta thường quan tâm đến các giá trị phản ánh đặc trưng khái quát của biến ngẫu nhiên như: Giá trị trung bình, độ phân tán,... Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu một số tham số quan trọng nhất.



Hình 2.14: Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

2.3.1. Kỳ vọng (giá trị trung bình)

2.3.1.1. Định nghĩa kỳ vọng

Định nghĩa 3.1:

Cho biến ngẫu nhiên X. Kỳ vọng của X là một số, ký hiệu E(X) và xác định như sau:

- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ với xác suất tương ứng $p_1, p_2 ..., p_n, ...$ thì:

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \qquad (2.12)$$

- Nếu X chỉ nhận hữu hạn giá trị $x_1, x_2, ...x_n$ với xác suất tương ứng $p_1, p_2, ...p_n$ thì:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (2.13)$$

- Nếu X nhận giá trị liên tục thì:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Ví dụ 3.1:

Gọi X là số chấm xuất hiện khi gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất thì X có bảng phân phối xác suất

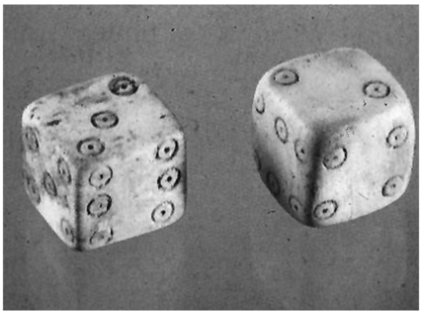
X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Kỳ vọng của X (số chấm trung bình xuất hiện khi gieo xúc sắc) là:

$$E(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}.$$

Ví dụ 3.2:

Một xe buýt xuất hiện tại bến đợi cứ 15 phút một chuyến. Một hành khách tới bến vào một thời điểm ngẫu nhiên. Gọi X là thời gian chờ xe của hành khách đó. Biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ:



$$f(x)=\begin{cases}0 & ;x\notin[0;15) \\ \frac{1}{15} & ;x\in[0;15)\end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_{0}^{15}\frac{x}{15}dx=7,5 \text{ (phút)}$$

Như vậy, kỳ vọng E(X) cho biến thời gian chờ xe trung bình của một hành khách là 7,5 phút.

Ví dụ 3.3:

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & ,x>0,\lambda>0\end{cases}$$

Lúc đó ta có:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx+\int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$$

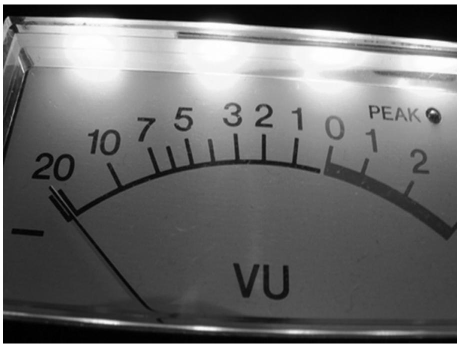
$$=\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=-\lambda e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}=\lambda$$

CHÚ Ý

Kỳ vọng là giá trị trung bình theo xác suất của các giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận. Trong kinh tế, kỳ vọng đặc trưng cho năng suất trung bình của một phương án sản xuất, lợi nhuận trung bình của một danh mục đầu tư, trọng lượng trung bình của một loại sản phẩm, tuổi thọ trung bình của một chi tiết máy,...

Đơn vị của E(X) trùng với đơn vị của X.

2.3.1.2. Các tính chất của kỳ vọng



Hình 2.15: Tính chất kì vọng

Từ định nghĩa của kỳ vọng, ta có thể chứng minh được các tính chất sau:

- **Tính chất 1:** Kì vọng của hằng số bằng chính hằng số đó,

$$E(C) = C \text{ với } C \text{ là hằng số} \qquad (2.15)$$

- **Tính chất 2:** Có thể đưa hằng số ra ngoài dấu kỳ vọng,

$$E(C.X) = C.E(X) \qquad (2.16)$$

- **Tính chất 3:** Kỳ vọng của tổng các biến ngẫu nhiên bằng tổng các kỳ vọng của mỗi biến ngẫu nhiên thành phần:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad (2.17)$$

- **Hệ quả 3.1:**

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) \qquad (2.18)$$

- **Tính chất 4:** Kỳ vọng của tích hai biến ngẫu nhiên độc lập bằng tích các kỳ vọng của chúng:

$$E(XY) = E(X).\, E(Y) \qquad (2.19)$$

- **Tính chất 5:** Cho φ là một hàm nào đó và X là một biến ngẫu nhiên. Lúc đó ta có:

$$E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i)p_i \text{ nếu } X \text{ rời rạc}$$

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx \text{ nếu } X \text{ liên tục} \qquad (2.21)$$

Ví dụ 3.4:

Cho phân phối xác suất của số máy hỏng X trong một ca làm việc trong bảng

X	0	1	2
P	0,9	0,09	0,01

- Tìm số máy hỏng trung bình trong một ca làm việc
- Mỗi máy hỏng phải sửa hết 2 triệu đồng, tính tiền sửa máy trung bình trong một ca làm việc.

Giải:

- Số máy hỏng trung bình trong một ca làm việc là

$$E(X)=0\times 0,9+1\times 0,09+2\times 0,02=0,13.$$

- Gọi Y là số tiền sửa máy trong một ca làm việc, ta có Y = 2 x X. Vậy số tiền sửa máy trung bình trong một ca làm việc là

$$E(Y)=E(2X)=2\times E(X)=0,26 \text{ triệu.}$$

Ví dụ 3.5:

Một công ty bảo hiểm bán thẻ bảo hiểm với giá 100 nghìn đồng/1 người/1 năm. Nếu người tham gia bảo hiểm gặp rủi ro trong năm đó thì nhận được số tiền bồi thường là 1 triệu đồng. Theo thống kê biết rằng tỷ lệ người tham gia bảo hiểm bị rủi ro trong năm là 0,05, hãy tính tiền lãi trung bình khi bán mỗi thẻ bảo hiểm.

Giải: Gọi X là tiền lãi một thẻ bảo hiểm, ta có luật phân phối xác suất của X được xác định qua bảng:

X	100	-900
P	0,5	0,05

Vậy tiền lãi trung bình khi bán một thẻ bảo hiểm là

$$E(X)=100\times 0,95-900\times 0,05=50 \text{ nghìn.}$$

2.3.2. Trung vị

Trung vị, kí hiệu là m_d là giá trị nằm chính giữa tập hợp các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên. Nói cách khác trung vị là giá trị chia phân phối của biến ngẫu nhiên thành hai phần bằng nhau.

Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì giá trị X_i sẽ là trung vị m_d nếu điều kiện sau được thỏa mãn:

$$F(X_{i-1})<0,5\le F(X_i)$$

Còn nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì trung vị của X là giá trị thỏa mãn điều kiện:

$$\int_{-\infty}^{m_d} f(x)dx=0,5$$

Ví dụ 3.6.

Thu nhập của dân cư tại một vùng là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân bố xác suất như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha} & x \geq x_0 \qquad (\alpha > 0) \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

Tìm trung vị của biến ngẫu nhiên đó (có thể hỏi theo cách khác là tìm mức thu nhập thỏa mãn điều kiện là một nửa số dân của vùng đó có thu nhập lớn hơn mức đó)

Giải.

Mức thu nhập cần tìm chính là m_d

Từ hàm phân bố xác suất trên ta có:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x_0^{\alpha} x^{-\alpha-1} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

Như vậy m_d được xác định dựa trên điều kiện:

$$\int_{x_0}^{m_d} f(x)dx = 0,5 \leftrightarrow \int_{x_0}^{m_d} \alpha x_0^{\alpha} x^{-\alpha-1}dx = 0,5 \rightarrow m_d = x_0.2^{\frac{1}{\alpha}}$$

2.3.3. Mốt (Mode)

Mốt, ký hiệu là m_0, là giá trị của biến ngẫu nhiên tương ứng với:

- Xác suất lớn nhất nếu là biến ngẫu nhiên rời rạc
- Cực đại của hàm mật độ xác suất nếu là biến ngẫu nhiên liên tục

Trên thực tế, ta có thể gặp biến ngẫu nhiên không có giá trị mốt hoặc biến ngẫu nhiên có nhiều giá trị mốt.

Ví dụ 3.7: Sử dụng ngay ví dụ 3.4 ở phần trên ta có gía trị mốt $m_0 = 0$ Phương sai và độ lệch chuẩn

2.3.3.1. Định nghĩa

Định nghĩa 3.2:

Phương sai của biến ngẫu nhiên X là kì vọng của bình phương độ lệch giữa X và E(X), thường được ký hiệu là V(X) hoặc Var(X),

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \tag{2.22}$$

Từ tính chất của kỳ vọng, ta có:

- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ với xác suất tương ứng $p_1, p_2, ...p_n, ...$ thì:

$$E\left(X^2\right) = \sum_i x_i^2 p_i \tag{2.23}$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ f(x) thì:

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx \tag{2.24}$$

Hình 2.16: Phương sai độ lệch chuẩn

CHÚ Ý

Theo định nghĩa, phương sai của biến ngẫu nhiên X là trung bình của bình phương sai lệch giữa các giá trị của biến ngẫu nhiên X và trung bình của nó. Do đó, phương sai đặc trưng cho độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh E(X). Nếu V(X) lớn chứng tỏ sự biến động của X lớn, nếu V(X) nhỏ thì X biến động ít, tương đối ổn định. Chẳng hạn, X là biến ngẫu nhiên chỉ lượng mưa hàng năm ở một vùng, E(X) cho biết lượng mưa trung bình hàng năm của vùng này, cho biết độ dao động của lượng mưa hàng năm xung quanh giá trị trung bình đó. Nếu V(X) lớn thì lượng mưa ở vùng đó biến động thất thường, nếu V(X) nhỏ thì lượng mưa ở vùng đó ổn định. Trong kinh tế, phương sai đặc trưng cho độ rủi ro các quyết định.

Tùy từng bài toán, có thể cũng dùng nhiều danh từ khác để chỉ độ phân tán các giá trị của đại lượng ngẫu nhiên tưng ứng như: độ dao động, độ biến động, độ bấp bênh, độ phân tán, độ ổn định, độ đồng đều, độ chính xác...

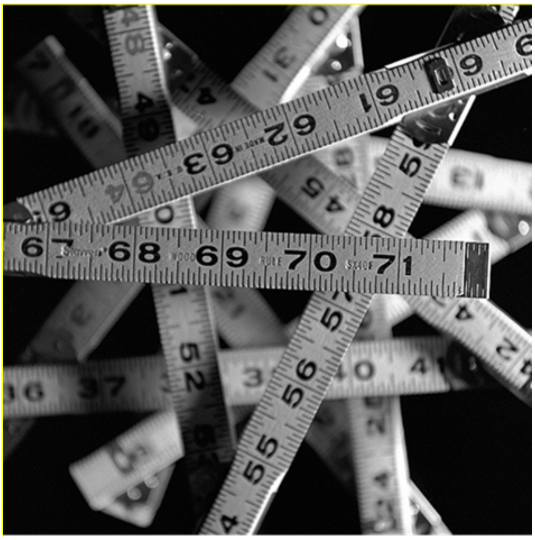
Trong định nghĩa phương sai, thứ nguyên của V(X) không trùng với thứ nguyên của biến ngẫu nhiên X, để đưa về cùng thứ nguyên với X ta phải lấy căn bậc hai của V(X).

Định nghĩa 3.3

Căn bậc hai của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là:

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)} \tag{2.25}$$

Độ lệch chuẩn σ_X có cùng thứ nguyên với biến ngẫu nhiên X. Do đó đơn vị độ lệch chuẩn σ_X trùng với đơn vị đo của X.



Hình 2.17: Độ lệch chuẩn

Ví dụ 3.8:

Gọi X là số chấm xuất hiện khi gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất thì X có bảng phân phối xác suất như trong Ví dụ 3.1. Ta đã có E(X) = 3,5. Từ đó ta có

$$V(X)=\frac{1}{6}\left(1^2+2^2+4^2+5^2+6^2\right)-(3,5)^2 \cong 1,42.$$

Ví dụ 3.9:

Xét biến ngẫu nhiên trong Ví dụ 4.1 (bài 3). Biến ngẫu nhiên này có hàm mật độ:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;\ x\notin[0;15) \\ \dfrac{1}{15} & ;\ x\in[0;15)\end{cases}$$

Theo Ví dụ 3.2, đã có E(X) = 7,5 (phút). Hơn nữa, ta lại có:

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_0^{15}\frac{x^2}{15}\,dx=\left.\frac{x^3}{3\times 15}\right|_0^{15}=\frac{15^3}{45}=75\ (\text{phút})^2$$

Từ đó:

$$V(X)=75-(7,5)^2=18,75\,(\text{phút})^2$$

$$\sigma_X=\sqrt{18,75}\cong 4,33\ (\text{phút})$$

2.3.3.2. Tính chất

Từ định nghĩa phương sai và các tính chất của kỳ vọng, ta có thể chứng minh được các tính chất sau:

- **Tính chất 1:** Phương sai và độ lệch chuẩn của hằng số bằng 0,

$$V(C) = 0 \qquad (2.26)$$

- **Tính chất 2:**

$$V(C.X) = C^2 V(X) \tag{2.27}$$

- **Tính chất 3:** Phương sai của tổng, hiệu các biến ngẫu nhiên độc lập đều bằng tổng các phương sai của hai biến ngẫu nhiên đó:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

NHẬN XÉT:

Phương sai của X và $X + C$ là như nhau:

$$V(C + X) = V(X) \tag{2.28}$$

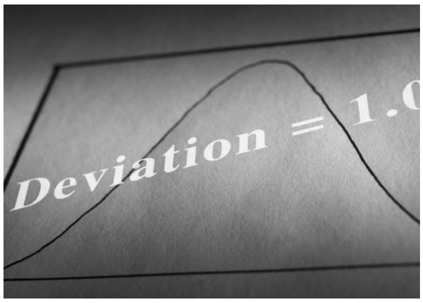
Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, ...X_n$ là độc lập và có cùng quy luật phân phối xác suất với biến ngẫu nhiên X thì phương sai của trung bình cộng của các biến ngẫu nhiên đó sẽ nhỏ hơn n lần so với phương sai của X,

$$V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{V(X)}{n} \tag{2.29}$$

Ví dụ 3.10:

Cho X và Y tương ứng là các biến ngẫu nhiên độc lập chỉ lợi nhuận (tính theo %) hàng năm khi đầu tư vào hai ngành A và B nào đó. Giả sử E(X) = 12, V(X) = 25, E(Y) = 14, V(Y) = 36. Một người đầu tư vào cả hai ngành A và B thì cần lựa chọn tỷ lệ đầu tư như thế nào để ít rủi ro nhất.

Giải:



Gọi a là tỷ lệ phần trăm vốn đầu tư vào ngành A, khi đó tỷ lệ phần trăm vốn đầu tư vào ngành B của người đó là $1 - a$. Gọi Z là lợi nhuận của phương án đầu tư này, ta có:

$$Z = aX + (1 - a)Y.$$

Từ đó suy ra:

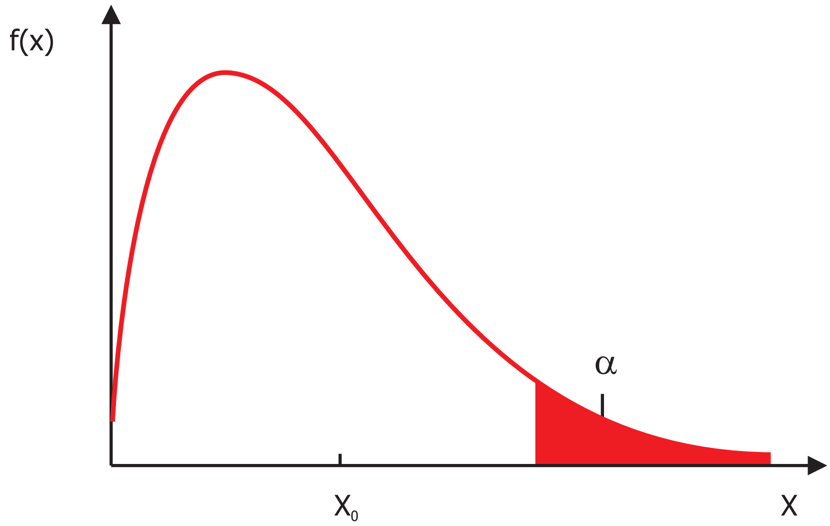
$$V(Z) = V(aX + (1-a)Y) = a^2V(X) + (1-a)^2 V(Y)$$
$$= 25a^2 + (1 - 2a + a^2)36 = 61a^2 - 72a + 36.$$

Để độ rủi ro của phương án đầu tư nhỏ nhất, ta cần chọn a sao cho V(Z) nhỏ nhất. Dễ thấy được $61a^2 - 72a + 36$ đạt giá trị cực tiểu khi $a = 36/61 \cong 59\%$. Vậy người đầu tư nên đầu tư 59% vốn vào ngành A và 41% vốn vào ngành B.

2.3.4. Giá trị tới hạn (critical value)

Đối với biến ngẫu nhiên liên tục X trong nhiều trường hợp, chúng ta còn quan tâm đến 1 giá trị được gọi là giá trị tới hạn. Giá trị tới hạn mức α của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là x_α, là giá trị của X thỏa mãn điều kiện:

$$P(X > x_\alpha) = \alpha$$



Hình 2.18: Minh họa cho giá trị tới hạn mức α của biến ngẫu nhiên của X

Như vậy giá trị tới hạn x_α của biến ngẫu nhiên liên tục X là giá trị sao cho phần diện tích giới hạn bởi trục hoành, đường cong hàm mật độ xác suất và đường thẳng $x = x_\alpha$ là bằng α

2.3.5. Mômen trung tâm bậc cao

Giá trị mômen trung tâm bậc k của 1 biến ngẫu nhiên, ký hiệu μ_k, được xác định với công thức sau:

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k$$

Có thể thấy phương sai của biến ngẫu nhiên chính là mômen trung tâm bậc 2 của biến đó

Bên cạnh các tham số trên, ta còn có:

Hệ số nhọn: $\alpha_4 = \dfrac{\mu_4}{\sigma_4}$

Hệ số bất đối xứng: $\alpha_3 = \dfrac{\mu_3}{\sigma_3}$ với σ là độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên

2.4. Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

2.4.1. Biến nhẫu nhiên k chiều

Trong nhiều bài toán thực tế ta thường phải xét đồng thời nhiều biến ngẫu nhiên $X_1, X_2 ..., X_k$ có quan hệ với nhau gọi là biến ngẫu nhiên k chiều hay vecto ngẫu nhiên

k–chiều, ký hiệu là $X = (X_1, X_2 ..., X_k)$, X lấy giá trị trong $\mathbb{R}^k$. Nếu $X_1, X_2 ..., X_k$ là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì X là biến ngẫu nhiên k–chiều rời rạc, còn khi $X_1, X_2, ..., X_k$ là các biến ngẫu nhiên liên tục thì X là biến ngẫu nhiên k–chiều liên tục.

Hình 2.19: Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Ví dụ 4.1:

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ chiều dài của một sản phẩm, Y là biến ngẫu nhiên chỉ chiều rộng của sản phẩm đó. Khi đó ta có biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y*)* mô tả kích thước của sản phẩm.

Để đơn giản, trong mục này ta chỉ xét các biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc, các kết luận có thể mở rộng tương tự cho các loại biến ngẫu nhiên *k*–chiều khác.

2.4.2. Bảng phân phối xuất suất của biến ngẫu nhiên hai chiều

Cho biến ngẫu nhiên 2–chiều (X, Y) nhận các giá trị $\left(x_i, y_j\right)$ với xác suất:

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p\left(x_i, y_j\right), \forall i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

(n và m có thể bằng vô cùng). Bảng phân phối xác suất của (X, Y) xác định như sau:

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	p (X)
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	...	$p(x_1, y_j)$	...	$p(x_1, y_m)$	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	...	$p(x_2, y_j)$	...	$p(x_2, y_m)$	$p(x_2)$
...	...	...	...	...	....	....	....
x_i	$P(x_i, y_1)$	$P(x_i, y_2)$	...	$P(x_i, y_j)$	...	$p(x_i, y_m)$	$p(x_i)$
...	...	...	....	...	...	...	...
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	...	$p(x_n, y_j)$	...	$p(x_n, y_m)$	$p(x_n)$

Trong đó:

$$0 \le p\left(x_i, y_j\right) \le 1, \forall i, j$$

$$\sum_{i,j} p\left(x_i, y_j\right) = 1.$$

Từ bảng phân phối xác suất của (X, Y) ta dễ dàng có bảng phân phối xác suất của các thành phần X, Y , gọi là các bảng phân phối xác suất biên duyên (thành phần).

- Bảng phân phối xác suất của thành phần X

X	x_1	x_2	...	x_n
P	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$

Với:

$$p\left(x_i\right) = \sum_j p\left(x_i, y_j\right) \qquad (2.30)$$

- Bảng phân phối xác suất của thành phần Y

Y	y_1	y_2	...	y_m
P	$P(y_1)$	$p(y_2)$	...	$p(y_m)$

trong đó:

$$p(y_j)=\sum_i p(x_i, y_j) \tag{2.31}$$

Từ các bảng phân phối trên ta có thể dễ dàng xác định các tham số đặc trưng của X và Y.

Hình 2.20: Phân phối xác suất

Ví dụ 4.1:

Từ kết quả phân tích các số liệu thống kê trong tháng về doanh số bán hàng (D) và chi phí cho quảng cáo (Q) (đơn vị triệu đồng) của một công ty, thu được bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

D \ Q	100	200	300
1	0,15	0,1	0,04
1,5	0,05	0,2	0,15
2	0,01	0,05	0,25

- Tính giá trị trung bình và phương sai của doanh số bán hàng.
- Tính giá trị trung bình và phương sai của chi phí cho quảng cáo.

Giải:

Ta dễ dàng lập được các bảng phân phối biên duyên như sau:

D	100	200	300
P	0,21	0,35	0,44

Q	1	1,5	2
P	0,29	0,4	0,31

Từ đó ta có:

- Giá trị trung bình và phương sai của doanh số bán hàng là:

$$E(D)=100\times 0,21+200\times 0,35+300\times 0,44=223$$
$$V(D^2)=100^2\times 0,21+200^2\times 0,35+300^2\times 0,44=55.700$$
$$V(D)=E(D^2)-[E(D)]^2=5.971$$

- Giá trị trung bình và phương sai của chi phí cho quảng cáo là:

$$E(Q)=1\times 0,29+1,5\times 0,4+2\times 0,31=1,51$$
$$E(Q^2)=1^2\times 0,29+1,5^2\times 0,4+2^2\times 0,31=2,43$$
$$V(Q)=E(Q^2)-[E(Q)]^2=0,1499$$

CHÚ Ý

Nếu X và Y độc lập với nhau thì cov(X,Y) = *0*

Nếu cov(X,Y) $\neq$ 0 thì X và Y phụ thuộc vào nhau

2.4.3. Bảng phân phối xác suất có điều kiện của hai biến ngẫu nhiên

Từ bảng phân phối xác suất của (X, Y) ta có bảng phân phối xác suất có điều kiện của các thành phần X và Y như sau:

Bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $(Y=y_j)$ là:

$X/Y=y_j$	x_1	x_2	...	x_n
P	$p(x_1/y_j)$	$p(x_2/y_j)$	...	$p(x_n/y_j)$

Trong đó:

$$P(x_i/y_j)=P(X=x_i/Y=y_j)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(y_i)} \quad (2.32)$$

Bảng phân phối xác suất của Y với điều kiện $(X=x_i)$ là:

$X/Y=x_i$	y_1	y_2	...	y_m
P	$P(y_1/x_i)$	$p(y_2/x_i)$	...	$p(y_m/x_i)$

Trong đó:

$$P(y_j/x_i)=P\left(Y=y_i/_{X=x_1}\right)=\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)} \quad (2.33)$$

Từ các công thức trên ta có thể xác định được các tham số đặc trưng có điều kiện của X và Y như:

$$E(X=x_i/_{y=y_j}),\ E(Y/_{X=x_i}),...$$

Ví dụ 4.2:

Với giả thiết của Ví dụ 4.1, hãy trả lời các câu hỏi sau:

- Nếu chỉ chi phí cho quảng cáo 1.5 triệu đồng thì doanh số trung bình là bao nhiêu?
- Nếu muốn doanh số là 300 triệu đồng thì trung bình phải chi phí cho quảng cáo bao nhiêu?

Giải:

Từ bảng phân phối xác suất đồng thời ta có:

$$P(D=100/Q=1,5)=\frac{p(D=100;Q=1,5)}{p(Q=1,5)}=\frac{0,05}{0,4}=0,125$$

Tương tự với các giá trị còn lại, ta xác định được bảng phân phối xác suất của doanh số bán hàng khi chi phí cho quảng cáo 1,5 triệu đồng, như sau:

- Bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $(Y=y_j)$ là:

$D/Q=1,5$	100	200	300
P	0,125	0,5	0,375

- Bảng phân phối xác suất của chi phí cho quảng cáo trong trường hợp có doanh số 300 triệu đồng là:

$D/Q=300$	1	1.5	2
P	$\frac{4}{44}$	$\frac{15}{44}$	$\frac{25}{44}$

Từ đó ta có:

- Doanh số bán hàng trung bình khi chỉ phí cho quảng cáo 1,5 triệu đồng là:

$$E(D/Q=1,5)=100\times0,125+200\times0,5+300\times0,375=225$$

- Nếu muốn doanh số là 300 triệu đồng thì trung bình phải chi phí cho quảng cáo:

$$E(Q/D=300)=1\times\frac{4}{44}+1,5\times\frac{15}{44}+2\times\frac{25}{44}\cong1,738$$

CHÚ Ý

Với mỗi điều kiện $(X=x_i)$ thì $E\left(Y/_{X=x_i}\right)$ nhận một giá trị xác định. Từ đó ta có quan hệ hàm số $x_i \mapsto E\left(Y/X=x_i\right)$

Hàm số này gọi là *hàm hồi quy* của Y theo X. Việc nghiên cứu quan hệ hàm này có ý nghĩa rất lớn trong phân tích kinh tế, được trình bày chi tiết trong môn học Kinh tế lượng.

2.4.4. Tương quan của hai biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 4.3:

Hiệp phương sai (Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y là một số, ký hiệu là cov(X, Y) và được xác định như sau:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\big[(X-E(X))(Y-E(Y))\big] \quad (2.34)$$

Từ tính chất của kỳ vọng dễ thấy :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \quad (2.35)$$

Khi X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc, ta có:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j p(x;y_1)-E(X)E(Y) \quad (2.36)$$

Định nghĩa 4.4:

Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên X và Y được định nghĩa bằng công thức:

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \quad (2.37)$$

CHÚ Ý

Nếu một trong hai biến nhẫu nhiên X hoặc Y là hằng số thì ta quy ước $\rho(X,Y)=0$.

- **Tính chất:**

  Hệ số tương quan $\rho(X,Y)$ có các tính chất

  $-1\le\rho(X,Y)\le 1$

  $\rho(X,Y)=\pm 1$ khi và chỉ khi X và Y phụ thuộc tuyến tính vào nhau.

Ví dụ 4.3:

Với hai biến ngẫu nhiên Q và D trong Ví dụ 4.1, ta có:

$$E(QD)=1\times100\times0,15+1\times200\times0,1+1\times300\times0,04+1,5\times100\times0,05+1,5\times200\times0,2$$
$$+1,5\times300\times0,15+2\times100\times0,01+2\times200\times0,05+2\times300\times0,25 = 354$$

$E(D)=223$; $V(D)=5.971$

$E(Q)=1,51$; $V(Q)=0,1499$

Vậy hiệp phương sai và hệ số tương quan giữa X với Y là:

$$\operatorname{cov}(Q,D)=E(QD)-E(Q)E(D)=354-223\times1,51=17,27$$

$$\rho(Q,D)=\frac{\operatorname{cov}(Q,D)}{\sqrt{V(Q)}\sqrt{V(D)}}\cong 0,577$$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Trong bài các bạn cần nắm vững các kiến thức sau: Khái niệm về biến ngẫu nhiên rời rạc và liên tục, bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc, hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên, hàm mật độ xác suất và các tính chất, mối quan hệ giữa hàm phân phối và hàm mật độ, các tham số đặc trưng như kỳ vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên. Biến ngẫu nhiên hai chiều và bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều, phân phối xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của số lao động nam (X) và số lao động nữ (Y) trong 1 gia đình ở một khu vực dân cư như sau:

Y \ X	1	2	3
0	0,05	0,12	0,07
1	0,12	0,25	0,1
2	0,1	0,09	0,1

Số lao động nam trung bình của 1 hộ là:

a. 1,85

b. 2

c. 2,35

d. 2,45

2. Tuổi thọ của 1 loại sản phẩm (đơn vị: năm) là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<5 \\ \dfrac{50}{x^3} & x\geq 5 \end{cases}$$

Nếu dự định tỉ lệ sản phẩm sẽ phải bảo hành là 15%, vậy thời hạn bảo hành nên quy định là:

a. 10,5 năm

b. 11,8 năm

c. 12,9 năm

d. 13,4 năm

3. Gieo 2 con xúc xắc, gọi X là tổng số chấm xuất hiện. Kì vọng của X bằng:

a. 5,3

b. 5,8

c. 6,8

d. 7

4. Số liệu thống kê từ 1 cửa hàng bán rau quả, lượng rau quả bán ra là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất:

X(kg)	10	15	20	25	30
P	0,1	0,15	0,45	0,2	0,1

Nếu giá nhập là 10000đ/kg, cửa hàng sẽ lãi 5000đ/kg, tuy nhiên đến cuối ngày không bán được sẽ lỗ 8000đ/kg. Cửa hàng nên chọn phương án nhập rau nào:

a. 10 kg/ngày

b. 15 kg/ngày

c. 20 kg/ngày

d. 25 kg/ngày

5. Tuổi thọ dân cư một quốc gia được giả thiết là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ phân phối xác suất như sau :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x \notin [0;100] \\ kx^2(100-x)^2 & 0 \le x \le 100 \end{cases}$$

Tỷ lệ người có tuổi thọ từ 60 đến 70 là:

a. 15,4%

b. 15,8%

c. 16,3%

d. 17,2%

6. Theo tài liệu thống kê về số vụ tai nạn giao thông ở 1 khu vực, ta thấy tỷ lệ tai nạn xe máy là 0,0055 (số vụ tai nạn xe máy/tổng số vụ tai nạn/năm). Công ty bao hiểm đề nghị các chủ xe mua bảo hiểm xe máy với mức 30000đ/xe và số tiền bảo hiểm trung bình cho 1 vụ tai nạn xe máy là 3000000đ/vụ. Với chi phí quản lý và các chi phí khác của công ty chiếm khoảng 30% số tiền bán bảo hiểm, lợi nhuận kì vọng của công ty bảo hiểm đối với mỗi hợp đồng bảo hiểm là:

a. - 1500 đ

b. 3000 đ

c. 4500 đ

d. 8200 đ

7. Có hai hộp sản phẩm: hộp thứ nhất có 7 chính phẩm và 3 phế phẩm, hộp thứ hai có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Người ta lấy một hộp và từ đó lấy ra ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Trung bình số sản phẩm tốt được lấy ra:

a. 0,8

b. 1,3

c. 1,5

d. 1,8

8. Phân tích các số liệu thống kê trong tháng về doanh số bán hàng (D) và chi phí cho quảng cáo (Q) (đơn vị: triệu đồng) của công ty X, thu được bảng phân bố xác suất đồng thời như sau:

Q \ D	100	200	300
1	0,15	0,1	0,04
1,5	0,05	0,2	0,15
2	0,01	0,05	0,25

Phương sai của chi phí cho quảng cáo là:

a. 0,1499

b. 0,1512

c. 0,1638

d. 0,1643

9. Một học sinh tham dự một cuộc thi và phải trả lời hai câu hỏi. Mỗi câu hỏi trả lời đúng ở 15 giây đầu được 20 điểm. Trả lời đúng ở 15 giây sau được 10 điểm, sau 30 giây không có câu trả lời hoặc trả lời sai được 0 điểm. Biết rằng khả năng của học sinh trả lời đúng câu hỏi ở 15 giây đầu là 0,4. Nội dung các câu độc lập. Điểm trung bình mà học sinh có thể đạt được là:

a. 22,8

b. 20

c. 19,5

d. 16,5

10. Cho biết ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều, ta có bảng phân phối xác suất như sau:

Y \ X	1	3	3
–1	0,2	a	0,25
2	B	0,15	0,1

Biết E(X) = 0,5, Giá trị của E(Y) là:

a. 2,8

b. 2,9

c. 3

d. 3,2

11. Đại lượng ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất như sau

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,3	0,25	0,2	0,08	0,02

Giá trị kỳ vọng (EX) là:

a. 1,82

b. 1,6

c. 1,75

d. 1,92

Giá trị phương sai DX là :

a. 1,5676

b. 1,856

c. 1,943

d. 1,456

12. Đại lượng ngẫu nhiên Y có bảng phân phối xác suất như sau

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,2	0,15	0,1	0,05

Giá trị kỳ vọng (EX) là:

a) 1,7
b) 1,5
c) 1,75
d) 1,72

Giá trị phương sai DX là :

a) 2,56
b) 2,756
c) 2,443
d) 2,456

13. Biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân phối xác suất

X	0	1	2
p	0,3	0,4	0,3

Xác suất $P(0 < X \le 2)$ là:

a) 0,7
b) 0,4
c) 0,3
d) 0,1

Xác suất $P(1 < X < 5)$ là:

a) 0,3
b) 0,4
c) 0,12
d) 0,09

14. Cho phân phối xác suất của số máy hỏng X trong 1 ca làm việc trong bảng

X	0	1	2
P	0,9	0,09	0,01

Số máy hỏng trung bình trong 1 ca là:

a) 0,11
b) 0,13
c) 0,15

d) 0,2

Mội máy hỏng phải sửa hết 2 triệu đồng, số tiền sửa trung bình trong 1 ca làm việc là:

a) 0,22

b) 0,20

c) 0,25

d) 0,3

15. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của số lao động nam (X) và số lao động nữ (Y) trong 1 gia đình ở một khu vực dân cư như sau:

Y \ X	1	2	3
0	0,05	0,12	0,07
1	0,12	0,25	0,1
2	0,1	0,09	0,1

Số lao động nữ trung bình của 1 hộ là:

a. 1,05

b. 1,5

c. 1,35

d. 1,45

16. Phân tích các số liệu thống kê trong tháng về doanh số bán hàng (D) và chi phí cho quảng cáo (Q) (đơn vị: triệu đồng) của công ty X, thu được bảng phân bố xác suất đồng thời như sau:

Q \ D	100	200	300
1	0,15	0,1	0,04
1,5	0,05	0,2	0,15
2	0,01	0,05	0,25

Trung bình của doanh số bán hàng là:

a. 223

b. 225

c. 238

d. 243

BÀI TẬP

1. Một đề thi trắc nghiệm có 2 câu, nội dung các câu độc lập, mỗi câu chỉ có hai thang điểm nếu đúng thì được 5 điểm còn sai thì được 0 điểm. Khả năng làm đúng câu thứ nhất là 0,7 và khả năng làm đúng câu thứ hai là 0,6.

a. Tính xác suất để một sinh viên nào đó dự thi đạt ít nhất 5 điểm.

b. Gọi X là số điểm sinh viên có thể đạt được. Lập bảng phân phối xác suất của X.

c. Tính E(X), V(X).

2. Một thiết bị gồm 3 bộ phận hoạt động lập với nhau, xác suất để các bộ phận bị hỏng trong khoảng thời gian t tương ứng bằng 0,2; 0,3; 0,25. Gọi X là số bộ phận bị hỏng trong khoảng thời gian t.

a. Tìm phân phối xác suất của X.

b. Tính xác suất để trong thời gian t có ít nhất một bộ phận bị hỏng.

3. Một xạ thủ đem theo 4 viên đạn để bắn kiểm tra trước ngày thi bắn. Anh ta bắn từng viên vào bài với xác suất trúng vòng 10 trong mỗi lần bắn là 0,85. Nếu bắn được 2 viên liên tiếp trúng vòng 10 thì anh ta thôi không bắn nữa.

a. Tính xác suất để người đó phải sử dụng ba viên.

b. Gọi X là số viên đạn phải sử dụng. Lập bảng phân phối xác suất của X.

4. Số tủ lạnh có khả năng bán được trong tuần tại một cửa hàng là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,05	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1

a. Tính xác suất để trong một tuần bán được ít nhất 4 chiếc tủ lạnh

b. Khi bán một chiếc tủ lạnh thì cửa hàng lãi 300 nghìn đồng, chi phí của cửa hàng mỗi tuần là 500 nghìn. Tính tiền lãi trung bình của cửa hàng trong tuần.

5. Lợi nhuận (%) khi đầu tư vào hai ngành A và B trong một năm là các biến ngẫu nhiên độc lập có bảng phân phối xác suất như sau:

X_A	-5	0	10	20
P	0,05	0,35	0,4	0,2

X_B	-3	10	18
P	0,1	0,5	0,4

a. Muốn có lợi nhuận cao thì nêu đầu tư vào ngành nào?

b. Muốn ổn định hơn thì nên đầu tư vào ngành nào?

c. Một người chia đều vốn đầu tư vào cả hai ngành A và B. Tính xác suất để người đó có lợi nhuận trên 10%? Lợi nhuận trung bình của phương án này là bao nhiêu.

6. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x)=\begin{cases} kx+1 & ;x\in(0;2) \\ 0 & ;x\notin(0;2) \end{cases}$$

a. Tìm k. Tính P(X>1).

b. Tính E(X), V(X).

c. Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

7. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác như sau:

$$F(x)=\begin{cases}0 & ; x\le 0\\ kx^3 & ; 0<x\le 1\\ 1 & ; 1<x\end{cases}$$

a. Xác hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X. Tính k?

b. Tính E(X), V(X)

8. Cho bảng phân phối đồng thời ngẫu nhiên hai chiều (X, Y), trong đó X là số người trong tuổi lao động và Y là số người không trong độ tuổi lao động trong một gia đình ở một khu vực như sau:

Y \ X	1	2	3
0	0,05	0,12	0,07
1	0,11	0,25	0,14
2	0,1	P	0,1

a. Tìm P và lập bảng phân phối xác suất biên X, Y; và phân phối xác suất của X/Y = 2.

b. Tính số người trung bình trong độ tuổi lao động và số người trung bình không trong độ tuổi lao động trong một gia đình của vùng đó.

c. Tính xác suất để một hộ gia đình có ít nhất 4 người?

d. Tính số người trung bình trong một gia đình.

e. Tính E (X/Y = 2)? Nêu ý nghĩa của kết quả tìm được.

f. X và Y có độc lập hay không?

9. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của số người trong độ tuổi lao động (X) và không trong độ tuổi lao động (Y) trong 1 gia đình ở một khu vực như sau:

Y \ X	1	2	3
0	0,05	0,12	0,07
1	0,12	0,25	0,1
2	0,1	0,09	0,1

a. Lập bảng phân phối xác suất của tổng số người trong hộ gia đình.

b. Số người trong tuổi lao động trung bình của 1 hộ là bao nhiêu?

10. Tuổi thọ của một loại sản phẩm (đơn vị: năm) là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<2\\ \dfrac{k}{x^3} & x\ge 2\end{cases}$$

a. Tìm k?

b. Nếu dự định tỷ lệ sản phẩm sẽ phải bảo hành là 15%, vậy quy định thời hạn bảo hành là bao nhiêu?

11. Phân tích các số liệu thống kê trong tháng về doanh số bán hàng (D) và chi phí cho quảng cáo (đơn vị: triệu đồng) của công ty X, thu được bảng phân bố xác suất đồng thời như sau:

Q/D	100	200	300
1	0,15	0,1	0,04
1,5	0,05	0,2	0,15
2	0,01	0,05	0,25

a. Tính giá trị trung bình và phương sai của chi phí cho quảng cáo.

b. Nếu muốn doanh số là 300 triệu đồng thì trung bình phải chi phí cho quảng cáo bao nhiêu?

12. Năng suất của một loại cây ăn quả là một biến ngẫu nhiên phân phối với năng suất trung bình là 20 kg/cây và độ lệch chuẩn là 3kg. Cây đạt tiêu chuẩn hàng hoá là cây có năng suất tối thiểu là 15,065kg.

a. Hãy tính tỷ lệ cây đạt tiêu chuẩn hàng hoá.

b. Nếu cây đạt tiêu chuẩn hàng hoá sẽ lại 500 ngàn đồng, ngược lại không đạt tiêu chuẩn làm lỗ 1 triệu đồng. Người ta thu hoạch ngẫu nhiên một lô gồm 100 cây, hãy tính tiền lãi trung bình cho lô cây đó.

13. Số lượng một loại sản phẩm mà 1 khách hàng mua có bảng phân phối xác suất sau

Số lượng	0	1	2	3
P	0,5	0,1	0,2	0,2

Nếu mỗi sản phẩm được bán với giá 110 nghìn đồng và nhân viên bán hàng được hưởng 10% hoa hồng trên doanh thu của số sản phẩm bán được thì số tiền hoa hồng bình quân mà nhân viên bán hàng được hưởng từ 1 khách hàng là bao nhiêu?