BÀI 3: MỘT SỐ QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT QUAN TRỌNG

Mục tiêu

Các quy luật phân phối xác suất chủ yếu của biến ngẫu nhiên thường gặp trên thực tế là nội dung chính của bài 3. Các quy luật phân phối xác suất và các tham số của chúng là cơ sở đặt nền móng cho phần Thống kê toán của môn học.

Thời lượng

- 8 tiết.

Các kiến thức cần có

- Quy luật phân phối không – một A(p);
- Khái niệm;
- Các tham số đặc trưng;
- Quy luật phân phối nhị thức B(n, p);
- Khái niệm;
- Các tham số đặc trưng;
- Quy luật phân phối Poisson;
- Khái niệm;
- Các tham số đặc trưng; $F(n_1, n_2)$
- Quy luật phân phối đều U [a, b];
- Khái niệm;
- Các tham số đặc trưng;
- Quy luật phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$;
- Khái niệm;
- Các tham số đặc trưng;
- Phân phối chuẩn tắc;
- Công thức xác suất đối với biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn;
- Giá trị tới hạn chuẩn tắc;
- Quy luật phân phối Khi – bình phương $\chi^2(n)$;
- Quy luật phân phối Student T(n);
- Quy luật phân phối Fisher – Snedecor F (n1, n2);
- Quy luật phân phối lũy thừa.

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI

Tình huống

Siêu thị Metro nhận thấy thời gian này số lượng khách hàng phải đợi ở quầy để chờ được thanh toán là quá lâu. Siêu thị quyết định cần thêm số quầy phục vụ. Số lượng quầy phục vụ sau khi nâng cấp là bao nhiêu thì hợp lý?

Biết: Thời gian phục vụ trung bình 01 khách là 3 phút. Điều tra trong 100 giờ Đếm số khách hàng đến quầy phục vụ trong vòng môt giờ:

Số khách/giờ	0	100	200	300	400	500	600	700
Số lần	13	27	27	18	9	4	1	1

Câu hỏi

1. Biểu diễn bảng phân phối xác suất giữa tiền lãi bảo hiểm và khả năng nhận được lãi?

2. Số tiền lãi trung bình là bao nhiêu?

3. Nếu bán bảo hiểm được cho 10000 khách hàng thì số tiền lãi trung bình thu về được là bao nhiêu?

3.1. Quy luật phân phối không–một A(p)

3.1.1. Khái niệm

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận một trong hai giá trị có thể có là 0 hoặc 1 với các xác suất tương ứng được cho bởi công thức:

$$P(X=x)=p^{x}q^{1-x} \quad \text{trong đó } 0<p<1,\ q=1-p \text{ và } x=0;1 \qquad (3.1)$$

được gọi là có *phân phối theo quy luật* 0 – 1 với tham số p, ký hiệu $X \sim A(p)$.

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có phân phối không – một dạng:

X	0	1
P	q	p

Ví dụ 1:

Tỷ lệ các thí nghiệm thành công trong một viện nghiên cứu là 25%. Gọi X là số thí nghiệm thành công khi chọn ngẫu nhiên một cuộc thí nghiệm. Khi đó X là biến ngẫu nhiên nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1 với các xác suất tương ứng là:

$$P(X=0)=(0,25)^{0}\times(0,75)^{1}=0,75$$

$$P(X=1)=(0,25)^{1}\times(0,75)^{0}=0,25.$$

Vậy X là biến ngẫu nhiên có phân phối A(0.25).

3.1.2. Các tham số đặc trưng

Cho $X \sim A(p)$, ta có:

$$E(X)=0\times q+1\times p=p \qquad (3.2)$$

$$E\left(X^{2}\right)=0^{2}\times q+1^{2}\times p=p$$

$$V(X)=E\left(X^{2}\right)-\left[E(X)\right]^{2}=p-p^{2}=pq \qquad (3.3)$$

$$\sigma_{X}=\sqrt{pq} \qquad (3.4)$$

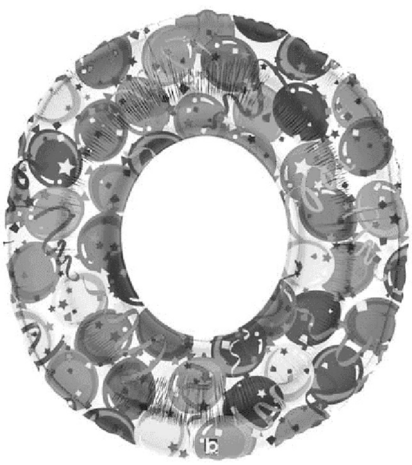
Ví dụ 2:

Với biến ngẫu nhiên X trong Ví dụ 1, ta có:

$$E(X)=0,25$$

$$V(X)=0,25\times 0,75=0,1875.$$

Trên thực tế, quy luật không – một thường được áp dụng để mô tả cho các dấu hiệu định tính có hai thuộc tính/phạm trù. Các bài toán đặc trưng có thể



Hình 3.1: Biến ngẫu nhiên

là nghiên cứu giới tính của khách hàng trong phân tích chiến lược marketing hoặc nghiên cứu tỷ lệ chính/phế phẩm trong dây chuyền sản xuất,… Nếu dấu hiệu định tính có nhiều hơn hai thuộc tính thì có thể sử dụng nhiều biến ngẫu nhiên phân phối không – một trong cùng một nghiên cứu.

Kết luận:

Phân bố không – một A(p) là phân bố của một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận hai giá trị, được hoàn toàn xác định bởi tham số p, kỳ vọng của nó.

3.2. Quy luật phân phối Nhị thức B(n, p)

3.2.1. Khái niệm

Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có *phân phối theo quy luật nhị thức* với tham số p, ký hiệu $X \sim B(n,p)$, nếu X nhận một trong các giá trị 0, 1, 2, ... , n với xác suất tương ứng cho bởi công thức Bernoulli:

$$p(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x} \text{ trong đó } x=0,1,...,n \text{ và } q=1-p \quad (3.5)$$

Ví dụ 1:

Tỷ lệ các thí nghiệm thành công trong một viện nghiên cứu là 25%. Tiến hành quan sát 5 cuộc thí nghiệm của viện nghiên cứu. Gọi X là số thí nghiệm thành công trong 5 cuộc thí nghiệm đó. Khi đó X nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3, 4, 5 với xác suất.

$$P(X=x)=C_5^x (0,25)^x (0,75)^{5-x} \text{ với } x=0,1,...,5$$

Vậy X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức B(5, 0,25).

3.2.2. Các tham số đặc trưng

Xét X_i (i = 1, 2, … , n) là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng có phân phối A(p). Lập tổng của các biến ngẫu nhiên đó:

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Khi ấy có thể dễ dàng chứng minh được rằng biến ngẫu nhiên tổng có phân phối nhị thức, $X \sim B(n,p)$. Áp dụng các tính chất tình chất của phân phối không – một, cụ thể là:

$$E(X_i)=p \text{ và } V(X_i)=pq \quad \forall i=1,2...,n$$

Ta tính ngay được kỳ vọng và phương sai của phân phối nhị thức như sau:

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np \quad (3.6)$$

$$V(X)=V(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}V(X_1)=npq \quad (3.7)$$

Mốt của X là giá trị x_0 sao cho giá trị $p(X=x_0)$ trong công thức (3.5) đạt cực đại. Ta có thể chỉ ra rằng nếu np – q là một số nguyên thì vế phải của (3.5) đạt cực đại tại hai giá trị $x_0=np-q$ và $x_0+1=np-q+1=(n+1)p$. Còn nếu np – q không phải là số nguyên thì vế phải của (3.5) đạt cực đại tại điểm $x_0=[(n+1)p]$, trong đó ký hiệu [t] dùng để chỉ phần nguyên của số i, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá t .

Ví dụ 2:

Với biến ngẫu nhiên X trong Ví dụ 1, ta có:

$$E(X)=5\times0.25=1.25$$

$$V(X)=5\times0.25\times0.75=0.9375$$

Kết luận:

Phân bố nhị thức B(n,p) là phân bố xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận (n+1) giá trị, được hoàn toàn xác định bởi hai tham số n, số phép thử, và p, kỳ vọng của nó.

3.3. Quy luật phân phối Poisson

3.3.1. Khái niệm

Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có *phân phối Poisson với tham số* λ, ký hiệu $X\sim P(\lambda)$, nếu X nhận một trong các giá trị $0,1,2,...,n,...$ với xác suất tương ứng cho bởi công thức:

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{với } x=0,1,2,...,n,.... \text{ và } \lambda>0 \quad (3.8)$$

Phân phối Poisson có ứng dụng trong các quá trình liên quan đến số quan sát với một đơn vị thời gian hoặc không gian, chẳng hạn như số cuộc điện thoại nhận được ở một trạm điện trong một phút, số người xếp hàng chờ thanh toán tại quầy thu tiền của một siêu thị, v.v.

3.3.2. Các tham số đặc trưng

Cho biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson $X\sim P(\lambda)$. Lúc đó ta dễ dàng chứng minh được rằng:

$$E(X)=\lambda,\ V(X)=\lambda$$

Mốt của X (tức là của $P(\lambda)$) là giá trị x_0 sao cho giá trị trong công thức (3.8) đạt cực đại. Ta có thể chứng minh được rằng nếu λ là một số nguyên thì phân phối $P(\lambda)$ có hai mốt là $\lambda - 1$ và λ, còn nếu λ không phải là số nguyên thì mốt của $P(\lambda)$ là $[\lambda]$, số nguyên lớn nhất không vượt quá λ.

CHÚ Ý

Người ta chứng minh được rằng, với n khá lớn và p đủ bé, biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức B (n, p) hội tụ rất nhanh về biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson $P(\lambda)$ với $\lambda = np$.

Ví dụ 1:

Một trạm cho thuê xe taxi có 3 xe, hàng ngày phải nộp thuế 80 nghìn/xe. Mỗi chiếc xe cho thuê được với giá 200 nghìn/ngày. Giả sử yêu cầu thuê xe của trạm là biến ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với tham số $\lambda = 3$.

a. Tính xác suất trong một ngày có 3 khách thuê (lấy $e \cong 2,718$).

b. Tính tiền lãi trung bình trạm thu được trong một ngày.

Giải:

a. Xác suất để trong một ngày có 3 khách thuê xe là: $P(X=3) = \dfrac{e^{-3} \times 3^3}{3!} \cong 0,2241$.

b. Gọi Y là tiền lãi trạm thu được trong một ngày, ta xét các trường hợp sau

- Không có xe nào được thuê:

$$P(Y=-240) = P(X=0) = \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} \cong 0,0498.$$

- Có 1 xe được thuê:

$$P(Y=-40) = P(X=1) = \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} \cong 0,1494.$$

- Có 2 xe được thuê:

$$P(Y=160) = P(X=2) \frac{e^{-3} \times 3^2}{2!} \cong 0,2241.$$

- Có 3 xe được thuê:

$$P(Y=360) = P(X \geq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{2} P(X=i) = 0,5767.$$

Vậy tiền lãi trung bình của trạm trong một ngày là:

$$E(Y) = -240 \times 0,0498 - 40 \times 0,1494 + 160 \times 0,2241 + 360 \times 0,5767 = 225,54 \text{ (nghìn)}.$$

Kết luận:

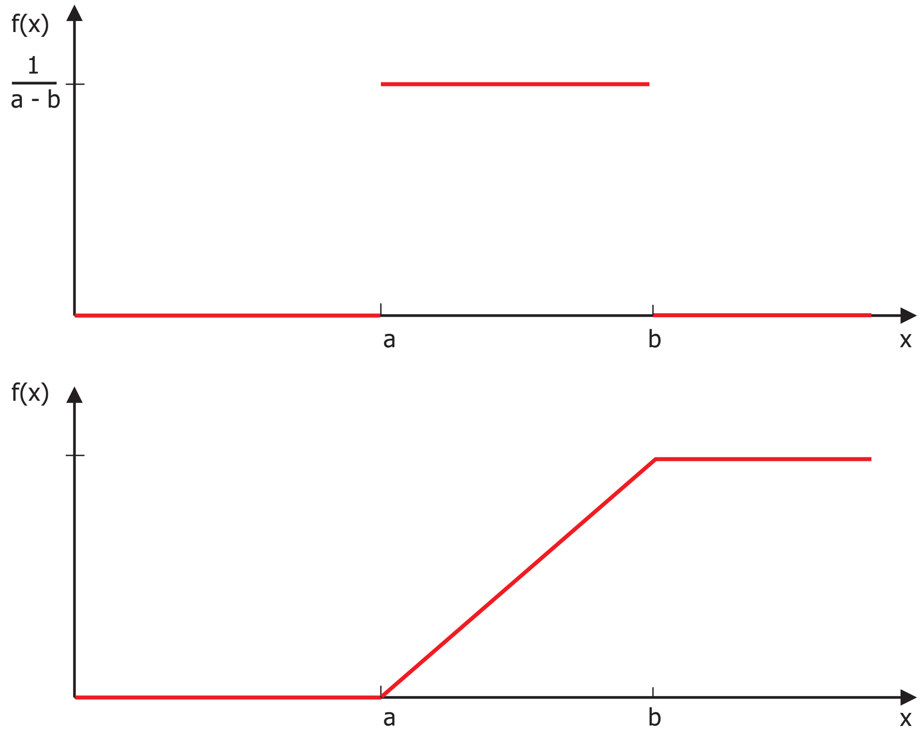
Phân bố Poisson (3.8) là phân bố xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận vô số giá trị, được hoàn toàn xác định bởi tham số λ, kỳ vọng của nó.

3.4. Quy luật phân phối đều U [a; b]

3.4.1. Khái niệm

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là *có phân phối đều trên đoạn* [a; b], ký hiệu: $X \sim U[a;b]$, nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a;b]\\ 0 & x\notin[a;b]\end{cases} \quad (3.10)$$



Hình 3.2: Hàm mật độ xác suất f(x) và hàm phân phối F(x) của luật phân phối đều

Hàm phân phối của X được xác định bởi giá trị của tích phân sau đây:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & x\in[a;b]\\ 1 & x>b\end{cases} \quad (3.11)$$

CHÚ Ý

Trong các máy tính thông dụng đều có trang bị một mô đun phần mềm nhỏ để tạo các số ngẫu nhiên. Thông thường các số ngẫu nhiên này có phân bố đều U[0;1]. Từ các số ngẫu nhiên này người ta có thể tạo ra các số ngẫu nhiên của nhiều loại phân bố khác.

Ví dụ 1:

Một xe buýt xuất hiện tại bến đợi cứ 15 phút một chuyến. Một hành khách tới biến vào một thời điểm ngẫu nhiên. Gọi X là thời gian chờ xe của hành khách đó. Khi đó X có phân bố đều trên khoảng (0; 15).

a. Viết hàm phân phối xác suất của X.

b. Tìm xác suất để hành khách đó phải đợi ít hơn 5 phút; nhiều hơn 10 phút.

Giải:

Biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{15} & x\in(0;15)\\ 0 & x\notin(0;15)\end{cases}$$

- Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{x}{15} & x\in(0;15)\\ 1 & x\ge 15\end{cases}$$

- Xác suất để hành khách phải đợi dưới 5 phút là:

$$P(X<5)=F(5)-F(-\infty)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}.$$

Xác suất để hành khách phải đợi quá 10 phút là:

$$P(X>10)=F(+\infty)-F(10)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2:

Khi thâm nhập thị trường mới, doanh nghiệp chưa thể khẳng định chắc chắn doanh thu hàng tháng là bao nhiêu. Với những phân tích dự báo thì con số đó trong khoảng từ 20–40 triệu đồng/tháng. Tìm xác suất để doanh nghiệp đạt được tối thiểu là 35 triệu/tháng.


The roaming capabilties of D-Link wireless allows business users to bring their work to their meetings

Giải:

Gọi X là doanh thu hàng tháng mà doanh nghiệp có thể đạt ở thị trường mới. Do không có thêm thông tin gì nên có thể coi X là biến ngẫu nhiên phân phối đều trên khoảng (20;40). Hàm mật độ xác suất của X có dạng như sau:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\notin(20;40)\\ \dfrac{1}{40-20}=0,05 & x\in(20;40)\end{cases}$$

Khi đó xác suất để doanh nghiệp có doanh thu tối thiểu hàng tháng là 35 triệu sẽ được tính bằng công thức:

$$P(X>35)=\int_{35}^{+\infty}f(x)dx=\int_{35}^{40}0,05dx=0,05x\Big|_{35}^{40}=0,25.$$

3.4.2. Các tham số đặc trưng

Cho $X \sim U[a;b]$ khi đó:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{a} xf(x)dx+\int_{a}^{b} xf(x)dx+\int_{b}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{a+b}{2} \qquad (3.12)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x^2f(x)dx+\int_{a}^{b} x^2f(x)dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x^2f(x)dx+\int_{a}^{b} x^2f(x)dx$$

$$=\int_{a}^{b}\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{1}{3}.\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{1}{3}\left(b^2+ab+a^2\right)$$

Từ đó suy ra:

$$V(X)=\frac{1}{3}\left(b^2+ab+a^2\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (3.13)$$

Kết luận:

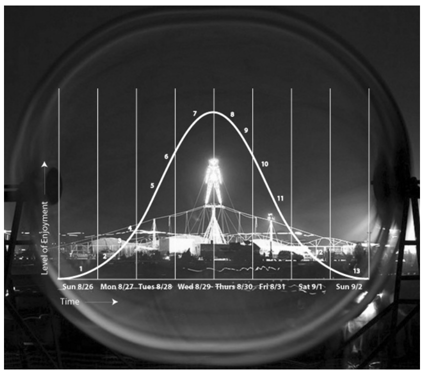
Phân bố đều U[a;b] là phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục nhận mọi giá trị của đoạn thẳng [a;b] và được hoàn toàn xác định bởi hai tham số a và b, hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

3.5. Quy luật phân phối chuẩn $N(\mu,\sigma^2)$

3.5.1. Khái niệm

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là *có phân phối theo quy luật chuẩn*, ký hiệu $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} a \qquad (3.14)$$



Hình 3.3: Quy luật phân phối chuẩn

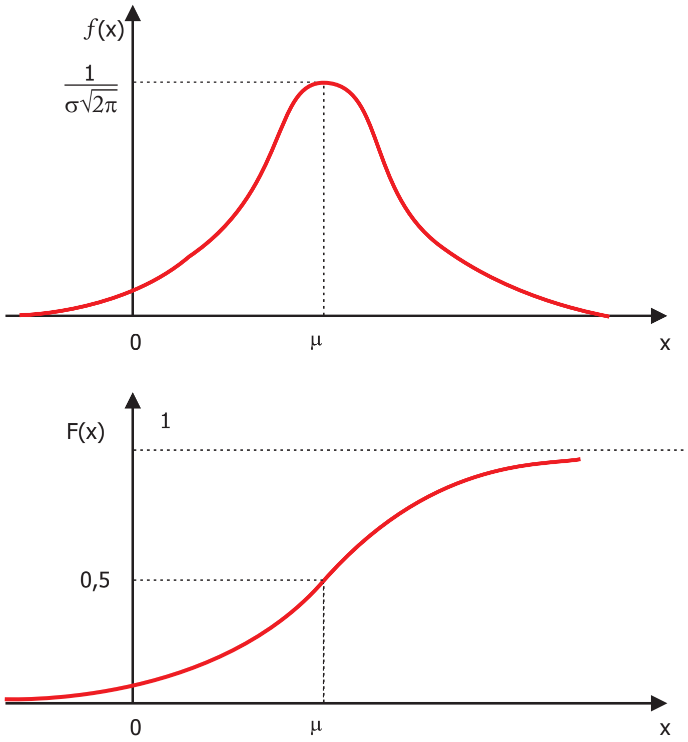
Đường cong mật độ có dạng hình chuông (the bell curve), đối xứng qua đường $x=\mu$ và nhận Ox làm tiệm cận ngang. Đỉnh của hàm mật độ đạt tại:

$$\max f(x) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad (3.15)$$

Hàm phân phối xác suất của X có dạng:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (3.16)$$

Đường cong hàm phân phối tiệm cận ngang trái với trục Ox, tiệm cận ngang phải với đường thẳng $y = 1$, đối xứng tâm qua điểm (μ ; 0,5).



Hình 3.4: Hàm mật độ và hàm phân phối của luật phân phối chuẩn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn thường gặp rất nhiều trong thực tế, nó đóng vai trò quan trọng lý thuyết xác suất và chiếm vị trí trung tâm trong các kết luận thống kê được đề cập đến trong các bài tiếp sau của giáo trình này.

3.5.2. Các tham số đặc trưng

Cho $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, khi đó có thể chứng minh được rằng:

$$E(X) = \mu \qquad \text{và} \qquad V(X) = \sigma^2. \qquad (3.17)$$

Thật vậy, ta có:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Đặt $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, ta có $x = \sigma t + \mu$. Do vậy $dt = \frac{1}{\sigma}dx$ và vì thế:

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)e^{\frac{-t^2}{2}}dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{\frac{-t^2}{2}}dt+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt\cdot$$

Để ý rằng tích phân thứ nhất ở vế phải là tích phân của một hàm số lẻ trên một khoảng đối xứng nên bằng 0, tích phân thứ hai ở vế phải là tích phân trên toàn trục số của một hàm mật độ xác suất nên bằng 1. Vậy $E(X)=\mu$.

Tính toán tương tự, ta có:

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)^2e^{\frac{-t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{\frac{-t^2}{2}}dt+\mu^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(-te^{\frac{-t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}dt)+\mu^2=\sigma^2+\mu^2.$$

Từ đó suy ra $V(X)=\sigma^2$.

Ngoài ra, từ đồ thị của hàm mật độ chuẩn, dễ dàng thấy mốt của X bằng chính kỳ vọng của nó.

3.5.3. Phân phối chuẩn tắc

Trong mục 5.1 trên đây ta đã biết rằng nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $N\left(\mu;\sigma^2\right)$ thì:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Mặt khác, để tính xác suất $P(a<X<b)$, ta cần phải tính giá trị của hàm F(x). Tuy nhiên, việc tính tích phân trên không đơn giản, vì vậy trong thực tế có thể sử dụng phương pháp tính gần đúng để tính tích phân trên với trường hợp đặc biệt với $\mu=0,\sigma^2=1$. Sau đó, dựa trên kết quả này để tính giá trị hàm F(x) trong các trường hợp khác.

Biến ngẫu nhiên liên tục U có phân phối theo quy luật chuẩn N(0;1) được gọi là biến ngẫu nhiên có *phân phối chuẩn tắc*. Hàm mật độ xác suất của U được ký hiệu là $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{3.18}$$

Đường cong biểu diễn mật độ của U đối xứng qua Oy và nhận Ox làm tiệm cận ngang, đỉnh đạt tại:

$$\max\varphi(x)=\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.19}$$

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chuẩn tắc U được ký hiệu là $\Phi(x)$. Để xác định được $\Phi(x)$ trước tiên ta định nghĩa hàm $\Phi_0(x)$ như sau:

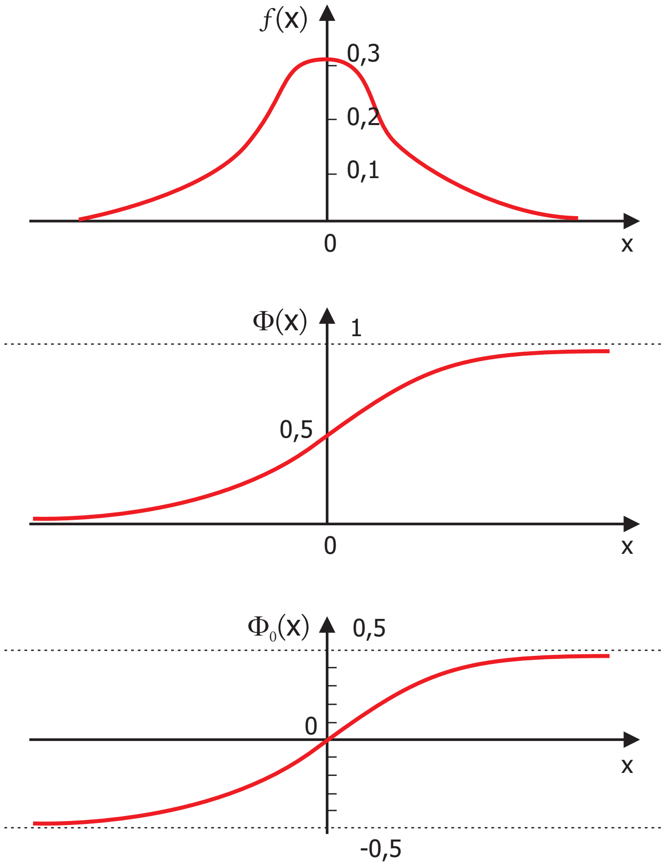
$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (3.20)$$

Dễ dàng thấy:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0(x). \qquad (3.21)$$

Do vậy để tính giá trị hàm $\Phi(x)$, ta chỉ cần tính giá trị hàm $\Phi_0(x)$.



Hình 3.5: Đồ thị hàm mật độ xác suất, hàm phân phối của biến ngẫu nhiên chuẩn tắc và hàm $\Phi_0(x)$

CHÚ Ý

Đối với $x<0$, giá trị hàm $\Phi_0(x)$ có thể tra trong bảng phụ lục.

Hàm $\Phi_0(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ, do đó đối với $x<0$,có thể xác định giá trị của hàm qua đẳng thức: $\Phi_0(x)=-\Phi_0(-x)$

Ví dụ.1:

Tra bảng giá trị hàm $\Phi_0(x)$ ta có:

$$\Phi_0(1,96) = 0,475;\ \Phi_0(1,645) = 0,45.$$
$$\Phi_0(-1,96) = -0,475.$$

Từ định nghĩa và tính chất của hàm phân phối xác suất, với biến ngẫu nhiên chuẩn hoá U ta còn có các công thức tính xác suất sau:

$$P(U < a) = \Phi(a) = \frac{1}{2} + \Phi_0(a);$$

$$P(U > a) = 1 - \Phi(a) = \frac{1}{2} - \Phi_0(a);$$

$$P(a < U < b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a).$$

Ví dụ 2:

Từ bảng giá trị hàm $\Phi_0(u)$ ta có:

$$P(U < 1,96) = 0,5 + \Phi_0(1,96) = 0,975;$$

$$P(U < 1,645) = 0,5 - \Phi_0(1,645) = 0,5 - 0,45 = 0,05;$$

$$P(-1,96 < U < 1,645) = \Phi_0(1,645) - \Phi_0(-1,96)$$

$$= \Phi_0(1,645) + \Phi_0(1,96) = 0,45 + 0,475 = 0,925.$$

3.5.4. Công thức xác suất đối với biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn

Trên đây ta đã có một số công thức tính toán xác suất cho biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn tắc $N(0;1)$. Đối với trường hợp tổng quát của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, ta có thể thông qua phép biến đổi thích hợp để đưa về trường hợp biến ngẫu nhiên chuẩn tắc. Cụ thể, dễ dàng chứng minh được rằng phép đổi biến:

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad (3.2.2)$$

sẽ giúp thực hiện được việc trên, tức ta sẽ có biến ngẫu nhiên chuẩn tắc $U \sim N(0;1)$. Từ đó, ta có các công thức tính xác suất cho biết ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 bất kỳ như sau:

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < U < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$p(a<X<b)=\Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad 3.23)$$

$$P(X<b)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=0,5+\Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \quad (3.24)$$

$$P(X>a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=P\left(U>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=0,5-\Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \quad (3.25)$$

Đặc biệt, ta có:

$$\begin{aligned}P(|X-\mu|<\varepsilon)&=P(-\varepsilon\le X-\mu\le+\varepsilon)\\&=P(\mu-\varepsilon\le X\le\mu+\varepsilon)\\&=\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).\end{aligned} \quad (3.26)$$

Trong trường hợp đặc biệt:

- Khi $\varepsilon=2\sigma$, ta có:

$$P(|X-\mu|<2\sigma)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=2\Phi_0(2)\cong0,9544. \quad (3.27)$$

Công thức trên được gọi là ***quy tắc 2σ***, quy tắc này cho thấy xác suất để biến ngẫu nhiên chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$ nhận giá trị trong khoảng $(\mu-2\sigma;\mu+2\sigma)$ sẽ xấp xỉ 0,9544.

- Khi $\varepsilon=3\sigma$, ta có:

$$P(|X-\mu|<3\sigma)=P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=2\Phi_0(3)\cong0,997. \quad (3.28)$$

Công thức trên được gọi là ***quy tắc 3σ***, quy tắc này cho thấy có tới 99,7 % các giá trị của biến ngẫu nhiên chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$ nằm trong khoảng $(\mu-3\sigma;\mu+3\sigma)$.

Ví dụ 3:

Năng suất của một loại cây ăn quả là một biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với năng suất trung bình là 20kg/cây và độ lệch chuẩn là 2,5 kg. Cây đạt tiêu chuẩn hàng hoá là cây có năng suất tối thiểu là 15 kg.

a. Hãy tính tỷ lệ cây đạt tiêu chuẩn hàng hoá.

b. Nếu cây đạt tiêu chuẩn hàng hoá sẽ lãi 500 ngàn đồng ngược lại cây không đạt tiêu chuẩn sẽ làm lỗ 1 triệu đồng. Người ta thu hoạch ngẫu nhiên một lô gồm 100 cây, hãy tính tiền lãi trung bình cho lô cây đó.

Giải:

Gọi X là năng suất của loại cây ăn quả đó. Theo giả thiết X là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$ với $\mu=20,\ \sigma=2,5$.

- Áp dụng công thức (3.25) ta thấy tỷ lệ cây đạt tiêu chuẩn hàng hoá là:

$$P(X\geq 15)=0,5-\Phi_0\left(\frac{15-20}{2,5}\right)=0,5-\Phi(-2)=0,5+\Phi(2)=0,5+0,4772=0,9772.$$

- Gọi Y là tiền lãi trên một cây, ta có bảng phân phối xác suất của Y

Y	-1000	500
P	0,0228	0,9772

Tiền lãi trung bình của lô cây là:

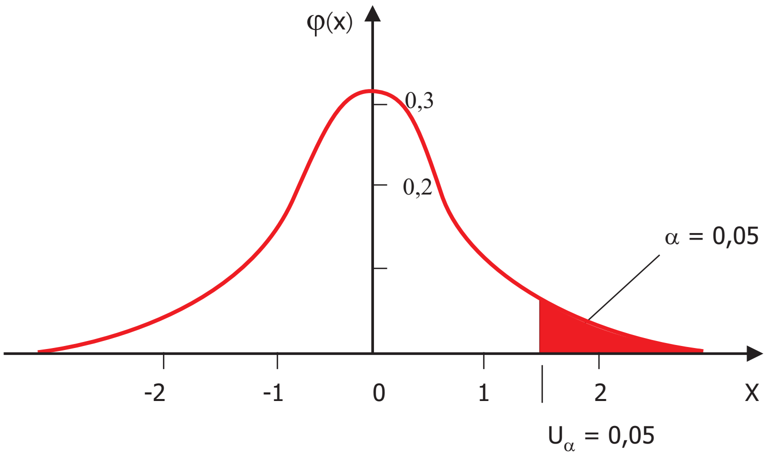
$E(100Y)=100\times E(Y)=100\times(-1.000\times 0,0228+500\times 0,9772)=46.580$ (nghìn).

3.5.5. Giá trị tới hạn chuẩn tắc

Giá trị u_α được gọi là *giá trị tới hạn chuẩn tắc* mức $\alpha(0\leq\alpha\leq 1)$ của biến ngẫu nhiên U nếu:

$$P(U>u_\alpha)=\alpha.$$

Minh họa bằng Hình 3.4, ta thấy u_α chính là tọa độ trên trục Ox được xác định sao cho diện tích của tam giác cong bên phải của đường thẳng $x=u_\alpha$, giới hạn bởi đường cong của hàm mật độ $\varphi(x)$ và trục Ox , bằng chính α .`



Hình 3.6: Giá trị tới hạn u_α của phân phối chuẩn tắc tương ứng với mức tới hạn α

CHÚ Ý

- Giá trị u_α có thể tra được trong bảng phụ lục.
- Dễ dàng chứng minh được: $u_{1-\alpha}=-u_\alpha$.
- Rõ ràng giá trị tới hạn u_α của phân phối chuẩn tắc bằng chính phân vị $(1-\alpha)$ của phân phối đó.

Ví dụ 4:

Tra bảng giá trị tới hạn chuẩn tắc ta được:

$$u_{0,025} = 1,96;\ \ u_{0,05} = 1,645;$$
$$u_{0,95} = -1,645.$$

Có nghĩa là:

$$P(U > 1,96) = 0,025;$$

$$P(U > 1,645) = 0,05;$$

$$P(U > -1,645) = 0,95.$$

Kết luận:

Phân bố chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$ là phân bố xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục nhận mọi giá trị trên trục số thực, được hoàn toàn xác định bởi hai tham số là kỳ vọng μ và phương sai σ^2 của nó.

3.6. Quy luật phân phối khi – bình phương $\chi^2(n)$

Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối chuẩn tắc N (0;1) thì:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

là một biến ngẫu nhiên có quy luật phân phối xác suất được gọi là *luật phân phối Khi – bình phương với n bậc tự do*, kí hiệu là $\chi^2(n)$.

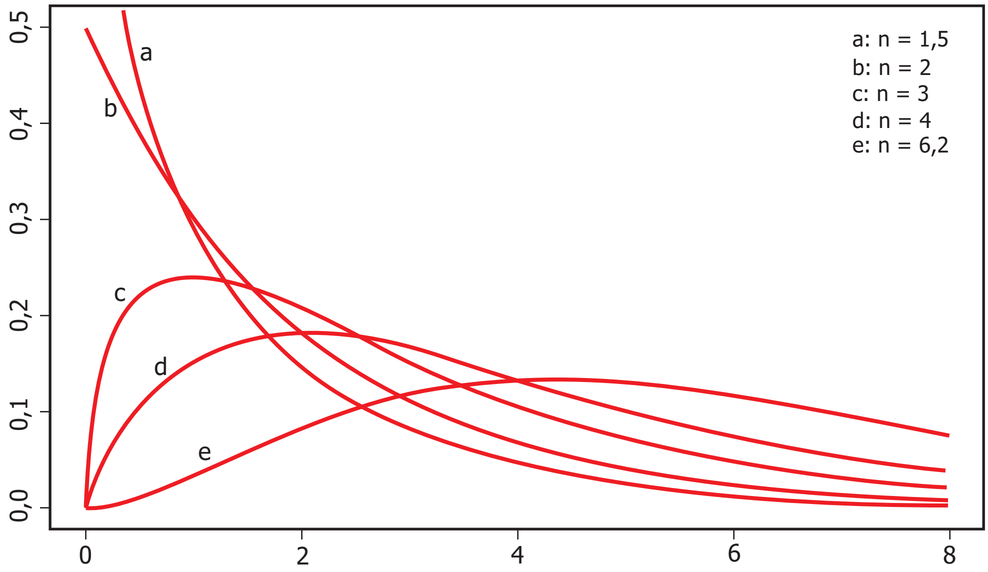
Phân phối xác suất Khi – bình phương được Gosset nghiên cứu từ những năm cuối của thế kỷ 19. Năm 1900 Pearson đã đưa ra dạng giải tích cho hàm mật độ của phân phối Khi – bình phương. Cụ thể, ông đã chỉ ra rằng biến ngẫu nhiên phân phối theo quy luật.

Khi – bình phương với bậc tự do *n* ($X \sim \chi^2(n)$ có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} & \text{khi } x > 0,\ n > 0 \\ 0 & \text{khi } x \le 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Trong đó:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx\ ;\quad a > 1.$$



Hình 3.7: Hàm mật độ xác suất của phân phối Khi – bình phương

với các bậc tự do 1,5; 2; 3; 4 và 6,2

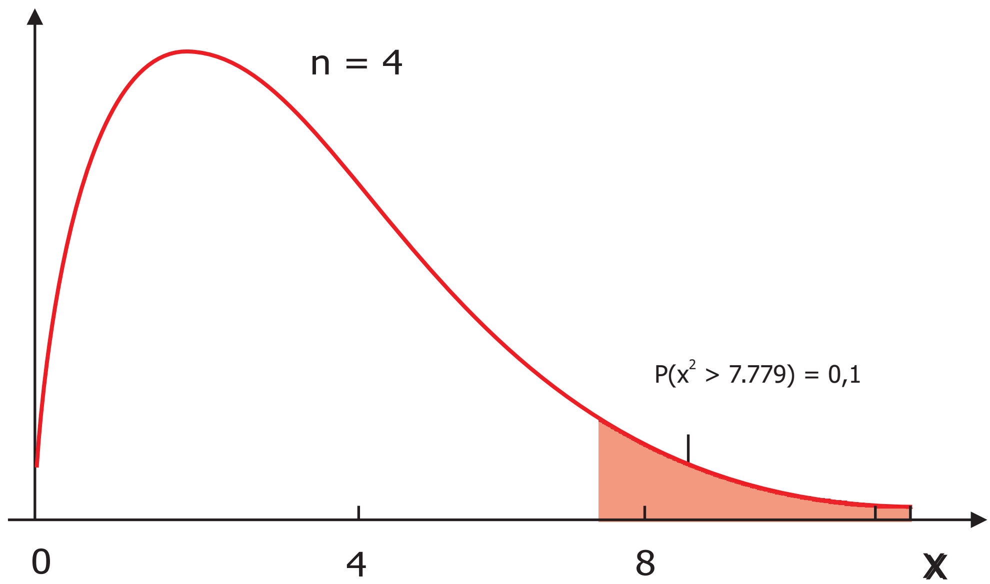
Người ta chứng minh được, nếu χ^2 là biến ngẫu nhiên có phân phối $X \sim \chi^2(n)$ thì:

$$E(\chi^2) = n \text{ và } V(\chi^2) = 2n. \quad (3.31)$$

Giá trị tới hạn mức α của phân phối $\chi^2(n)$, ký hiệu: $\chi^2_\alpha(n)$ và được xác định qua đẳng thức:

$$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)) = \alpha. \quad (3.32)$$

Giá trị này có thể tra trong bảng phụ lục:



Hình 3.8: Diện tích phần đuôi và giá trị tới hạn của phân phối Khi–bình phương

với bậc tự do 4 và mức ý nghĩa α = 0,1

CHÚ Ý

Người ta chứng minh được rằng khi số bậc tự do tăng đến vô cùng, biến ngẫu nhiên có phân phối Khi-bình phương $\chi^2(n)$ sẽ hội tụ về biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Do đó với bậc tự do đủ lớn (n > 40), ta có thể tính xấp xỉ giá trị tới hạn của phân phối chuẩn tắc (sau khi tiến hành quy tâm với kỳ vọng n và chuẩn hóa bằng cách chia cho phương sai 2n).

Ví dụ 1:

Tra bảng phụ lục ta có:

$$\chi^2_{0,1}(4)=7,779;$$

$$\chi^2_{0,025}(15)=27,49;$$

$$\chi^2_{0,05}(20)=31,41;$$

$$\chi^2_{0,95}(25)=14,61;$$

$$\chi^2_{0,975}(30)=16,79.$$

Có nghĩa là:

$$P(\chi^2(4)>7,779)=0,1;$$

$$P(\chi^2(15)>27,49)=0,025;$$

$$P(\chi^2(20)>31,41)=0,05;$$

$$P(\chi^2(25)>14,61)=0,95;$$

$$P(\chi^2(30)>16,79)=0,975;$$

Kết luận:

Phân bố Khi–bình phương $\chi^2(n)$ là phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục nhận mọi giá trị trên nửa đường thẳng thực dương và được hoàn toàn xác định bởi tham số n, bậc tự do của nó.

3.7. Quy luật phân phối Student T(n)

Cho U, V là các biến ngẫu nhiên độc lập, $U \sim N(0;1)$ và $V \sim \chi^2(n)$, khi đó:

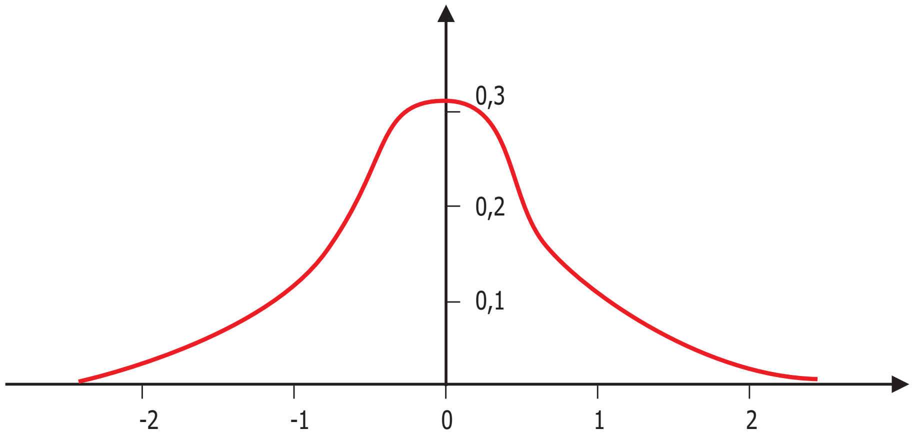
$$T=\frac{U}{\sqrt{V/n}} \qquad (3.33)$$

là một biến ngẫu nhiên có quy luật phân phối xác suất được gọi là *quy luật Student với n bậc tự do*, kí hiệu là T(n). Hàm mật độ xác suất của phân phối này có dạng:

$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n.\pi}}\times\frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^{(n+1)/2}}; \quad n>0, \quad -\infty<x<\infty \qquad (3.34)$$

với Γ là hàm được định nghĩa như trong công thức (3.30) ở phần trước.

Đồ thị hàm mật độ của phân phối T(n) đối xứng qua trục tung, nó có dạng chuông giống hàm mật độ của biến ngẫu nhiên chuẩn hóa N(0;1).



Hình 3.9: Hàm mật độ xác suất của phân phối Student T(n)

Người ta chứng minh được rằng, nếu T là biến ngẫu nhiên có phân phối T(n) thì:

$$E(T) = 0 \text{ và } V(T) = \frac{n}{n-2}. \qquad (3.35)$$

Giá trị tới hạn của phân phối xác suất này được định nghĩa tương tự như đối với phân phối chuẩn tắc hay phân phối Khi – bình phương và có thể tra trong bảng Phụ lục.

CHÚ Ý

Người ta chứng minh được rằng khi số bậc tự do tăng lên, biến ngẫu nhiên có phân phối Student T(n) sẽ hội tụ rất nhanh về biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc U. Do đó với bậc tự do đủ lớn (n > 30), có thể lấy giá trị tới hạn $t_\alpha(n) \cong u_\alpha$. Tuy nhiên cần phải chú ý rằng sai số của phép xấp xỉ này khá lớn nếu n nhỏ.

Ví dụ:

Tra bảng phụ lục ta có

$$T_{0,025}(15) = 2,131;$$
$$T_{0,05} = (20) = 1,725;$$
$$T_{0,95}(25) = -T_{(0,05)}(25) = -41,708;$$
$$T_{0,025}(30) = -2,042.$$

Có nghĩa là:

$$P(T(15) > 2,131) = 0,025;$$
$$P(T(20) > 1,725) = 0,05;$$
$$P(T(25) > -1,708) = 0,95;$$
$$P(T(30) > -2,042) = 0,975.$$

Kết luận:

Phân bố Student $T(n)$ là phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục đối xứng nhận mọi giá trị trên trục số thực và được hoàn toàn xác định bởi bậc tự do n của nó.

3.8. Quy luậ phân phối Fisher - Snedecor F (n_1, n_2)

Cho hai biến ngẫu nhiên V_1, V_2 phân phối theo quy luật Khi – bình phương với bậc tự do tương ứng n_1 và n_2, khi đó:

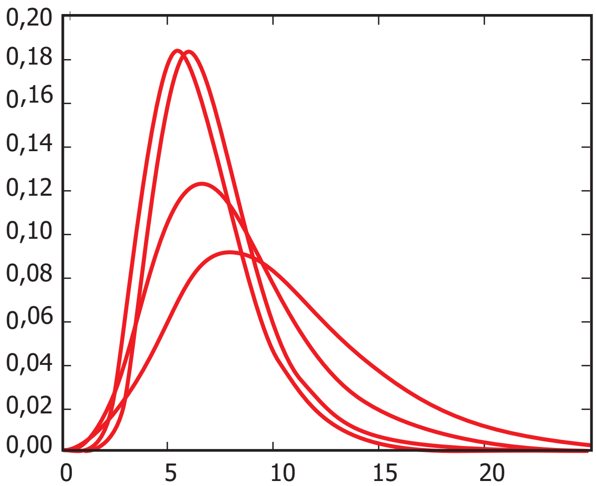
$$F = \frac{V_1/n_1}{V_2/n_2}$$

là một biến ngẫu nhiên có luật phân phối xác suất được gọi là *quy luật Fisher–Snedecor với* (n_1, n_2) *bậc tự do*, kí hiệu là $F(n_1, n_2)$. Phân phối xác suất này có hàm mật độ dạng:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{(n_1/2)} x^{(n_1/2-1)}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-(n_1+n_2)/2} \qquad (3.36)$$

với $x > 0$, $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, còn Γ là hàm được định nghĩa như trong công thức (3.30).

Đồ thị hàm mật độ của phân phối $F(n_1, n_2)$ có dạng giống hàm mật độ Khi – bình phương.



Hình 3.10: Hàm mật độ xác suất của phân phối Fisher – Snedecor với các bậc tự do khác nhau

Người ta chứng minh được, nếu F là biến ngẫu nhiên có phân phối $F(n_1; n_2)$, thì:

$$E(F) = \frac{n_2}{n_2-2};\quad V(F) = \frac{2n_2^2\left(n_1+n_2^2-2\right)}{n_1\left(n_2-2\right)^2\left(n_2-4\right)}. \qquad (3.37)$$

Giá trị tới hạn mức α của phân phối $F(n_1;n_2)$, ký hiệu là $f_\alpha(n_1,n_2)$, được xác định qua đẳng thức:

$$P\left(F > f_\alpha(n_1,n_2)\right) = \alpha. \qquad (3.38)$$

Giá trị này có thể tra trong bảng Phụ lục.

Nhận xét:

Từ định nghĩa, ta có, nếu $F \sim F(n_1,n_2)$ thì $\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$, do đó:

$$f_{1-\alpha}(n_1,n_2) = f_\alpha(n_2,n_1).$$

Ví dụ:

Tra bảng phụ lục 9 ta có:

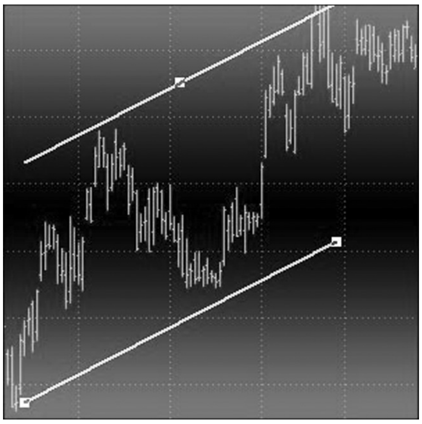
$$f_{0,025}(15,10) = 3,52$$
$$f_{0,05}(20,15) = 2,33$$
$$f_{0,95}(20,15) = \frac{1}{f_{0,95}(15,20)} = \frac{1}{2.2} = 0,4545.$$

Có nghĩa là:

$$P\left(F(15,10) > 3,52\right) = 0,025;$$
$$P\left(F(20,15) > 2,33\right) = 0,05;$$
$$P\left(F(20,15) > 0,4545\right) = 0,95.$$

Kết luận:

Phân bố Fisher–Snedecor $F(n_1,n_2)$ là phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục nhận mọi giá trị trên nửa đường thẳng thực dương và được hoàn toàn xác định bởi hai bậc tự do (n_1,n_2) của nó.



3.9. Quy luật phân phối lũy thừa

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là phân phối theo quy luật lũy thừa (quy luật mũ) nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$$

Trong đó λ là 1 hằng số dương.

Hàm phân bố xác suất của quy luật lũy thừa được xác định như sau:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Các tham số đặc trưng của quy luật lũy thừa được xác định như sau:

Giả sử biến ngẫu nhiên X tuân theo quy luật phân phối lũy thừa, khi đó kỳ vọng toán của X được xác định bởi công thức:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx .$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần, ta có:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Giá trị phương sai được xác định bằng công thức:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2 = \int_{0}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Quy luật phân phối lũy thừa có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Người ta đã chứng minh được rằng trong các hệ thống kỹ thuật, thời gian làm việc liên tục của máy móc thiết bị giữa 2 lần sửa chữa thường tuân phân phối theo quy luật lũy thừa.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Trong bài này các bạn cần nắm vững các nội dung quan trọng sau: Quy luật phân phối không – một, quy luật phân phối nhị thức, quy luật phân phối Poisson, quy luật phân phối chuẩn, phân phối chuẩn tắc, quy luật phân phối Khi – bình phương và Student, quy luật phân phối Fisher.

Chú ý cần nắm vững về phân phối chuẩn và phân phối chuẩn tắc. Các giá trị tới hạn chuẩn và giá trị tới hạn khi bình phương, giá trị tới hạn student và giá trị tới Fisher.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Trọng lượng của một con bò là ĐLNN có phân bố chuẩn với giá trị trung bình là 250kg và độ lệch tiêu chuẩn là 40kg.
Xác suất để một con bò chọn ngẫu nhiên có trọng lượng lớn hơn 300 kg là:
a) 0,1056
b) 0,15
c) 0,115
d) 0,20

2. Trọng lượng của một con bò là ĐLNN có phân bố chuẩn với giá trị trung bình là 250kg và độ lệch tiêu chuẩn là 40kg.
Xác suất để một con bò chọn ngẫu nhiên có trọng lượng nhỏ hơn 175 kg là
a) 0,10
b) 0,0303
c) 0,105
d) 0,05

3. Trọng lượng của một con bò là ĐLNN có phân bố chuẩn với giá trị trung bình là 250kg và độ lệch tiêu chuẩn là 40kg.
Xác suất để một con bò chọn ngẫu nhiên có trọng lượng nằm trong khoảng từ 260 đến 270 kg là:
a) 0.15
b) 0,0928
c) 0,105
d) 0,115

4. Một cuộc thi tìm hiểu lịch sử, điểm của thí sinh dự thi tuân theo quy luật chuẩn với trung bình là 500 điểm và độ lệch chuẩn là 50 điểm.
Tỷ lệ thí sinh có số điểm từ 450 đến 600 điểm là:
a) 0,8143
b) 0,915
c) 0,75

d) 0,85

5. Điểm tổng kết của một môn học tuân theo quy luật chuẩn với trung bình là 6 điểm và độ lệch chuẩn là 2 điểm. Thí sinh được xếp loại giỏi nếu có điểm tổng kết từ 8,5 trở lên, xếp loại khá nếu điểm tổng kết từ 7 đến 8,5.

Tỷ lệ thí sinh của trường xếp loại khá giỏi là:

a) 0,2029

b) 0,32

c) 0,15

d) 0,25

6. Tuổi thọ của một loại sản phẩm là biến ngẫu nhiên phân chuẩn với tuổi thọ trung bình là 1000 (giờ) và độ lệch chuẩn là 10 (giờ). Một sản phẩm được bảo hành miễn phí nếu sản phẩm hỏng trước 983,55 (giờ).

Tỷ lệ sản phẩm nhà cung cấp phải bảo hiểm miễn phí là:

a) 0,05

b) 0,15

c) 0,20

d) 0,12

7. Một trạm có 2 xe taxi để cho thuê theo ngày, hàng ngày trạm phải nộp thuế 30 nghìn/xe/ngày. Mỗi chiếc xe được thuê với giá 300nghìn/ngày. Giả sử yêu cầu thuê xe của trạm là biến ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với tham số $\lambda = 2$.

Tiền lãi trung bình trạm thu được trong một ngày là:

a) 538,3612

b) 539,5

c) 540,36

d) 545,25

BÀI TẬP

1. Tỷ lệ phế phẩm của sản phẩm A trước khi xuất xưởng là 30%. Trước khi đưa ra thị trường người ta tiến hành kiểm tra bằng một thiết bị tự động. Thiết bị kiểm tra tự động có độ chính xác 90% đối với chính phẩm và 95% đối với phế phẩm. Sản phẩm A sẽ được đưa ra thị trường nếu thiết bị kiểm tra tự động coi sản phẩm đó là chính phẩm.

a. Một người mua 3 sản phẩm A, hãy cho biết quy luật phân phối xác suất, kỳ vọng và phương sai của số chính phẩm từ 3 sản phẩm này.

b. Xác suất để người đó mua được ít nhất một chính phẩm là bao nhiêu?

2. Một người bắn 5 viên đạn vào bia, xác suất trúng đích mỗi lần bắn là 0,8 và độc lập với nhau. Gọi X là số viên trúng đích.

a. Hãy cho biết X tuân theo quy luật gì? Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

b. Tính xác suất để có ít nhất 4 viên trúng đích?

3. Tỷ lệ phế phẩm của 1 lô hàng là 20%, người ta lấy 10 sản phẩm từ lô hàng. Gọi X là số phế phẩm trong 10 sản phẩm lấy ra.

a. Hãy cho biết X tuân theo quy luật gì? Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

b. Tính xác suất để có nhiều nhất 1 sản phẩm xấu được lấy ra?

4. Hai người mỗi người ném 3 quả bóng vào rổ, xác suất ném trúng rổ mỗi lần của người đều là 0,7. Gọi X_1 là số lần ném trúng rổ của người thứ nhất. X_2 là số lần ném trúng rổ của người thứ hai. Đặt $X = X_1 + X_2$.

a. Hãy cho biết X_1, X_2, X tuân theo quy luật gì? Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

b. Tính xác suất để mỗi người đều ném trúng 2 quả.

c. Tính xác suất để tất cả chỉ có 4 quả bóng trúng rổ.

5. Một đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án trả lời đúng. Trả lời đúng mỗi câu được 1 điểm. Gọi X là số điểm đạt được.

a. Hãy cho biết X tuân theo quy luật gì? Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

b. Tính xác suất để người đó đạt ít nhất 8 điểm.

6. Một cuộc thi tìm hiểu lịch sử, điểm của thí sinh dự thi tuân theo quy luật chuẩn với trung bình là 500 điểm và độ lệch chuẩn là 50 điểm.

a. Tìm tỷ lệ thí sinh có số điểm từ 450 đến 600 điểm.

b. Người ta thưởng cho 10% số thí sinh dự thi đạt điểm cao. Muốn được thưởng thì số điểm phải đạt bao nhiêu?

7. Điểm tổng kết của một môn học tuân theo quy luật chuẩn với trung bình là 6 điểm và độ lệch chuẩn là 2 điểm. Thí sinh được xếp loại giỏi nếu có điểm tổng kết từ 8,5 trở lên, xếp loại khá nếu điểm tổng kết từ 7 đến 8,5.

a. Tìm tỷ lệ thí sinh của trường xếp loại khá giỏi.

b. Tính xác suất để trong 3 em học sinh bất kỳ có đúng 1 em xếp loại giỏi.

8. Tỷ lệ người tham gia bảo hiểm y tế ở một vùng là 75% điều tra 100 người trong vùng.

a. Tính xác suất để có ít nhất 80 người tham gia bảo hiểm.

b. Tính xác suất để tỷ lệ người tham gia bảo hiểm trong số 100 người nói trên không vượt quá 70%.

c. Với xác suất 0,9 hãy cho biết trong 100 người có ít nhất bao nhiêu người tham gia bảo hiểm y tế?

9. Tuổi thọ của một loại sản phẩm là biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn với tuổi thọ trung bình là 1000 (giờ) và độ lệch chuẩn là 10 (giờ). Một sản phẩm được bảo hành miễn phí nếu sản phẩm hỏng trước 983,55 (giờ). Tính tỷ lệ sản phẩm nhà cung cấp phải bảo hiểm miễn phí.

10. Khi kinh doanh trong 2 ngành A, B có lợi nhuận hàng năm là các biến ngẫu nhiên X_A, X_B có phân phối chuẩn và độc lập với nhau.

	Trung bình	Độ lệch chuẩn
XA	12%	3%
XB	15%	4%

a. Muốn có lãi suất tối thiểu 10% thì nên chọn đầu tư ở ngành nào?

b.Một người đầu tư vào cả 2 ngành theo tỷ lệ vốn đầu tư 30% vào ngành A và 70% vào ngành B. Tính lợi nhuận trung bình và độ rủi ro (phương sai) của phương án đầu tư này.

c. Muốn đầu tư vào cả hai phương án, để độ rủi ro là nhỏ nhất thì chia tỷ lệ đầu tư vào 2 ngành A, B như thế nào?