

Trường Đại Học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh
Khoa Khoa Học & Ứng Dụng - Bộ môn Toán Ứng Dụng



BÀI TẬP ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Ngày 9 tháng 10 năm 2019

XÂY DỰNG HÀM SỐ, Ý NGHĨA CỦA HÀM SỐ

1. Trong một đợt hạn hán, dân của tỉnh Bến Tre, đã phải đối mặt với tình trạng thiếu nước nghiêm trọng. Để ngăn chặn việc sử dụng nước quá mức, tỉnh Bến Tre bắt đầu ra chính sách giá nước hàng tháng với một gia đình bốn người như sau

- 1.22 ngàn /1 khối nước cho 12 khối đầu tiên
- 10 ngàn cho 12 khối tiếp theo
- 50 ngàn cho mỗi khối sau đó

Thể hiện hóa đơn nước hàng tháng cho một gia đình bốn người như là một hàm của lượng nước được sử dụng.

2. Một người leo núi dọc con đường trong rừng được mô tả bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 80 - 0.7t \\ y = 0.3t \end{cases}$$

Một con gấu rời khỏi khu vực của rừng tới phía tây và đi dọc theo con đường được mô tả bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 0.2t \\ y = 20 + 0.1t \end{cases}$$

- Đường đi của người đi bộ và gấu có giao nhau không?
- Người đi bộ và gấu có va chạm không?

HÀM TUYẾN TÍNH - HÀM MŨ

1. Các chất phóng xạ phân rã theo thời gian và tốc độ phân rã phụ thuộc vào nguyên tố. Nếu có G gram hydro H_3 được chứa trong một cái thùng, thì đo sự phân rã phóng xạ, 1 năm sau sẽ có $0,783G$ gram hydro. Giả sử ban đầu với 50 gram hydro.

- Biểu diễn G gam còn lại sau t năm là hàm số mũ của t .
- Bao nhiêu hydro còn lại sau 5 năm?

2. Các hàm sau đây biểu diễn cho sự thay đổi số dân của bốn thị trấn với thời gian t tính bằng năm:

(i) $P = 600(1.12)^t$ (ii) $P = 1000(1.03)^t$ (iii) $P = 200(1.08)^t$ (iv) $P = 900(0.90)^t$

- Thị trấn nào có tốc độ tăng trưởng dân số lớn nhất? Tỷ lệ tăng trưởng phần trăm là bao nhiêu?
- Thị trấn nào có dân số ban đầu lớn nhất? Dân số ban đầu là bao nhiêu?
- Có bất kỳ thị trấn nào dân số giảm không? Nếu có, tương ứng với hàm nào?

3. Lượng adrenaline trong cơ thể có thể thay đổi nhanh chóng. Giả sử số lượng ban đầu là 15 mg. Tìm một công thức cho A là số lượng adrenaline trong cơ thể tính bằng mg, tại thời điểm t phút sau đó, nếu A :

- Tăng 0,4 mg mỗi phút.
- Giảm 0,4 mg mỗi phút.
- Tăng 3% mỗi phút.
- Giảm 3% mỗi phút.

HÀM HỢP

1. Công ty cấp nước của 1 thành phố nhận thấy rằng nếu số dân trong thành phố là p **triệu người** thì lượng nước sử dụng là $w(p) = 20.p^{3.7}$ **ngàn m^3** . Số dân trong thành phố đến năm thứ t (tính từ năm 2000) được dự đoán là $p(t) = 7 + 0.26t$ **triệu người**. Lập hàm dự tính lượng nước sử dụng của thành phố ở năm thứ t và tính lượng nước cần cung cấp vào năm 2019.
2. Độ cao của máy bay sau t cất cánh được cho bởi hàm bởi

$$A(t) = -2.8t^2 + 6.7t \text{ ngàn mét, } 0 \leq t \leq 2$$

Nhiệt độ không khí ở vùng độ cao x ngàn mét là

$$f(x) = 68 - 3.5x \text{ độ C}$$

- Hàm hợp $h(t) = f(A(t))$ để đo gì?
- Tính $h(1)$ và nêu ý nghĩa giá trị đó trong thực tế.
- Tìm công thức $h(t)$
- Hỏi hàm $A(f(x))$ có ý nghĩa thực tế trong trường hợp này không?

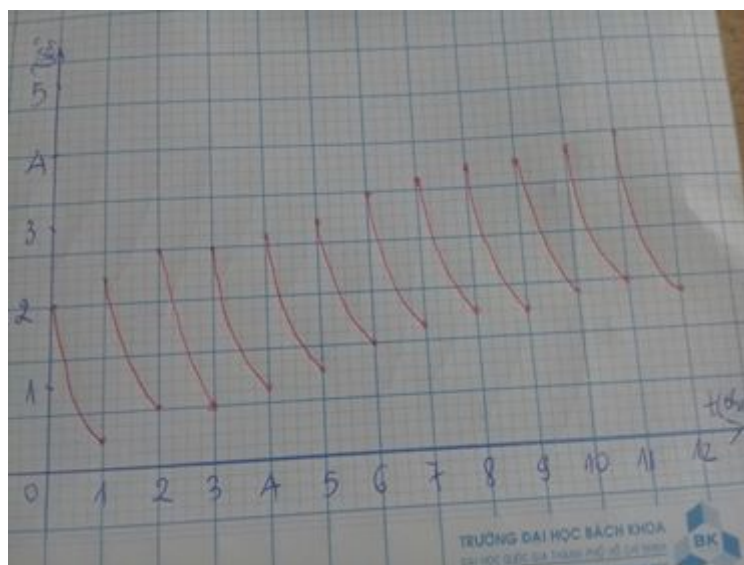
HÀM NGƯỢC

1. $P = f(t)$, trong đó P là số lượng loài chim trên một hòn đảo (đơn vị nghìn), t là số năm tính từ năm 2007
 - $f(4)$ ý nghĩa là gì?
 - $f^{-1}(4)$ ý nghĩa là gì?
2. Một gia đình dự định tổ chức tiệc cuối năm ở 1 nhà hàng. Nhà hàng có mức giá phục vụ chung cho 1 bữa tiệc là 10 triệu (gồm các chi phí như: hoa, địa điểm, người phục vụ, ...) và giá cho mỗi khách ăn là 300.000 đồng. Gia đình dự tính chi phí tối đa họ có thể chấp nhận được là 40 triệu.
 - Nếu gọi x là số khách mời mà gia đình sẽ mời, tìm chi phí như 1 hàm $y(x)$. Tìm MXĐ, MGT của hàm.
 - Tìm hàm ngược của hàm $y(x)$, ý nghĩa của hàm này, tìm MXĐ, MGT?

GIỚI HẠN HÀM SỐ

1. Một sinh viên ở kí túc xá được cha mẹ cho 2 triệu đồng mỗi tháng bằng cách chuyển vào tài khoản của sinh viên này vào ngày mùng 1 mỗi tháng. Đồ thị dưới đây minh họa cho số tiền trong tài khoản của sinh viên này trong năm 1 năm học (Tính từ đầu tháng 8 năm trước đến hết tháng 7 năm sau).

- Ước tính số tiền trong tài khoản vào ngày 15.11
- Ước tính $\lim_{t \rightarrow 6^-} M(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 6^+} M(t)$. Giải thích ý nghĩa của 2 giới hạn này?



2. Độ dẫn điện của nhôm ở nhiệt độ t gần 0 tuyệt đối được xấp xỉ bởi hàm $f(t) = \frac{100}{1 + 0,001t^2}$ biểu thị độ dẫn điện tính theo phần trăm. Tìm giới hạn của độ dẫn điện này khi nhiệt độ t tiến đến 0 (độ không tuyệt đối) từ bên phải. [Khi đó kim loại ngày càng có khả năng dẫn điện, với hiệu suất đạt gần 100%, gọi là trạng thái siêu dẫn]

HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Một công ty tính phí 7.5đ/lít cho một loại sơn cho tất cả các đơn đặt hàng 50 lít trở xuống và 6.75 đ/lít cho các đơn hàng trên 50 lít. Đặt $P(x)$ đại diện cho chi phí mua x lít sơn. Tìm chi phí mua

- 40l, 50l, 60l.
- P không liên tục tại đâu?

2. Theo một nghiên cứu, xác suất P để một loài nào đó sống sót cho bởi

$$P = 1 - e^{-2k}$$

với k là một hằng số dương. Chứng minh rằng nếu k đủ nhỏ ($k \ll 1$), thì P khoảng $2k$.

Ý NGHĨA ĐẠO HÀM - CHIỀU BIẾN THIÊN

- Số lượng hàng hóa được sản xuất khi dùng x (công) lao động là hàm $p(x)$ (Công có thể tính bằng giờ hoặc quy đổi thành tiền)
 - Nêu ý nghĩa của $p(5000) = 300$ và $p'(5000) = 2$ trong thực tế.
 - Ước tính số lượng hàng hóa được sản xuất bổ sung khi x tăng từ 5000 lên $5000\frac{1}{2}$
- Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300km. Vận tốc của dòng nước là 6km / h . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức

$$E(v) = 300c \frac{v^3}{v - 6}$$

Trong đó c là một hằng số và E tính bằng Jun. Hỏi cá bơi với vận tốc như thế nào thì năng lượng tiêu hao sẽ giảm.

CÁC PHÉP TOÁN ĐẠO HÀM (4 phép toán, hàm hợp, hàm ngược)

- Với 1 mol khí lý tưởng, phương trình trạng thái là $PV = 8.31T$ trong đó P (kPascal), V (Lit), T (Kenvin). Tại thời điểm nhiệt độ đạt được 300^0K và thể tích khí đạt $100L$, vận tốc tăng nhiệt là $0.1K/s$ và vận tốc tăng thể tích là $0.2L/s$, tính tốc độ thay đổi của áp suất P .
- Nhà sinh thái học ước tính, dân số của một thành phố là x nghìn người, mức trung bình của khí CO trong không khí sẽ là L ppm (parts per million), với

$$L = 10 + 0.4x + 0.0001x^2$$

Dân số trong thành phố được ước lượng bởi hàm

$$x = 752 + 23t + 0.5t^2$$

ngàn người, t (năm) tính từ 2019.

- Tìm tốc độ thay đổi của khí CO tương ứng với dân số của thành phố.
 - Tìm tốc độ thay đổi của dân số khi $t = 2$.
 - Mức độ CO thay đổi nhanh như thế nào (đối với thời gian) tại thời điểm $t = 2$?
- Tại một địa điểm , $f(p)$ là số gallon khí được bán với giá là p đô la/gallon.
 - $f(2) = 4023$ cho biết điều gì?
 - Dựa vào câu trên, tìm và giải thích ý nghĩa $f^{-1}(4023)$
 - $f'(2) = -1250$ cho biết điều gì?
 - Dựa vào câu trên, tìm và giải thích ý nghĩa $(f^{-1})'(4023)$

CÁC HÀM CẬN BIÊN - VI PHÂN

- Một doanh nghiệp có thể mua nhiều bản quyền (license) cho phần mềm nén dữ liệu PowerZip với tổng chi phí xấp xỉ $C(x) = 24x^{2/3}$ đô la cho x bản quyền.
 - Tính chi phí mua bản quyền thứ 1, 2, 4 của doanh nghiệp?
 - Tính $C'(64)$, nêu ý nghĩa của nó
 - Tính $C(65) - C(64)$ và so sánh với $C'(64)$ vừa tính ở trên.
- Tổng chi phí tính bằng ngàn đô la sản xuất x đơn vị của một mặt hàng nhất định là

$$C(x) = 6x^2 + 2x + 10$$

- Tìm hàm chi phí cận biên.
- Tìm chi phí và chi phí cận biên khi 10 đơn vị được sản xuất.
- Sử dụng chi phí cận biên để ước tính chi phí sản xuất đơn vị thứ 11.
- Sử dụng chi phí cận biên để ước tính chi phí phát sinh thêm nếu mức sản xuất tăng từ 10 lên 10.5 đơn vị.

ĐẠO HÀM CẤP HAI VÀ ĐIỂM UỐN

- Các nhà nhân khẩu học của Liên Hợp Quốc dự đoán rằng t năm từ năm 2000, dân số thế giới sẽ là: $P(t) = 6250 + 160t^{3/4}$ triệu người. Tìm $P'(16)$, $P''(16)$ và nêu ý nghĩa của các kết quả này.
- Một nhà dịch tễ xác định một dịch đặc biệt lây lan, sau t tuần bùng phát, số trường hợp mới N (đơn vị trăm người) được báo cáo cho bởi hàm số

$$N(t) = \frac{5t}{12 + t^2}$$

- Tìm $N'(t)$ và $N''(t)$.
- Dịch bệnh tồi tệ nhất là khi nào? Số trường hợp mới tối đa trong báo cáo là bao nhiêu?
- Cán bộ y tế công bố dịch đã được kiểm soát khi tỷ lệ báo cáo các trường hợp mới được giảm thiểu. Điều này xảy ra khi nào? Số trường hợp mới là bao nhiêu tại thời điểm đó?

CỰC TRỊ - MIN - MAX

- Dùng một dải ruy băng 140cm để bọc một hộp quà hình trụ như hình vẽ, biết rằng đã sử dụng 20cm để thắt nơ. Hỏi thể tích lớn nhất của hộp quà được bọc bởi dải ruy băng này là bao nhiêu?



2. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, người ta thấy rằng nếu trên mỗi m^2 thả n con cá thì sau mỗi vụ, cân nặng trung bình của mỗi con là $P(n) = 480 - 20n(\text{gam})$. Vậy nên thả bao nhiêu con trong hồ thì sao mỗi vụ, khối lượng của cả đàn cá là lớn nhất.