Giới hạn dãy số

Định nghĩa 1: Dãy số là 1 tập hợp các số thực được sắp xếp theo thứ tự nhất định và đánh số từ 1, 2, 3, …

Ví dụ:

Tập hợp các số tự nhiên: 1, 2, 3, …. ; mỗi phần tử là 1 số tự nhiên là dãy số tự nhiên.

Mực nước của 1 dòng sông được đo vào những thời điểm nhất định trong năm tại 1 vị trí cố định là 1 dãy số

Mỗi phần tử của 1 dãy số thường được kí hiệu là u_n, a_n, … với n là số tự nhiên

Ví dụ: dãy số $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots.\right\}$ số hạng tổng quát của dãy là $u_n = \frac{1}{n}$

nên ta thường viết dãy là $\{u_n\}, u_n = \frac{1}{n}$ hoặc $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Giới hạn dãy số

Định nghĩa 2: $\lim u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{R} : \forall n > N \rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$

Tức là: phần lớn các phần tử của dãy, khi biểu diễn trên trục số hoặc trong mặt phẳng tọa độ, "tụ tập" xung quanh điểm tương ứng với số a thì ta nói dãy HỘI TỤ về a.

Dãy không hội tụ thì gọi là dãy PHÂN KỲ

Định nghĩa 3: $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \mathrm{N} = N(M) : \forall n > N \rightarrow u_n > M$

Tức là: phần lớn các phần tử của dãy, khi biểu diễn trên trục số, đều lớn hơn 1 số M dương lớn tùy ý

Định nghĩa 4: $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$

Tức là: phần lớn các phần tử của dãy, khi biểu diễn trên trục số, đều nhỏ hơn 1 số m âm nhỏ tùy ý

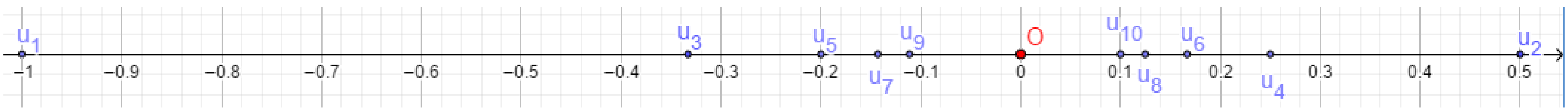
Giới hạn dãy số

Ví dụ: Cho dãy số $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

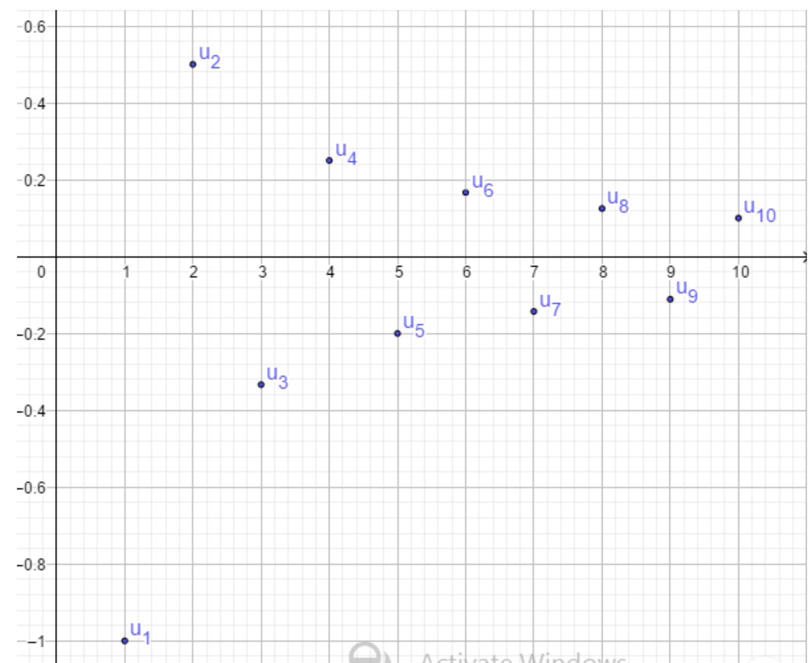
Ta sẽ tìm giới hạn của dãy bằng 2 cách:

Cách 1: Bấm máy tính tay, ta được: $\lim u_n = 0$

Cách 2: Biểu diễn trực quan.



Phần lớn các phần tử của dãy, khi biểu diễn trên trục số, đều "tụ tập" quanh điểm O



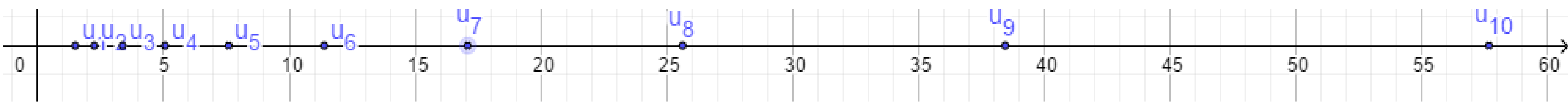
Phần lớn các phần tử của dãy, khi biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ, đều "tụ tập" quanh trục Oy

Giới hạn dãy số

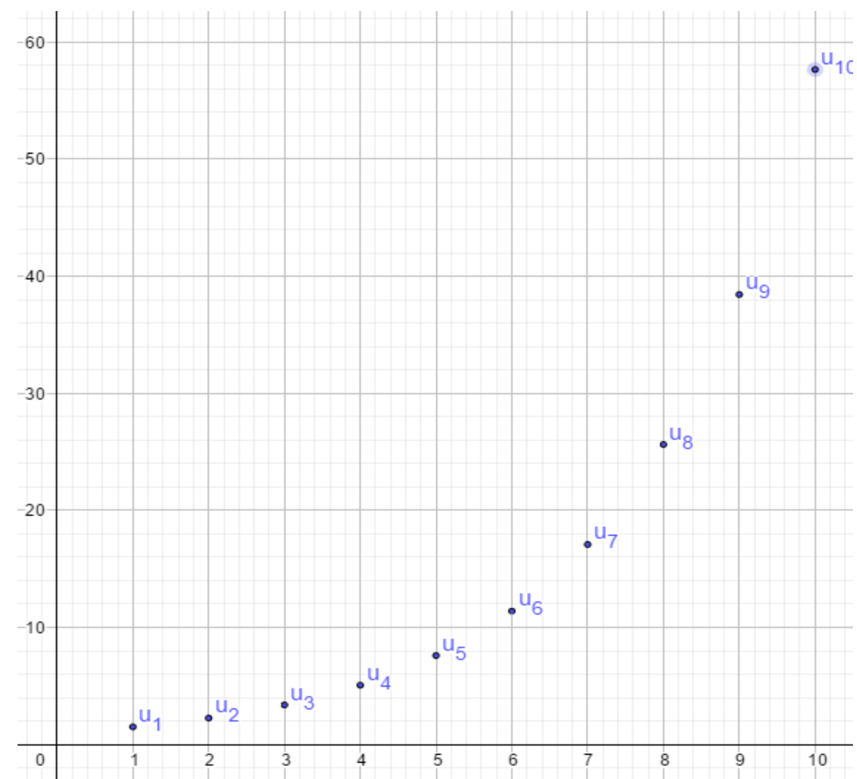
Ví dụ: Cho dãy số $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Cách 1: Bấm máy tính tay, ta được: $\lim u_n = +\infty$

Cách 2: Biểu diễn trực quan.

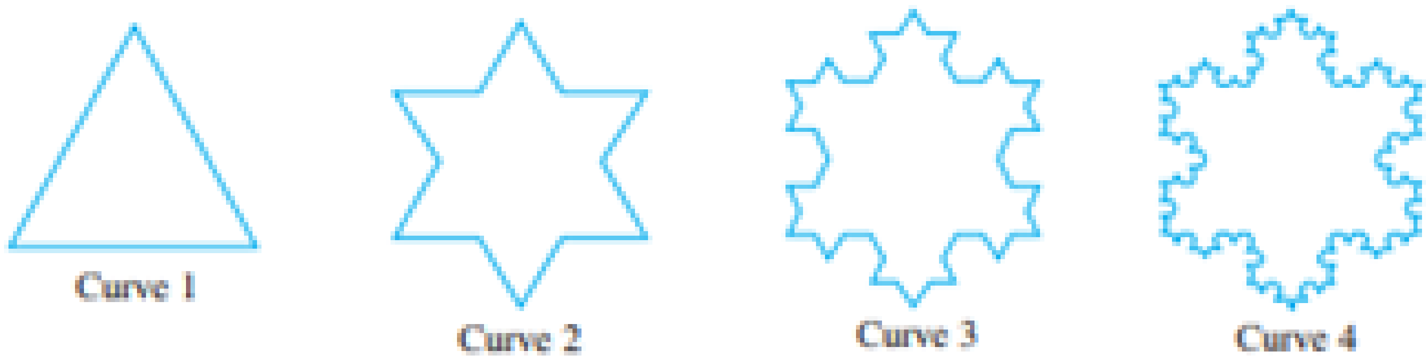


Các phần tử của dãy, khi biểu diễn trên trục số, đều "chạy ngày càng nhanh" ra bên phải, tức là phần lớn các phần tử của dãy đều lớn hơn 1 số M lớn tùy ý



Phần lớn các phần tử của dãy, khi biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ, đều "chạy ngày càng nhanh" lên trên

Ví dụ 1: Bông tuyết Koch (Koch snowflake), tam giác ban đầu cạnh bằng a



Độ dài đường biên của các bông tuyết là các số hạng của dãy số:

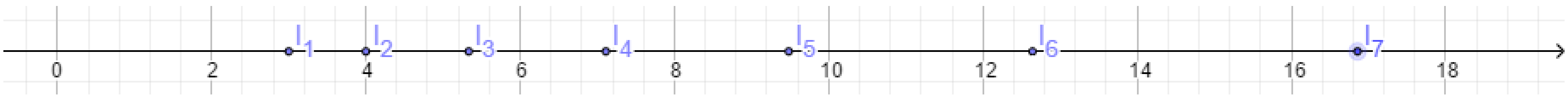
$$l_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \times 3a$$

Diện tích các bông tuyết là các số hạng của dãy số:

$$S_n = \frac{a\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right]$$

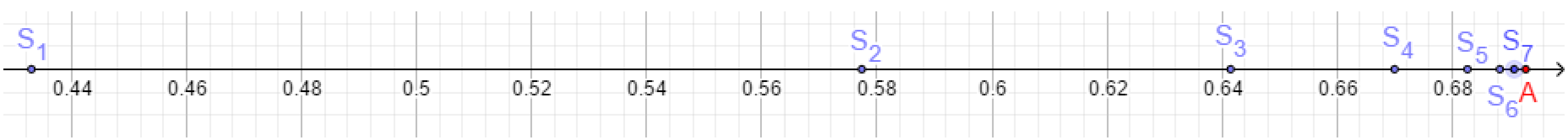
Ta biểu diễn các giá trị của 2 dãy số trên trên trục số với a=1:

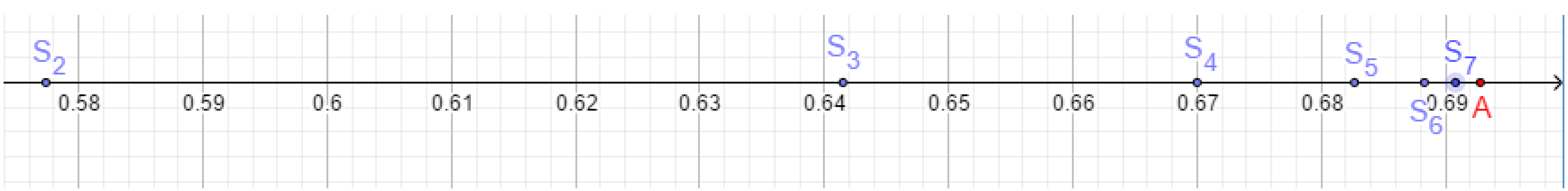
$$l_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \qquad \lim l_n = +\infty$$



Nhận xét: Các giá trị của dãy tăng dần, khoảng cách giữa 2 số hạng cũng tăng dần.

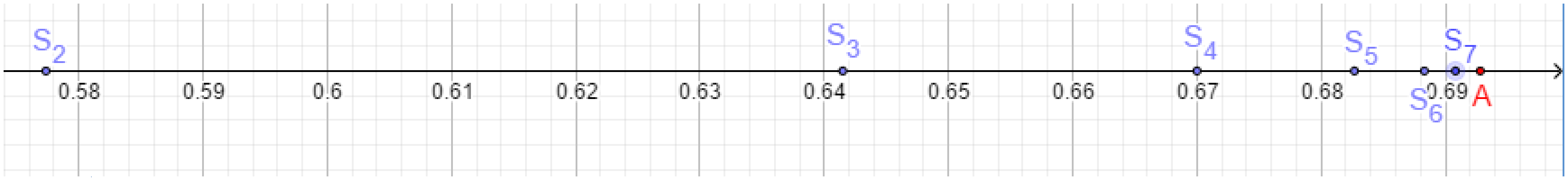
$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right] \qquad \lim S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$$





Giới hạn dãy số

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right] \qquad \lim S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$$



Nhận xét: Các giá trị của dãy tăng dần, khoảng cách giữa 2 số hạng giảm dần.

Như vậy: Diện tích bông tuyết hữu hạn, còn đường biên của nó lại có chiều dài vô hạn

2 loại dãy đặc biệt

1. Dãy VCB: $\lim \alpha_n = 0$

$$(u_n \to a) \Leftrightarrow (u_n = a + \alpha_n, \alpha_n : VCB)$$

$$\begin{cases} \alpha_n : \mathrm{VCB} \\ \beta_n : VCB \end{cases} \Rightarrow \alpha_n + \beta_n : VCB \qquad \begin{cases} \alpha_n : VCB \\ |u_n| \le M\ (\forall n) \end{cases} \Rightarrow \alpha_n . u_n : VCB$$

Ví dụ: Các dãy số sau là các dãy VCB: $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}; \left\{\dfrac{(-1)^n 2^n}{2^n + 3^n}\right\}; \left\{\dfrac{\ln n}{n^\alpha}\right\}, \alpha > 0$

2. Dãy VCL : $\lim |A_n| = +\infty$

Ví dụ: Các dãy số sau là các dãy VCL: $\left\{n^2 + 1\right\}; \left\{(-1)^{n-1}\sqrt{n}\right\}$

Một số giới hạn cơ bản:

$$1.\lim \frac{n^p}{e^n} = 0, \forall p$$

$$2.\lim \sqrt[n]{n^p} = 1, \forall p$$

$$3.\lim \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$$

$$4.\lim q^n = 0, |q| < 1$$

$$5.\lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}, \forall a$$