Chương 1 - Slide chương 1 xác suất thống kê

Xác suất thống kê (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông)

BÀI GIẢNG XÁC SUẤT THỐNG KÊ

TS. Trần Việt Anh - Bộ môn Toán - Khoa Cơ bản 1

Bài 1: Phép thử ngẫu nhiên, biến cố

Bài 1: Phép thử ngẫu nhiên, biến cố

1) Phép thử ngẫu nhiên

- Phép thử ngẫu nhiên là một thí nghiệm hay một quan sát nào đó mà ta biết tất cả các kết quả có thể xảy ra. Tuy nhiên ta không biết kết quả nào sẽ xảy ra.
- Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên và được ký hiệu là Ω.

Ví dụ 1

Tung một đồng xu cân đối đồng chất là một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu

$$\Omega = \{S, N\},$$

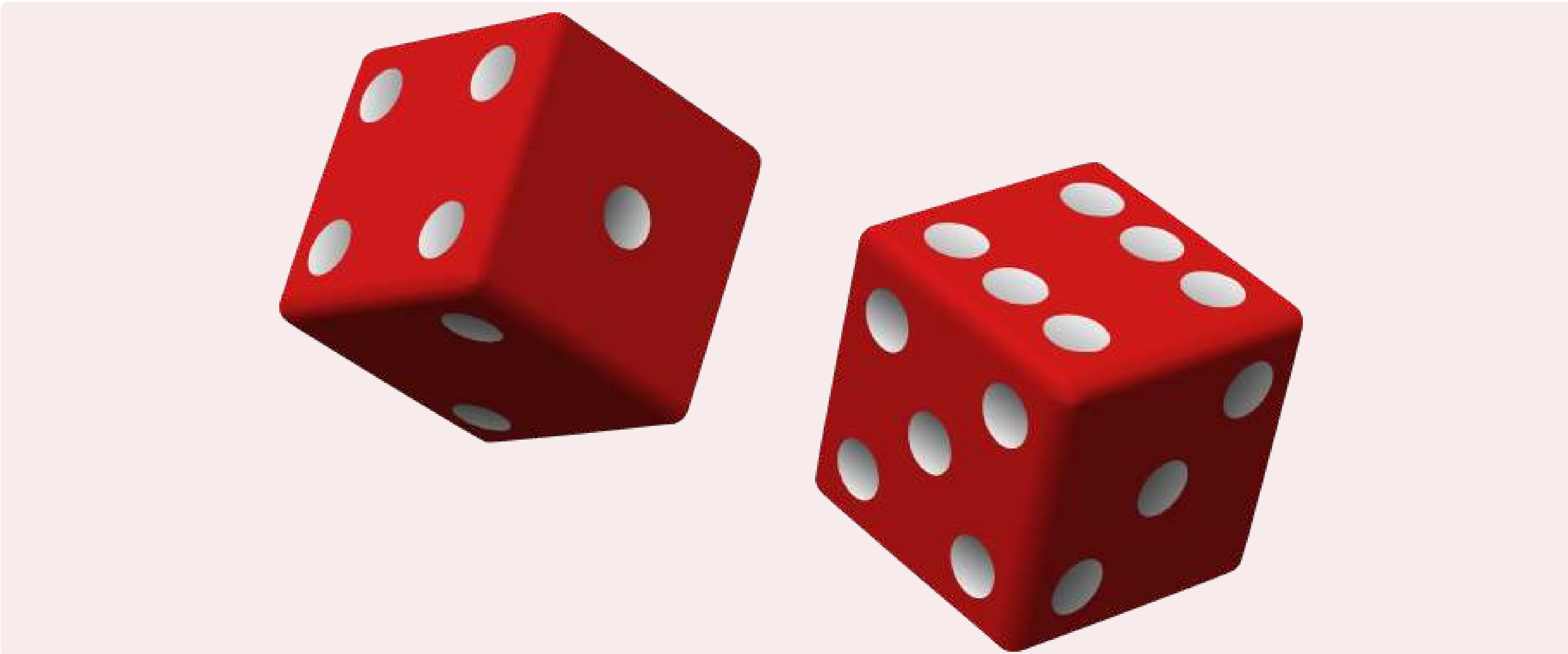
trong đó S là kết quả: "Mặt sấp xuất hiện" và N là kết quả: "Mặt ngửa xuất hiện".

Ví dụ 2

Tung một con xúc xắc cân đối đồng chất là một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

trong đó i là kết quả: "Con xúc xắc xuất hiện mặt i chấm", $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



2) Biến cố

• Gọi Ω_A là tập hợp các kết quả làm cho sự kiện A xảy ra. Ta đồng nhất A với Ω_A và gọi A là một biến cố.

• Biến cố A là tập hợp các kết quả làm cho A xảy ra.

• Ta thường dùng các chữ cái in hoa $A, B, C, \ldots$ để ký hiệu biến cố.

Ví dụ 3

Tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần. Đây là một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\},$$

trong đó (i, j) là kết quả: "Lần thứ nhất xuất hiện mặt i chấm, lần thứ hai xuất hiện mặt j chấm".

Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm trên hai lần tung bằng 8".

Khi đó A xảy ra khi một trong các kết quả $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$ xảy ra.

Do đó

$$A = \{(\quad (6, 2)\}.$$

3) Các loại biến cố

- Biến cố chắc chắn là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên, biến cố này trùng với không gian mẫu Ω.
- Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên. Biến cố không thể được ký hiệu là $\emptyset$.

4) Quan hệ giữa các biến cố

• Biến cố B được gọi là biến cố đối của biến cố A nếu A xảy ra $\Longleftrightarrow$ B không xảy ra. Ta viết $B = \overline{A}$.

• Biến cố A được gọi là tổng của các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nếu A xảy ra $\Longleftrightarrow$ có ít nhất một biến cố nào đó trong các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xảy ra. Ta viết $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

• Biến cố A được gọi là tích của các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nếu A xảy ra $\Longleftrightarrow$ tất cả các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cùng xảy ra. Ta viết $A = A_1 A_2 \ldots A_n$.

• Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu chúng không bao giờ cùng xảy ra, nghĩa là $AB = \emptyset$.

• Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một biến cố bất kỳ không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của các biến cố còn lại.

• Nếu các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là độc lập thì các biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_n$ cũng độc lập, trong đó B_k là biến cố A_k hoặc $\overline{A_k}$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ví dụ nếu 2 biến cố A_1, A_2 độc lập thì

$\overline{A_1}, A_2$ độc lập,

$A_1, \overline{A_2}$ độc lập,

$\overline{A_1}, \overline{A_2}$ độc lập.

Ví dụ nếu 3 biến cố A_1, A_2, A_3 độc lập thì
$\overline{A_1}, A_2, A_3$ độc lập,
$A_1, \overline{A_2}, A_3$ độc lập,
$A_1, A_2, \overline{A_3}$ độc lập,
$\overline{A_1}, \overline{A_2}, A_3$ độc lập,
$\overline{A_1}, A_2, \overline{A_3}$ độc lập,
$A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ độc lập,
$\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ độc lập.

Ví dụ 4

Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Ký hiệu A_k là biến cố: "Người thứ k bắn trúng", $k = 1, 2$. Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2:

A: "Không ai bắn trúng";

B: "Cả hai đều bắn trúng";

C: "Có đúng một người bắn trúng";

D: "Có ít nhất một người bắn trúng".

Lời giải

Ta có:

$A = \overline{A_1}.\overline{A_2}$,

$B = A_1 A_2$,

Biến cố: "Chỉ có người thứ nhất bắn trúng" là $A_1\overline{A_2}$,

biến cố: "Chỉ có người thứ hai bắn trúng" là $\overline{A_1}A_2$.

Do đó

$$C = A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2.$$

$$D = A_1 \cup A_2,$$
$$D = A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2 \cup A_1A_2,$$

$$\begin{aligned} D &= \overline{A} \\ &= \overline{\overline{A_1}.\overline{A_2}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5

Có 3 bệnh nhân điều trị. Gọi A_k là biến cố: "Bệnh nhân thứ k phải cấp cứu", $k = 1, 2, 3$. Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2, A_3:

A: "Cả ba bệnh nhân đều phải cấp cứu";

B: "Chỉ có một bệnh nhân phải cấp cứu";

C: "Có ít nhất một bệnh nhân phải cấp cứu".

Lời giải

Ta có:

$A = A_1 A_2 A_3$,

Biến cố: "Chỉ có bệnh nhân thứ nhất phải cấp cứu" là $A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}$,

biến cố: "Chỉ có bệnh nhân thứ hai phải cấp cứu" là $\overline{A_1}.A_2.\overline{A_3}$,

biến cố: "Chỉ có bệnh nhân thứ ba phải cấp cứu" là $\overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3$.

Do đó

$$B = A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} \cup \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3} \cup \overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3.$$

$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$,
Biến cố: "Không bệnh nhân nào phải cấp cứu" là $\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}$,
đây là biến cố đối của biến cố C.
Do đó

$$C = \overline{\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}}$$

Bài 2: Xác suất của biến cố

1) Xác suất của biến cố

• Trong cuộc sống hằng ngày, ta cần đo khả năng xảy ra cao hay thấp của một biến cố (sự kiện).

• Xác suất của biến cố A là một số được ký hiệu là $\mathbb{P}(A)$, dùng để đo khả năng xảy ra cao hay thấp của biến cố A. Nếu $\mathbb{P}(A)$ càng lớn thì khả năng xảy ra của biến cố A càng cao và ngược lại nếu $\mathbb{P}(A)$ càng nhỏ thì khả năng xảy ra của biến cố A càng thấp.

- Ta có

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{N},$$

trong đó n_A là số các kết quả làm cho biến cố A xảy ra, N là số các kết quả của phép thử ngẫu nhiên. Ta giả thiết rằng N kết quả này có cùng khả năng xảy ra như nhau.

2) Các tính chất của xác suất

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB).$$

Khi A, B xung khắc thì $AB = \emptyset$, do đó

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

●

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(BC) + \mathbb{P}(ABC).$$

Khi A, B, C xung khắc từng đôi, ta có

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố xung khắc từng đôi thì

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).$$

- Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố độc lập thì

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n).$$

Ví dụ 1

Trên một bảng quảng cáo người ta mắc một hệ thống bóng đèn gồm 2 bóng mắc nối tiếp. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng đèn sau 6 giờ thắp sáng liên tục là 15%, việc hỏng bóng coi như độc lập. Tính xác suất để hệ thống bị hỏng.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Hệ thống bị hỏng", A_1 là biến cố: "Bóng đèn thứ nhất bị hỏng", A_2 là biến cố: "Bóng đèn thứ hai bị hỏng". Vì hệ thống gồm 2 bóng mắc nối tiếp nên $A = A_1 \cup A_2$. Ta thấy hai biến cố A_1 và A_2 độc lập và

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 0,15.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \\
&= 0,15 + 0,15 - 0,15 \cdot 0,15 \\
&= 0,2775.
\end{aligned}$$

Cách 2

Gọi A là biến cố: "Hệ thống bị hỏng", khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "Hệ thống không bị hỏng". Do đó $\overline{A} = \overline{A_1}.\overline{A_2}$.

Vì hai biến cố A_1, A_2 độc lập nên $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ độc lập.

Vậy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A}) &= \mathbb{P}(\overline{A_1}.\overline{A_2}) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2}) \\
&= (1 - \mathbb{P}(A_1))(1 - \mathbb{P}(A_2)) \\
&= (1 - 0,15)(1 - 0,15) \\
&= 0,7225.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - 0,7225 \\ &= 0,2775.\end{aligned}$$

Ví dụ 2

Một khoa điều trị có 3 bệnh nhân với khả năng cần cấp cứu trong mỗi ca trực của các bệnh nhân tương ứng là $50\%, 60\%, 80\%$. Tính xác suất xảy ra các tình huống sau đây:

a) Chỉ có bệnh nhân thứ hai phải cấp cứu.

b) Có ít nhất một bệnh nhân phải cấp cứu.

Lời giải

Gọi A_k là biến cố: "Bệnh nhân thứ k phải cấp cứu". Khi đó 3 biến cố A_1, A_2, A_3 là độc lập và

$$\mathbb{P}(A_1) = 0,5, \quad \mathbb{P}(A_2) = 0,6, \quad \mathbb{P}(A_3) = 0,8.$$

a) Biến cố: "Chỉ có bệnh nhân thứ hai phải cấp cứu" là
$A = \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3}$.
Vì 3 biến cố A_1, A_2, A_3 độc lập nên $\overline{A_1}$, A_2, $\overline{A_3}$ độc lập

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\overline{A_1}.A_2.\overline{A_3}) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(\overline{A_3}) \\
&= (1 - \mathbb{P}(A_1))\mathbb{P}(A_2)(1 - \mathbb{P}(A_3)) \\
&= (1 - 0,5) \cdot 0,6 \cdot (1 - 0,8) \\
&= 0,06.
\end{aligned}$$

b) Gọi B là biến cố: "Có ít nhất một bệnh nhân phải cấp cứu", khi đó $\overline{B}$ là biến cố: "Không có bệnh nhân nào phải cấp cứu". Do đó $\overline{B} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}$.

Vì A_1, A_2, A_3 là độc lập nên $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ độc lập.

Vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B}) &= \mathbb{P}(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2})\mathbb{P}(\overline{A_3}) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A_1))(1 - \mathbb{P}(A_2))(1 - \mathbb{P}(A_3)) \\ &= (1 - 0,5)(1 - 0,6)(1 - 0,8) \\ &= 0,04.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) \\ &= 1 - 0,04 \\ &= 0,96.\end{aligned}$$

Bài 3: Xác suất có điều kiện

1) Định nghĩa

• Ta tính xác suất của biến cố A khi một biến cố B đã xảy ra với xác suất dương. Ta gọi đó là xác suất có điều kiện của biến cố A khi biến cố B đã xảy ra và ký hiệu là $\mathbb{P}(A|B)$.

• Ta có

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}, \ \mathbb{P}(B) > 0.$$

2) Tính chất

- Với $\mathbb{P}(B) > 0$, ta có

$$\mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B).$$

- Với $\mathbb{P}(A) > 0$ và $\mathbb{P}(B) > 0$, ta có

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

3) Công thức nhân xác suất

- Với $\mathbb{P}(B) > 0$, ta có

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

- Với $\mathbb{P}(A) > 0$, ta có

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A).$$

- Khi các xác suất có điều kiện tồn tại, ta có

$$\mathbb{P}(A_1A_2\dots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Ví dụ

$$\mathbb{P}(A_1A_2A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2),$$

$$\mathbb{P}(A_1A_2A_3A_4) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\mathbb{P}(A_4|A_1A_2A_3).$$

Ví dụ 1

Cho hai biến cố A, B có xác suất $\mathbb{P}(A) = 0,4$, $\mathbb{P}(B) = 0,6$, $\mathbb{P}(AB) = 0,2$. Tính các xác suất sau:

a) $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$.

b) $\mathbb{P}(A\overline{B})$.

Lời giải

a) Theo tính chất của xác suất có điều kiện

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) &= 1 - \mathbb{P}(A|\overline{B}) \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}|A)}{\mathbb{P}(\overline{B})}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B}|A) &= 1 - \mathbb{P}(B|A)\\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(BA)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= 1 - \frac{0,2}{0,4}\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) &= 1 - \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}|A)}{\mathbb{P}(\overline{B})}\\ &= 1 - \frac{0,4 \cdot 0,5}{1 - 0,6}\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

b) Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\overline{B}) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}|A) \\ &= 0,4 \cdot 0,5 \\ &= 0,2.\end{aligned}$$

4) Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

• Hệ các biến cố $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ được gọi là đầy đủ nếu khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên thì có duy nhất một biến cố trong các biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_n$ xảy ra.

• Giả sử $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ là hệ đầy đủ các biến cố với $\mathbb{P}(B_k) > 0$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Khi đó ta có công thức xác suất đầy đủ

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + \cdots + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n).$$

Giả sử $\mathbb{P}(A) > 0$, ta có công thức Bayes

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}{\mathbb{P}(A)}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ví dụ 2

Có 10 lọ hóa chất trong đó có 4 lọ loại I, 6 lọ loại II. Nếu dùng lọ loại I thì kết quả tốt với xác suất $0,9$, nếu dùng lọ loại II thì kết quả tốt với xác suất $0,5$.

a) Lấy ngẫu nhiên 1 lọ hóa chất để sử dụng, tính xác suất để lọ hóa chất này có kết quả tốt.

b) Tính xác suất để lọ hóa chất tốt này thuộc loại I.

Lời giải

a) Gọi A là biến cố: "Lấy được lọ hóa chất có kết quả tốt", B_1 là biến cố: "Lấy được lọ hóa chất loại I", B_2 là biến cố: "Lấy được lọ hóa chất loại II". Ta thấy $\{B_1, B_2\}$ là hệ đầy đủ các biến cố và

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = 0,4, \ \mathbb{P}(B_2) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} = 0,6,$$

$$\mathbb{P}(A|B_1) = 0,9, \quad \mathbb{P}(A|B_2) = 0,5.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2)\\ &= 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,5\\ &= 0,66.\end{aligned}$$

b) Ta cần tính xác suất $\mathbb{P}(B_1|A)$, theo công thức Bayes

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{0,4\cdot 0,9}{0,66}\\ &= \frac{6}{11}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3

Có hai cái hộp, hộp thứ nhất có 3 bi trắng và 4 bi đen, hộp thứ hai có 4 bi trắng và 6 bi đen.

a) Từ mỗi hộp ta lấy ra ngẫu nhiên ra một viên bi, tính xác suất để lấy được hai viên bi trắng.

b) Sau khi lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một viên bi, các viên bi còn lại trong hai hộp được dồn hết về một hộp thứ ba. Từ hộp thứ ba lấy ngẫu nhiên ra một viên bi. Tính xác suất để viên bi lấy ra từ hộp thứ ba là bi đen.

Lời giải

a) Gọi A_1 là biến cố: "Lấy được bi trắng từ hộp thứ nhất", A_2 là biến cố: "Lấy được bi trắng từ hộp thứ hai".

Biến cố: "Lấy được hai viên bi trắng" là A_1A_2.

Vì hai biến cố A_1, A_2 là độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\\ &= \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{10}\\ &= \frac{12}{70}.\end{aligned}$$

b) Gọi A là biến cố: "Lấy được viên bi đen từ hộp thứ ba".
Gọi B_1 là biến cố: "Lấy được bi trắng từ hộp thứ nhất và bi trắng từ hộp thứ hai".
Gọi B_2 là biến cố: "Lấy được bi trắng từ hộp thứ nhất và bi đen từ hộp thứ hai".
Gọi B_3 là biến cố: "Lấy được bi đen từ hộp thứ nhất và bi trắng từ hộp thứ hai".
Gọi B_4 là biến cố: "Lấy được bi đen từ hộp thứ nhất và bi đen từ hộp thứ hai".
Khi đó hệ $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ là một hệ đầy đủ các biến cố.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1) &= \mathbb{P}(A_1A_2)\\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\\ &= \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{10}\\ &= \frac{12}{70},\end{aligned}$$

và

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \frac{C_{10}^1}{C_{15}^1} = \frac{10}{15}.$$

Vì A_1, A_2 độc lập nên $A_1, \overline{A_2}$ độc lập. Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(A_1\overline{A_2}) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2}) \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{18}{70},\end{aligned}$$

và

$$\mathbb{P}(A|B_2) = \frac{C_9^1}{C_{15}^1} = \frac{9}{15}.$$

Vì A_1, A_2 độc lập nên $\overline{A_1}, A_2$ độc lập. Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_3) &= \mathbb{P}(\overline{A_1}A_2)\\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2)\\ &= \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{10}\\ &= \frac{16}{70},\end{aligned}$$

và

$$\mathbb{P}(A|B_3) = \frac{C_9^1}{C_{15}^1} = \frac{9}{15}.$$

Vì A_1, A_2 độc lập nên $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ độc lập. Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_4) &= \mathbb{P}(\overline{A_1}.\overline{A_2}) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2}) \\ &= \frac{4}{7}\cdot\frac{6}{10} \\ &= \frac{24}{70},\end{aligned}$$

và

$$\mathbb{P}(A|B_4) = \frac{C_8^1}{C_{15}^1} = \frac{8}{15}.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) \\ &\qquad + \mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A|B_3) + \mathbb{P}(B_4)\mathbb{P}(A|B_4) \\ &= \frac{12}{70}\cdot\frac{10}{15} + \frac{18}{70}\cdot\frac{9}{15} + \frac{16}{70}\cdot\frac{9}{15} + \frac{24}{70}\cdot\frac{8}{15} \\ &= \frac{103}{175}.\end{aligned}$$

Bài 4: Dãy phép thử Bernoulli

1) Định nghĩa dãy phép thử Bernoulli

• Dãy n phép thử Bernoulli là một dãy gồm n phép thử thỏa mãn điều kiện xác suất để một biến cố A xảy ra trong mỗi phép thử đều bằng p và việc xảy ra hay không xảy ra biến cố A trong mỗi lần thực hiện phép thử là độc lập với nhau.

• Tung một đồng xu cân đối đồng chất n lần là một dãy n phép thử Bernoulli với A là biến cố: "Xuất hiện mặt sấp" và $p = \dfrac{1}{2}$.

2) Công thức Bernoulli

• Gọi $\mathbb{P}_n(k;p)$ là xác suất để biến cố A xuất hiện k lần trong dãy n phép thử Bernoulli, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Ta có công thức Bernoulli

$$\boxed{\mathbb{P}_n(k;p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n.}$$

3) Số lần xuất hiện có khả năng xảy ra lớn nhất của dãy phép thử Bernoulli

● Thực hiện dãy n phép thử Bernoulli. Biến cố A có thể xuất hiện 0 lần, 1 lần, 2 lần, . . ., và tối đa là n lần. Giả sử biến cố A xuất hiện k_0 lần là khả năng lớn nhất. Khi đó k_0 được gọi là số lần xuất hiện có khả năng xảy ra lớn nhất của dãy n phép thử Bernoulli.

Cách tìm k_0

a) Nếu $(n+1)p$ không là số nguyên thì $k_0 = [(n+1)p]$ (ở đây $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

b) Nếu $(n+1)p$ là số nguyên thì $k_0 = (n+1)p$ và $k_0 = (n+1)p - 1$ là các số lần xuất hiện có khả năng nhất.

Ví dụ 1

Chọn ngẫu nhiên lần lượt 15 sản phẩm từ một lô hàng có tỷ lệ phế phẩm là 20%.

a) Tính xác suất để trong 15 sản phẩm chọn được có ít nhất 1 phế phẩm.

b) Tìm số phế phẩm có khả năng chọn được cao nhất và tính xác suất đó.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên lần lượt 15 sản phẩm từ lô hàng là thực hiện 15 phép thử Bernoulli. Trong mỗi lần thực hiện phép thử thì xác suất chọn được phế phẩm là $0,2$.

a) Gọi A là biến cố: "Chọn được ít nhất 1 phế phẩm trong 15 sản phẩm", khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "Chọn được 0 phế phẩm trong 15 sản phẩm".

Do đó

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}_{15}(0; 0,2).$$

Xác suất để có ít nhất 1 phế phẩm

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{15}(0; 0,2) \\ &= 1 - C_{15}^{0}(0,2)^{0}(1-0,2)^{15-0} \\ &\approx 0,9648.\end{aligned}$$

b) Ta có $n = 15$, $p = 0,2$.

Do đó

$$(n+1)p = 3,2 \Longrightarrow [(n+1)p] = 3.$$

Vậy số phế phẩm có khả năng chọn được cao nhất là 3.

Xác suất cần tìm là

$$\mathbb{P}_{15}(3; 0,2) = C_{15}^{3}(0,2)^3(1-0,2)^{15-3} \approx 0,2501.$$

Ví dụ 2

Một người có hai chỗ ưa thích như nhau để câu cá. Xác suất câu được cá ở hai chỗ đó lần lượt là $0,2$ và $0,3$. Biết rằng ở mỗi chỗ người đó đã thả câu 4 lần. Tính xác suất để người đó chỉ câu được một con cá.

Lời giải

a) Gọi A là biến cố: "Người đó chỉ câu được một con cá",

B_1 là biến cố: "Người đó đi câu ở chỗ thứ nhất",

B_2 là biến cố: "Người đó đi câu ở chỗ thứ hai".

Vì hai chỗ câu cá là ưa thích như nhau nên

$$\mathbb{P}(B_1) = 0,5;\ \mathbb{P}(B_2) = 0,5.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B_1) &= \mathbb{P}_4(1; 0,2) \\ &= C_4^1(0,2)^1(1-0,2)^{4-1} \\ &= 0,4096, \\ \mathbb{P}(A|B_2) &= \mathbb{P}_4(1; 0,3) \\ &= C_4^1(0,3)^1(1-0,3)^{4-1} \\ &= 0,4116.\end{aligned}$$

Theo công thức xác suất đầy đủ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) \\ &= 0,5 \cdot 0,4096 + 0,5 \cdot 0,4116 \\ &= \end{aligned}$$