Chương 3 - Slide chương 3 xác suất thống kê

Xác suất thống kê (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông)

Bài 1: Vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều

1) Bảng phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều

- Vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) được gọi là rời rạc nếu tất cả các biến ngẫu nhiên thành phần X, Y là rời rạc.
- Bảng phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều (X, Y) (hay còn gọi là bảng phân bố xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X, Y) là

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$\dots$	$p(x_1, y_j)$	$\dots$	$p(x_1, y_m)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_2, y_j)$	$\dots$	$p(x_2, y_m)$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$p(x_i, y_1)$	$p(x_i, y_2)$	$\dots$	$p(x_i, y_j)$	$\dots$	$p(x_i, y_m)$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$\dots$	$p(x_n, y_j)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$

,

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \cdots + p(x_i, y_m),$$

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = p(x_1, y_j) + p(x_2, y_j) + \cdots + p(x_n, y_j),$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p(x_i, y_j),$$

trong đó

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các giá trị của biến ngẫu nhiên X,
- $y_1, y_2, \ldots, y_m$ là các giá trị của biến ngẫu nhiên Y,
- $p(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ là xác suất để X bằng x_i và Y bằng y_j.
- Ta có

$$\begin{cases} 0 \le p(x_i, y_j) \le 1, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, m, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1. \end{cases}$$

2) Bảng phân bố xác suất của X, Y

Biến ngẫu nhiên X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$	$\dots$	$\mathbb{P}(X = x_n)$

,

trong đó

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \cdots + p(x_i, y_m).$$

Tương tự biến ngẫu nhiên Y có bảng phân bố xác suất

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_m
$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}(Y = y_1)$	$\mathbb{P}(Y = y_2)$	$\dots$	$\mathbb{P}(Y = y_m)$

,

trong đó

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = p(x_1, y_j) + p(x_2, y_j) + \cdots + p(x_n, y_j).$$

• Nhắc lại rằng hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập khi và chỉ khi $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)$ với a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y.

Trong trường hợp này thì hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập khi và chỉ khi

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m$.

Do đó nếu tồn tại i, j nào đó mà $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \neq \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$ thì hai biến ngẫu nhiên X, Y không độc lập.

3) Hiệp phương sai và hệ số tương quan

• Hiệp phương sai (hay còn gọi là Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

trong đó $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p(x_i, y_j).$

- Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)}\sqrt{\mathbb{D}(Y)}}$$

khi $\mathbb{D}(X) > 0$ và $\mathbb{D}(Y) > 0$.

Nếu $\mathbb{D}(X) = 0$ hoặc $\mathbb{D}(Y) = 0$ thì ta quy ước $\rho(X,Y) = 0$.

- Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, ta có

$$\mathbb{D}(aX + bY) = a^2\mathbb{D}(X) + b^2\mathbb{D}(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y).$$

4) Phân bố có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

- Bảng phân bố xác suất của X với điều kiện $(Y = y_j)$

$X \mid Y = y_j$	x_1	$\ldots$	x_n
$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}(X = x_1 \mid Y = y_j)$	$\ldots$	$\mathbb{P}(X = x_n \mid Y = y_j)$

,

trong đó

$$\mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}.$$

- Kỳ vọng của X với điều kiện $(Y = y_j)$

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y_j] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j).$$

- Tương tự, bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $(X = x_i)$

$Y\|X = x_i$	y_1	$\dots$	y_m
$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}(Y = y_1\|X = x_i)$	$\dots$	$\mathbb{P}(Y = y_m\|X = x_i)$

,

trong đó

$$\mathbb{P}(Y = y_j|X = x_i) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)}.$$

- Kỳ vọng của Y với điều kiện $(X = x_i)$

$$\mathbb{E}[Y|X = x_i] = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{P}(Y = y_j|X = x_i).$$

Ví dụ 1

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất đồng thời

$X\backslash Y$	0	2	3	5
-2	$0,1$	$0,15$	$0,1$	0
1	$5k$	$3k$	$0,05$	$0,07$
4	0	$2k$	0	$0,13$

.

a) Tìm k. Tìm bảng phân bố xác suất của các biến ngẫu nhiên thành phần X và Y. Hai biến ngẫu nhiên X và Y có độc lập không?

b) Tính phương sai $\mathbb{D}(2X - 3Y)$.
c) Tìm bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $X = 1$, tính $\mathbb{E}[Y|X = 1]$.

Lời giải

a) Ta có $k \geq 0$ và

$$0,1 + 0,15 + 0,1 + 0 + 5k + 3k + 0,05 + 0,07 + 0 + 2k + 0 + 0,13 = 1.$$

Do đó

$$10k = 0,4 \Longleftrightarrow k = 0,04.$$

Ta có

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,1 + 0,15 + 0,1 + 0 = 0,35,$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = 5k + 3k + 0,05 + 0,07 = 0,44,$$
$$\mathbb{P}(X = 4) = 0 + 2k + 0 + 0,13 = 0,21.$$

Do đó bảng phân bố xác suất của X

X	-2	1	4
$\mathbb{P}$	$0,35$	$0,44$	$0,21$

.

Ta có

$$\mathbb{P}(Y=0)=0,1+5k+0=0,3,$$
$$\mathbb{P}(Y=2)=0,15+3k+2k=0,35,$$
$$\mathbb{P}(Y=3)=0,1+0,05+0=0,15,$$
$$\mathbb{P}(Y=5)=0+0,07+0,13=0,2.$$

Vậy Y có bảng phân bố xác suất

Y	0	2	3	5
$\mathbb{P}$	0,3	0,35	0,15	0,2

.

Ta thấy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=-2, Y=0) &= 0,1,\\ \mathbb{P}(X=-2) &= 0,35,\\ \mathbb{P}(Y=0) &= 0,3.\end{aligned}$$

Do đó

$$\mathbb{P}(X=-2, Y=0) \neq \mathbb{P}(X=-2)\mathbb{P}(Y=0).$$

Vậy hai biến ngẫu nhiên X và Y không độc lập.

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2)\times 0,35 + 1\times 0,44 + 4\times 0,21\\ &= 0,58.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2\times 0,35 + 1^2\times 0,44 + 4^2\times 0,21\\ &= 5,2.\end{aligned}$$

Phương sai của X

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\\ &= 5,2 - 0,58^2\\ &= 4,8636.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times 0,3 + 2 \times 0,35 + 3 \times 0,15 + 5 \times 0,2 = 2,15.$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = 0^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,35 + 3^2 \times 0,15 + 5^2 \times 0,2 = 7,75.$$

Phương sai của Y

$$\mathbb{D}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 7,75 - 2,15^2 = 3,1275.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) = (-2) \times 0 \times 0,1 + (-2) \times 2 \times 0,15 \\ + (-2) \times 3 \times 0,1 + (-2) \times 5 \times 0 \\ + 1 \times 0 \times 5k + 1 \times 2 \times 3k \\ + 1 \times 3 \times 0,05 + 1 \times 5 \times 0,07 \\ + 4 \times 0 \times 0 + 4 \times 2 \times 2k \\ + 4 \times 3 \times 0 + 4 \times 5 \times 0,13\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 - 0,6 - 0,6 + 0 + 0 + 6k \\
&\qquad + 0,15 + 0,35 + 0 + 16k + 0 + 2,6 \\
&= 22k + 1,9 \\
&= 22 \times 0,04 + 1,9 \\
&= 2,78.
\end{aligned}
$$

Hiệp phương sai

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= 2,78 - 0,58 \times 2,15\\ &= 1,533.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(2X-3Y) &= 4\mathbb{D}(X)+9\mathbb{D}(Y)-12\operatorname{cov}(X,Y)\\ &= 4\times 4,8636+9\times 3,1275\\ &\qquad\qquad -12\times 1,533\\ &= 29,2059.\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\mathbb{P}(Y=0|X=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1,Y=0)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{5k}{0,44} = \frac{0,2}{0,44} = \frac{20}{44},$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=2|X=1) &= \frac{\mathbb{P}(X=1,Y=2)}{\mathbb{P}(X=1)} \\
&= \frac{3k}{0,44} \\
&= \frac{0,12}{0,44} \\
&= \frac{12}{44},
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{P}(Y = 3|X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 3)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{0,05}{0,44} = \frac{5}{44},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 5|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 5)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{0,07}{0,44} \\ &= \frac{7}{44}.\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $X = 1$

$Y\|X = 1$	0	2	3	5
$\mathbb{P}$	$\frac{20}{44}$	$\frac{12}{44}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{7}{44}$

.

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X = 1] &= 0 \times \frac{20}{44} + 2 \times \frac{12}{44} + 3 \times \frac{5}{44} + 5 \times \frac{7}{44} \\ &= \frac{74}{44} \\ &= \frac{37}{22}.\end{aligned}$$

Bài 2: Vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

1) Hàm mật độ xác suất của vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

• Vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) được gọi là liên tục nếu tồn tại hàm $f(x, y) \geq 0$ sao cho

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{v} f(x, y)dxdy, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

trong đó $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ là hàm phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y).

- Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều (X, Y) hay còn được gọi là hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X, Y.
- Hàm $f(x, y)$ còn được ký hiệu là $f_{X,Y}(x, y)$.
- Hàm $F(x, y)$ còn được ký hiệu là $F_{X,Y}(x, y)$.

2) Một số tính chất

- $f(x, y) \geq 0$ và $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{P}((X, Y) \in D) = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy$ với $D \subset \mathbb{R}^2$.
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$ hay $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = 1$.

- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

- Các hàm mật độ xác suất có điều kiện

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

- Hai biến ngẫu nhiên X, Y là độc lập khi và chỉ khi

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ví dụ 1

Cho vectơ ngẫu nhiên 2 chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) & \text{nếu } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

a) Tính $\mathbb{P}\left(0 < Y \le X \le \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Lời giải

a) Đặt

$$D = \left\{(x, y) : 0 < y \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Khi đó

$$\mathbb{P}\left(0 < Y \le X \le \frac{\pi}{2}\right) = \mathbb{P}((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{x} f(x,y)dy \Big) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{x} \frac{1}{2}\sin(x+y)dy \Big) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\Big(-\cos(x+y) \Big) \Big|_{y=0}^{y=x} \Big] dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 2x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

b) Nếu $x < 0$ hoặc $x > \frac{\pi}{2}$ thì $f(x, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, do đó

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0dy \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Nếu $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, ta có

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(x+y)dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0dy$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{2}\cos(x+y) \right] \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} + 0$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos x$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x).$$

Vậy hàm mật độ xác suất của X

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x) & \text{khi } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{khi } x \notin \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Ví dụ 2

Cho vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ xác suất

$$f(x,y) = \frac{ke^{-(x-1)^2}}{y^2+1} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm hàm mật độ xác suất của các biến ngẫu nhiên X, Y.

c) Chứng minh X và Y là độc lập.

d) Tìm hàm mật độ xác suất có điều kiện $f_{X|Y}(x|y)$.

Lời giải

a) Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{-(x-1)^2}}{y^2+1}dxdy$$

$$= k\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2}dx\Big)dy$$

$$= k\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2}dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}dy\Big).$$

Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan y \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \pi.$$

Vì $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ nên theo tính chất của hàm mật độ xác suất

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

Chọn $\mu = 1$ và $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ta được

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Do đó

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = k\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2}dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}dy\Big)$$
$$= k\sqrt{\pi}\pi$$
$$= k\pi\sqrt{\pi}.$$

Vì $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ nên $k = \dfrac{1}{\pi\sqrt{\pi}}$.

b) Hàm mật độ xác suất của X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{-(x-1)^2}}{y^2+1}dy$$

$$= ke^{-(x-1)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ }}e^{-(x-1)^2} \cdot \pi = \frac{1}{\sqrt{\ }}e^{-(x-1)^2}.$$

Hàm mật độ xác suất của Y

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{-(x-1)^2}}{y^2+1}dx \\
&= \frac{k}{y^2+1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2}dx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}(y^2+1)}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{\pi(y^2+1)}.
\end{aligned}
$$

Hàm mật độ xác suất của Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{-(x-1)^2}}{y^2+1}dx$$
$$= \frac{k}{y^2+1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2}dx$$

c) Ta có

$$
\begin{aligned}
f_X(x)f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2} \cdot \frac{1}{\pi(y^2+1)} \\
&= \frac{e^{-(x-1)^2}}{\pi\sqrt{\pi}(y^2+1)} \\
&= \frac{ke^{-(x-1)^2}}{y^2+1} \\
&= f(x,y).
\end{aligned}
$$

Do đó $f_X(x)f_Y(y) = f(x,y)$. Vậy X, Y độc lập.

d) Ta có

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{\dfrac{ke^{-(x-1)^2}}{y^2+1}}{\dfrac{1}{\pi(y^2+1)}} \\
&= k\pi e^{-(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1)^2}.
\end{aligned}
$$