



HUST

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

ONE LOVE. ONE FUTURE.



**ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI**
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Phương trình truyền nhiệt 2D Heat Equation

Học phần: Tính toán khoa học - IT3280
GVHD: TS. Vũ Văn Thiệu

Nhóm 18 :	Phạm Việt Anh	20225599
	Mạch Ngọc Đức Anh	20225595
	Mai Minh Quân	20225661
	Vũ Minh Quân	20225910
	Đỗ Thanh Sơn	20225665
	Nguyễn Đức Hậu	20225834

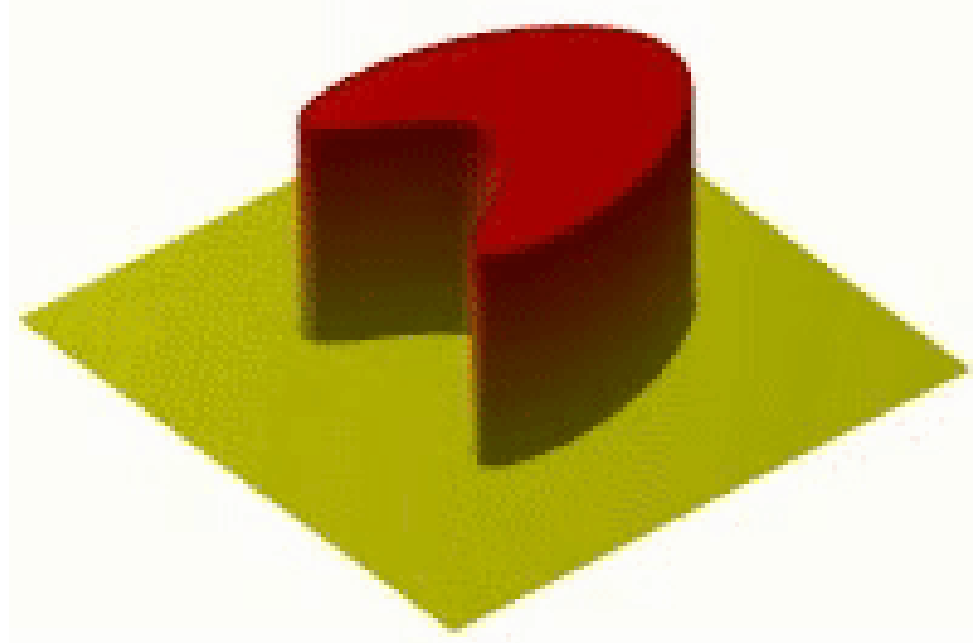
ONE LOVE. ONE FUTURE.

1. Cơ sở lý thuyết
2. Phát biểu và phương trình
3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D
4. Ứng dụng vào thực tế
5. Mô tả thuật toán
6. Demo kết quả
7. Kết luận

1. Cơ sở lý thuyết

Định nghĩa:

- Phương trình nhiệt là một *phương trình đạo hàm riêng* (*parabol nguyên mẫu*) mô tả quá trình truyền nhiệt trong các vật thể rắn, lỏng hoặc khí
- Giải pháp của phương trình nhiệt đôi khi được gọi là hàm calo



1. Cơ sở lý thuyết

Nguồn gốc:

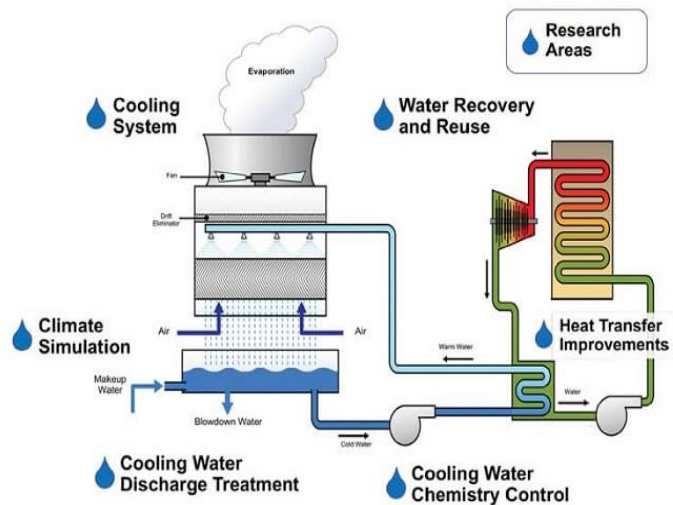
- Lý thuyết về phương trình nhiệt được Joseph Fourier phát triển lần đầu tiên vào năm 1822 nhằm mục đích mô hình hóa cách thức một đại lượng như nhiệt khuếch tán qua một vùng nhất định hoặc khuếch tán chất tan trong một dung dịch.



Joseph Fourier (1768-1830)

1. Cơ sở lý thuyết

Ứng dụng của phương trình truyền nhiệt trong thực tế



Kỹ thuật nhiệt và truyền nhiệt

Quá trình luyện kim và sản xuất

2. Phát biểu phương trình

Trong toán học, nếu cho một tập con mở U của R^n và một khoảng con I của R , người ta nói rằng hàm $u : U \times I \rightarrow R$ là nghiệm của **phương trình nhiệt** nếu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

trong đó:

- (x_1, \dots, x_n, t) biểu thị một điểm tổng quát của miền xác định
- t là thời gian
- x_1, \dots, x_n là "các biến không gian"

2. Phát biểu phương trình

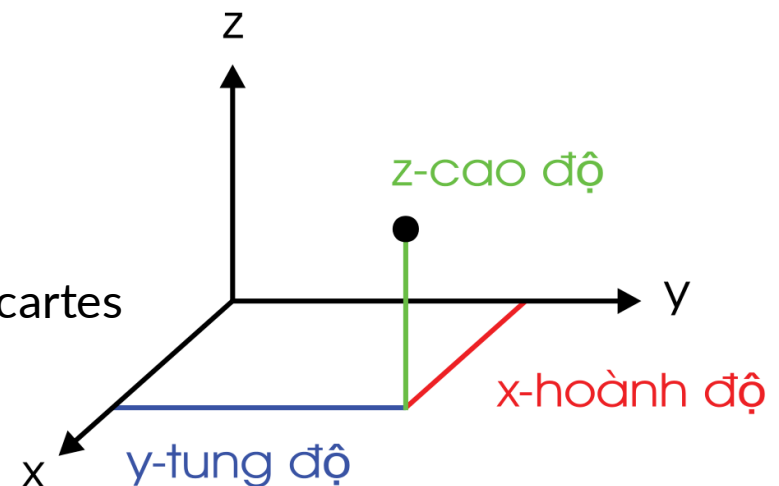
- Phương trình nhiệt được viết gọn như sau: $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
- Cố định hệ tọa độ Descartes xét trường hợp cụ thể hàm $u(x, y, z, t)$. Khi đó người ta nói rằng u là nghiệm của phương trình nhiệt nếu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Trong đó:

α ($\alpha > 0$) là độ khuếch tán nhiệt của vật liệu

x, y, z là 3 biến không gian trong hệ tọa độ Descartes



Hệ tọa độ Descartes

3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

Phương trình nhiệt (Hệ phương trình đạo hàm riêng – Partial Difference Equation):

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \\ \nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{cases}$$

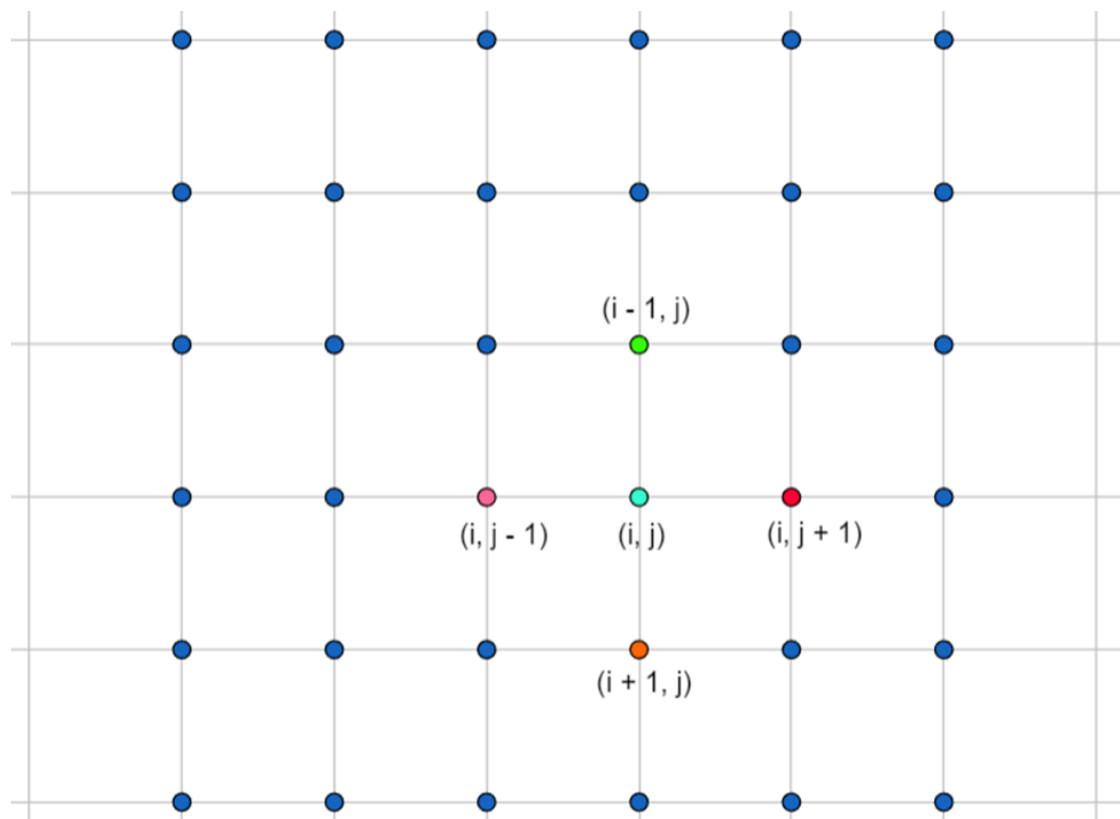
Trong đó:

- C : nhiệt độ
- $\frac{C}{\partial t}$: đạo hàm nhiệt độ theo thời gian
- $\nabla^2 C$: đạo hàm bậc 2 của nhiệt độ theo không gian
- D : hệ số truyền nhiệt (phụ thuộc vào vật liệu ta đang khảo sát)

3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

Bài toán PDE, ta làm qua 2 bước:

- **Bước 1:** tính đạo hàm theo không gian
- **Bước 2:** giải phương trình vi phân



3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

Công thức giải:

- Khởi tạo giá trị ban đầu: $C_{i,j}^0$

- Tại bước $n + 1$: $\nabla^2 C_{i,j}^{tn} = FD_{i,j}^{tn} = \frac{C_{i+1,j}^{tn} + C_{i-1,j}^{tn} + C_{i,j+1}^{tn} + C_{i,j-1}^{tn} - 4C_{i,j}^{tn}}{dx^2}$

Công thức Euler thuận: $C_{i,j}^{tn+1} = U_{i,j}^{tn} + dt * D * FD_{i,j}^{tn}$

3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

Giải thích công thức:

Xét khai triển Taylor của hàm f tại lân cận x :

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots (1)$$

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h - f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots (2)$$

➤ Từ (1) và (2) ta có công thức tính gần đúng đạo hàm bậc 2:

$$f''(x) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$$

➤ Từ đó ta có thể xây dựng công thức tính đạo hàm riêng cho hàm (x, y) như sau:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{f(x, y + h) - f(x, y - h)}{2h}$$

3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

➤ Vì vậy, ta có:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1,j}^{tn} - 2C_{i,j}^{tn} + C_{i-1,j}^{tn}}{dx^2}$$

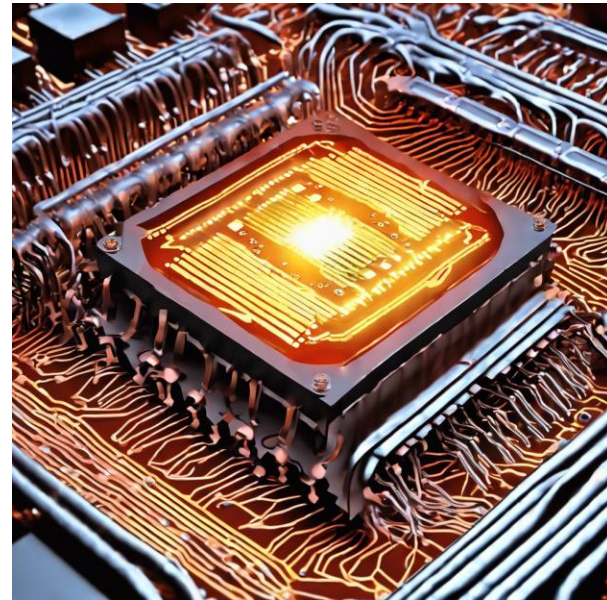
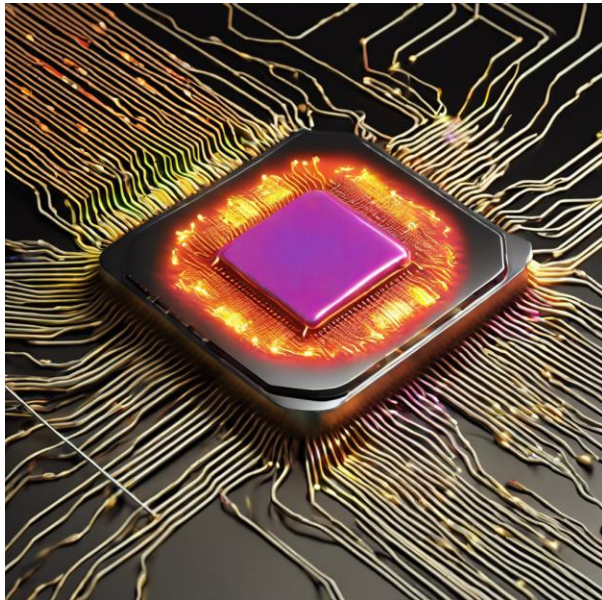
$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C_{i,j+1}^{tn} - 2C_{i,j}^{tn} + C_{i,j-1}^{tn}}{dy^2}$$

Chọn $dx = dy$, ta có công thức:

$$\nabla^2 C_{i,j}^{tn} = FD_{i,j}^{tn} = \frac{C_{i+1,j}^{tn} + C_{i-1,j}^{tn} + C_{i,j+1}^{tn} + C_{i,j-1}^{tn} - 4C_{i,j}^{tn}}{dx^2}$$

4. Bài toán thực tế

- Trong thực tế, CPU của máy tính thường được thiết kế có dạng hình vuông và được chế tạo từ các chất bán dẫn.
- CPU khi hoạt động sẽ sinh ra nhiệt do quá trình xử lý các lệnh. Việc truyền nhiệt của CPU là quá trình quan trọng để giữ cho CPU hoạt động ổn định và tránh quá nhiệt.



5. Mô tả thuật toán

Bước 1: Khởi tạo các giá trị cho chương trình

```
%Tham số ban đầu
X=50;          % Số điểm lưới theo chiều X
Y=50;          % Số điểm lưới theo chiều Y
D=0.01;        % Hệ số khuếch tán nhiệt
dx=0.01;       % Kích thước bước lưới không gian
dt=0.001;      % Kích thước bước thời gian
T=0.5;         % Thời gian mô phỏng
t0=0;          % Thời gian bắt đầu
X_toanhiet = 5; % Kích thước nguồn nhiệt theo chiều X
Y_toanhiet = 5; % Kích thước nguồn nhiệt theo chiều Y
%Khởi tạo giá trị ban đầu
C = 25 * ones(X, Y);
figure;
image(C, 'CDataMapping', 'scaled');
colorbar;
title('Phân bố nhiệt độ ban đầu');
pause(10);
```

5. Mô tả thuật toán

Bước 2: Rời rạc hóa theo không gian

%Buoc 1: Tính đạo hàm bậc 2 của nhiệt độ theo không gian

t=t0;

while(t<T)

for i=1:X

for j=1:Y

%Kiểm tra điều kiện biên

if(i == 1)

u = 25;

else

u = C(i-1,j);

end

if(j == 1)

l = 25;

else

l = C(i,j-1);

end

if (i == X)

d = 25;

else

d = C(i+1,j);

end

if(j == Y)

r = 25;

else

r = C(i,j+1);

end

c = C(i,j); %Nhiệt độ điểm đang khảo sát

deltaC2(i,j) = (d+u+r+l-4*c)/(dx*dx);

end

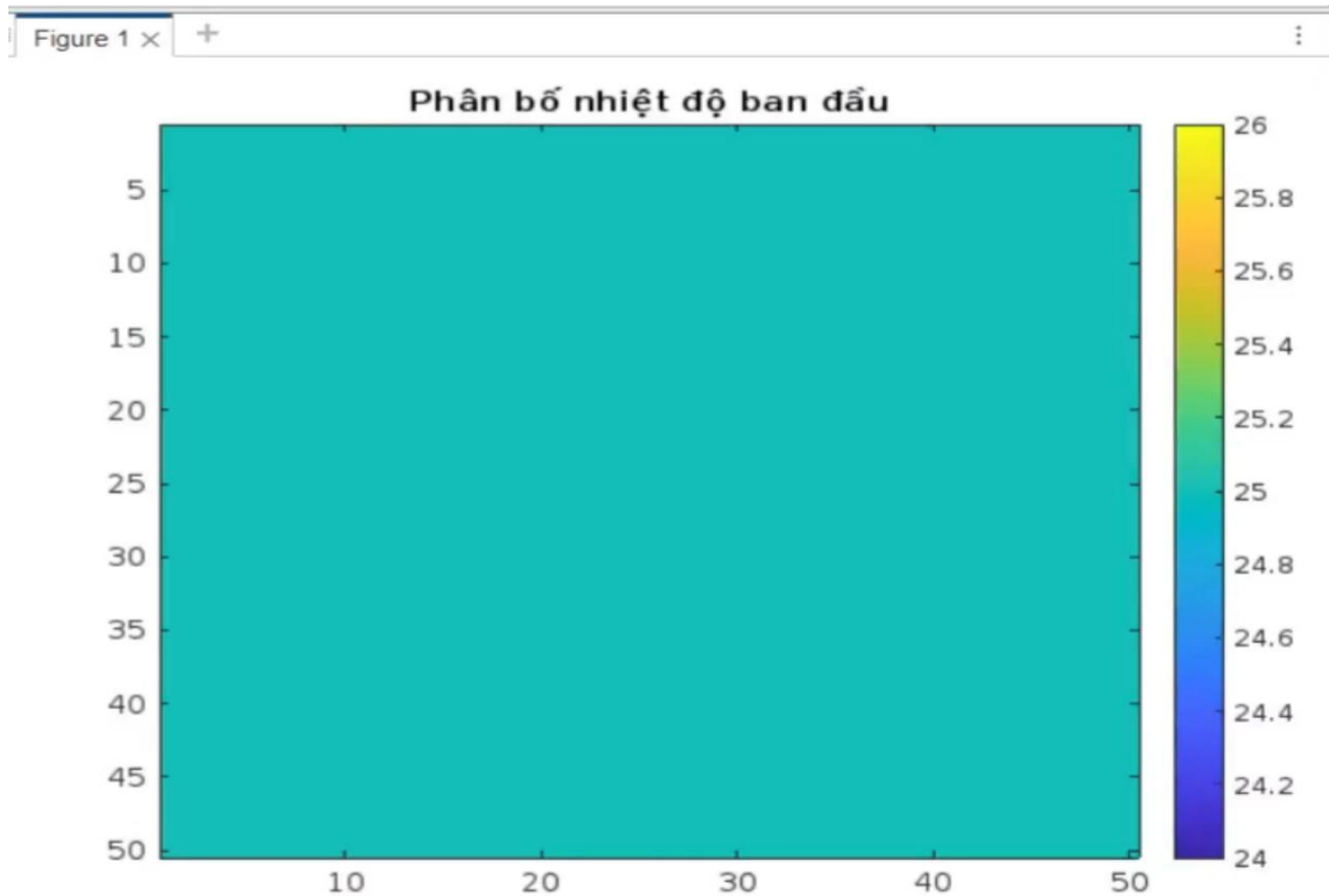
end

5. Mô tả thuật toán

Bước 3: Tích hợp theo thời gian

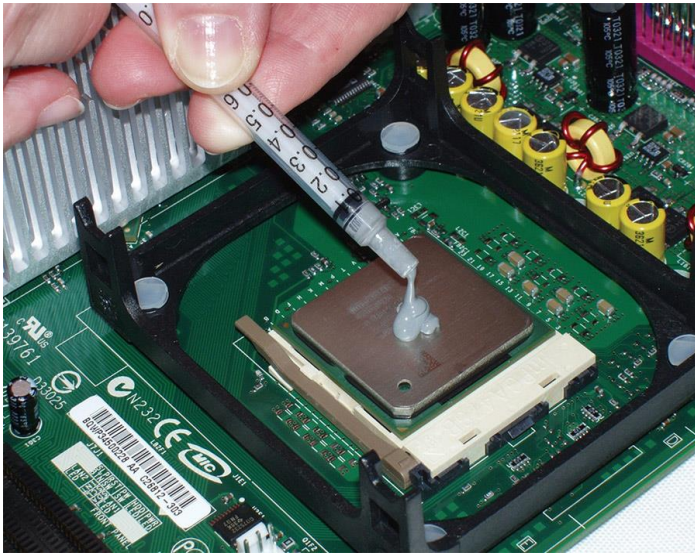
```
%Bước 2: Tính đạo hàm theo thời gian
a=X/2-X_toanhiet/2;
b=X/2+X_toanhiet/2;
e=Y/2-Y_toanhiet/2;
f= Y/2+Y_toanhiet/2;
for i = 1: X
    for j = 1:Y
        if(i >= a) && (i <= b) && (j >= e) && (j <= f)
            Ct(i,j) = 80;
        else
            Ct(i,j) = C(i,j) + dt*D*deltaC2(i,j);
        end
    end
end
%Cập nhật lại theo thời gian
for i = 1:X
    for j = 1:Y
        C(i,j)=Ct(i,j);
    end
end
t=t+dt;
%Mô phỏng
```

6. Demo kết quả



7. Kết luận

1. Mô hình hóa phân bố nhiệt độ
2. Thiết kế hệ thống làm mát
3. Kiểm tra và đánh giá hiệu năng tản nhiệt
4. Tối ưu hóa bố trí linh kiện
5. Phát triển các vật liệu tản nhiệt mới



A large, stylized graphic on the left side of the slide. It consists of a red background with a circular pattern of white dots of varying sizes, creating a sense of depth and movement. The word "HUST" is written in white, bold, sans-serif capital letters in the center of this graphic.

HUST

THANK YOU !