Eksamen høsten 2019 – Løsninger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Hjelpemidler: vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Oppgave 1

a

$$f(x) = x^4 - 2x + \ln x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2 + \frac{1}{x}$$

b

$$g(x) = x^7 \cdot \mathrm{e}^x$$

Vi bruker produktregelen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^7 & u' = 7x^6 \\ v = \mathrm{e}^x & v' = \mathrm{e}^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 7x^6 \cdot \mathrm{e}^x + x^7 \cdot \mathrm{e}^x \\ &= x^6 \cdot \mathrm{e}^x \left(7 + x\right) \end{aligned}$$

c

$$h(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2}$$

Vi bruker brøkregelen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln(2x) & u' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} \\ v = x^2 & v' = 2x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(2x) \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} \\ &= \frac{x - 2x \cdot \ln(2x)}{x^4} = \frac{x\left(1 - 2 \cdot \ln(2x)\right)}{x^4} = \frac{1 - 2 \cdot \ln(2x)}{x^3} \end{aligned}$$

Oppgave 2

$$4\ln\left(a\cdot b^3\right)-3\ln\left(a\cdot b^2\right)-\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$=4\left(\ln a+\ln b^3\right)-3\left(\ln a+\ln b^2\right)-\left(\ln a-\ln b\right)$$
$$=4\left(\ln a+3\ln b\right)-3\left(\ln a+2\ln b\right)-\ln a+\ln b$$
$$=4\ln a+12\ln b-3\ln a-6\ln b-\ln a+\ln b$$
$$=7\ln b=\ln b^7$$

Oppgave 3

$P(x)=x^3+6x^2+k\cdot x-30$

a Vi regner ut $P(2)$. For at divisjonen skal gå opp, må $P(2)=0$.

$$P(2)=2^3+6\cdot 2^2+k\cdot 2-30=2k+2$$
$$2k+2=0$$
$$k=-1$$

For at divisjonen skal gå opp, må $k=-1$.

b Vi utfører polynomdivisjonen:

$$(x^3+6x^2-x-30):(x-2)=x^2+8x+15$$
$$\underline{x^3-2x^2}$$
$$8x^2-x$$
$$\underline{8x^2-16x}$$
$$15x-30$$
$$\underline{15x-30}$$
$$0$$

Vi ser at divisjonen går opp.

Vi har $P(x)=(x^2+8x+15)(x-2)$ og bruker nullpunktsmetoden for å faktorisere andregradsuttrykket:

$$x^2+8x+15=0$$
$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{-8\pm\sqrt{4}}{2}$$
$$x=\frac{-8+2}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \quad \vee \quad x=\frac{-8-2}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

Dermed kan $f(x)$ faktoriseres i lineære faktorer:

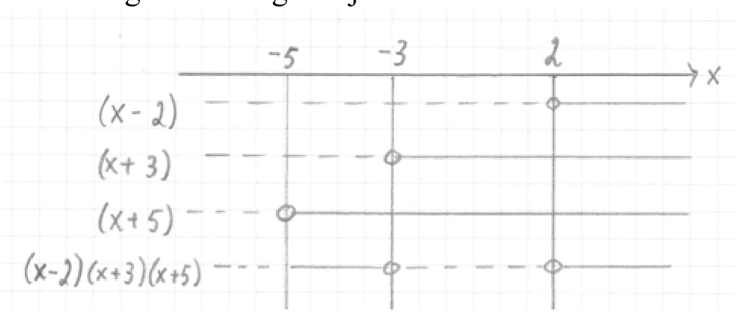
$P(x)=(x-2)(x+3)(x+5)$

$$x^3 + 6x^2 \le x + 30$$

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 \le 0$$

c $(x-2)(x+3)(x+5) \le 0$

Vi lager en fortegnslinje:



Løsningsmengden blir da

$L = \langle \leftarrow , -5] \cup [-3 , 2]$

Oppgave 4

a $\overrightarrow{AB} = [2-(-2) , -1-1] = [4 , -2]$

$\overrightarrow{BC} = [4-2 , 2-(-1)] = [2 , 3]$

b $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [4 , -2] \cdot [2 , 3] = 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 2$

Skalarproduktet er ikke null og $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$ er ikke ortogonale.

c $\overrightarrow{AD} = [t-(-2) , 3-1] = [t+2 , 2]$

Vi setter opp:

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ gir

$$[4 , -2] \cdot [t+2 , 2] = 0$$

$$4(t+2) - 2 \cdot 2 = 0$$

$$4t + 8 - 4 = 0$$

$$t = -1$$

d $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$

$[4 , -2] = k \cdot [t-4 , 1]$

Det gir

$1: \quad 4 = k(t-4)$

$2: -2 = k$

$k = -2$ innsatt i 1 gir :

$4 = -2(t-4)$

$4 = -2t + 8$

$t = 2$

$$\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$[t+2\,,\,2] = k \cdot [2\,,\,3]$$

Det gir

$1: \quad t + 2 = 2k$

$2: 2 = 3k \quad \text{som gir } k = \dfrac{2}{3}$

$k = \dfrac{2}{3}$ innsatt i 1 gir :

$$t + 2 = 2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$t = -\frac{2}{3}$$

Oppgave 5

a Antall komiteer som det er mulig å sette sammen:

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 350$$

Antall komiteer det er mulig å sette sammen er 350.

b Både Anne og Jens skal være med i komiteen.
Vi bruker hypergeometrisk sannsynlig. Det gir

$$P(\text{både Anne og Jens blir med i komiteen}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}}{350} = \frac{15 \cdot 4}{350} = \frac{6}{35}$$

Sannsynligheten er $\dfrac{6}{35}$ for at både Anne og Jens blir med i komiteen.

c Bare en av dem skal være med i komiteen. Det gir

$$\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{1}}{350} = \frac{15 \cdot 6 + 20 \cdot 4}{350} = \frac{170}{350} = \frac{17}{35}$$

Sannsynligheten er $\dfrac{17}{35}$ for at bare en av dem blir med i komiteen.

Oppgave 6

a Vi beregner arealet av kvartsirkelen: $\dfrac{\pi \cdot r^2}{4} = \dfrac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$

Likningen for sirkelen er gitt ved:

$x^2 + y^2 = 2^2$

Som gir :

$y^2 = 4 - x^2$

$y = \sqrt{4 - x^2} \quad y > 0$

Vi setter $AB = y$

Arealet av rektanglet $OABC$ er da gitt ved

$x \cdot y = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

Arealet av det fargelagte området er da gitt ved:

$F(x) = \pi - x\sqrt{4 - x^2}$

b

$$F'(x) = 0 - \left(1 \cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{1 \cdot (-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}}\right) = -\left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\right)$$

$$F'(x) = -\left(\frac{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\right) = -\left(\frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\right)$$

$$F'(x) = \frac{2x^2 - 4}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Vi setter $F'(x) = 0$

Det gir

$$\frac{2x^2 - 4}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

Vi har $0 \le x \le 2$

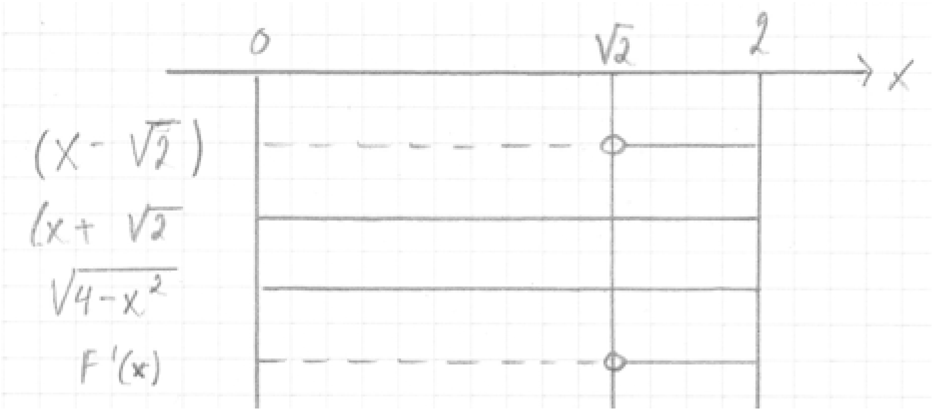
Da er $\sqrt{4 - x^2} \ge 0$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$$

Vi bruker fortegnslinje.



$$F\left(\sqrt{2}\right)=\pi-\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\pi-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\pi-2$$

Det minste arealet det fargelagte området kan ha er $\pi-2$ når $x=\sqrt{2}$.

Oppgave 7

a I $\triangle CDE$ er $CD=DE=r$. Da er $\triangle CDE$ likebeint.

Da er

$\angle ECD=\angle CED$

$\angle DCB=\angle DEB=90°$

Det gir

$\angle ECB=\angle CEB$

Dette viser at $\triangle CEB$ er likebeint og da er $BC=BE=a$.

Da er $EA=BA-BE=c-a.$

b $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ fordi

$\angle A\ er\ felles$

$\angle ACB=\angle AED=90°$

Da er $\angle ABC=\angle ADE$

Trekantene har like store vinkler og er da formlike.

Det gir

$$\frac{DE}{BC}=\frac{EA}{AC}$$

$$\frac{r}{a}=\frac{c-a}{b}$$

$$r=\frac{a\cdot(c-a)}{b}$$

c Vi ser at arealet av $\triangle AFB$ er summen av arealene av trekantene *ABD, AFD* og *BDF*.

Det gir

$$A_{\triangle ABF}=A_{\triangle ABD}+A_{\triangle AFD}+A_{\triangle BDF}$$

$$\frac{2a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}+\frac{2a\cdot r}{2}$$

$$2a\cdot b=2c\cdot r+2a\cdot r$$

$$a\cdot b=(a+c)\cdot r$$

d Vi har da

$$a\cdot b=(a+c)\cdot r \quad \text{og} \quad r=\frac{a\cdot(c-a)}{b}$$

Det gir

$$a \cdot b = \frac{(a+c)\cdot a \cdot (c-a)}{b}$$

Vi multipliserer med b og forkorter med a.

Det gir

$$b^2 = (a+c)\cdot(c-a)$$

$$b^2 = ac - a^2 + c^2 - ac$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Da har vi vist Pytagoras setning.

DEL 2
Med hjelpemidler

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 1

a Vi definerer hendelsene

$S =$ søppelpost (spam)

$\overline{S} =$ ikke søppelpost (spam)

$O =$ ord fra en liste

$\overline{O} =$ ikke ord fra en liste

Vi har $P(S) = 0{,}80$, $P(O|S) = 0{,}85$ *og* $P(O|\overline{S}) = 0{,}03$

Da kan vi sette opp

$$P(O) = P(S)\cdot P(O|S) + P(\overline{S})\cdot P(O|\overline{S}) = 0{,}80\cdot 0{,}85 + 0{,}20\cdot 0{,}03 = 0{,}686$$

Vi ser at sannsynligheten er 68,6 % for at en tilfeldig epost inneholder ett eller flere ord fra listen.

b Bayes setning gir

$$P(S|O) = \frac{P(S)\cdot P(O|S)}{P(O)} = \frac{0.80\cdot 0{,}85}{0{,}686} = 0{,}991$$

Sannsynligheten er 99,1 % for at en tilfeldig epost er søppelpost når den inneholder ett eller flere ord fra listen.

c Bayes setning gir

$$P(S|\overline{O}) = \frac{P(S)\cdot P(\overline{O}|S)}{P(\overline{O})} = \frac{0.80\cdot 0{,}15}{(1-0{,}686)} = 0{,}382$$

Sannsynligheten er 38,2 % for at en tilfeldig epost er søppelpost selv om den ikke inneholder ord fra listen.

Oppgave 2

$f(x) = -x^3 + x^2 + k\cdot x + 2$

a $f'(x) = -3x^2 + 2x + k$

$f'(x) = 0$

$-3x^2 + 2x + k = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-3)\cdot k}}{2\cdot(-3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12k}}{-6}$$

Dersom grafen til f skal ha både et toppunkt og et bunnpunkt, må

$$4+12k>0$$

$$k>-\frac{1}{3}$$

Vi kan også bruke CAS.

CAS

1	f(x):=-x³+x²+k*x+2 $\rightarrow\ f(x) := -x^3+x^2+k\,x+2$
2	f'(x)=0 Løs: $\left\{x=\frac{\sqrt{3k+1}+1}{3},\ x=\frac{-\sqrt{3k+1}+1}{3}\right\}$

$$3k+1>0$$

$$k>-\frac{1}{3}$$

b Grafen til f har toppunkt når $f'(x)=0$.

Vi setter $x=2$ inn i uttrykket for den deriverte, $f'(2)=0$.Det gir $k=8$.

CAS

1	f(x):=-x³+x²+k*x+2 $\rightarrow\ f(x) := -x^3+x^2+k\,x+2$
2	f'(x) $\rightarrow\ -3x^2+k+2x$
3	f'(2)=0 Løs: $\{k=8\}$

Vi bruker $k=8$ og får da

$$f(x)=-x^3+x^2+8x+2$$

CAS

1	f(x):=-x³+x²+8x+2 $\rightarrow\ f(x) := -x^3 + x^2 + 8x + 2$
2	f'(x)=0 $\rightarrow\ -3x^2 + 2x + 8 = 0$
3	\$2 Løs: $\left\{x = -\frac{4}{3}, x = 2\right\}$
4	f'(1) $\rightarrow\ 7$
5	f'(3) $\rightarrow\ -13$
6	f'(-2) $\rightarrow\ -8$
7	f(0) $\rightarrow\ 2$
8	f(2) $\rightarrow\ 14$
9	f(-4/3) $\rightarrow\ -\frac{122}{27}$

Vi ser at toppunktet har koordinatene $(2\,,14)$.

Vi ser at $x=-\dfrac{4}{3}$ gir bunnpunktet. Koordinatene til bunnpunktet er $\left(-\dfrac{4}{3}\,,-\dfrac{122}{27}\right)$.

c

11	Vendepunkt(f) $\rightarrow \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{9k+56}{27}\right)\right\}$
12	f'(x)=2 $\rightarrow -3x^2+k+2x=2$
13	f''(x)=0 $\rightarrow -6x+2=0$
14	Løs({$12, $13},{x, k}) $\rightarrow \left\{\left\{x=\frac{1}{3}, k=\frac{5}{3}\right\}\right\}$

Vendepunktet har koordinatene $\left(\frac{1}{3}, \frac{9k+56}{27}\right)$.

Det største momentane vekstfarten til f er 2 når $k=\frac{5}{3}$.

Oppgave 3

$\vec{r_1}(t)=\left[17t\,,-5t^2+29t+20\right]$

$\vec{r_2}(t)=\left[24t\,,-5t^2+25t+20\right]$

a

CAS

1. r_1(t):=Vektor[17t,-5t²+29t+20]

   $\rightarrow\ r_1(t) := \begin{pmatrix} 17\,t \\ -5\,t^2 + 29\,t + 20 \end{pmatrix}$

2. r_2(t):=Vektor[24t,-5t²+25t+20]

   $\rightarrow\ r_2(t) := \begin{pmatrix} 24\,t \\ -5\,t^2 + 25\,t + 20 \end{pmatrix}$

3. ry_1(t):=-5t²+29t+20

   $\rightarrow\ ry_1(t) := -5\,t^2 + 29\,t + 20$

4. ry_1(t)=0

   NLøs: $\{t = -0.62, t = 6.42\}$

5. ry_2(t):=-5t²+25t+20

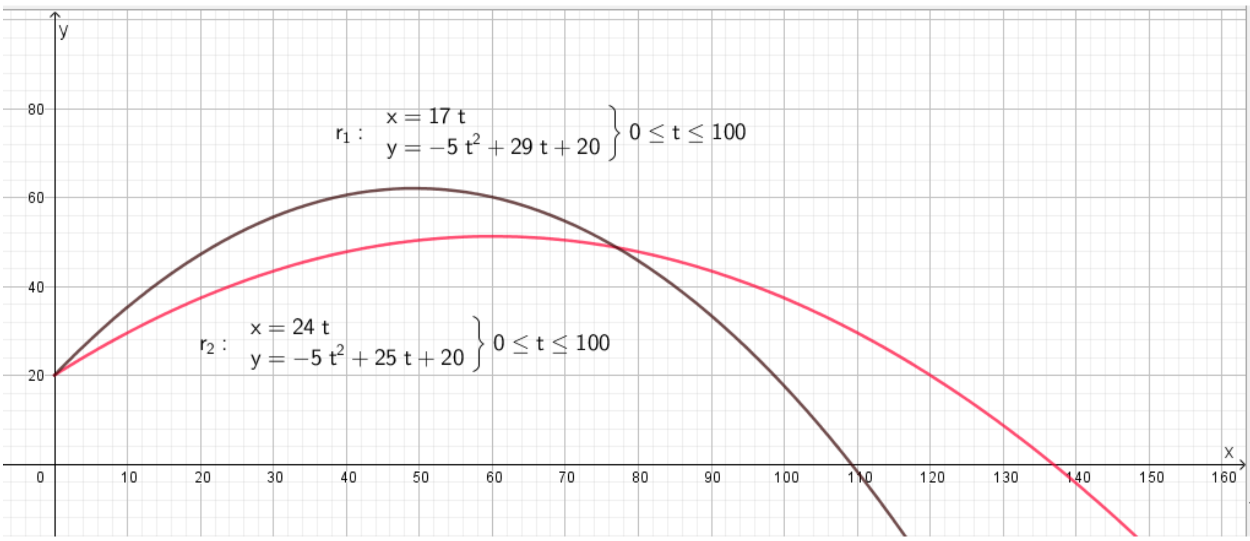
   $\rightarrow\ ry_2(t) := -5\,t^2 + 25\,t + 20$

6. ry_2

   NLøs: $\{t = -0.7, t = 5.7\}$

Vi ser at ball 1 lander etter 6,4 sekunder og ball 2 lander ette 5,7 sekunder.
(Vi kan ikke bruke de negative løsningene)

b Vi skriver inn vektorfunksjonene i GeoGebra.



c $\vec{v}_1(t) = \vec{r}_1\,'(t) = [17\,,-10t+29]$

$\vec{v}_2(t) = \vec{r}_2\,'(t) = [24\,,-10t+25]$

CAS

1	v_1(t):=Vektor[17,-10t+29] $\rightarrow\ \mathbf{v_1(t)} := \begin{pmatrix} 17 \\ -10\,t+29 \end{pmatrix}$
2	abs(v_1(0)) $\approx\ 33.62$
3	v_2(t):=Vektor[24,-10t+25] $\approx\ \mathbf{v_2(t)} := \begin{pmatrix} 24 \\ -10\,t+25 \end{pmatrix}$
4	Abs(v_2(0)) $\approx\ 34.66$

Banefarten til ball 1 idet de forlater taker er 33,6 m/s og til ball 2 34,7 m/s.

d Når ballene har samme fartsretning, er de parallelle.

Da kan vi sette opp:

$k \cdot v_1(t) = v_2(t)$

5	k*v_1(t)=v_2(t) Løs: $\left\{\left\{k = \frac{24}{17}, t = \frac{271}{70}\right\}\right\}$
6	$5 $\approx\ \{\{k = 1.41, t = 3.87\}\}$

De to ballene har samme fartsretning etter etter 3,87 sekunder.

Algebrafelt

- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ -9.7 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{v_1}: \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 17 \\ -10 \cdot 0 + 29 \end{pmatrix}$
- $\alpha = 29.71°$

CAS

1	v_1(t):=Vektor[17,-10t+29] $\rightarrow\ \mathbf{v_1(t)} := \begin{pmatrix} 17 \\ -10\,t + 29 \end{pmatrix}$
2	a:=v_1(3.87) $\approx\ \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 17 \\ -9.7 \end{pmatrix}$
3	b:=Vektor[1,0] $\approx\ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vinkelen mellom fartsvektoren og x-aksen er da $29,7°$.

Oppgave 4

$$f(x) = \frac{1}{4p}x^2 \quad p > 0$$

a

CAS

1	f(x):=1/(4p) x^2 $\rightarrow\ f(x) := \frac{x^2}{4\,p}$
2	P:=(0,p) $\rightarrow\ P := (0, p)$
3	Q:=(q,f(q)) $\rightarrow\ Q := \left(q, \frac{q^2}{4\,p}\right)$
4	l:=Linje(P, Q) $\rightarrow\ \ell: y = x\,\frac{-4\,p^2 + q^2}{4\,p\,q} + p$
5	Skjæring(l, f) $\rightarrow\ \left\{\left(q, \frac{q^2}{4\,p}\right), \left(-4 \cdot \frac{p^2}{q}, 4 \cdot \frac{p^3}{q^2}\right)\right\}$
6	R:=Element($5,2) $\rightarrow\ R := \left(-4 \cdot \frac{p^2}{q}, 4 \cdot \frac{p^3}{q^2}\right)$

Vi ser at x-koordinaten ti R er

$$-\frac{4p^2}{q}$$

b Vi legger inn tangenter i punktene Q og R.
Vi finner skjæringspunktet mellom disse tangentene og kaller skjæringspunktet S.
Vi danner vektorene QS og RS.
For å vise at tangentene i punktene Q og R står normalt på hverandre, må vi vise at skalarproduktet av disse vektorene blir null.

7	t_Q(x):=Tangent(Q, f) $\rightarrow\ t_Q(x) := \frac{-q^2 + 2\,q\,x}{4\,p}$
8	t_R(x):=Tangent(R, f) $\rightarrow\ t_R(x) := \frac{-4\,p^3 - 2\,p\,q\,x}{q^2}$
9	Skjæring(t_Q(x), t_R(x)) $\rightarrow\ \left\{\left(\frac{-4\,p^2 + q^2}{2\,q}, -p\right)\right\}$
10	S:=Element($9,1) $\rightarrow\ S := \left(\frac{-4\,p^2 + q^2}{2\,q}, -p\right)$

11	Vektor(S, Q) $\rightarrow \begin{pmatrix} q - \frac{-4p^2+q^2}{2q} \\ \frac{q^2}{4p} + p \end{pmatrix}$
12	Vektor(S, R) $\rightarrow \begin{pmatrix} -4 \cdot \frac{p^2}{q} - \frac{-4p^2+q^2}{2q} \\ 4 \cdot \frac{p^3}{q^2} + p \end{pmatrix}$
13	Skalarprodukt($11,$12) $\rightarrow \left(\frac{q^2}{4\,p} + p\right)\left(4 \cdot \frac{p^3}{q^2} + p\right) + \left(-\frac{(-4\,p^2 + q^2)}{2\,q} + q\right)\left(-4 \cdot \frac{p^2}{q} - \frac{-4\,p^2 + q^2}{2\,q}\right)$
14	RegnUt($13) $\rightarrow$ **0**
15	$13 $\stackrel{?}{=}$ 0 $\rightarrow$ **true**

Vi har da vist at tangentene står normalt på hverandre.