Aero 2-A

Formes différentielles

I Forme différentielle de degré 1

1) Définition

a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- On appelle forme différentielle de degré 1 sur U une application $\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\forall (x,y) \in U \ , \quad \omega(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}$$

où P et Q sont 2 applications définies sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\omega_{(x,y)}(u,v) = P(x,y)\,u + Q(x,y)\,v$

On dit aussi que ω est une 1-forme différentielle ou que ω est une 1-forme.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que la forme ω précédente est de classe C^k sur U si P et Q sont de classe C^k sur U.

b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

On définit de même une forme différentielle de degré 1 sur U par :

$$\boxed{\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in U, \ \omega(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx &+ Q(x,y,z)\,dy \\ &+ R(x,y,z)\,dz\end{aligned}}$$

où P, Q et R sont 3 applications définies sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2) Exemples

- Soit ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$\omega(x,y) = (3x^2 + y)\,dx + (2x - xy)\,dy$ (on a $U = \mathbb{R}^2$)

ω est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\omega_{(x,y)}(u, v) = (3x^2 + y)\, u + (2x - xy)\, v$$

- Soit ω définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$\omega(x, y, z) = 2x\, dx + (2y - 3z)\, dy + z\, dz$

ω est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^3$.

II/ Forme différentielle exacte

1) Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit ω une forme différentielle sur U.

On dit que ω est exacte s'il existe une application f de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ telle que $\omega = df$.

Une telle application f s'appelle une primitive de ω.

(Dans la plupart des exercices on prendra $n = 2$ ou $n = 3$)

2) Exemple

Soit $\omega(x, y) = 2x\, dx + 3y^2\, dy$. On écrit en abrégé

$\omega = 2x\, dx + 3y^2\, dy$. On prend $U = \mathbb{R}^2$

Soit $f(x, y) = x^2 + y^3$ définie sur $\mathbb{R}^2$

$\omega = df$ donc ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$

III/ Forme différentielle fermée

1) Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\omega = \omega_1\, dx_1 + \omega_2\, dx_2 + \dots + \omega_n\, dx_n$ une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

On dit que ω est fermée si :

$$\forall (i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2, \quad \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$$

2) Cas particuliers

- pour $n=2$

$$\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

ω est fermée si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

- pour $n=3$

$$\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

ω est fermée si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$

et $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$.

Cela s'écrit $\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0$

et $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$

Ce qui revient à dire que le rotationnel du vecteur $\begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ est nul.

IV Propriétés

1) Propriété 1

A l'aide du théorème de Schwarz, on peut démontrer que si une forme différentielle est exacte alors elle est fermée.

La réciproque est fausse.

Par contraposée : si une forme différentielle n'est pas fermée alors elle n'est pas exacte.

2) Partie étoilée

a) Définition

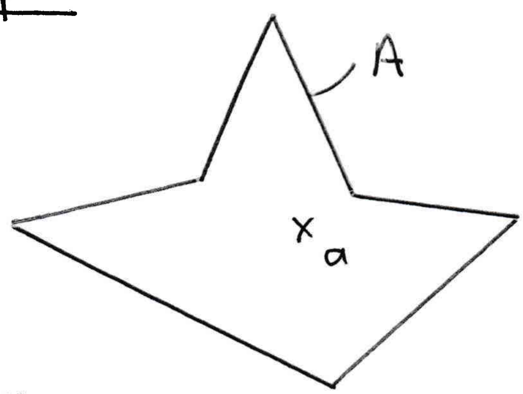
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

Soit $a \in A$.

On dit que A est étoilé par rapport à a si pour tout $x \in A$ le segment d'extrémités a et x est inclus dans A.

Cela signifie que dans A, tout point peut être relié à a par un chemin rectiligne.

b) Exemple



A est étoilé par rapport à a.

c) Définition

On dit que A est étoilé si A est étoilé par rapport à l'un au moins de ses points.

d) Théorème de Poincaré

Sur un ouvert étoilé, toute forme différentielle fermée est exacte.

e) Remarques

- $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ n'est pas un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$

f) Exemple

Soit $\omega = 2xy\,dx + x^2\,dy$

ω est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose $P(x,y) = 2xy$

$Q(x,y) = x^2$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ donc $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

donc ω est fermée.

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$, donc d'après le théorème de Poincaré ω est exact.

Il exists $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\omega = df$.