Mé 212 : Révisions DS (Cours)

Solide indéformable : distance entre 2 points de (S) reste cste.

$\rightarrow \forall M \in (S), \forall M' \in (S) \quad \|\overrightarrow{MM'}\| = \text{cste}.$

Axe central : Lieu des pts P tels que $\overrightarrow{M(p)}$ est colinéaire à $\vec{R}$ / $\|\overrightarrow{M(p)}\|$ minimal.

↳ Si A et B sont dessus als $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{R}$ colinéaires.

• **Méthode pour trouver l'axe central** :

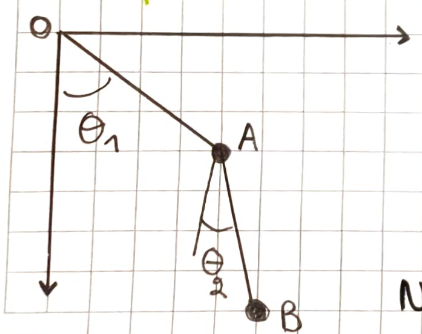
Relation pt moment : $\overrightarrow{M(p)} = \overrightarrow{M(o)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{M(p)} - \overrightarrow{M(o)}$

Division vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{(\overrightarrow{M(p)} - \overrightarrow{M(o)}) \wedge \vec{R}}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{-\overrightarrow{M(o)} \wedge \vec{R}}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}}$$

Exemple calcul ddl :



• Solide OA : $n_1 = 1$

• Immobilise OA

• Solide AB : $n_2 = 1$

Nb ddl total : $n_1 + n_2 = 2$

Methode calcul :

1) Identifier les ≠ solides

2) Isoler 1 des solide : ddl ?

3) Immobiliser ce même solide, pour chacun des elements liés : ddl ?

4) nb ddl syst : $n = \sum n_i$

Syst P solides :

ddl ↙ $n = 6p - k$ ↳ Liaison

• **Nombre de ddl** :

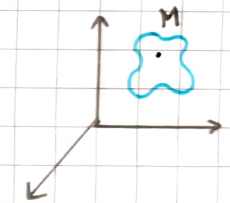
→ **Point dans l'espace** : 3 ddl

$\begin{cases} M(x, y, z) \\ M(r, \theta, z) \\ M(r, \theta, \varphi) \end{cases}$

→ **Point dans le plan** : 2 ddl

$\begin{cases} M(x, y) \\ M(r, \theta) \end{cases}$

→ **Solide de l'espace** : 6 ddl



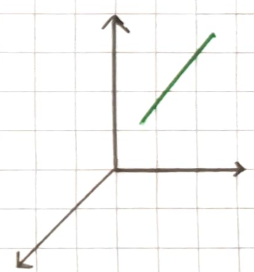
cdG G rapport à R

$\Rightarrow (x_g, y_g, z_g)$

orienter (S)

$\Rightarrow (\theta, \varphi, \psi)$

→ **Fil rigide espace** : 5 ddl



cdG G rapport à R

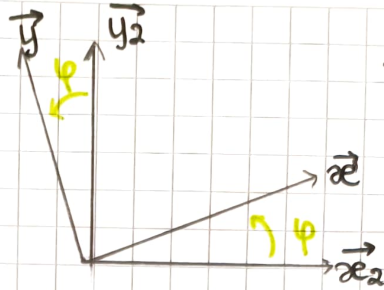
$\Rightarrow (x_g, y_g, z_g)$

Orienter (S)

$\Rightarrow (\theta, \varphi)$.

→ **Fil dans plan fixé 1 pt** : 1 ddl

→ si $k = n$: isostatique
→ si $k > n$: hyperstatique



LES ANGLES D'EULER

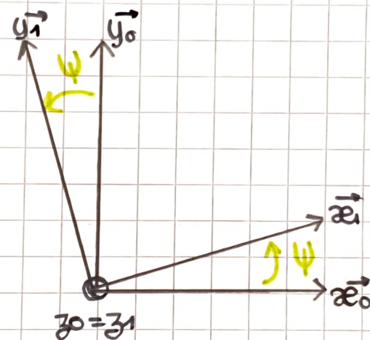
- R_0 $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ repère (fixe) référence
- R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à (S).
- (S) solide en rotation autour pt fixe O.

→ 1^{ere} rotation: Angle ψ (precession)

⇒ $R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}) \to R_1(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$.

⇒ $\begin{cases} \vec{x_1} = \cos\psi\, \vec{x_0} + \sin\psi\, \vec{y_0} \\ \vec{y_1} = -\sin\psi\, \vec{x_0} + \cos\psi\, \vec{y_0} \end{cases}$

⇒ Vecteur : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \dot{\psi}\vec{z_0} = \dot{\psi}\vec{z_1}$

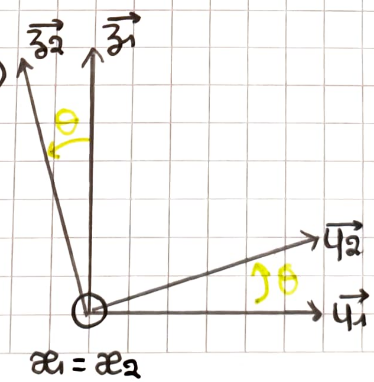


→ 2^{eme} rotation: Angle θ (nutation)

⇒ $R_1(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1}) \to R_2(O,\vec{x_1},\vec{y_2},\vec{z_2})$

⇒ $\begin{cases} \vec{y_2} = \cos\theta\, \vec{y_1} + \sin\theta\, \vec{z_1} \\ \vec{z_2} = -\sin\theta\, \vec{y_1} + \cos\theta\, \vec{z_1} \end{cases}$

⇒ $\Omega_{R_2/R_1} = \dot{\theta}\vec{x_1} = \dot{\theta}\vec{x_2}$



→ 3^{eme} rotation: Angle φ (propre)

⇒ $R_2(O,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2}) \to R(O,x,y,z=z_2)$.

⇒ $\begin{cases} \vec{x} = \cos\varphi\, \vec{x_2} + \sin\varphi\, \vec{y_2} \\ \vec{y} = -\sin\varphi\, \vec{x_2} + \cos\varphi\, \vec{y_2} \end{cases}$

⇒ $\Omega_{R/R_2} = \dot{\varphi}\vec{z_2} = \dot{\varphi}\vec{z}$

Rotation global:

$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{R/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{R/R_2}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \\ \overrightarrow{\Omega_{R/R_0}} = \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{x_2} + \dot{\psi}\vec{z_0} \end{cases}$

Equiprojectivité du champs des $\vec{v}$: (demo).

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \overrightarrow{V_{A(S/R)}} = \vec{AB} \cdot \overrightarrow{V_{B(S/R)}}}$$

Torseur cinématique:

$\{V_{S/R_0}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{A(S/R_0)}} \end{Bmatrix}$ → vecteur rotation ; → Vitesse pt A.

A ↳ pt de reduction

Démonstrations

- **Si A et B sont sur l'axe central alors $\vec{AB}.\vec{R} = 1$**

$M(A) = M(B) + AB \wedge R \Rightarrow M(A) - M(B) = AB \wedge R$

Comme A, B ∈ Axe central : $A = \alpha\vec{R}$ $B = \beta\vec{R}$

$\alpha\vec{R} - \beta\vec{R} = \vec{AB} \wedge \vec{R}$

$(\alpha - \beta)\vec{R} = \vec{AB} \wedge \vec{R}$

→ $(\alpha-\beta)\vec{R}$ et $\vec{R}$ colinéaires $\begin{cases} \vec{AB} \wedge \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{AB} = k\vec{R} \end{cases}$

→ AB colinéaires

→ $\alpha = \beta$

- **Axe central est lieu des pts P où $\|\vec{M(p)}\|$ minimal.**

Soient $A \in \vec{OP}$ et $C \notin \vec{OP}$

$\vec{M(c)} = \vec{M(a)} + \vec{CA} \wedge \vec{R}$

$\|Mc\|^2 = \|M(a)\|^2 + \|\vec{CA} \wedge \vec{R}\|^2 + 2M(a).(\vec{CA}.\vec{R})$

$\|Mc\|^2 = \|M(a)\|^2 + \|\vec{CA} \wedge \vec{R}\|^2 + 2\alpha\vec{R}.(\vec{CA} \wedge \vec{R})$.

Donc :

$\|\vec{M(c)}\|^2 = \|M(a)\|^2 + \|\vec{CA} \wedge \vec{R}\|^2$

$\|\vec{M(c)}\| \geqslant \|M(a)\|^2$.

- **Axe central :**

Relation changement de point d'un moment :

$\vec{M(p)} = \vec{M(o)} + \vec{R} \wedge \vec{OP} \Rightarrow \vec{R} \wedge \vec{OP} = \vec{M(p)} - \vec{M(o)}$

Division vectorielle :

$$\vec{OP} = \frac{(\vec{M(p)} - \vec{M(o)}) \wedge \vec{R}}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R}$$

Après dvlp : $\vec{OP} = \dots$

- **Equiprojectivité du champ des $\vec{V}$**

Solide indéformable. On en tire :

$\|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB}.\vec{AB} = cste$.

En derivant : $\frac{d(\vec{AB}.\vec{AB})}{dt} = \frac{d(\vec{AB})}{dt}.\vec{AB} + \vec{AB}.\frac{d(\vec{AB})}{dt} = \vec{0}$

On a :

$2AB.\frac{d(\vec{AB})}{dt} = 0$

Avec : $\frac{d(\vec{AB})}{dt} = \vec{V_{B(S/R)}} - \vec{V_{A(S/R)}}$

D'où : $\vec{AB}.(\vec{V_{B(S/R)}} - \vec{V_{A(S/R)}}) = 0$ → Ainsi :

$\vec{AB}.\vec{V_{A(S/R)}} = \vec{AB}.\vec{V_{B(S/R)}}$

Mé 242 : Revisions DS (cours)

Loi distribution des $\vec{V}$:

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B(S/R_0)}} = \overrightarrow{V_{A(S/R_0)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}$$

Vecteur (taux de) rotation global :

$$\boxed{\Omega_{S/R_0} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\vec{u_i} \wedge \frac{d\vec{u_i}}{dt/R_0}\right)}$$

Derivation repère mobile:

$$\frac{d\vec{V}}{dt/R_0} = \frac{d\vec{V}}{dt/R_1} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \vec{V}$$

→ Vitesse instantanée de glissement

C'est la $\vec{v}$ des pts ∈ à axe central $\Delta(t)$.

Soit H pt ∈ $\Delta(t)$ et M pt ∈ (S).

On a :

$$\overrightarrow{V_{M(S/R_0)}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{H(S/R_0)}}}_{\text{translation}} + \overrightarrow{MH} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}_{\text{rotation}}$$

- En derivant l'expression suivante : $\overrightarrow{V_P(S/R_0)} = \overrightarrow{V_M(S/R_0)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{MP}$

  On obtient $\vec{a}$ tel que :

$$\overrightarrow{a_P(S/R_0)} = \overrightarrow{a_M(S/R_0)} + \frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}{dt} \wedge \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{MP}$$

$$\overrightarrow{a_P(S/R_0)} = \overrightarrow{a_M(S/R_0)} + \frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}{dt} \wedge \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{MP}$$

On cste que le champs $\vec{a}$ n'est pas equiprojectif.