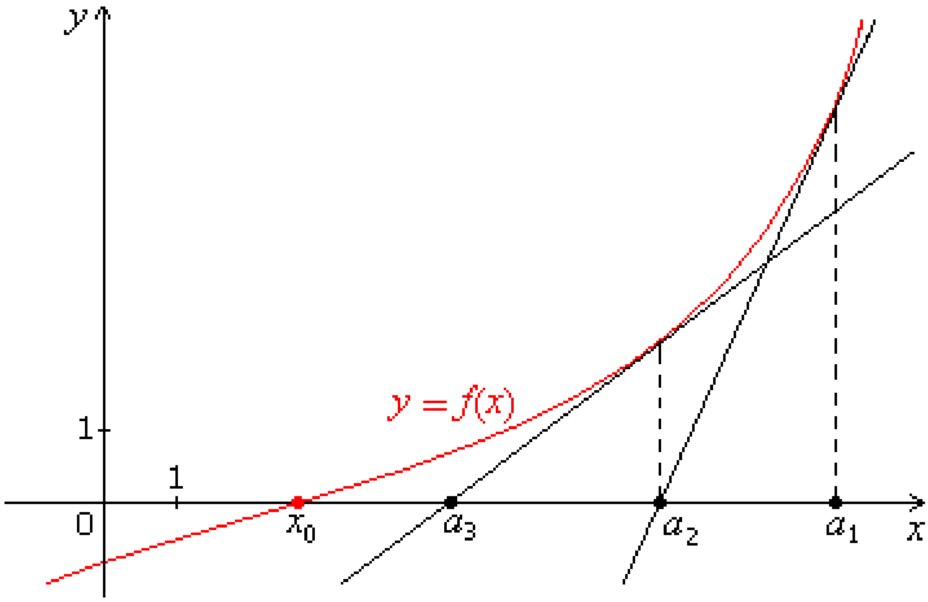
Ma 15, TP n°3 : Méthode de Newton

-

Compte rendu



Baptiste Gautier – Vitureau

Aero1 Y2

Objectif du TP :

L'objectif de ce TP est d'expérimenter la méthode de Newton. Dans la question 1, nous allons créer une fonction qui calcul les termes d'une suite définie par une relation de récurrence $U_{n+1} = U_n - f(U_n) / f'(U_n)$ avec f une fonction. Nous allons ensuite afficher graphiquement la suite pour voir si elle semble converger. Nous pourrons alors vérifier si elle tend bien vers un point fixe de f, comme le dit la méthode de Newton.

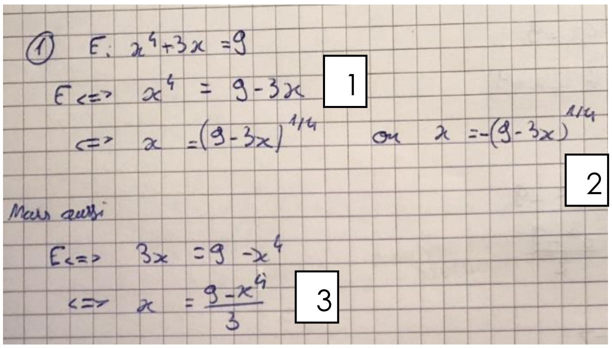
Question 2 : Tester cette fonction pour résoudre les équations résolues dans le TP2 avec la méthode du point fixe. Comparer la rapidité de convergence avec le cas du point fixe.

Comme dans le TP2, l'idée est d'isoler un x dans les équations de sortes à avoir une expression du type g(x) = x avec g une fonction. Et, g(x) = x ⇔ g(x) – x = 0. On va alors poser une fonction fx) = g(x) – x. Les points où f s'annule sont les points fixes de g et donc les solutions de l'équation. La méthode de Newton nous dit que la suite définie par récurrence telle que $U_{n+1} = U_n - f(U_n) / f'(U_n)$ aura pour limite un point où f s'annule donc un point fixe de g. Trouver la limite de cette suite revient donc à résoudre l'équation. Nous allons donc créer une suite définie par $U_{n+1} = U_n - f(U_n) / f'(U_n)$ dans chaque cas pour trouver les points où f s'annule.

Toutefois il faut faire attention, comme on l'a vu, selon le x que l'on isole les points fixes de g peuvent être attractif ou répulsifs. Nous allons utiliser les résultats du TP2 pour isoler les différents x. Nous allons aussi tester avec plusieurs valeurs de x_0.

1. Soit l'équation E définie sur R par E : $x^4 + 3x = 9$

D'après la calculatrice, les solutions de E sont environ $a_1 = 1.5$ et $a_2 = -2$.



Dans le cas n°1, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite tend toujours vers 1.46 qui semble être la première solution trouvée avec la calculatrice.

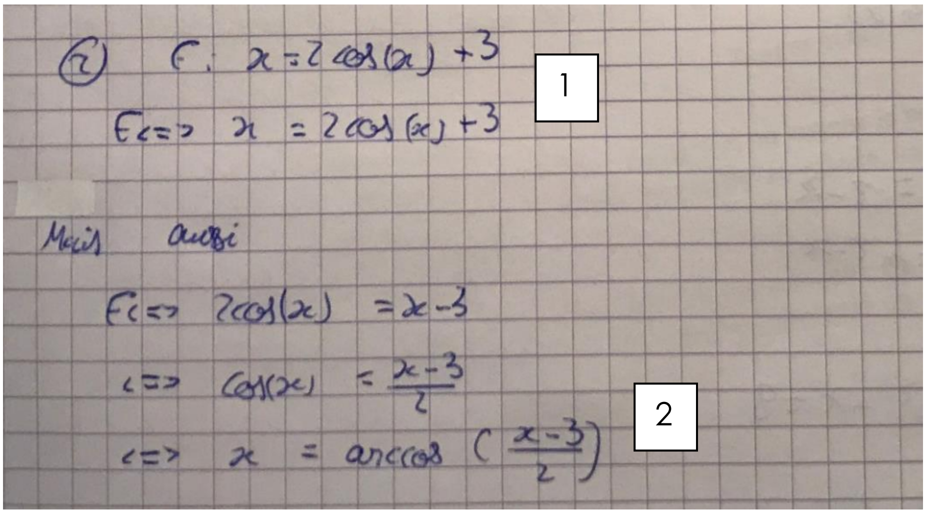
Dans le cas n°2, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite tend toujours vers -1.96 qui semble être la deuxième solution trouvée avec la calculatrice.

Dans le cas n°3, avec x_0 = 1, 10, la suite tend toujours vers 1.46 qui semble être la première solution trouvée avec la calculatrice. Mais avec x_0 = -5 par exemple, la suite tend vers -1.96. La suite tend donc vers la solution la plus proche de la valeur de x_0.

On retrouve donc bien les deux solutions de de la calculatrice $a_1 = 1.5$ et $a_2 = -2$. De plus, avec la méthode de Newton le programme s'arrête après en moyenne 5 itérations alors que la méthode du point fixe allait jusqu'à 50 itérations à chaque fois (pour les mêmes valeurs de x_0). La méthode de Newton est donc meilleure ici. De plus, elle permet de trouver les solutions de E dans le 3ème cas alors que la première méthode provoquait une erreur.

2. Soit l'équation E définie sur R par E : x = 2Cos(x) + 3

D'après la calculatrice, la seule solution est $a_1 = 2$.



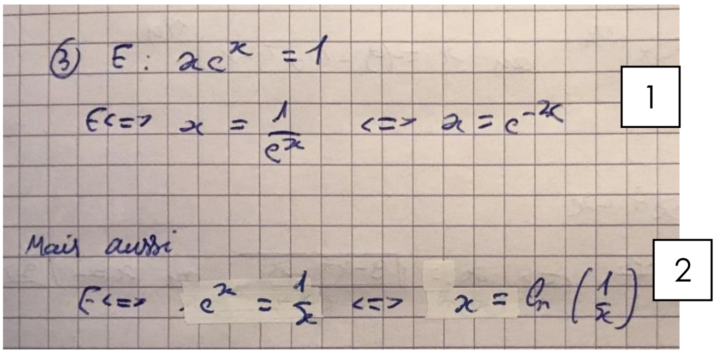
Dans le cas n°1, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite tend toujours vers 2.06 qui semble être la solution trouvée avec la calculatrice.

Dans le cas n°2, avec x_0 = 2, la fonction tend toujours vers 2.06 qui semble être la solution trouvée avec la calculatrice. Les autres valeurs de x_0 testées provoquent des erreurs.

On retrouve la solution de la calculatrice $a_1 = 2$. De plus la méthode de Newton trouve la solution dans les deux cas alors que la méthode du point fixe ne trouvait rien dans le premier cas. Là aussi la convergence se fait en 4 à 5 étapes contrairement à la méthode du point fixe.

3. Soit l'équation E définie sur R par E : x * e^x = 1

D'après la calculatrice, la seule solution est a_1 = 0.58.



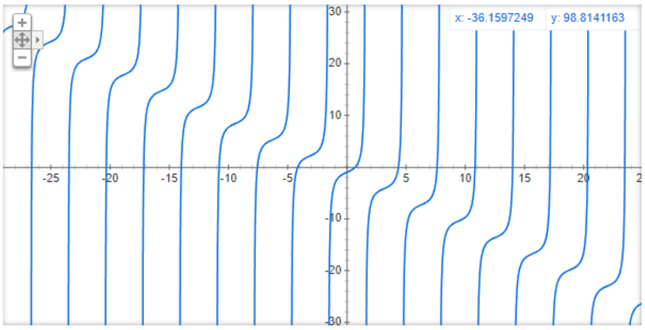
Dans le cas n°1, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite tend toujours vers 0.57 qui semble être la solution trouvée avec la calculatrice.

Dans le cas n°2, avec x_0 = 2, la suite tend vers 0.57 qui semble être la solution trouvée avec la calculatrice. Les autres valeurs de x_0 testées provoquent des erreurs.

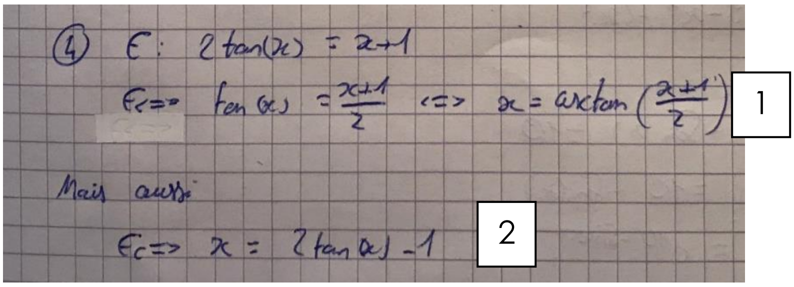
On retrouve bien la solution de la calculatrice a_1 = 0.58. La encore la méthode de Newton est plus efficace et plus rapide car la méthode du point fixe provoquait des erreurs dans le cas n°2.

4. Soit l'équation E définie sur R par E : 2Tan(x) = x + 1

D'après la calculatrice, il y a une infinité de solutions dont une est 0.7



Voici une portion du graph de f.



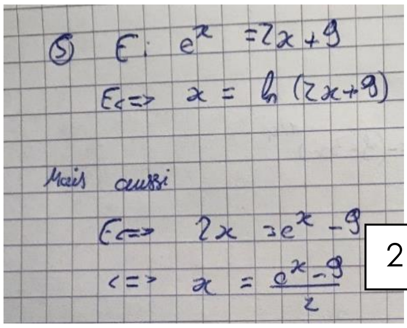
Dans le cas n°1, avec x_0 = -100, -1, 0, 1, 100, la suite tend toujours vers 0.71 qui semble être la solution trouvée avec la calculatrice.

Dans le cas n°2, avec x_0 = 0, la suite tend vers 0.71. Mais pour des grandes valeurs négatives ou positives de x_0, la suite diverge.

On retrouve donc bien une des solutions de la calculatrice. Cette solution doit être un des seuls points attractifs de f sinon la suite tendrait vers une autre solution de E. La méthode de Newton marche encore une fois dans les deux cas et plus rapidement.

5. Soit l'équation E définie sur R par E : $e^x = 2x + 9$

D'après la calculatrice, il y a deux solutions a_1 = -4.5, a_2 = 2.7.



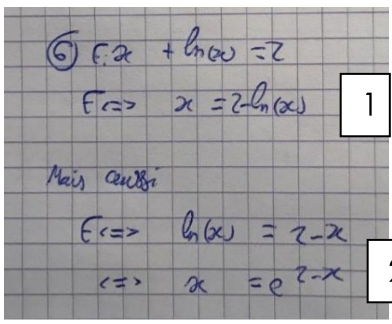
Dans le cas n°1, avec x_0 = -1, 0, 1, 10, la suite tend toujours vers 2.66 qui semble être la deuxième solution trouvée avec la calculatrice.

Dans le cas n°2, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite tend toujours vers -4.5 qui semble être la première solution trouvée avec la calculatrice.

On retrouve donc bien les deux solutions de de la calculatrice a_1 = -4.5 et a_2 = 2.66. La méthode de Newton est plus rapide (en moyenne 5 itérations au lieu de 40)

6. Soit l'équation E définie sur R par E : $x + \ln(x) = 2$

D'après la calculatrice, il y a une solution a_1 = 1.55.



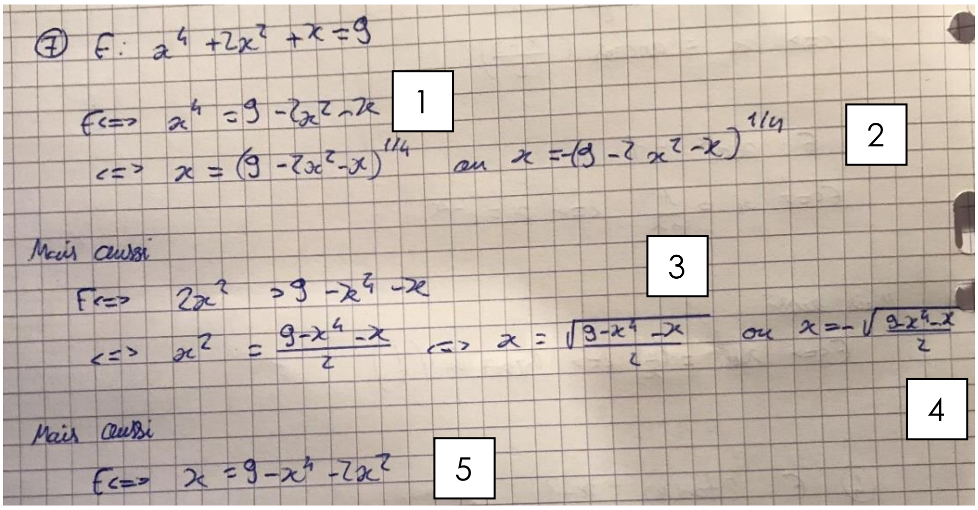
Dans le cas n°1, avec x_0 = 1, 10, la suite tend toujours vers 1.56 qui semble être la solution trouvée avec la calculatrice.

Dans le cas n°2, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite tend toujours vers 1.56 qui semble être la solution trouvée avec la calculatrice.

On retrouve donc bien la solution de de la calculatrice a_1 = 1.56. La méthode de Newton est plus efficace et plus rapide.

7. Soit l'équation E définie sur R par E : $x^4 + 2x^2 + x = 9$

D'après la calculatrice, il y a deux solutions a_1 = -1.5, a_2 = 1.4.



Dans le cas n°1, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite tend vers 1.39 qui semble être la deuxième solution trouvée avec la calculatrice.

Dans le cas n°2, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite tend vers -1.54 qui semble être la première solution trouvée avec la calculatrice.

Dans le cas n°3, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, il y a une erreur très rapidement, impossible d'avoir une convergence précise.

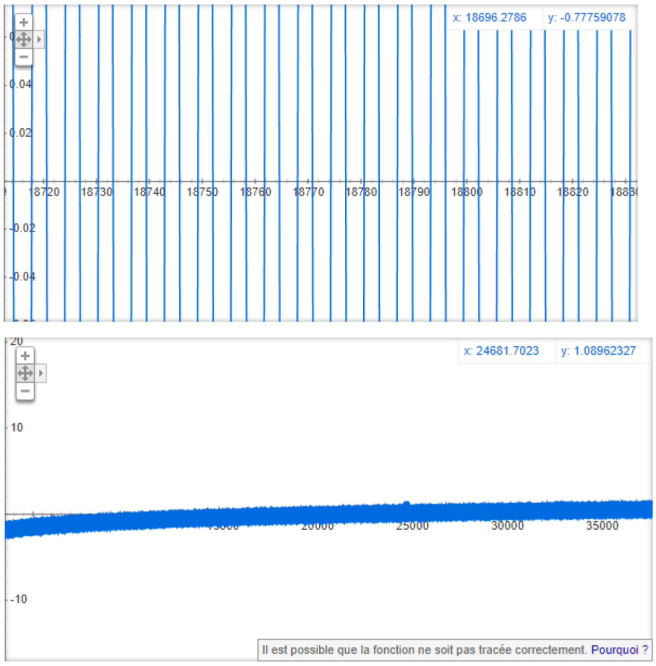
Dans le cas n°4, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, il y a une erreur très rapidement, impossible d'avoir une convergence précise.

Dans le cas n°5, la suite tend vers la solution la plus proche de la valeur de x_0.

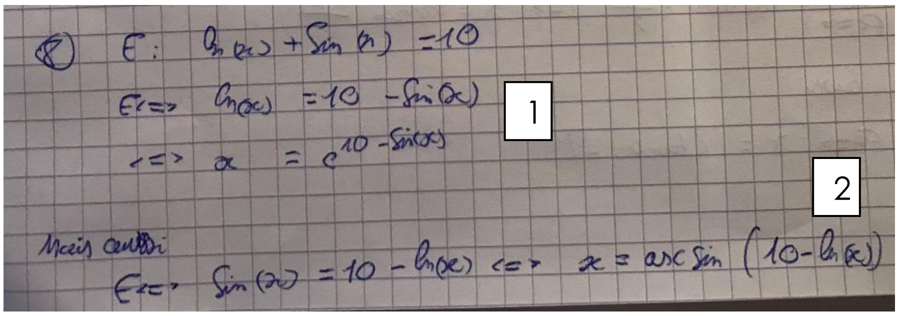
On retrouve donc bien les deux solutions de de la calculatrice a_1 = -1.5 et a_2 = 1.4. La méthode de Newton est encore une fois plus efficace et bien plus rapide.

8. Soit l'équation E définie sur R par E : ln(x) + Sin(x) = 10

D'après la calculatrice, il existe des centaines de solutions.



Voici une portion du graph de f puis la même mais dézoomée.



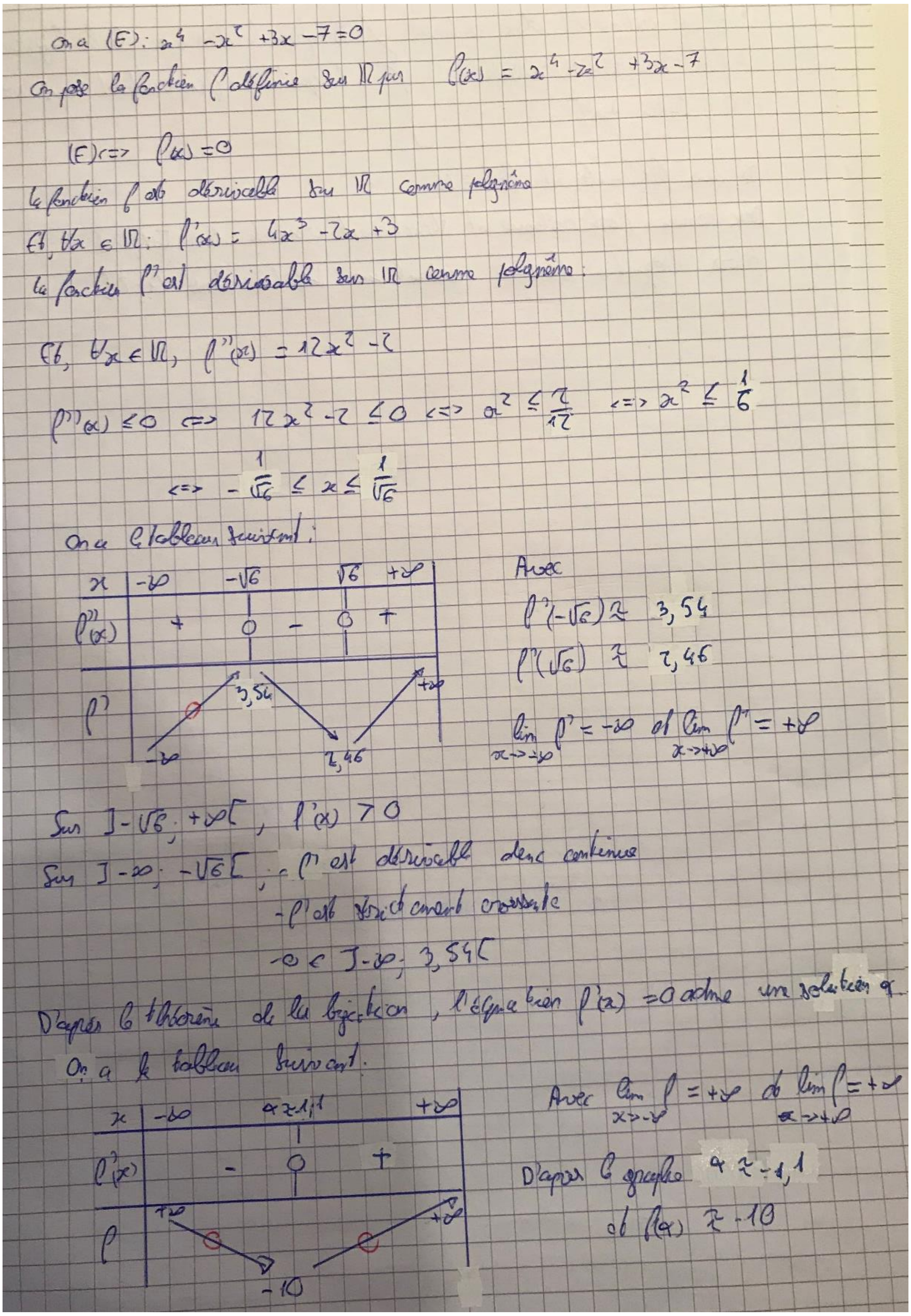
Dans le cas n°1, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, la suite oscille.

Dans le cas n°2, avec x_0 = -10, -1, 0, 1, 10, il y a une erreur très vite, impossible d'avoir une convergence précise.

On ne trouve aucune solution de l'équation. Peut-être toutes ces solutions sont des points fixes répulsifs dans chaque cas et donc on ne les voit pas ici.

En conclusion, il semblerait donc que la notion de point fixe répulsif ou attractif impacte beaucoup moins l'efficacité de la méthode de Newton que celle des points fixes. De plus elle est bien plus rapide : en moyenne elle nécessite 5 itérations pour 40 avec la méthode du point fixe.

On souhaite calculer avec une précision de 10^{-1000} une solution de l'équation polynômiale E : $x^4 - x^2 + 3x - 7 = 0$. Pour cela, on utilisera le module « decimal ». Justifier sommairement que l'équation E n'admet qu'une seule solution a comprise dans [1, 2].



On a (E) : $x^4 - x^2 + 3x - 7 = 0$

On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - x^2 + 3x - 7$

(E) $\Leftrightarrow f(x) = 0$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme

Et, $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 - 2x + 3$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme.

Et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 12x^2 - 2$

$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{2}{12} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{6}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$

On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
f'	$-\infty$	↗	3,54	↘	2,46	↗	$+\infty$

Avec

$f'(-\sqrt{6}) \approx 3,54$

$f'(\sqrt{6}) \approx 2,46$

$\lim_{x \to -\infty} f' = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f' = +\infty$

Sur $]-\sqrt{6} ; +\infty[$, $f'(x) > 0$

Sur $]-\infty ; -\sqrt{6}[$, - f' est dérivable donc continue

- f' est strictement croissante

- $0 \in]-\infty ; 3,54[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α.

On a le tableau suivant.

x	$-\infty$		$\alpha \approx -1,1$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
f	$+\infty$	↘	−10	↗	$+\infty$

Avec $\lim_{x \to -\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$

D'après le graphe $\alpha \approx -1,1$

et $f(\alpha) \approx -10$

Sur $]-1,1 ; +\infty[$

- f est dérivable donc continue
- f est strictement croissante
- $0 \in]-10 ; +\infty[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une solution

De plus $f(1) = -4$ et $f(2) = 16$

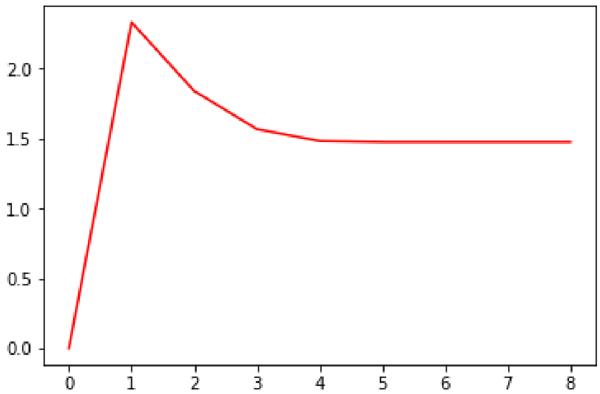
Et comme f est continue et strictement croissante sur $[1 ; 2]$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[1 ; 2]$

Donc l'équation E admet une seule solution sur [1, 2]

Question 3 : Déterminer une valeur approchée de la solution de E avec le type « float » standard de python avec la méthode de Newton.

On pose la fonction $f(x) = x^4 - x^2 + 3x - 7$. La méthode de Newton va nous permettre de trouver les points ou f s'annule donc les solutions de l'équation E. D'après la calculatrice, la solution qui se trouve dans [1, 2] est a = 1.47.



La suite semble tendre vers cette solution. Elle tend vers 1.47633935830183583 avec une précision de 10^{-10}. Cela confirme notre solution trouvée avec la calculatrice.

Question 4 : Déterminer une valeur approchée à 10^{-1000} de a.

Pour faire cela, on utilise le module « decimal » de python. On transforme x en un nombre décimal avec 1000 décimales et on augmente la précision du calcul à 10^{-1000}. Cette précision est atteinte dès la 14ème itération.

On a alors la solution :
1.47633935830183592169310136432113150194463834372940235210017776793850912774179231851867101264692848818276757969120314237091202315658241
48718765288010236962469519571835020043159882494413510367905272560450
59544721092205678579065998202000143908853609924216323566238195467888
40294379482238443918615885788305817848308518927188169067036251759035
38967363527891795404745867635787327659995882283774140038913008721159
77232961057465647014049033287052072570508714975671109784029718629192
37437047980364385348994949452293342313805107960251875773644429833159
71208392758301815309052956551657585390600746229232735969028733794364
66962306457161000028678566095358960389588829522419201759071596385773
23771550975822613340845432153810124603772358504814130421230802868265
72559293618620297389815870204467386733047836776522438430478510780565
65199066046624466705034553442097053836094197845799554526535779274959
02281571183100330205889852706451767933465718968699005512412723080502
4829651514534104114772884033445939828126033815038

Question 5 : Relever le nombre d’itérations nécessaires pour obtenir une approximation de a à la précision 10^{-p} pour p appartient à {10, 50, 100, 200, 500, 1000}

On garde x un nombre décimal avec 1000 décimales et on va faire varier la précision demandée dans le calcul :

Pour 10^{-10} : il faut 8 itérations

Pour 10^{-50} : il faut 10 itérations

Pour 10^{-100} : il faut 10 itérations

Pour 10^{-200} : il faut 12 itérations

Pour 10^{-500} : il faut 14 itérations

Pour 10^{-1000} : il faut 14 itérations

En conclusion de ce TP, la méthode de Newton est très efficace pour calculer rapidement et très précisément des points nuls d'une fonction. Il suffit d'adapter son équation pour pouvoir la résoudre avec cette méthode. De plus, elle marche presque tout le temps contrairement à la méthode des points fixes.