



# Mini-projet comète de Halley

## Ph 121

DES LOIS DE KEPLER A LA GRAVITATION UNIVERSELLE DE NEWTON

DUPIN LEA 1PY1 | MINI-PROJET PH121 | MARS ET AVRIL 2020 | IPSA



## **TABLE DES MATIERES :**

<b>INTRODUCTION ET OBJECTIFS DU MINI-PROJET .....</b>	<b>3</b>
Histoire générale de la mécanique céleste .....	3
Histoire de la comète de Halley.....	6
Propriétés de l'ellipse .....	10
Objectifs du mini-projet.....	11
<b>PARTIE I : Les lois de Kepler .....</b>	<b>12</b>
I.A – Première Loi De Kepler : La Loi Des Orbites (1609) .....	12
I.B – Deuxième Loi De Kepler : La Loi Des Aires (1609).....	18
I.C – Troisième Loi De Kepler : La Loi Des Périodes (1619).....	20
<b>PARTIE II : Loi de la Gravitation Universelle .....</b>	<b>25</b>
II.A – Force Attractive En $1/r^2$ .....	25
II.B – Conservation Du Moment Cinétique.....	31
II.C – Conservation De L'Energie Mécanique .....	33
<b>ANNEXES .....</b>	<b>35</b>
<b>Annexe I : Coordonnées De La Trajectoire (Complet).....</b>	<b>35</b>
<b>Annexe II : Distances aux foyers et calculs de a, p et e.....</b>	<b>37</b>
<b>Annexe III : Valeurs Théoriques Et Solveur.....</b>	<b>39</b>
<b>Annexe IV : Graphique des aires (Deuxième loi de Kepler).....</b>	<b>41</b>
<b>Annexe V : Tracés des vecteurs vitesse et accélération au périhélie .....</b>	<b>42</b>
<b>Annexe VI : Bilan personnel du mini-projet .....</b>	<b>43</b>
<b>Annexe VII : Crédits photos et sources .....</b>	<b>43</b>

# INTRODUCTION ET OBJECTIFS DU MINI-PROJET

## Histoire générale de la mécanique céleste

### **Qu'est-ce que la mécanique céleste ?**

La mécanique céleste est un terme qui **désigne la description du mouvement d'objets astronomiques** (tels que les étoiles et planètes, ou bien des comètes) **à l'aide des théories physiques et mathématiques**. Les domaines de la physique les plus directement concernés sont la cinématique et la dynamique (classique ou relativiste).

Le but de la mécanique céleste est de **prévoir, avec le plus d'exactitude possible** et pour des époques aussi éloignées que possible dans le passé ou dans l'avenir, la **position dans l'espace des corps célestes** : planètes, satellites, étoiles...

Elle a pour principal objet le **mouvement des corps du système solaire** et s'appuie sur les **principes suivants, établis par Galilée et Newton au XVIIe siècle** :

- L'espace est euclidien à trois dimensions, et le temps est un paramètre variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , indépendant du système de référence spatial envisagé.
- Il existe une infinité de repères fondamentaux, appelés repères inertIELS, qui sont tous animés d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres et qui sont tels que tout point matériel qui n'est soumis à aucune force est soit au repos dans l'un de ces repères, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.
- Dans un repère inertiel, un point de masse  $m$  soumis à une force représentée par le vecteur  $F$  prend une accélération représentée par le vecteur  $\vec{y}$ , liée à  $F$  par la relation :

$$\vec{F} = m * \vec{y}$$

On sera amené à supposer que l'on est capable de recenser à coup sûr toutes les actions physiques agissant sur un point matériel et à les représenter sous la forme d'un vecteur  $F$ , fonction de la position du point, de sa vitesse et d'autres paramètres, de telle sorte que l'accélération soit donnée par la formule ci-dessus. Si elle ne l'est pas, c'est que le référentiel considéré n'est pas galiléen, et on doit alors introduire des forces fictives appelées force d'inertie d'entraînement et force complémentaire de Coriolis.

- Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force représentée par le vecteur  $\overrightarrow{F_{A/B}}$  alors le point B exerce une force  $\overrightarrow{F_{B/A}}$  sur le point A telle que  $\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$

## Historique et figures importantes de la mécanique céleste

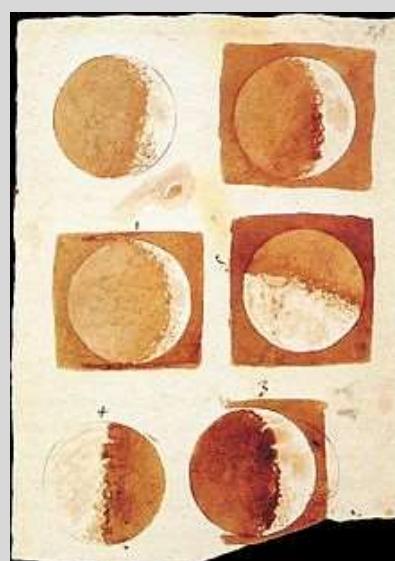
L'histoire de la mécanique débute en 1543, lorsque Copernic démontre l'héliocentrisme. Il ouvre ainsi la porte à une nouvelle discipline scientifique, qui ne cesse d'évoluer depuis. On note alors quelques dates et figures importantes :

- De 1576 à 1600, Tycho BRAHE observe la position des planètes à l'œil nu ainsi que la supernova SN1572 (ou Nova de Tycho) survenue dans la constellation de Cassiopée, le 11 novembre 1572.
- De 1600 à 1619 se sont les travaux de Kepler qui montre que Mars effectue une orbite elliptique dont le foyer est le soleil, et il décrit également le mouvement des planètes grâce à ses trois lois (Première et Deuxième Loi : 1609, Troisième Loi : 1619).
- Galilée décrit le mouvement sur Terre (notamment grâce à ses études sur la chute des corps) et il découvre également les 4 satellites visibles de Jupiter (aujourd'hui baptisées Callisto, Europe, Ganymède et Io) à la date du 7 janvier 1610.



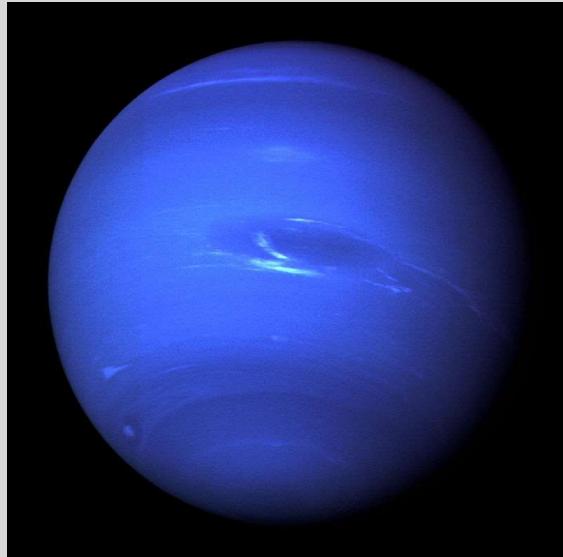
Les quatre lunes galiléennes de Jupiter découvertes par Galilée en 1610 : Callisto, Ganymède, Europe et Io.

De plus, il perfectionne la lunette astronomique et observe la lune (on lui doit des dessins complets des différentes phases de la lune) et ses cratères et montagnes, dont il estime la hauteur à 7000 mètres.



Phases de la lune dessinées par Galilée en 1616.

- En 1687, Newton découvre la loi universelle de la gravitation (ou de l'attraction universelle en tant que cause des mouvements des planètes) et théorise la force de gravitation (proportionnelle à  $1/r^2$ ). La mécanique céleste, qui repose sur les trois lois de Kepler et la loi universelle de la gravitation de Newton, suffit, encore aujourd'hui, à expliquer par le calcul les mouvements des astres dans un univers local, tel que le système solaire.
- Urbain Joseph Le Verrier découvre Neptune, qui avait d'abord été prise pour Uranus, en 1845.



*Neptune, prise auparavant pour Uranus, prédict par Le Verrier.*

- Et bien d'autres encore...

## Histoire de la comète de Halley

La comète de Halley, ou plutôt 1P/Halley sous sa désignation officielle, est la plus connue de toutes les comètes. Il s'agit d'une comète dite à courte période, et qui a donné son nom à une famille de comète : *HTC* pour « *Halley-Type Comets* », qui regroupe toutes les comètes périodiques dont les périodes sont comprises entre 20 et 200 ans (celle de 1P/Halley est de 76 ans). La majorité de celles-ci proviennent de la zone située entre les orbites de Saturne et Neptune.

En 1705, Edmond (ou Edmund) publie un livre avançant que les comètes apparues en 1531, 1607, et 1682 était une seule et unique comète et explique que celle-ci voyage sur une orbite elliptique et prend 76 ans pour faire une révolution complète autour du soleil. Il prévoit donc son retour en 1758.

En 1756, Joseph Lefrançois de Lalande, aidé de Nicole-Reine Lepaute et sur des bases de formules conçues par Alexis Clairaut, décide de calculer les déviations de la comète (dues au grosses planète). Il annonce donc le retour de celle-ci pour 1759 et non pas 1758, avec un passage au périhélie (point de la trajectoire en orbite héliocentrique le plus proche du Soleil) en avril 1759, avec une incertitude d'un mois. La comète réapparut en décembre 1758 avec un passage au périhélie le 13 mars 1759, ce qui permit d'asseoir définitivement la mécanique newtonienne.

On en connaît bien plus de la comète de Halley depuis que la sonde GIOOTTO en a sondé le cœur. Celle-ci a été lancée en 1985 par l'agence spatiale européenne (ESA) et avait pour mission d'aller photographier le noyau de la comète. La sonde s'est approchée à 600km du noyau et en a donné la forme : comme une cacahuète d'une dimension de 16 x 8 x 7 km dont on sait désormais qu'il y a deux geysers de gaz qui alimentent la chevelure et la queue.

A son dernier passage, on a pu déterminer que son noyau est très sombre. Les photos de la sonde GIOOTTO sont également des données précieuses qui permettent de mieux comprendre la constitution des comètes et le mécanisme de sublimation à l'approche du Soleil.

Les trois dernières visites de la comète de Halley remontent à 1835, 1910 et 1986. Le prochain passage au périhélie devrait avoir lieu le 28 juillet 2061.

On retrouve de multiples mentions d'observations de la comète :

<b>-611</b>	Mention en Chine ( <i>Annales des Printemps et Automnes</i> )
<b>-467</b>	
<b>-240</b>	
<b>141</b>	
<b>218</b>	
<b>374</b>	
<b>530</b>	
<b>607</b>	
<b>760</b>	
<b>-164</b>	
<b>-87</b>	Mentions en Chine et en Babylonie
<b>66</b>	Mention en Chine et à Rome (sous Néron)
<b>451</b>	Passage marquant car <b>correspondant à la défaite des Huns dirigés par Attila.</b> Mention en Chine

<b>837</b>	<b>Passage le plus spectaculaire de la comète durant les temps historiques</b> (à environ 3 millions de kilomètres de la Terre). Mention dans les textes chinois et japonais.
<b>912 989</b>	Mention en Chine, en Corée, au Japon et en Europe.
<b>1066</b>	Mention en Chine, en Corée, et au Japon. En Europe, le passage est largement documenté par plusieurs sources. La plus célèbres est la <b>tapisserie de Bayeux, où la comète apparaît comme un signe précurseur de la mort prochaine d'Harold II d'Angleterre</b> et de la victoire de Guillaume le Conquérant.
<b>1145</b>	Mention dans le <b>psautier d'Eadwine de Canterbury</b> (enluminures sur parchemin réalisées vers 1155-1160 en Angleterre), en Corée, en Chine et au Japon.
<b>1222</b>	On estime que le passage de la comète a été représenté dans la <b>cathédrale de Plaisance</b> . Mention en Chine, Corée, et au Japon.
<b>1301- 1302</b>	Plusieurs comètes sont observées dans cette période. Cependant, le peintre Giotto réalise en 1304-1305 une fresque représentant <i>l'Adoration des mages</i> dans la chapelle Scrovegni à Padoue. L'étoile guidant les mages, en haut de la fresque, a une queue de comète. <b>C'est en lien avec cette représentation que la sonde spatiale GIOTTO a été baptisée en ce nom.</b>
<b>1531</b>	Mention par Peter Apian dans son <i>Astronomicum Caesareum</i> édité en 1540. Mention par les Astèques dans Cruz
<b>1607</b>	Mentionnée par <b>Kepler</b> dans <i>De Cometis</i> (1619), décrit par Remus Quietanus ( <i>Gründliche Beschreibung und Erinnerung des neuen monstrosichen Sternes...</i> ) en 1607 et par Longomontanus dans un appendice <i>d'Astronomia danica</i> (1622).
<b>1682</b>	Mentionné par John Flamsteed puis <b>Edmond Halley</b> dans son livre <i>Synopsis de l'astronomie des comètes</i> (1705) qui est l'ouvrage dans lequel, comparant les comètes de 1531, 1607 et 1682, il prouve qu'il s'agit en fait d'une même comète et prédit son retour pour 1758. Mentionné en Chine dans <i>la Chronique de Kiangnan</i>
<b>1758</b>	Johann Georg Palitzsch est le premier à voir le retour de la comète, dans la constellation du Taureau.
<b>1910</b>	<b>Passage spectaculaire de la comète</b> , précédé quelques mois plus tôt par une autre comète spectaculaire, visible en plein jour ( <i>Grande comète de janvier 1910</i> ). La première observation du retour de la comète de Halley fut réalisée par Max Wolf dans la nuit du 11 au 12 septembre 1909, à l'aide de plaques photographiques. Cet événement est utilisé par le Bon Marché pour une <b>campagne publicitaire</b> .
<b>1986</b>	Plusieurs sondes spatiales, notamment Giotto, l'approchent de près. <b>La navette spatiale Challenger s'envole pour l'observer</b> avec une enseignante dans l'équipage qui était censée donner des cours en direct depuis l'espace en particulier sur cette comète. L'accident de la navette spatiale Challenger pendant le décollage tue tout l'équipage et détruit la navette.



Scène de la tapisserie de Bayeux où apparaît la comète de Halley



L'Adoration des mages du peintre Giotto



Edmond (Edmund) Halley



La navette spatiale Challenger lors de son vol fatal (STS-51-L)

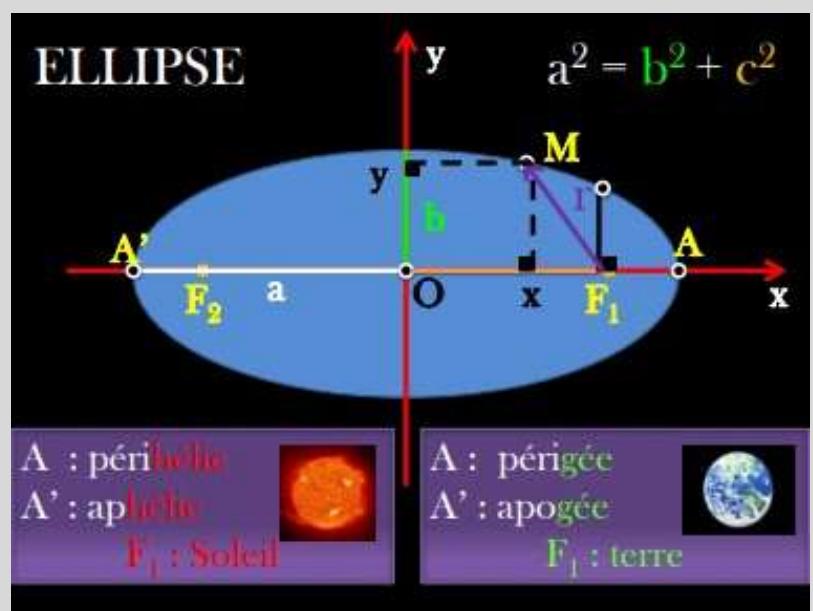
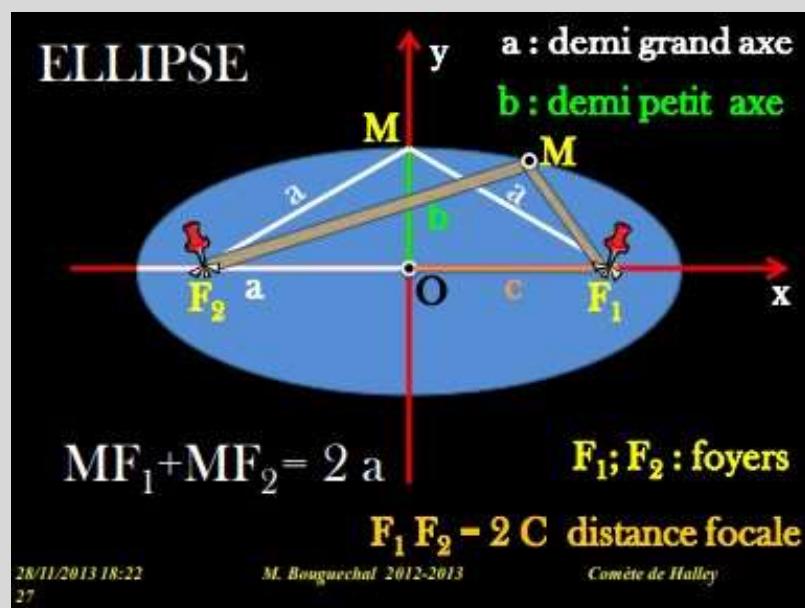


*La comète de Halley, photographiée le 8 mars 1986 par W. Liller à l'île de Pâques.  
Cette photographie est également utilisée sur la couverture de ce compte-rendu de mini-projet.*

## Propriétés de l'ellipse

En géométrie, une ellipse est une **courbe plane fermée** obtenue par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan, à condition que celui-ci coupe l'axe de rotation du cône ou du cylindre : c'est une **conique d'excentricité strictement comprise entre 0 et 1**. On peut également la définir comme le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, dits foyers, est constante (sa construction par la méthode du jardinier est très simple).

On retrouve aussi, en première approximation, des ellipses dans les trajectoires des corps célestes (planètes, comètes ou satellites artificiels) en orbite autour d'une étoile ou d'une autre planète. La Terre parcourt approximativement une ellipse dont le Soleil est un foyer. **Les trois lois de Kepler modélisent leur orbite.**



## ELLIPSE

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2(1-e^2) \quad e = c/a = \sqrt{1-(b/a)^2}$$

$$c = e/a \quad 0 \leq e < 1 \quad c = e \cdot a$$

$$p = a(1 - e^2)$$

$$F_1 A = r_{\min} = a(1 - e) = p / (1 + e)$$

$$F_1 A' = r_{\max} = a(1 + e) = p / (1 - e)$$

## Objectifs du mini-projet

Les objectifs de ce mini-projet de physique lors de ce deuxième semestre sont multiples. Nous cherchons à **exploiter les données sur la trajectoire de la comète de Halley** afin de **vérifier dans un premier temps les trois lois de Kepler** (loi des orbites, loi des aires, loi des périodes) ; puis de **retrouver la loi en  $1/r^2$  de la gravitation universelle de Newton**. Enfin, on vérifiera la **conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique**.

De plus, nous cherchons à vérifier **l'exploitation d'outils informatiques** comme les logiciels Microsoft EXCEL (pour le traitement des données, du solveur et des graphiques) ainsi que Microsoft WORD pour l'élaboration de ce compte rendu.

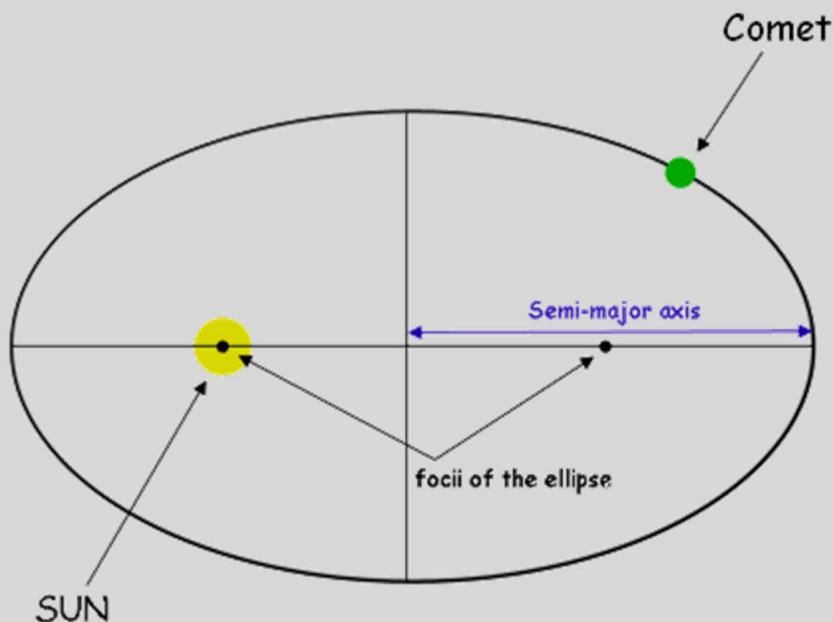
Finalement, nous voulons aussi **vérifier par tracés les vitesses et accélérations en différents points de la trajectoire de la comète**.

## PARTIE I : Les lois de Kepler

### I.A – PREMIERE LOI DE KEPLER : LA LOI DES ORBITES (1609)

*"The orbit of every planet is an ellipse with the Sun at one of the two foci."*

*The foci : singular focus.*



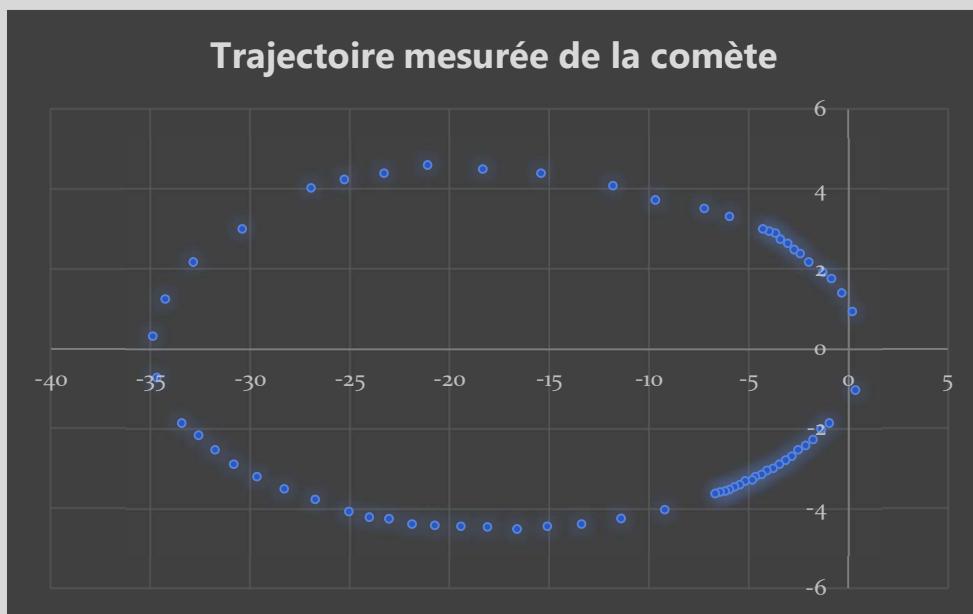
#### Notations utilisées dans cette partie :

- A : aphélie, point le plus éloigné du soleil sur l'orbite elliptique
- P : périhélie, point le plus proche du soleil sur l'orbite elliptique
- O : centre de l'ellipse
- a : demi grand axe de l'orbite elliptique
- b : demi petit axe de l'orbite elliptique
- e : l'excentricité de l'ellipse
- p : le paramètre focal de l'ellipse
- F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> : foyers de l'orbite elliptique (avec F<sub>1</sub> le Soleil)

## **Question 1 :**

On mesure tout d'abord les coordonnées x et y de la comète sur la feuille A<sub>3</sub> fournie lors du TP. Les points mesurés sont entrés dans un tableur type EXCEL, puis convertis en unité astronomique (u.a.). On mesure au maximum les valeurs suivantes : en abscisses 20.1 cm pour 21 u.a. ; et 5.8 cm pour 6 u.a.. Celles-ci nous serviront de référence pour les conversions.

Nous obtenons ainsi le nuage de point suivant :



On note de légers écarts sur la partie haute de la trajectoire, sûrement dus aux erreurs de mesures et approximation de conversion, mais ceci reste tout de même fidèle à la trajectoire réelle que nous avions sur feuille.

## **Question 2 :**

Afin de montrer que la trajectoire de la comète est bien une ellipse, on mesure la distance M F<sub>1</sub> et M F<sub>2</sub> de chaque point (où M est le point considéré), afin de vérifier la propriété de l'ellipse suivante :

*Une ellipse de foyer F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> est définie par un ensemble de point vérifiant :*

$$MF_1 + MF_2 = \text{constante} = 2 * a$$

*où a est le demi grand axe de l'ellipse*

**On procède ainsi :**

- On relève les coordonnées des foyers : F<sub>1</sub> (0 ; 0) et F<sub>2</sub>(-34.5 ; 0) en unités astronomiques.
- Ensuite, on calcule les distances entre les deux points en fonction de leurs coordonnées ainsi :  
$$MF = \sqrt{(x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2}$$
- Grâce au tableur, on calcule alors la somme des deux distances, et on obtient une moyenne de 35,62598537 u.a..
- On obtient donc une valeur théorique de a = 17,81299269 u.a..

- Sur notre feuille, on mesure la distance  $a$  : 16.9 cm ce qui équivaut à environ 17,65671642 u.a..
- On calcule l'écart relatif :

$$\frac{|Valeur\ théorique - Valeur\ expérimentale|}{Valeur\ théorique} * 100 = \frac{|17,81299269 - 17,65671642|}{17,81299269} * 100 \approx 0,89\% \text{ d'erreur.}$$

On a donc un résultat théorique très proche de l'attendu.

**Nous venons donc de montrer que l'orbite est bien elliptique en vérifiant la propriété  $MF_1 + MF_2 = \text{constante} = 2 * a$ .**

**Calculons également les paramètres  $e$  et  $p$  de l'ellipse.** Ceux-ci correspondent, respectivement, à l'excentricité de l'ellipse et le paramètre focal de la trajectoire.

L'excentricité mesure le décalage du foyer sur l'axe principal de l'ellipse. Elle est proche de 0 pour une trajectoire presque circulaire, et plus proche de 1 quand l'ellipse est très allongée.

$$→ e = \frac{F_1 F_2}{2 * a}$$

On mesure alors la distance entre les deux foyers et on obtient la valeur d'environ 34,47761194 u.a..

$$e = \frac{F_1 F_2}{2 * a} = \frac{34,47761194}{2 * 17,81299269} \approx 0,967765848$$

$$→ p = a * (1 - e^2) = 17,81299269 * (1 - 0,967765848^2) \approx 1,129865009$$

### Question 3 :

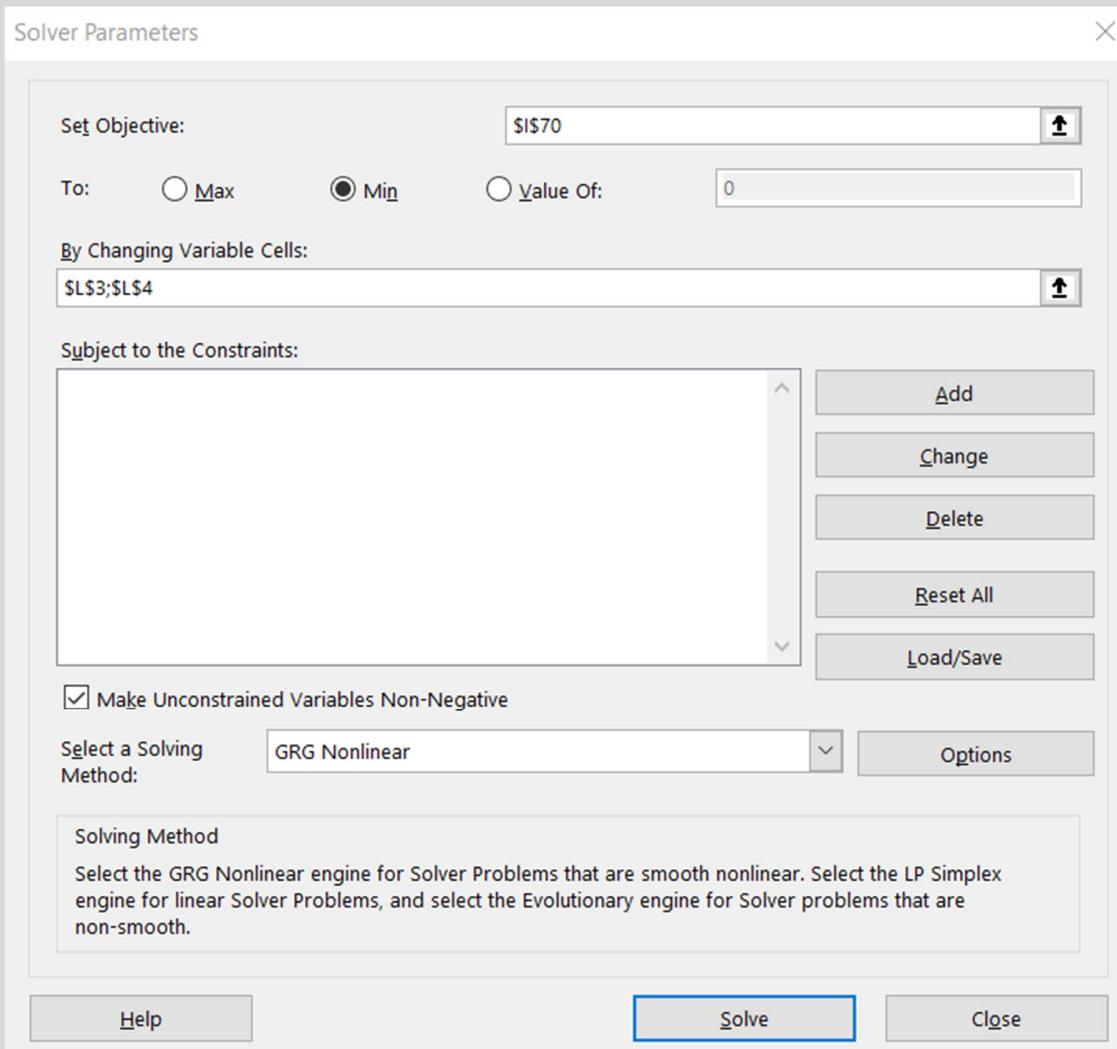
On cherche à présent à utiliser le solveur du logiciel Microsoft Excel afin de vérifier nos valeurs de  $p$  et  $e$ . Ainsi on calcule les coordonnées de la planète en coordonnées polaires pour chaque point de la comète à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}; \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Puis, on initialise les paramètres  $p$  et  $e$  dans de nouvelles cellules, par des valeurs quelconques ; ce qui nous permet de calculer  $r_{\text{théorique}}(\theta) = \frac{p}{1+e*\cos(\theta)}$  en fonction de ces valeurs.

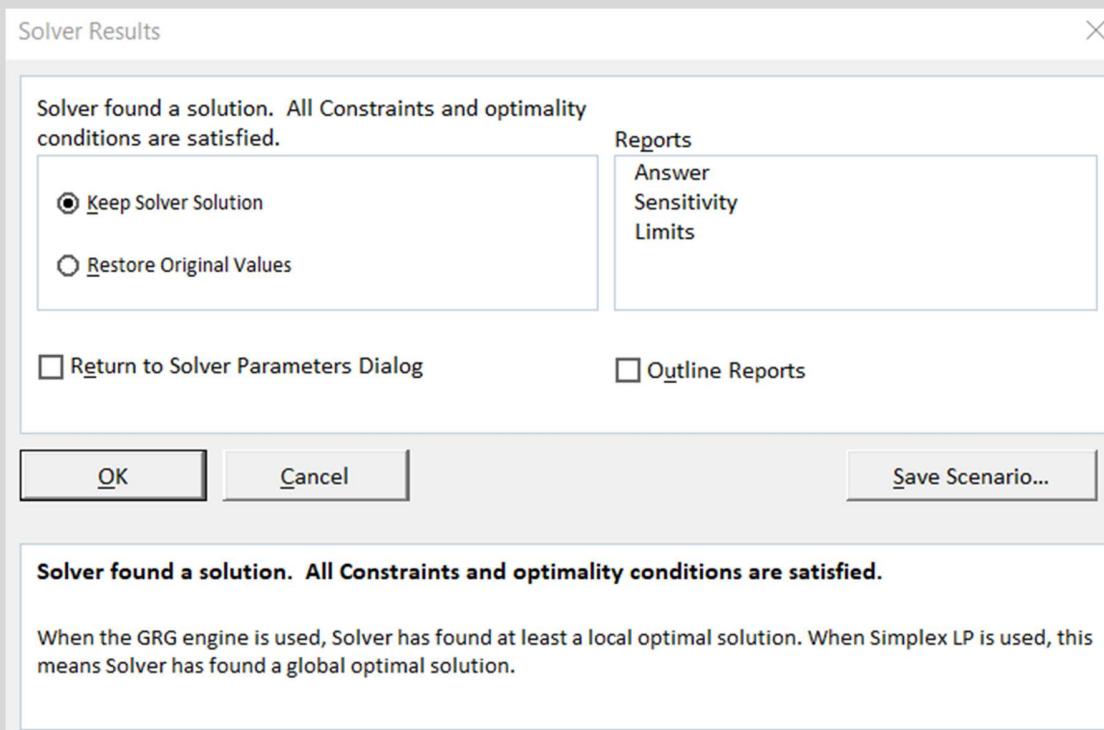
Afin de pouvoir lancer le solveur, nous devons calculer les écarts entre la valeur calculée de  $r$  (à partir des coordonnées mesurées connues) et la valeur théorique :  $Ecart = (r_{\text{théorique}} - r_{\text{mesuré}})^2$ . Le carré permet de se focaliser sur la valeur de l'écart et non son signe. Nous calculons la somme de ceux-ci.

Nous sommes enfin prêts pour utiliser le solveur : après l'avoir téléchargé (n'étant pas disponible de base dans le logiciel), nous l'initialisons ainsi :



L'objectif du solveur est de réduire au maximum la valeur de la somme des écarts (en cellule I70) en modifiant les variables e et p (en cellule L3 et L4 respectivement).

Nous conservons ensuite les valeurs trouvées par le solveur :



Ainsi, nous passons d'une somme des écarts d'environ 18000 à 6 uniquement. Voici les valeurs de e et p obtenues, ainsi que le calcul des écarts relatifs par rapport aux valeurs obtenues précédemment par calcul :

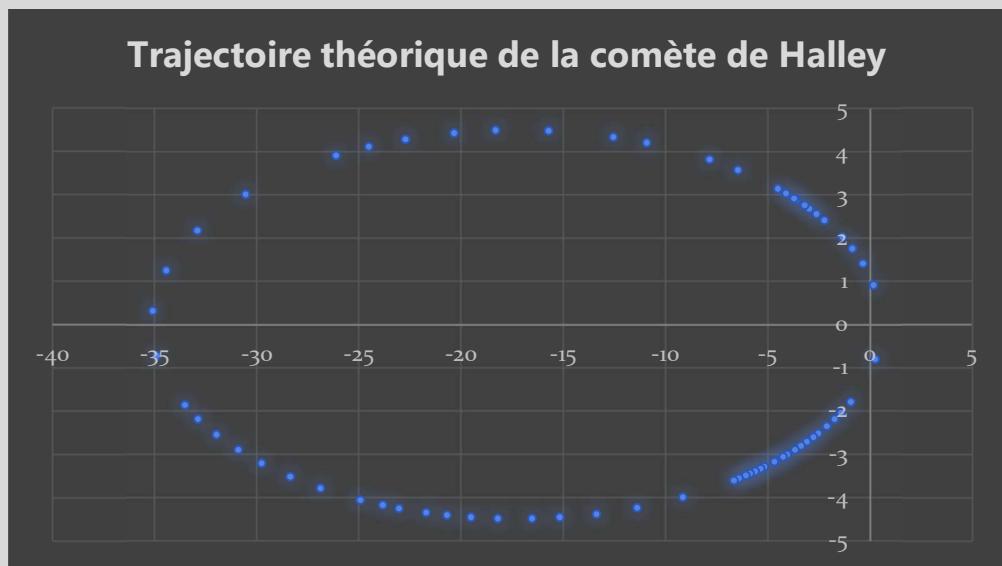
Valeurs solveur	Valeurs mesurées	% d'erreur
e = 0,967710739	0,967649699	0,006308094
p = 1,133771241	1,134005413	0,020650036

Nous pouvons voir que ces valeurs sont très proches (moins de 0.02% d'erreur au maximum), donc les valeurs du solveur vérifient les calculs et relations précédemment calculés.

On veut donc la trajectoire théorique de la comète de Halley, tracée à partir des coordonnées polaires théoriques précédemment repassée en coordonnées cartésiennes (EXCEL ne gérant pas les représentations en coordonnées polaires) :

$$\begin{cases} x_{th} = r_{th} * \cos(\theta) \\ y_{th} = r_{th} * \sin(\theta) \end{cases}$$

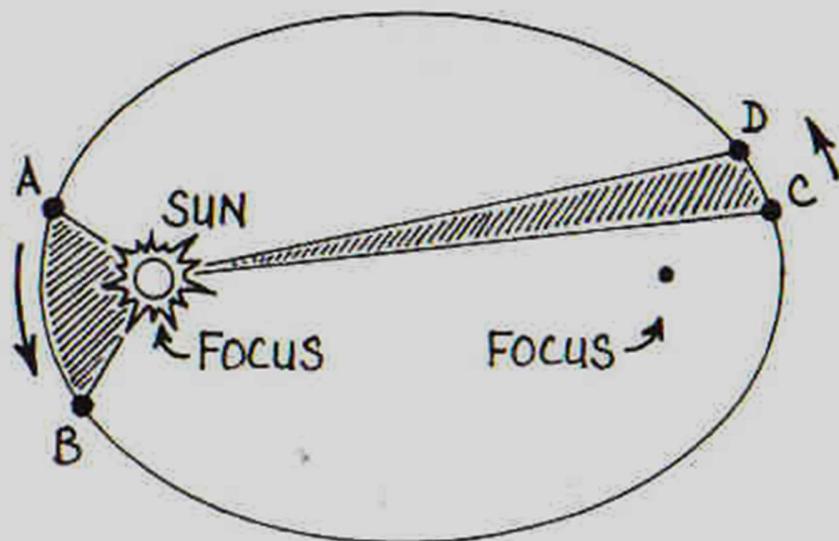
Ce qui nous donne le graphique suivant :



Tous les tableaux complets sont disponibles en annexe (pour ne pas surcharger la lecture de ce compte-rendu).

## I.B – DEUXIÈME LOI DE KEPLER : LA LOI DES AIRES (1609)

*"A line joining a planet and the Sun sweeps out equal areas during equal intervals of time"*



On représente sur la feuille A3 de la trajectoire les aires balayées par le rayon vecteur entre le

- 1er Janvier 1974 et le 1er Janvier 1978
- 1er Janvier 1980 et le 1er Janvier 1984
- 1er Janvier 2000 et le 1er Janvier 2004

A la suite de ça, nous calculons l'aire correspondante (en  $\text{u.a.}^2$ ) à ces triangles (approximation faite afin de simplifier les calculs) grâce à la formule de l'aire d'un triangle :

$$\text{Aire} = \frac{\text{base} * \text{hauteur}}{2}$$

Ce qui nous permet de calculer la surface aréolaire (en  $\text{u.a.}^2/\text{an}$ ).

Cas	Dates	Base (cm)	Base (u.a)	Hauteur (cm)	Hauteur (u.a)	Aire ( $\text{u.a.}^2$ )	Vitesse Aréolaire ( $\text{u.a.}^2/\text{an}$ )
1	Du 01/01/1974 au 01/01/1978	22,6	23,38	1,1	1,14	13,3266	3,33165
2	Du 01/01/1980 au 01/01/1984	15,4	15,93	1,5	1,55	12,34575	3,0864375
3	Du 01/01/2000 au 01/01/2004	27,3	28,24	1	1,03	14,5436	3,6359

Ces mesures sont donc prises sur des périodes identiques (4 ans). Nous en déduisons la constante des aires (moyenne des trois vitesses aréolaires) :

$$Vitesse\ aréolaire = \frac{constante}{2} \Leftrightarrow Constante = vitesse\ aérolaire * 2 \approx 6.702658334\ ua^2/an$$

Ceci fait, nous pouvons alors calculer la surface totale de l'orbite elliptique de la comète de Halley :

$$S = \pi * a * b = \pi * 17,56 * 4,5 \approx 251,8252514\ u.a.^2$$

Avec :

- a le demi grand-axe de l'ellipse
- b le demi petit-axe de l'ellipse

On peut ensuite calculer la période en année de la comète, en posant x celle-ci :

$$\begin{aligned} \frac{Aire}{4\ ans} &= \frac{Surface}{x} \\ \Leftrightarrow Vitesse\ aréolaire &= \frac{Surface}{x} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{Surface}{Vitesse\ Aréolaire} = \frac{251,8252514}{3,351329167} \approx 75,14190306\ ans \end{aligned}$$

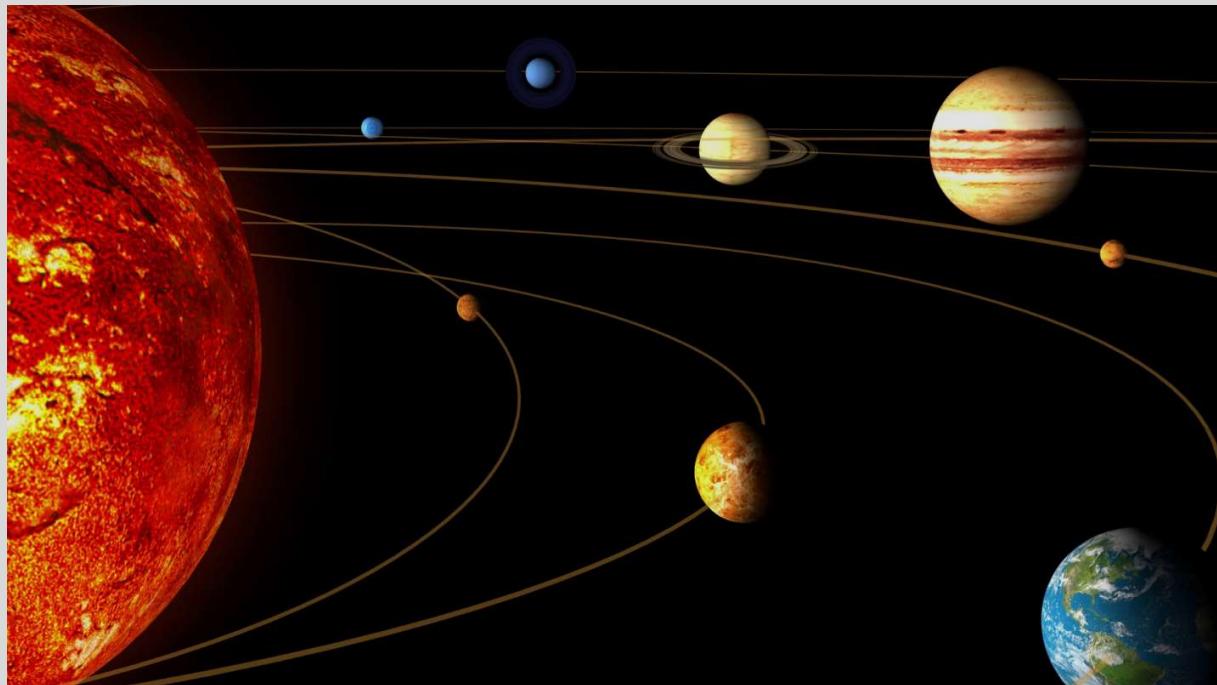
En réalité, nous savons que la comète de Halley a une période d'environ 76,09 années. Calculons l'écart relatif entre cette valeur et notre résultat :

$$\frac{|Valeur\ théorique - Valeur\ expérimentale|}{Valeur\ théorique} * 100 = \frac{|76,09 - 75,14190306|}{76,09} * 100 \approx 1,246\ %\ d'erreur.$$

Ce résultat est donc très proche de l'attendu, notre calcul est donc validé.

## I.C – TROISIEME LOI DE KEPLER : LA LOI DES PERIODES (1619)

*"The square of the orbital period of a planet is directly proportional to the cube of the semi-major axis of its orbit."*



### Question 1 :

On cherche à **calculer le rapport  $a^3/T^2$**  pour les différentes planètes du système solaire et différentes comètes afin de vérifier la Troisième loi de Kepler.

On effectue donc les recherches et calculs pour :

→ Différentes planètes :

- Mercure
- Vénus
- La Terre
- Mars
- Jupiter
- Saturne
- Uranus

→ Et différentes comètes :

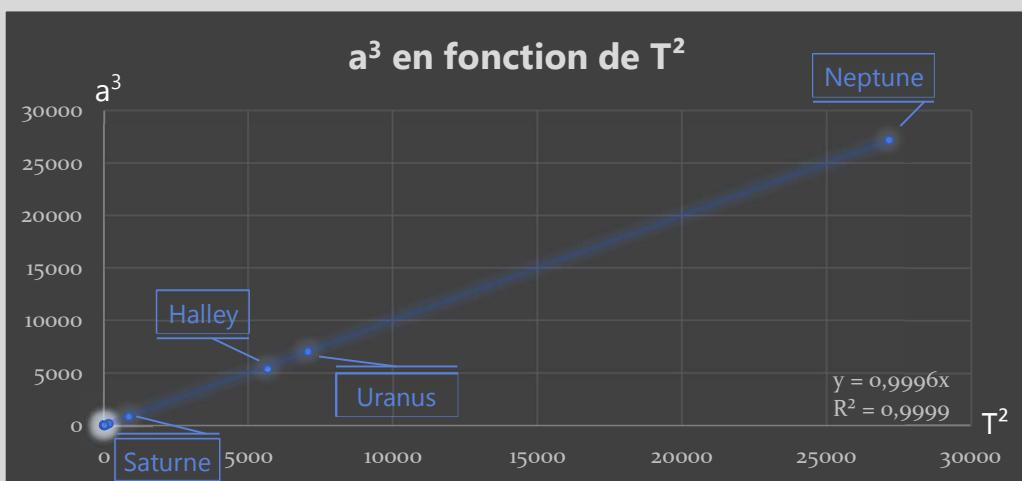
- Halley
- Encke
- Biela
- Faye
- Brorsen
- Arrest
- Pons-Winnecke
- Tuttle
- Temple 1
- Temple 2

astre	période	a (u.a)	$T^2$	$a^3$	Calcul de la constante
Mercure	0,24109589	0,387099275	0,058127228	0,058005219	<b>1,002103415</b>
Vénus	0,615616438	0,722501931	0,378983599	0,37715254	<b>1,004854956</b>
Terre	1,000684932	1,00000262	1,001370332	1,000007861	<b>1,00136246</b>
Mars	1,8808	1,523710358	3,53740864	3,537588058	<b>0,999949282</b>
Jupiter	11,87671233	5,202887053	141,0562957	140,8423278	<b>1,001519202</b>
Saturne	29,457	9,536676037	867,714849	867,3434226	<b>1,000428235</b>
Uranus	84,02	19,18916483	7059,3604	7065,911932	<b>0,999072797</b>
Neptune	164,77	30,06992306	27149,1529	27189,23264	<b>0,998525897</b>
Halley	75,32	17,56	5673,1024	5414,689216	<b>1,047724472</b>
Encke	3,3	2,275862069	10,89	11,78793718	<b>0,923825758</b>
Biela	6,62	3,5346	43,8244	44,1591616	<b>0,992419204</b>
Faye	7,52	3,84	56,5504	56,623104	<b>0,998716001</b>
Brorsen	5,46	3,11	29,8116	30,080231	<b>0,991069517</b>
Arrest	6,51	3,496	42,3801	42,72816794	<b>0,9918539</b>
Pons-Winnecke	6,37	3,548275862	40,5769	44,67372131	<b>0,908294604</b>
Tuttle	13,5	5,67	182,25	182,284263	<b>0,999812035</b>
Temple 1	5,51	3,12	30,3601	30,371328	<b>0,999630309</b>
Temple 2	5,47	3,11	29,9209	30,080231	<b>0,994703132</b>
					<b>0,99199251</b>

On remarque que **la valeur de la constante est très proche de 1**, pour tous ces objets en orbite dans notre système solaire.

## Question 2 :

On résume ce tableau en un graphique représentant l'évolution de  $a^3$  en fonction de  $T^2$  :

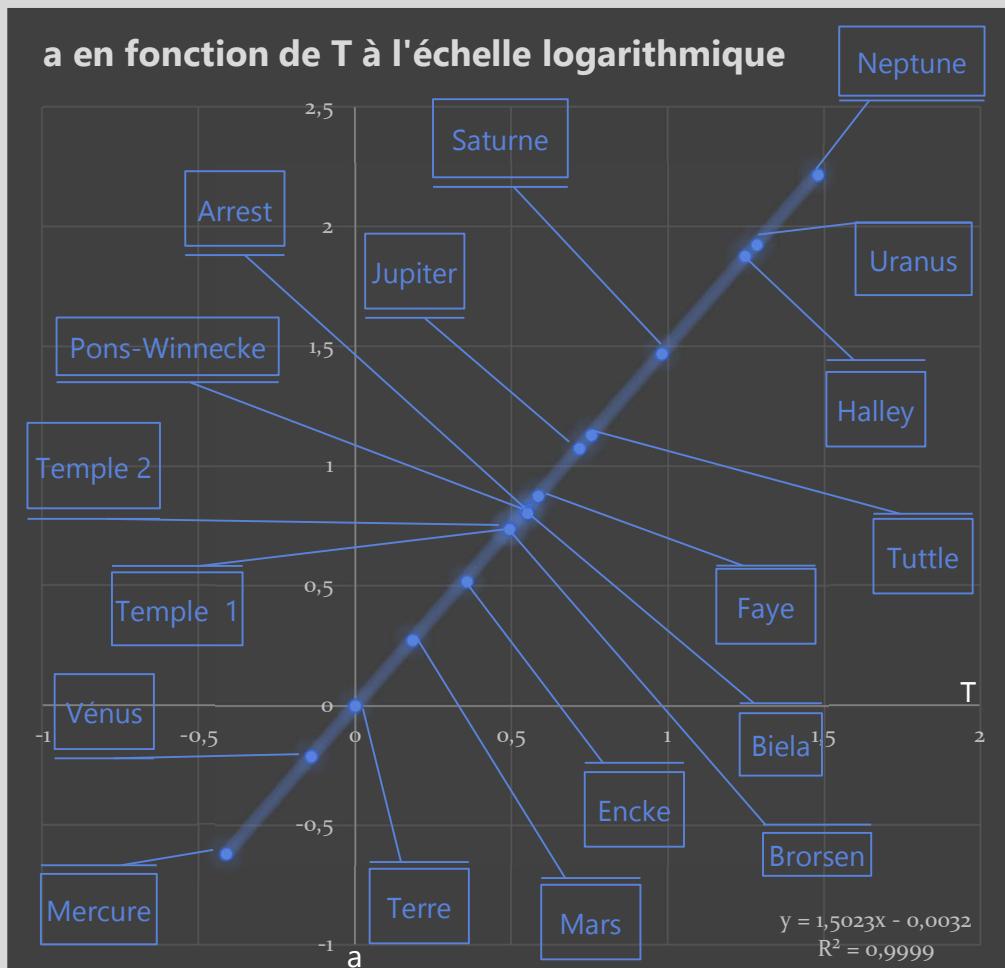


On retrouve comme coefficient de proportionnalité la valeur moyenne trouvée dans notre tableau précédemment. On peut également noter le  $R^2$  très haut qui atteste d'une excellente précision des données que nous avons et des résultats que l'on en a déduit.

Seule la comète de Halley et trois planètes sont visibles (Neptune, Uranus et Saturne). Les autres planètes et comètes sont regroupées à l'origine du repère.

### Question 3 :

On représente maintenant l'évolution de  $a$  en fonction de  $T$  en échelle logarithmique :



On peut donc voir qu'à l'échelle logarithmique,  $a$  en fonction de  $T$  est **quasiment parfaitement linéaire** ( $R^2 = 0.9999$ , ce qui est négligeable). On peut aussi noter le détail de l'ordre des planètes du système solaire, dans le même ordre qu'en réalité.

Avec cette échelle linéaire, toutes les planètes ainsi que toutes les comètes sont visibles, bien que certaines soient confondues (avec une échelle moins rapprochée, elles seraient certainement mieux discernables).

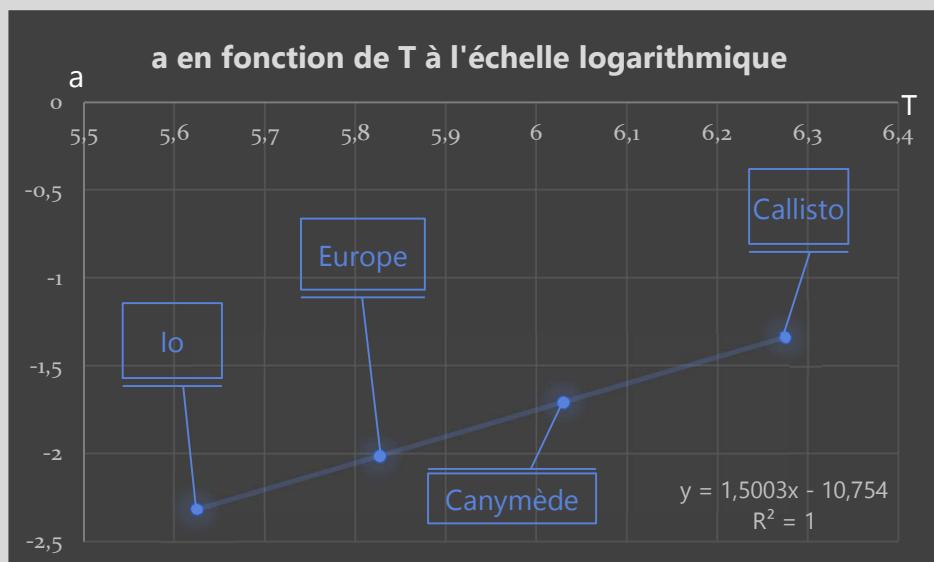
## Question 4 :

On s'intéresse à présent à Jupiter et ses satellites : Europe, Ganymède, Callisto et Io. On suit le même raisonnement que pour les questions précédentes, afin de vérifier la troisième loi de Kepler non pas sur un système solaire, mais sur des satellites en orbite autour de leur planète.

Lune	T	a	$T^2$	$a^3$	Rapport $a^3/T^2$
Europe	0,009729263	671100	9,46586E-05	3,02247E+17	3,19302E+21
Ganymède	0,019601515	1070400	0,000384219	1,22642E+18	3,19197E+21
Io	0,004846575	421800	2,34893E-05	7,50446E+16	3,19484E+21
Callisto	0,045723337	1882700	0,002090624	6,67334E+18	3,19203E+21

On peut donc voir que, malgré des demi-grands-axes très différents, et des périodes distinctes, on arrive toujours à une valeur très proche du rapport, d'environ **3,19297E+21** si l'on fait la moyenne des quatre résultats.

On représente ces résultats sur le graphique de a en fonction de T à l'échelle logarithmique :



## **Question 4 :**

Finalement, que dire sur la troisième loi de Kepler d'après nos travaux ?

Nous pouvons en déduire que nous calculs et formules sont corrects puisque nous retrouvons des résultats cohérents avec celle-ci. Nos résultats sont d'ailleurs très proches des attendus, d'après nos calculs de pourcentage d'erreur (écart relatif) ainsi que nos graphiques dont les coefficients R<sup>2</sup> sont très proches de 1, voir à 1 (cf. page ci-dessus).

**La troisième loi de Kepler est donc valable pour tout élément en orbite dans un système solaire, que ça soit des planètes, des comètes, ou bien des lunes satellites autour de leur planète.**

## **Démonstration de la Troisième Loi de Kepler :**

D'après la seconde loi de Newton  $\sum \vec{F} = m * \vec{a} = m * g$ ; donc ici  $\vec{a} = \vec{g}$ .

En passant à la base de Frenet pour un mouvement circulaire uniforme, on a :

$$a_t = 0 \quad a_t = \frac{v^2}{r} \quad \vec{a} = \frac{\vec{G} * \vec{m}}{r^2}$$

On a défini  $\vec{a} = g$ . On obtient donc :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\vec{G} * \vec{m}}{r^2} \Leftrightarrow \vec{v} = \sqrt{\frac{\vec{G} * \vec{m}}{r}}$$

On peut aussi en déduire la période T :

$$T = \frac{2 * \pi * r}{v} = \frac{2 * \pi * r}{\sqrt{\frac{\vec{G} * \vec{m}}{r}}} \Leftrightarrow T = \frac{2 * \pi * r^{3/2}}{\sqrt{\vec{G} * \vec{m}}}$$

On pose  $r = a$  avec a le demi grand-axe. On a alors :

$$T^2 = \left( \frac{2 * \pi * r^{3/2}}{\sqrt{\vec{G} * \vec{m}}} \right)^2 = \frac{4 * \pi^2 * r^3}{\vec{G} * \vec{m}} \Leftrightarrow \frac{4 * \pi^2}{\vec{G} * \vec{m}} = \frac{T^2}{a^3} \Leftrightarrow \frac{\vec{G} * \vec{m}}{4 * \pi^2} = \frac{a^3}{T^2}$$

On vient donc de démontrer la Troisième loi de Kepler.

## **PARTIE II : Loi de la Gravitation Universelle**

La limite des lois de Kepler est l'explication de la cause des mouvements observés. Pour comprendre, il faut alors se tourner vers Isaac Newton. Celui-ci publie en 1687 sa théorie, dans laquelle il montre qu'une loi d'attraction en  $1/r^2$  permet d'expliquer les orbites elliptiques des planètes. Grâce à la loi de la gravitation universelle, une nouvelle branche de l'astronomie voit le jour : la mécanique céleste, l'étude du mouvement des astres sous l'effet de la gravitation.

### **II.A – FORCE ATTRACTIVE EN $1/R^2$**

Pour cette partie, on utilisera comme support un agrandissement de la trajectoire de la comète de Halley, du 10 Décembre 1985 au 10 Mars 1986, c'est-à-dire dans la zone du périhélie. On cherche à montrer que l'accélération subie en chaque point (que nous devons tracer, voir Annexes) est dirigée vers le centre attracteur et qu'elle varie en  $1/r^2$ . On cherche également à trouver quel type de force s'exerce alors sur la comète.

#### **Question 1 :**

On relève les coordonnées de la trajectoire en tous points :

Date	x(ua)	y (ua)
10/12/1985	-0,17	1,3
16/12/1985	-0,075	1,23
21/12/1985	0	1,16
25/12/1985	0,06	1,09
29/12/1985	0,14	1,02
05/01/1986	0,225	0,9
10/01/1986	0,31	0,795
15/01/1986	0,385	0,695
20/01/1986	0,455	0,55
25/01/1986	0,51	0,42
30/01/1986	0,55	0,3
05/02/1986	0,58	0,115
<b>09/02/1986</b>	<b>0,59</b>	<b>0</b>
15/02/1986	0,575	-0,19
20/02/1986	0,54	-0,34
26/02/1986	0,475	-0,51
01/03/1986	0,435	-0,6
05/03/1986	0,38	-0,69
10/03/1986	0,31	-0,79

Avec en rouge le périhélie.

## Question 2 :

On cherche à présent à déterminer les normes des vecteurs vitesses et accélération en ces points, par calcul des composantes de chaque vecteur (composantes en x et y). Pour ceci, on convertit les valeurs des coordonnées en kilomètres, et le temps séparant chaque point en seconde. Ainsi nous aurons la vitesse en  $\text{km.s}^{-1}$ .

On utilise les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{x1} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} \\ v_{y1} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta t} \\ \|\vec{v}_1\| = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} \end{array} \right.$$

Pour obtenir le tableau suivant :

Date	x (km)	y (km)	$\Delta t$ (en s)	$v_x$	$v_y$	$\ v\ $ (en km/s)
10/12/1985	-25431637,9	1,94E+08				
16/12/1985	-11219840,25	1,84E+08	518400	27,41473312	-20,2003	34,05321
21/12/1985	0	1,74E+08	432000	25,97185243	-24,2404	35,52652
25/12/1985	8975872,2	1,63E+08	345600	25,97185243	-30,3005	39,90811
29/12/1985	20943701,8	1,53E+08	345600	34,62913657	-30,3005	46,0141
05/01/1986	33659520,75	1,35E+08	604800	21,02483292	-29,6821	36,37405
10/01/1986	46375339,7	1,19E+08	432000	29,43476609	-36,3606	46,78139
15/01/1986	57595179,95	1,04E+08	432000	25,97185243	-34,6291	43,28642
20/01/1986	68067030,85	82278829	432000	24,2403956	-50,2122	55,75721
25/01/1986	76294913,7	62831105	432000	19,04602512	-45,0179	48,88108
30/01/1986	82278828,5	44879361	432000	13,85165463	-41,555	43,80278
05/02/1986	86766764,6	17203755	518400	8,657284144	-53,3866	54,08397
<b>09/02/1986</b>	<b>88262743,3</b>	<b>0</b>	<b>345600</b>	<b>4,328642072</b>	<b>-49,7794</b>	<b>49,96723</b>
15/02/1986	86018775,25	-2,8E+07	518400	-4,328642072	-54,8295	55,00007
20/02/1986	80782849,8	-5,1E+07	432000	-12,1201978	-51,9437	53,33899
26/02/1986	71058988,25	-7,6E+07	518400	-18,75744898	-49,0579	52,52165
01/03/1986	65075073,45	-9E+07	259200	-23,08609105	-51,9437	56,84291
05/03/1986	56847190,6	-1E+08	345600	-23,80753139	-38,9578	45,6564
10/03/1986	46375339,7	-1,2E+08	432000	-24,2403956	-34,6291	42,27025
						46,67035

On fait ensuite de même avec les accélérations. Tout d'abord, il faut caractériser l'instant auquel elle s'applique, c'est-à-dire la date entre deux points :

Date	Instant d'application de l'accélération
10/12/1985	
16/12/1985	13/12/1985
21/12/1985	19/12/1985
25/12/1985	23/12/1985
29/12/1985	27/12/1985
05/01/1986	01/01/1986
10/01/1986	07/01/1986
15/01/1986	13/01/1986
20/01/1986	17/01/1986
25/01/1986	23/01/1986
30/01/1986	27/01/1986
05/02/1986	02/02/1986
<b>09/02/1986</b>	07/02/1986
15/02/1986	12/02/1986
20/02/1986	18/02/1986
26/02/1986	23/02/1986
01/03/1986	28/02/1986
05/03/1986	03/03/1986
10/03/1986	07/03/1986

Puis, on calcule l'accélération avec les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{x1/2} = \frac{\mathbf{v}_{x2} - \mathbf{v}_{x1}}{\Delta t} \\ \mathbf{a}_{y1/2} = \frac{\mathbf{v}_{y2} - \mathbf{v}_{y1}}{\Delta t} \\ \|\mathbf{a}_{1/2}\| = \sqrt{\mathbf{a}_{x1/2}^2 + \mathbf{a}_{y1/2}^2} \end{array} \right.$$

Avec  $\Delta t$  la durée entre les deux instants, en secondes (*86400 secondes \* nombre de jours*).

On a donc le tableau suivant :

<b>Instant d'application de l'accélération</b>	<b><math>a_x</math></b>	<b><math>a_y</math></b>	<b><math>\ a\ </math></b>
13/12/1985	-2,78333E-06	-2,9225E-05	2,93573E-05
19/12/1985			
23/12/1985	2,505E-05	-2,56996E-19	2,505E-05
27/12/1985			
01/01/1986	1,62229E-05	-1,28829E-05	2,07159E-05
07/01/1986			
13/01/1986	-5,01E-06	-1,8036E-05	1,87189E-05
17/01/1986			
23/01/1986	-1,503E-05	1,002E-05	1,80638E-05
27/01/1986			
02/02/1986	-1,002E-05	8,35E-06	1,30431E-05
07/02/1986			
12/02/1986	-1,12725E-05	5,56667E-06	1,25721E-05
18/02/1986			
23/02/1986	-1,002E-05	-6,68E-06	1,20425E-05
28/02/1986			
03/03/1986	-1,2525E-06	1,2525E-05	1,25875E-05
07/03/1986			
			1,80168E-05

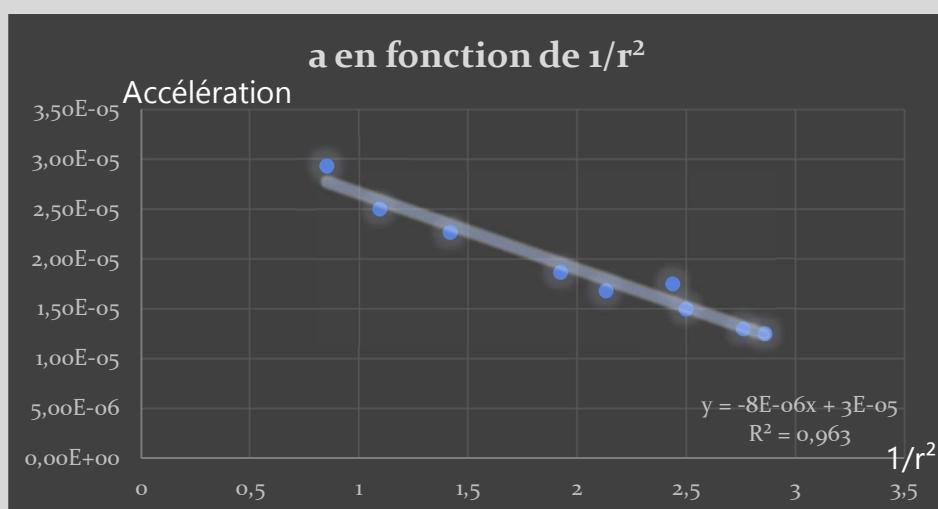
Avec l'accélération en  $\text{km.s}^{-2}$ .

#### **Question 4 :**

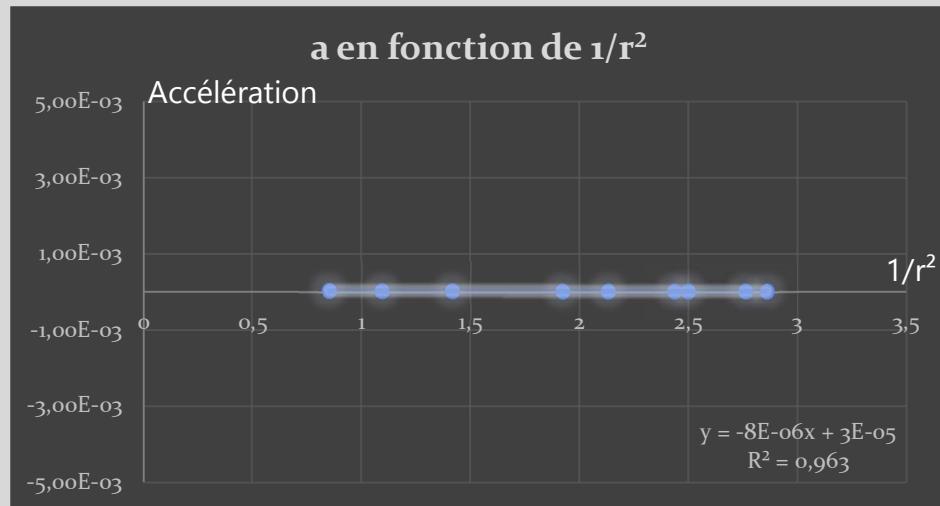
On relève la valeur de la vitesse de la comète au périhélie de sa trajectoire :  $v_p \approx 49,96723 \text{ km.s}^{-1}$ .

#### **Question 6 :**

On trace la courbe représentant la norme de l'accélération en fonction de  $1/r^2$  :



On remarque que nos valeurs sont peu précises (coefficient  $R^2 = 0.963$ ) et se décalent de la ligne de tendance. Néanmoins le coefficient de l'équation de la droite est très faible, ce qui signifie que, sur une échelle moins agrandie de ce graphique, les points seraient quasiment tous sur la même ligne horizontale :



On peut donc dire que l'accélération en fonction de  $1/r^2$  est une **constante**, qui ne dépend que peu de  $1/r^2$  ( $-8 \cdot 10^{-6} \cdot 1/r^2$ ) au périhélie. Elle est également inversement proportionnelle à  $1/r^2$  (courbe décroissante).

### Question 7 :

La force appliquée sur la comète est donc constante, et sa trajectoire est elliptique par rapport au Soleil. De ce fait, la force à laquelle est soumise la comète est toujours orientée vers un même point. On en déduit que la force appliquée à la comète est une **force centrale attractive**.

### Question 8 :

On part de l'expression connue de la force d'attraction gravitationnelle exercée par le soleil de masse  $M_s$  sur la comète de masse  $m_c$  située à une distance  $r$  de celui-ci :

$$\overrightarrow{F_{gravitationnelle}} = -G * \frac{M_s * m_c}{r^2} * \overrightarrow{U_r}$$

$$or : \overrightarrow{F_{grav}} = m_c * \vec{a}$$

$$d'où -G * \frac{M_s * m_c}{r^2} * \overrightarrow{U_r} = m_c * \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow G * \frac{M_s}{r^2} = \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow G * M_s * \frac{1}{r^2} = \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow M_s = \frac{a * r^2}{G} = \frac{1.8016^{-05} * (2.68 * 10^{12})^2}{6.674 * 10^{-11}} \approx 1.937 * 10^{30} \text{ kg.}$$

On calcule à présent l'écart relatif entre notre résultat et la masse théorique du Soleil (=  $1.959 \cdot 10^{30}$  kg) :

$$\frac{|Valeur\ théorique - Valeur\ expérimentale|}{Valeur\ théorique} * 100 = \frac{|1.989 \cdot 10^{30} - 1.937 \cdot 10^{30}|}{1.989 \cdot 10^{30}} * 100 \approx 2.614\% \text{ d'erreur.}$$

**Notre résultat est donc très proche de la valeur attendue (< 3% d'erreur).**

## **II.B – CONSERVATION DU MOMENT CINETIQUE**

### **Question 1 :**

Nous avons montré précédemment que la comète est soumise à une force centrale attractive. Ainsi, le moment des forces appliquée sur elle est nul (par définition d'une force centrale).

### **Question 2 :**

On pose  $\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge \vec{p}$  tels que  $\vec{r}$  est le rayon vecteur et  $\vec{p}$  la quantité de mouvement, avec  $\vec{p} = m * \vec{v}$ . D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{r} \wedge \frac{m d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{r} \wedge m \vec{a}\end{aligned}$$

D'après le principe d'inertie,  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ , ce qui implique que  $\vec{L}_0 = \text{constante}$ , donc **le moment cinétique se conserve**.

Ici, puisque le moment des forces appliquées à la comète est nul, alors cela signifie que le moment cinétique se conserve :

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge \vec{p} = r * \vec{ur} \wedge m \left( r * \dot{\vec{Ur}} \wedge r * \dot{\theta} * \vec{U\theta} \right) = m * r^2 * \dot{\theta} * \vec{Uz}$$

Ainsi,  $L_0 = m * r^2 * \dot{\theta}$ .

### **Question 3 :**

On rappelle que la vitesse aréolaire est l'air balayée par unité de temps par le rayon vecteur d'un point. Elle s'exprime ainsi :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} * \|r \wedge p\|$$

On pose a tel que

$$\frac{dS}{dt} = \|\vec{Lo}\| * a$$

Calculons a :

$$\frac{dS}{dt} = \|\vec{Lo}\| * a \Leftrightarrow m * r^2 * \dot{\theta} = \left( \frac{1}{2} * r^2 * \dot{\theta} \right) * a \Leftrightarrow \frac{1}{2 * m}$$

On en déduit que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\|\vec{Lo}\|}{2 * m}$$

On cherche ensuite à calculer la constante des aires C :

On sait que  $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m * \vec{v}$

On passe aux coordonnées polaires :

$$\vec{L} = r * \overrightarrow{Ur} \wedge m * (\dot{r} * \overrightarrow{Ur} + r * \dot{\theta} * \overrightarrow{U\theta}) \Leftrightarrow \vec{L} = m * r * 2 * \dot{\theta} * \overrightarrow{Uz}$$

On en déduit que

$$\frac{L}{m} = r^2 * \theta$$

On sait aussi que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} * \|r \wedge p\| = \frac{1}{2} * r^2 * \theta$$

Donc :

$$r^2 * \theta = 2 * \frac{dS}{dt}$$

On pose la constante des aires  $C = r^2 * \theta$  : alors  $C = 2 * \frac{dS}{dt} = 2 * 3,351329167 \approx 6.70 \text{ ua}^2/\text{an}$ .

(Calcul déjà effectué dans la partie 2 sur les lois de Kepler).

#### **Question 4 :**

On veut maintenant calculer la vitesse à l'aphélie de la comète.

Après recherches, on trouve  $v_a^2 = \frac{G*(M_s+m_c)}{a} * \frac{1+e}{1-e} \Leftrightarrow v_a = \sqrt{\frac{G*(M_s+m_c)}{a} * \frac{1+e}{1-e}}$

(source : [https://astronomia.fr/7eme\\_partie/formulaire.php](https://astronomia.fr/7eme_partie/formulaire.php))

Avec :

- G la constante de la gravitation de Newton
- M<sub>s</sub> la masse du Soleil et m<sub>c</sub> la masse de la comète (négligeable)
- a le demi grand-axe
- e l'excentricité de l'orbite elliptique

On trouve alors :  $v_a = \sqrt{\frac{6,674*10^{-11}*(1,989*10^{30})}{17,81299269} * \frac{1+0,967765848}{1-0,967765848}} \approx 903.34 \text{ m/s}$

D'après la page Wikipédia consacrée à la comète (<https://fr.wikipedia.org/wiki/1P/Halley>) on devrait trouver une valeur de 910 m/s. Calculons l'écart relatif :

$$\frac{|Valeur \text{ théorique} - Valeur \text{ expérimentale}|}{Valeur \text{ théorique}} * 100 = \frac{|910 - 903.34|}{910} * 100 \approx 0.73 \% \text{ d'erreur.}$$

## II.C – CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE

On cherche à montrer que l'énergie mécanique se conserve ou non. Pour ceci, nous allons calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation en différents points, car nous savons que l'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles du système, c'est-à-dire, d'après l'expression de la force gravitationnelle de Newton :

$$\rightarrow \text{Energie cinétique : } E_c = \frac{1}{2} * m_c * v^2$$

$$\rightarrow \text{Energie potentielle de gravitation : } F = -G \frac{m_c \times m_s}{r^2} \text{ donc } E_{pg} = -G \frac{m_c \times m_s}{r}$$

On obtient alors :

$$E_m = \frac{1}{2} * m_c * v^2 - G \frac{m_s * m_c}{r}$$

On calcule tout d'abord l'énergie potentielle de gravitation par unité de masse sur la trajectoire de 1<sup>er</sup> Janvier 1960 au 1<sup>er</sup> Janvier 2000 :

Date	x (ua)	y (ua)	r (ua)	r (m)	Ep/m (J/Kg)
01/01/1960	-32,80988161	2,294290421	32,89	4,95E+12	-2,75E+07
01/01/1970	-26,94413793	4,267532206	27,28	4,14E+12	-3,30E+07
01/01/1983	-9,647040033	4,295138951	10,56	1,57E+12	-8,69E+07
01/06/1984	-6,192081637	3,575	7,15	1,09E+12	-1,29E+08
01/10/1987	-6,001556048	-3,465	6,93	1,05E+12	-1,31E+08
01/01/1989	-9,315509117	-3,95419902	10,12	1,56E+12	-8,95E+07
01/01/2000	-25,16271163	-3,536388495	25,41	3,90E+12	-3,50E+07

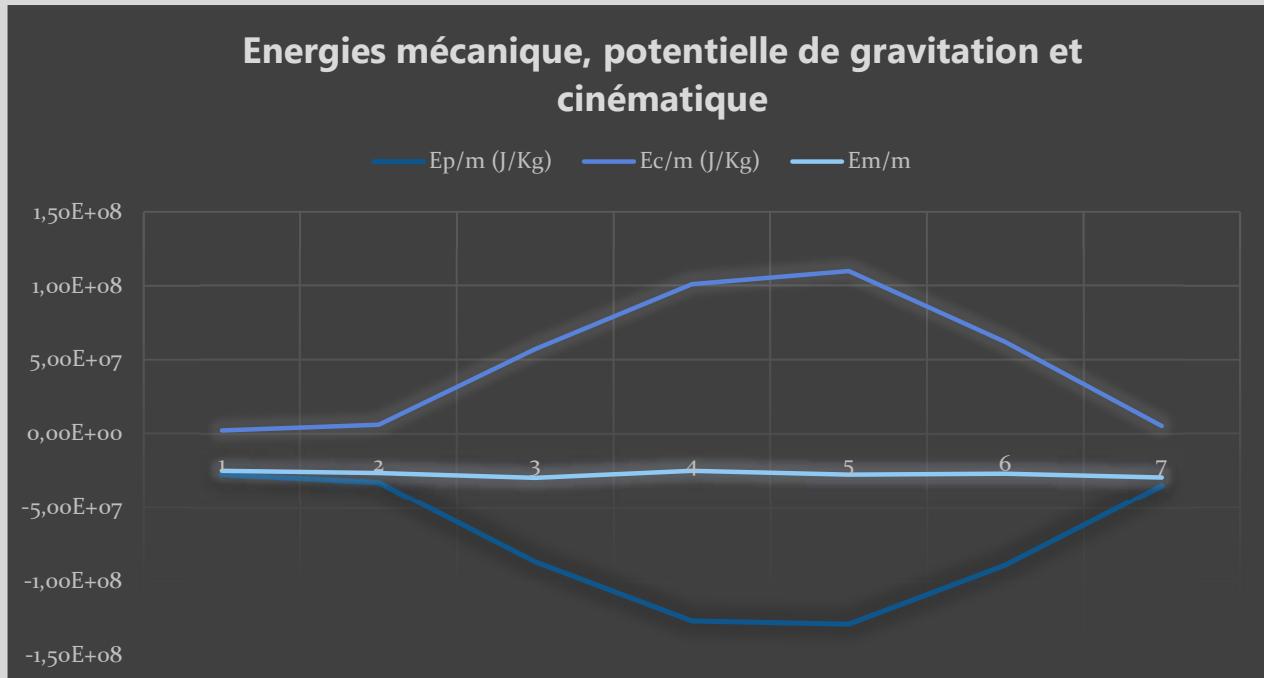
Puis l'énergie cinétique par unité de masse sur la même période :

date	v (ua/an)	v (m/s)	v <sup>2</sup> (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Ec/m (J/Kg)
01/01/1960	0,42	1992,36	3,97E+06	1,98E+06
01/01/1970	0,73	3456,14	1,19E+07	5,97E+06
01/01/1983	2,25	10673,36	1,14E+08	5,70E+07
01/06/1984	3	14231,15	2,03E+08	1,01E+08
01/10/1987	3	14231,15	2,03E+08	1,01E+08
01/01/1989	2,35	11147,74	1,24E+08	6,21E+07
01/01/2000	0,68	3203,01	1,03E+07	5,13E+06

On obtient alors l'énergie mécanique :

Date	Ep/m (J/Kg)	Ec/m (J/Kg)	Em/m
01/01/1960	-2,72E+07	1,98E+06	-2,52E+07
01/01/1970	-3,27E+07	5,97E+06	-2,67E+07
01/01/1983	-8,69E+07	5,70E+07	-3,00E+07
01/06/1984	-1,27E+08	1,01E+08	-2,53E+07
01/10/1987	-1,29E+08	1,10E+08	-2,78E+07
01/01/1989	-8,93E+07	6,21E+07	-2,72E+07
01/01/2000	-3,47E+07	5,13E+06	-2,96E+07

On les représente sur un graphique :



**L'énergie mécanique est toujours négative et semble plutôt constante. On peut donc dire que l'énergie mécanique de la comète se conserve.**

## **ANNEXES**

### **Annexe I : Coordonnées De La Trajectoire (Complet)**

Date	x (u.a)	y (u.a)
01/01/1950	0,310344828	34,89690239
01/01/1955	-34,26865672	1,24137931
01/01/1960	-32,85820896	2,172413793
01/01/1965	-30,40298507	3
01/01/1970	-26,95522388	4,034482759
01/01/1972	-25,28358209	4
01/01/1974	-23,29850746	4,396551724
01/01/1976	-21,10447761	4,603448276
01/01/1978	-18,3358209	4,5
01/01/1980	-15,41044776	4,396551724
01/01/1982	-11,80597015	4,086206897
01/01/1983	-9,664179104	3,724137931
01/01/1984	-7,208955224	3,517241379
01/06/1984	-6,059701493	3,310344828
01/02/1985	-4,28358209	3
01/03/1985	-3,970149254	2,948275862
01/04/1985	-3,656716418	2,896551724
01/05/1985	-3,395522388	2,74137931
01/06/1985	-3,029850746	2,637931034
01/07/1985	-2,71641791	2,482758621
01/08/1985	-2,402985075	2,379310345
01/09/1985	-1,985074627	2,172413793
01/10/1985	-1,253731343	1,913793103
01/11/1985	0,208955224	0,931034483
08/11/1985	-0,835820896	1,75862069
01/12/1985	-0,313432836	1,396551724
01/01/1986	0,365671642	-1,034482759
01/06/1986	-0,940298507	-1,862068966
01/07/1986	-1,358208955	-2,017241379
01/08/1986	-1,755223881	-2,275862069
01/09/1986	-2,141791045	-2,431034483
01/10/1986	-2,507462687	-2,534482759
01/11/1986	-2,820895522	-2,689655172
01/12/1986	-3,134328358	-2,793103448
01/01/1987	-3,447761194	-2,896551724
01/02/1987	-3,76119403	-3
01/03/1987	-4,074626866	-3,051724138
01/04/1987	-4,335820896	-3,155172414
01/05/1987	-4,649253731	-3,206896552

01/06/1987	-4,805970149	-3,289655172
01/07/1987	-5,171641791	-3,320689655
01/08/1987	-5,432835821	-3,413793103
01/09/1987	-5,694029851	-3,465517241
01/10/1987	-5,955223881	-3,527586207
01/11/1987	-6,174626866	-3,568965517
01/12/1987	-6,425373134	-3,589655172
01/01/1988	-6,665671642	-3,631034483
01/01/1989	-9,204477612	-4,034482759
01/01/1990	-11,3880597	-4,251724138
01/01/1991	-13,37313433	-4,396551724
01/01/1992	-15,09701493	-4,448275862
01/01/1993	-16,6119403	-4,520689655
01/01/1994	-18,09552239	-4,468965517
01/01/1995	-19,43283582	-4,448275862
01/01/1996	-20,73880597	-4,427586207
01/01/1997	-21,8880597	-4,396551724
01/01/1998	-23,03731343	-4,262068966
01/01/1999	-24,02985075	-4,220689655
01/01/2000	-25,05373134	-4,086206897
01/01/2002	-26,74626866	-3,775862069
01/01/2004	-28,29253731	-3,517241379
01/01/2006	-29,67164179	-3,206896552
01/01/2008	-30,82089552	-2,896551724
01/01/2010	-31,76119403	-2,534482759
01/01/2012	-32,59701493	-2,172413793
01/01/2014	-33,43283582	-1,862068966
01/01/2020	-34,68656716	-0,724137931

## Annexe II : Distances aux foyers et calculs de a, p et e

Date	x (u.a)	y (u.a)	Distance MF1	Distance MF2	MF1 + MF2
01/01/1986	0,365671642	-1,034482759	1,097210248	34,85863688	35,95584713
01/11/1985	0,208955224	0,931034483	0,954194683	34,69906003	35,65325471
01/12/1985	-0,313432836	1,396551724	1,431292025	34,19271107	35,6240031
08/11/1985	-0,835820896	1,75862069	1,947137206	33,68772553	35,63486274
01/06/1986	-0,940298507	-1,862068966	2,086015847	33,58896684	35,67498268
01/10/1985	-1,253731343	1,913793103	2,28789124	33,278955	35,56684624
01/07/1986	-1,358208955	-2,017241379	2,431870545	33,18077933	35,61264987
01/08/1986	-1,755223881	-2,275862069	2,874084033	32,80143638	35,67552041
01/09/1985	-1,985074627	2,172413793	2,942771307	32,56507888	35,50785019
01/09/1986	-2,141791045	-2,431034483	3,239937891	32,42707575	35,66701364
01/08/1985	-2,402985075	2,379310345	3,381634958	32,16275495	35,54438991
01/10/1986	-2,507462687	-2,534482759	3,56524501	32,07045441	35,63569942
01/07/1985	-2,71641791	2,482758621	3,680083781	31,85808432	35,5381681
01/11/1986	-2,820895522	-2,689655172	3,89765269	31,77077178	35,66842447
01/06/1985	-3,029850746	2,637931034	4,017297062	31,55820597	35,57550304
01/12/1986	-3,134328358	-2,793103448	4,198266443	31,46748882	35,66575526
01/05/1985	-3,395522388	2,74137931	4,364027132	31,2027475	35,56677463
01/01/1987	-3,447761194	-2,896551724	4,503006678	31,16475011	35,66775678
01/04/1985	-3,656716418	2,896551724	4,664931602	30,95670546	35,62163706
01/02/1987	-3,76119403	-3	4,811089329	30,86257166	35,67366099
01/03/1985	-3,970149254	2,948275862	4,94514061	30,64959396	35,59473457
01/03/1987	-4,074626866	-3,051724138	5,090737109	30,55576086	35,64649797
01/02/1985	-4,28358209	3	5,229634358	30,34269992	35,57233428
01/04/1987	-4,335820896	-3,155172414	5,362318137	30,30647918	35,66879732
01/05/1987	-4,649253731	-3,206896552	5,647985991	30,00025231	35,64823831
01/06/1987	-4,805970149	-3,289655172	5,824017533	29,85344465	35,67746219
01/07/1987	-5,171641791	-3,320689655	6,145962789	29,49350549	35,63946828
01/08/1987	-5,432835821	-3,413793103	6,416360994	29,24470898	35,66106997
01/09/1987	-5,694029851	-3,465517241	6,665717193	28,99145405	35,65717124
01/06/1984	-6,059701493	3,310344828	6,813448051	28,71384689	35,52729495
01/10/1987	-5,955223881	-3,527586207	6,921600676	28,73970224	35,66130292
01/11/1987	-6,174626866	-3,568965517	7,131867343	28,52711831	35,65898565
01/12/1987	-6,425373134	-3,589655172	7,360098109	28,28097817	35,64107628
01/01/1988	-6,665671642	-3,631034483	7,590493387	28,04796667	35,63846006
01/01/1984	-7,208955224	3,517241379	8,021223245	27,4945563	35,51577954
01/01/1989	-9,204477612	-4,034482759	10,04984872	25,5931313	35,64298002
01/01/1983	-9,664179104	3,724137931	10,35690886	25,09134617	35,44825502
01/01/1990	-11,3880597	-4,251724138	12,15586533	23,4777465	35,63361183
01/01/1982	-11,80597015	4,086206897	12,49311882	23,03693617	35,530055
01/01/1991	-13,37313433	-4,396551724	14,07730048	21,55756578	35,63486626
01/01/1992	-15,09701493	-4,448275862	15,7387108	19,88453416	35,62324497
01/01/1980	-15,41044776	4,396551724	16,02534141	19,56748366	35,59282507

01/01/1993	-16,6119403	-4,520689655	17,21607375	18,42875086	35,64482461
01/01/1994	-18,09552239	-4,468965517	18,63919481	16,98070996	35,61990478
01/01/1978	-18,3358209	4,5	18,87994512	16,75730939	35,63725452
01/01/1995	-19,43283582	-4,448275862	19,9354525	15,68860882	35,62406131
01/01/1996	-20,73880597	-4,427586207	21,20616874	14,43462189	35,64079063
01/01/1976	-21,10447761	4,603448276	21,6007109	14,14328313	35,74399403
01/01/1997	-21,8880597	-4,396551724	22,32525083	13,33516002	35,66041084
01/01/1998	-23,03731343	-4,262068966	23,42825307	12,20842585	35,63667893
01/01/1974	-23,29850746	4,396551724	23,70970512	12,01257857	35,7222837
01/01/1999	-24,02985075	-4,220689655	24,39770375	11,26809368	35,66579742
01/01/2000	-25,05373134	-4,086206897	25,38476986	10,27164117	35,65641103
01/01/1972	-25,28358209	4	25,63686451	10,12519053	35,76205504
01/01/2002	-26,74626866	-3,775862069	27,01147944	8,604115488	35,61559493
01/01/1970	-26,95522388	4,034482759	27,25547918	8,536004525	35,79148371
01/01/2004	-28,29253731	-3,517241379	28,5103254	7,115204499	35,6255299
01/01/2006	-29,67164179	-3,206896552	29,84443855	5,777675533	35,62211408
01/01/1965	-30,40298507	3	30,55063831	5,059899613	35,61053793
01/01/2008	-30,82089552	-2,896551724	30,95670546	4,664931602	35,62163706
01/01/2010	-31,76119403	-2,534482759	31,86215701	3,715175516	35,57733252
01/01/2012	-32,59701493	-2,172413793	32,66932451	2,873330267	35,54265477
01/01/1960	-32,85820896	2,172413793	32,929945	2,709584418	35,63952941
01/01/2014	-33,43283582	-1,862068966	33,48465039	2,135148232	35,61979862
01/01/1955	-34,26865672	1,24137931	34,29113378	1,258842674	35,54997645
01/01/2020	-34,68656716	-0,724137931	34,69412511	0,753682976	35,44780809
01/01/1950	-34,89552239	0,310344828	34,89690239	0,520541117	35,41744351

a = 17,81490167
e = 0,967662145
p = 1,133561708

### Annexe III : Valeurs Théoriques Et Solveur

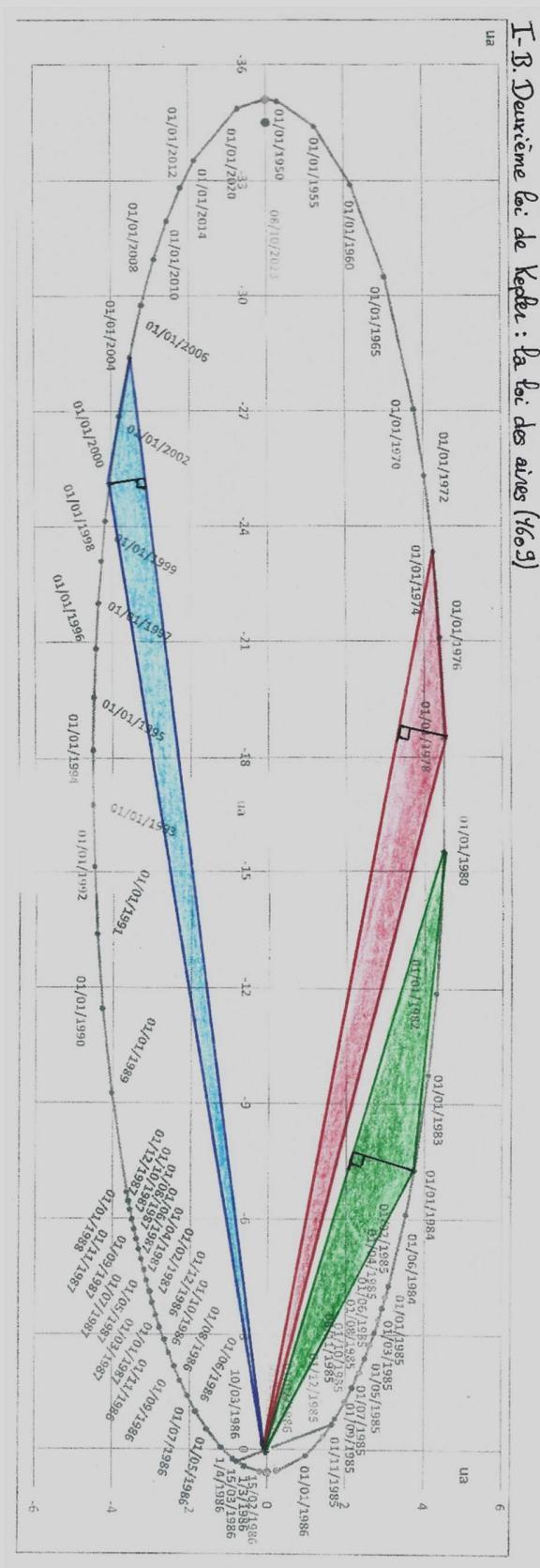
x (u.a)	xth	y (u.a)	yth	θ	r	rth	écart r
0,365672	0,285711	-1,03448	-0,80827	-1,23102	1,09721	0,857286	0,057564
0,208955	0,204866	0,931034	0,912813	1,350021	0,954195	0,93552	0,000349
-0,31343	-0,31504	1,396552	1,403722	1,791571	1,431292	1,438641	5,4E-05
-0,83582	-0,83249	1,758621	1,751617	2,014466	1,947137	1,939383	6,01E-05
-0,9403	-0,90647	-1,86207	-1,79508	-2,03842	2,086016	2,010975	0,005631
-1,25373	-1,32271	1,913793	2,019094	2,15075	2,287891	2,413776	0,015847
-1,35821	-1,37796	-2,01724	-2,04658	-2,16338	2,431871	2,467242	0,001251
-1,75522	-1,69287	-2,27586	-2,19501	-2,22775	2,874084	2,771975	0,010426
-1,98507	-2,20262	2,172414	2,410488	2,311164	2,942771	3,265269	0,104004
-2,14179	-2,08027	-2,43103	-2,3612	-2,29303	3,239938	3,146866	0,008662
-2,40299	-2,57937	2,37931	2,553958	2,361145	3,381635	3,629856	0,061613
-2,50746	-2,49651	-2,53448	-2,52341	-2,35084	3,565245	3,549668	0,000243
-2,71642	-2,9293	2,482759	2,677327	2,401106	3,680084	3,968484	0,083175
-2,8209	-2,7386	-2,68966	-2,61119	-2,38001	3,897653	3,783943	0,01293
-3,02985	-3,16523	2,637931	2,755801	2,425233	4,017297	4,196801	0,032222
-3,13433	-3,04994	-2,7931	-2,7179	-2,4137	4,198266	4,085226	0,012778
-3,39552	-3,57072	2,741379	2,882823	2,462385	4,364027	4,589192	0,050699
-3,44776	-3,35082	-2,89655	-2,81511	-2,44286	4,503007	4,376398	0,01603
-3,65672	-3,68101	2,896552	2,915797	2,471676	4,664932	4,695927	0,000961
-3,76119	-3,64056	-3	-2,90378	-2,46831	4,811089	4,656776	0,023813
-3,97015	-4,08022	2,948276	3,030019	2,502837	4,945141	5,082249	0,018799
-4,07463	-4,02526	-3,05172	-3,01475	-2,49876	5,090737	5,029056	0,003805
-4,28358	-4,47875	3	3,136684	2,530633	5,229634	5,467904	0,056772
-4,33582	-4,21418	-3,15517	-3,06665	-2,51252	5,362318	5,211877	0,022633
-4,64925	-4,58822	-3,2069	-3,1648	-2,53777	5,647986	5,57384	0,005498
-4,80597	-4,64434	-3,28966	-3,17902	-2,54135	5,824018	5,628147	0,038365
-5,17164	-5,13748	-3,32069	-3,29876	-2,57079	6,145963	6,105369	0,001648
-5,43284	-5,31482	-3,41379	-3,33963	-2,58058	6,416361	6,276976	0,019428
-5,69403	-5,58675	-3,46552	-3,40022	-2,59486	6,665717	6,540125	0,015773
-5,95522	-6,4272	3,310345	3,572702	2,634252	6,813448	7,35344	0,291591
-5,95522	-5,82727	-3,52759	-3,45179	-2,60682	6,921601	6,772882	0,022117
-6,17463	-6,05268	-3,56897	-3,49848	-2,6175	7,131867	6,991012	0,01984
-6,42537	-6,37798	-3,58966	-3,56318	-2,63212	7,360098	7,305814	0,002947
-6,66567	-6,62895	-3,63103	-3,61103	-2,6428	7,590493	7,54868	0,001748
-7,20896	-7,82105	3,517241	3,81588	2,687673	8,021223	8,702283	0,463842
-9,20448	-9,13354	-4,03448	-4,00339	-2,7285	10,04985	9,972396	0,005999
-9,66418	-10,9049	3,724138	4,202238	2,773775	10,35691	11,68652	1,767855
-11,3881	-11,3705	-4,25172	-4,24519	-2,78427	12,15587	12,13717	0,00035
-11,806	-12,5289	4,086207	4,33641	2,808384	12,49312	13,25809	0,585175
-13,3731	-13,3472	-4,39655	-4,38802	-2,82396	14,0773	14,04999	0,000746
-15,097	-15,1586	-4,44828	-4,46641	-2,85505	15,73871	15,80288	0,004118
-15,4104	-15,7053	4,396552	4,480673	2,863679	16,02534	16,33196	0,094015

-16,6119	-16,5136	-4,52069	-4,49394	-2,87589	17,21607	17,11419	0,01038
-18,0955	-18,1887	-4,46897	-4,49198	-2,89947	18,63919	18,73517	0,00921
-18,3358	-18,297	4,5	4,490482	2,900928	18,87995	18,84001	0,001595
-19,4328	-19,4962	-4,44828	-4,46277	-2,91656	19,93545	20,00042	0,00422
-20,7388	-20,6799	-4,42759	-4,415	-2,93126	21,20617	21,14588	0,003634
-21,1045	-20,3176	4,603448	4,431808	2,92683	21,60071	20,79533	0,648646
-21,8881	-21,6935	-4,39655	-4,35747	-2,94337	22,32525	22,12679	0,039387
-23,0373	-23,0165	-4,26207	-4,25821	-2,95865	23,42825	23,40707	0,000449
-23,2985	-22,7034	4,396552	4,284254	2,955081	23,70971	23,10411	0,366747
-24,0299	-23,82	-4,22069	-4,18383	-2,96772	24,3977	24,18465	0,045392
-25,0537	-24,9167	-4,08621	-4,06386	-2,97992	25,38477	25,24596	0,019268
-25,2836	-24,5076	4,241379	4,111204	2,975388	25,63686	24,85002	0,619122
-26,7463	-26,8634	-3,77586	-3,7924	-3,00135	27,01148	27,12976	0,013991
-26,9552	-26,1067	4,034483	3,907487	2,993022	27,25548	26,39754	0,736057
-28,2925	-28,3535	-3,51724	-3,52482	-3,01791	28,51033	28,57177	0,003775
-29,6716	-29,7477	-3,2069	-3,21512	-3,03393	29,84444	29,92095	0,005854
-30,403	-30,5222	3	3,011763	3,043237	30,55064	30,67043	0,014349
-30,8209	-30,8966	-2,89655	-2,90366	-3,04789	30,95671	31,03273	0,005779
-31,7612	-31,966	-2,53448	-2,55082	-3,06196	31,86216	32,06758	0,042198
-32,597	-32,8557	-2,17241	-2,18966	-3,07505	32,66932	32,92863	0,067239
-32,8582	-32,8892	2,172414	2,174462	3,075574	32,92994	32,96099	0,000964
-33,4328	-33,5048	-1,86207	-1,86608	-3,08595	33,48465	33,55672	0,005195
-34,2687	-34,4139	1,241379	1,24664	3,105384	34,29113	34,43646	0,021119
-34,6866	-34,8776	-0,72414	-0,72813	-3,12072	34,69413	34,88519	0,036506
-34,8955	-35,07	0,310345	0,311897	3,132699	34,8969	35,07139	0,030444
							6,692896

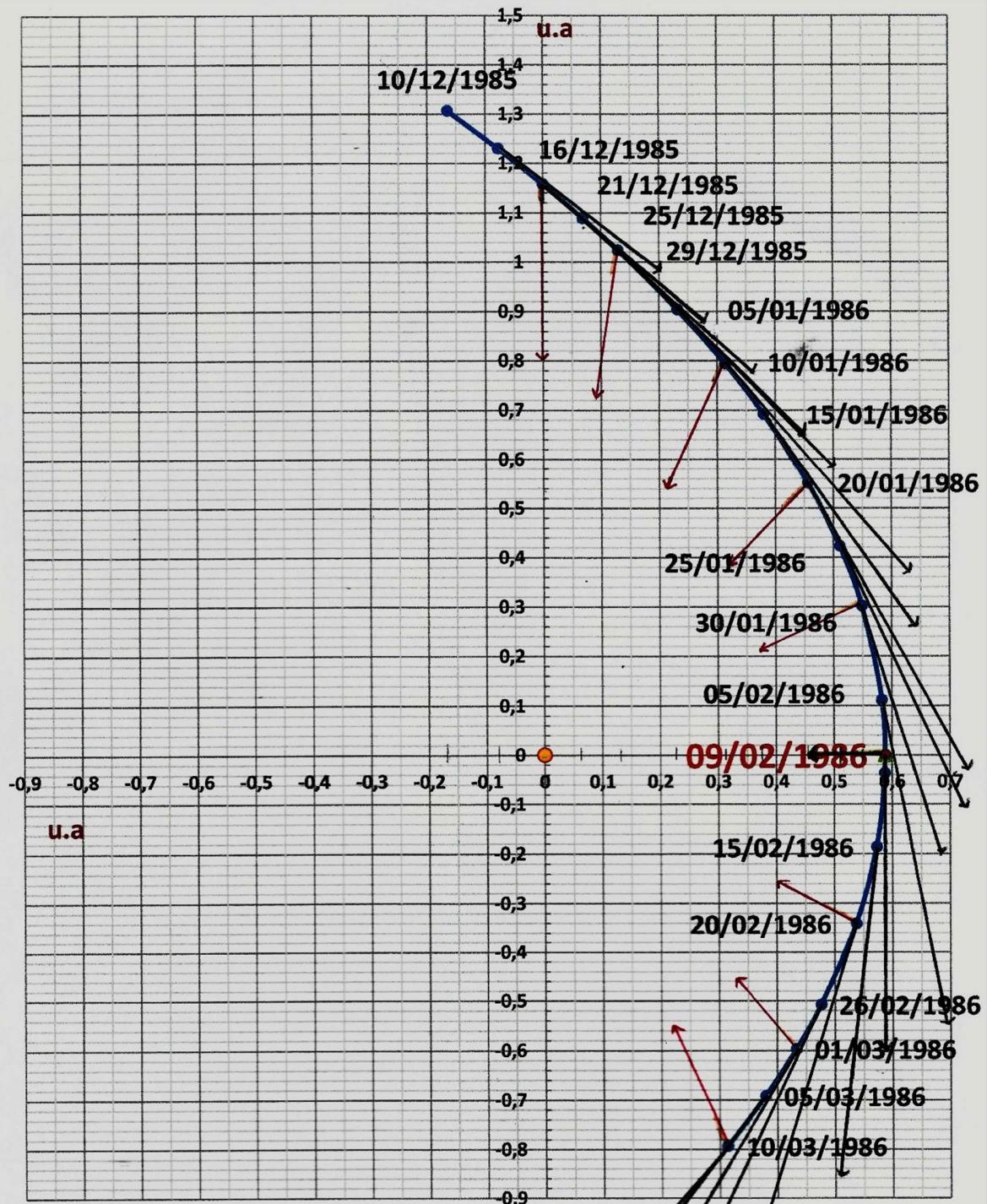
Somme des écarts

Valeurs solveur	Valeurs mesurées	% d'erreur
e = 0,967710739	0,967649699	0,006308094
p = 1,133771241	1,134005413	0,020650036

## Annexe IV : Graphique des aires (Deuxième loi de Kepler)



## Annexe V : Tracés des vecteurs vitesse et accélération au périhélie



→ vecteurs vitesse. Echelle : 0,1cm → 1 km/s

→ vecteurs accélération. Echelle : 1cm →  $1 \times 10^{-5}$  km/s<sup>2</sup>

→ vecteurs  $\Delta V$

## **Annexe VI : Bilan personnel du mini-projet**

Malgré quelques soucis de logiciels, ce mini projet fut très intéressant pour moi. Un peu long, je ne pensais pas passer autant de temps dessus, cependant j'en ai beaucoup appris.

Je me suis particulièrement appliquée sur la première partie, concernant les lois de Kepler, car celle-ci m'a paru plus simple que la deuxième, sur Newton. J'ai eu plus de difficultés pour cette deuxième partie donc, et des résultats moins corrects... Je retiens aussi que je dois continuer de travailler sur tout ce qui concerne les tracés de vecteurs vitesse et accélération sur une trajectoire, car je pense que mon rendu est incorrect. Je dois également retravailler tout ce qui concerne les démonstrations.

J'ai également pu perfectionner ma maîtrise des logiciels EXCEL et WORD du pack office, notamment sur l'utilisation du solveur, et sur la mise en page de nombreux graphiques et tableau (de manière respective).

Mes connaissances générales sur la mécanique céleste et la comète de Halley sont donc approfondies, ainsi que mes connaissances physiques plus globalement.

## **Annexe VII : Crédits photos et sources**

Toutes les images utilisées dans ce compte-rendu ont été trouvées sur Google Pictures et sont libres de droit. Certaines ont été légèrement modifiées par mes soins afin de correspondre à mes attentes (exemple de la photo de la comète de Halley en couverture).

Les sources, quand elles ont été utilisées, sont citées aux endroits concernés par leur utilisation.