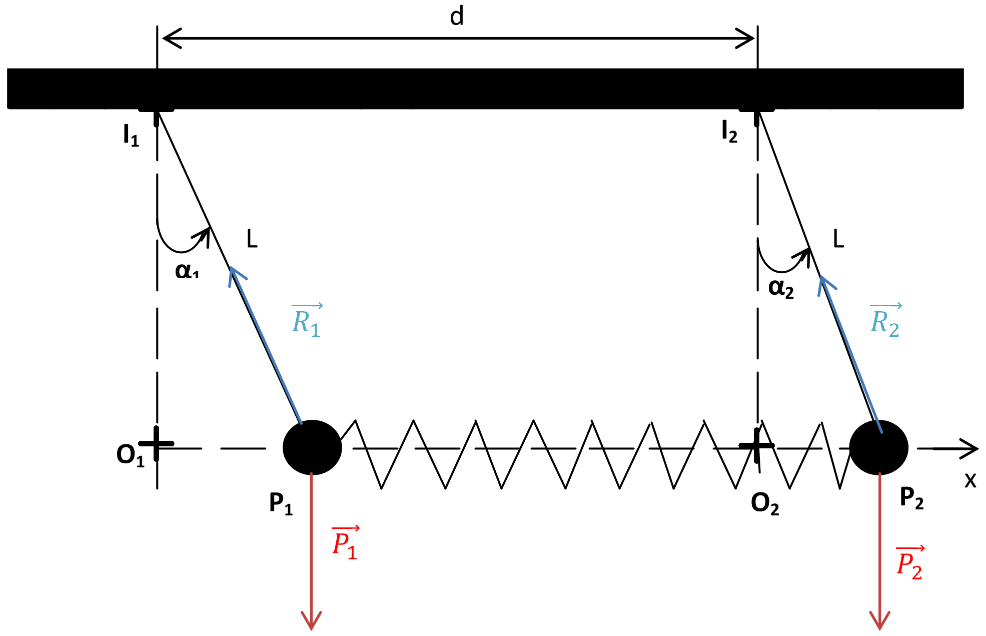
Corrigé T.D. N° 2 Physique des Ondes I
Oscillateurs couplés

Exercice 1 : *Pendules couplés et battements*

1) **On utilise le théorème du moment cinétique pour exprimer le moment du poids. Or, on n'étudie que les oscillations de faible amplitude, on peut donc considérer que les poids des pendules et les tensions des fils ont des résultantes horizontales.**



On a de plus $sin\alpha_1 \approx \alpha_1$ **et** $P = -mg$. **Donc pour P_1 :**

$$-mg\ sin\alpha_1 \approx -mg\ \alpha_1 \approx -mg\frac{x_1}{l}$$

Pour P_2 :

$$-mg\ sin\alpha_2 \approx -mg\ \alpha_2 \approx -mg\frac{x_2}{l}$$

Lorsque la distance P_1P_2 est (d ± ε), la force de rappel du ressort a pour module kε .
Or ε peut s'écrire $x_2 - x_1$. Donc les forces de rappel du ressort sont des fonctions proportionnelles à son allongement, elles peuvent s'écrire respectivement pour P_1 et P_2:

$$f_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$f_2 = -k(x_2 - x_1)$$
$$= k(x_1 - x_2)$$

On sait que $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Donc les équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -mg\frac{x_1}{l} + k(x_2 - x_1)$$

et

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -mg\frac{x_2}{l} + k(x_1 - x_2)$$

Ou encore :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)x_2 - \frac{k}{m}x_1 = 0$$

Pour trouver deux équations différentielles indépendantes on fait la somme et la différence des deux équations précédentes :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \frac{g}{l}(x_1 + x_2) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)(x_1 - x_2) = 0$$

On peut donc faire un changement de variables pour un système symétrique :

$$X_1 = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad X_2 = x_1 - x_2$$

Les équations deviennent donc :

$$\frac{d^2X_1}{dt^2} + \frac{g}{l}X_1 = 0$$

$$\frac{d^2X_2}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)X_2 = 0$$

2) **Ces équations différentielles sont de la forme : y'' + ay' = 0**

Les solutions sont donc de la forme :

$$X_1 = 2a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) \quad \text{et} \quad X_2 = 2a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ **et** $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$ **(par identification)**

On peut écrire :

$$x_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{X_1 - X_2}{2}$$

On peut donc en déduire les solutions générales des équations :

$$x_1 = a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) - a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Les quatre constantes d'intégration a_1, a_2, φ_1, φ_2 sont déterminées avec les conditions initiales.

3) 1ère Méthode :

Si les deux pendules décrivent un mouvement purement sinusoïdal alors on a :

$$x_1 = A \sin(\omega t - \varphi_1) \quad \text{et} \quad x_2 = B \sin(\omega t - \varphi_2)$$

Ensuite on dérive pour trouver les équations différentielles du mouvement qui deviennent :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi_1) = -\omega^2 x_1 \quad \text{avec } a_1 = A$$

Et

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -B\omega^2 \sin(\omega t - \varphi_2) = -\omega^2 x_2 \quad \text{avec } a_2 = B$$

Ensuite on remplace dans les expressions précédentes des équations différentielles du mouvement :

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0$$
$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) x_2 - \frac{k}{m} x_1 = 0$$

On additionne ces deux équations :

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) x_1 + \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) x_2 = \frac{k}{m} x_1 + \frac{k}{m} x_2$$

$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)(x_1+x_2) = \frac{k}{m}(x_1+x_2)$$
$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right) = \frac{k}{m}$$

Ou si on soustraie ces deux équations on obtient :

$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)x_1-\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)x_2 = \frac{k}{m}x_2-\frac{k}{m}x_1$$
$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)(x_1-x_2) = -\frac{k}{m}(x_1-x_2)$$

$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right) = -\frac{k}{m}$$

Donc :

$$\omega = \frac{g}{l}+\frac{k}{m}\mp\frac{k}{m}$$

On retrouve bien les deux pulsations ω_1 et ω_2 :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$$

On appelle ces deux pulsations des pulsations propres, correspondant aux deux modes propres d'oscillation.

2ème Méthode :

Si les deux pendules décrivent un mouvement purement sinusoïdal de même pulsation, on peut distinguer deux cas définis par les conditions initiales :

Premier cas : $a_2 = 0$

On a alors :

$$x_1 = a_1\sin(\omega_1 t-\varphi_1) \quad \text{et} \quad x_2 = a_1\sin(\omega_1 t-\varphi_1) = x_1$$

Dans ce cas les deux pendules oscillent en phase avec la même amplitude et pulsation. On appelle ce mouvement un mode propre antisymétrique. Ce cas est identique à deux pendules non couplés (le ressort n'est ni comprimé ni tendu), ce mouvement est dit antisymétrique. Leur pulsation est donc telle que le ressort de couplage ne joue aucun rôle :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Deuxième cas : $a_1 = 0$

On a alors :

$$x_1 = a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2) \quad \text{et} \quad x_2 = -a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2) = -x_1$$

Dans ce cas les deux pendules oscillent en opposition de phase, leurs mouvements sont symétriques par rapport au centre du segment O_1O_2. On appelle ce mouvement un mode propre symétrique. Le milieu du ressort est immobile et les deux moitiés du ressort ont une raideur de 2k, leur pulsation est donc :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

Tout se passe comme si chaque pendule oscillait sous l'action de la pesanteur et d'un ressort de raideur 2k.

4) On reprend les équations générales du mouvement :

$$x_1 = a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) - a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Donc à t = 0 ces équations deviennent :

$$x_1 = a_1 \sin(-\varphi_1) + a_2 \sin(-\varphi_2)$$

$$x_2 = a_1 \sin(-\varphi_1) - a_2 \sin(-\varphi_2)$$

On a donc les vitesses v_1 et v_2 qui s'expriment tel que :

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = a_1\omega_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2\omega_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = a_1\omega_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) - a_2\omega_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Donc à t = 0 on a :

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = a_1\omega_1 \cos(-\varphi_1) + a_2\omega_2 \cos(-\varphi_2)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = a_1\omega_1 \cos(-\varphi_1) - a_2\omega_2 \cos(-\varphi_2)$$

On rappelle que : $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ et $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

On a de plus : $x_1 = 0$; $v_1 = 0$ d'où :

$$-a_1 \sin(\varphi_1) - a_2 \sin(\varphi_2) = 0 \quad (1)$$

$$a_1\omega_1 \cos(\varphi_1) + a_2\omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \quad (2)$$

Et on a $x_2 = a$; $v_2 = 0$ d'où :

$$-a_1 \sin(\varphi_1) + a_2 \sin(\varphi_2) = a \quad (3)$$

$$a_1\omega_1 \cos(\varphi_1) - a_2\omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \quad (4)$$

On soustraie et on additionne les équations (1) et (3) et on obtient :

$$-2a_1 \sin(\varphi_1) = -a$$
$$a_1 \sin(\varphi_1) = \frac{a}{2}$$

De même :

$$-2a_2 \sin(\varphi_2) = -a$$
$$a_2 \sin(\varphi_2) = \frac{a}{2}$$

On soustraie et on additionne les équations (2) et (4) et on obtient :

$$a_1\omega_1 \cos(\varphi_1) = 0$$
$$a_2\omega_2 \cos(\varphi_2) = 0$$

Donc :

$$\cos(\varphi_1) = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$\cos(\varphi_2) = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc :

$$a_1 = a_2 = \pm\frac{a}{2}$$

On rappelle que : $\sin(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t)$

On peut donc écrire :

$$a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) = \frac{a}{2}\cos(\omega_1 t)$$

$$a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2) = -\frac{a}{2}\cos(\omega_2 t)$$

Ce qui nous donne finalement :

$$x_1 = \frac{a}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{a}{2}\cos(\omega_2 t)$$
$$x_1 = \frac{a}{2}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

Et :

$$x_2 = \frac{a}{2}\cos(\omega_1 t) - \frac{a}{2}\cos(\omega_2 t)$$
$$x_2 = \frac{a}{2}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t))$$

Ces deux équations ne nous renseignent pas sur les mouvements des pendules on recherche donc une autre écriture.
On rappelle que :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2cos\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2sin\left(\frac{a+b}{2}\right)sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

On retrouve donc :

$$x_1 = a\,sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_2}{2}t\right)sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

$$x_2 = a\,cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

On pose : $\omega = \frac{-\omega_1 + \omega_2}{2}$ **et** $\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
Ce qui nous donne :

$$x_1 = a\,sin(\omega t)sin(\Omega t)$$

$$x_2 = a\,cos(\omega t)cos(\Omega t)$$

Ces deux équations nous montrent que les pendules effectuent des battements.
Leur pulsation est Ω et leur amplitude :

- **Pour P_1 : $A_1 = a\,sin(\omega t)$**

- **Pour P$_2$: $A_2 = a\,cos(\omega t)$**

(voir cours pour figure des battements et superposition de x_1 et x_2)

Si l'on définit la période des battements T comme l'intervalle de temps entre deux annulations successives de l'amplitude, on a :

$$A_1 = 0$$
$$A_2 = 0$$

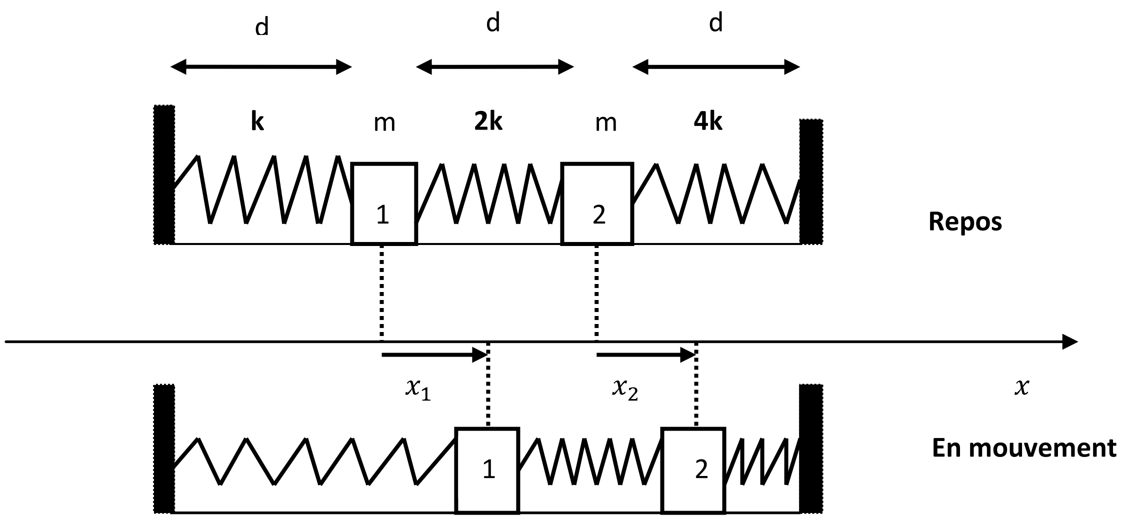
Autrement dit, on peut calculer la période des battements, en la reliant à la pulsation des battements :

$$T_B = \frac{\pi}{\omega_B}[2\pi] = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}[2\pi]$$

Elle est la même pour les deux pendules, mais leurs variations d'amplitudes sont en quadrature. L'amplitude de P$_1$ est maximale lorsque P$_2$ n'oscille pas et inversement.

Exercice 2 : *Couplage de deux oscillateurs harmoniques dissymétriques*

1) **Le ressort de gauche a pour longueur instantanée $d + x_1$ et donc pour allongement x_1. Le ressort central a pour longueur instantanée $d - x_1 + x_2$ et donc pour allongement $x_2 - x_1$. Enfin le ressort de droite a pour longueur instantanée $d - x_2$ et donc pour allongement $-x_2$.**



2) **On écrit la relation fondamentale de la dynamique pour chacune des masses en mouvement, en faisant attention au sens des forces de rappel :**

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - 2k(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x_2} = -4kx_2 - 2k(x_2 - x_1)$$

En posant $\omega_0{}^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{x_1} + 3\omega_0{}^2 x_1 - 2\omega_0{}^2 x_2 = 0$$

Et

$$\ddot{x_2} + 6\omega_0{}^2 x_2 - 2\omega_0{}^2 x_1 = 0$$

On utilise le changement de variable classique symétrique, S = x_1+x_2 et D = x_1-x_2 , pour découpler les équations. En ajoutant et en retranchant les deux équations précédentes, membre à membre, on obtient le système :

$$\begin{cases} \ddot{S} + \dfrac{\omega_0{}^2}{2} S - \dfrac{3\omega_0{}^2}{2} D = 0 \\ \ddot{D} - \dfrac{3\omega_0{}^2}{2} D + \dfrac{13\omega_0{}^2}{2} S = 0 \end{cases}$$

Avec ce changement de variable, les équations ne sont pas découplées et cela n'a servi à rien, on tourne en rond. C'était prévisible car ce changement de variable symétrique ne fonctionne que pour un couplage entre deux oscillateurs identiques. Il faut utiliser une autre méthode pour résoudre le système.

3) **Utilisons la notation complexe et recherchons donc les solutions sous la forme $\underline{x_1} = \underline{A_1} e^{j\omega t}$ et $\underline{x_2} = \underline{A_2} e^{j\omega t}$ avec comme inconnues les amplitudes complexes et la pulsation. On a le système suivant :**

$$\begin{cases} (3\omega_0{}^2 - \omega^2)\underline{A_1} - 2\omega_0{}^2 \underline{A_2} = 0 \\ -2\omega_0{}^2 \underline{A_1} + (6\omega_0{}^2 - \omega^2)\underline{A_2} = 0 \end{cases}$$

La solution identiquement nulle n'est pas intéressante physiquement. On calcule donc le déterminant *Det* de ce système. On écrit alors <u>l'équation aux valeurs propres</u> de la matrice des coefficients de ce système, ainsi l'on obtiendra les <u>pulsations propres</u> des deux <u>modes propres</u>. Ce déterminant doit être nul pour obtenir des solutions, car le second membre est nul. Celles-ci sont les pulsations propres ω' et ω'' , pulsations propres des modes propres :

$$Det = (3\omega_0{}^2 - \omega^2) \times (6\omega_0{}^2 - \omega^2) - (-2\omega_0{}^2) \times (-2\omega_0{}^2) = 0$$

$$Det = (\omega^2 - 2\omega_0{}^2) \times (\omega^2 - 7\omega_0{}^2) = 0$$

Les deux valeurs des pulsations propres sont donc $\omega' = \sqrt{2}\omega_0$ et $\omega'' = \sqrt{7}\omega_0$.

On trouve alors $\underline{A_1} = 2\underline{A_2}$ pour $\omega = \omega'$ et $\underline{A_2} = -2\underline{A_1}$ pour $\omega = \omega''$.

La solution générale du régime libre s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux modes propres :

$$x_1(t) = A' \cos(\omega' t + \varphi') + A'' \cos(\omega'' t + \varphi'')$$

$$x_2(t) = \frac{A'}{2} \cos(\omega' t + \varphi') - 2A'' \cos(\omega'' t + \varphi'')$$

Avec A', A'' et φ', φ'' quatre constantes à déterminer connaissant les conditions initiales. Les battements ne peuvent être obtenus pour les deux déplacements simultanément, car il n'est pas possible de faire apparaître un produit de fonctions sinusoidales dans les deux expressions. On peut les obtenir séparément, pour $x_1(t)$ si $A' = \pm A''$ et pour $x_2(t)$ si $A' = \pm 4A''$.

4) **Le ressort de couplage reste au repos lorsque son allongement$x_2 - x_1 = 0$, c'est-à-dire si :**

$$x_2(t) - x_1(t) = \frac{A'}{2} \cos(\omega' t + \varphi') - 2A'' \cos(\omega'' t + \varphi'') - A' \cos(\omega' t + \varphi') - A'' \cos(\omega'' t + \varphi'') = 0$$

C'est-à-dire pour tout t,

$$x_2(t) - x_1(t) = -\frac{A'}{2} \cos(\omega' t + \varphi') - 3A'' \cos(\omega'' t + \varphi'') = 0$$

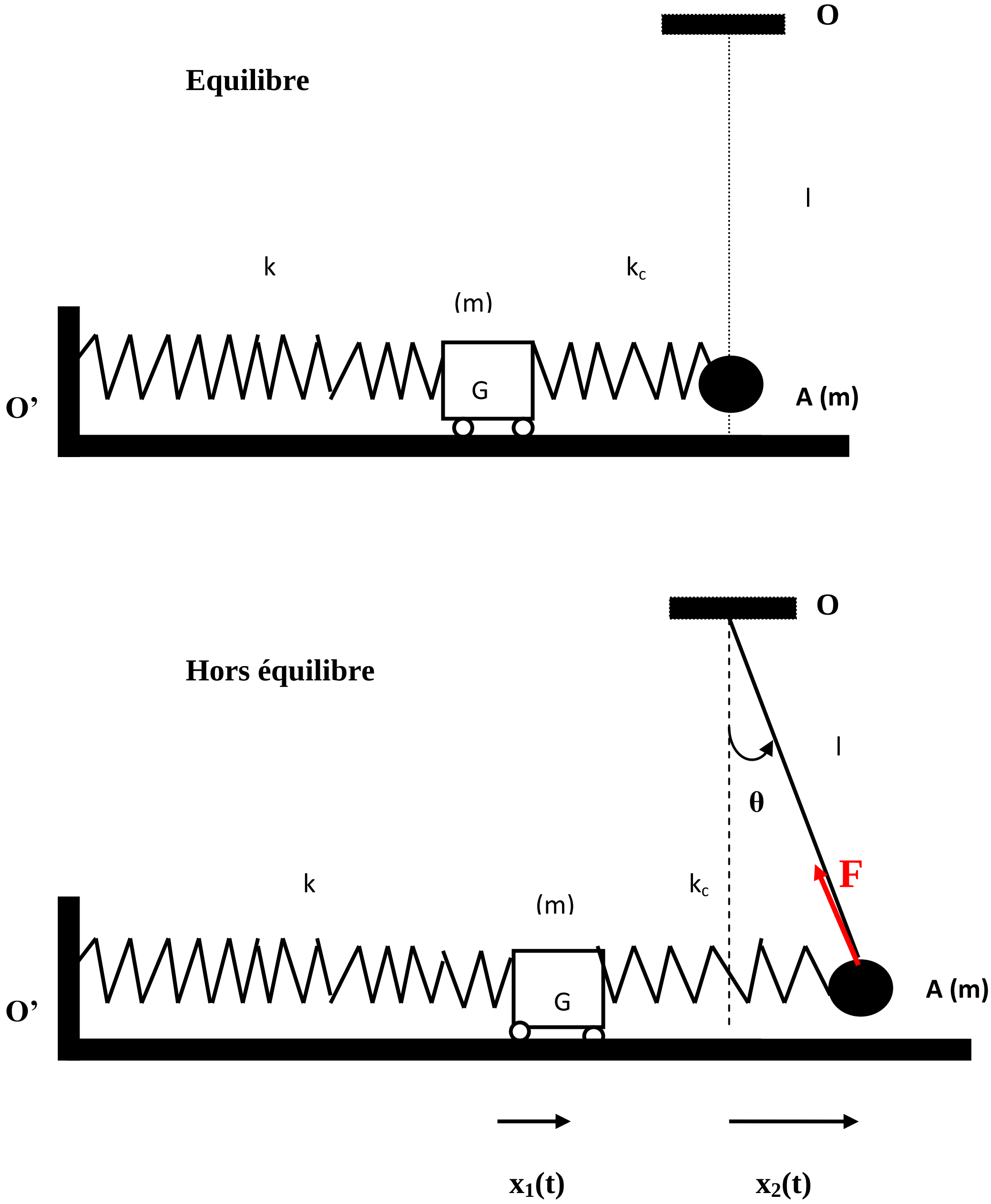
C'est impossible …donc le ressort de couplage n'est jamais au repos.

5) **L'énergie mécanique de ce système conservatif est constante. Elle est égale à la somme des trois énergies potentielles élastiques des trois ressorts et des deux énergies cinétiques des deux masses :**

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) + \frac{k{x_1}^2}{2} + \frac{4k{x_2}^2}{2} + \frac{2k(x_2 - x_1)^2}{2} = constante$$

L'énergie mécanique est une constante du mouvement.

Exercice 3 : *Oscillations libres et forcées d'un couplage pendule-chariot*



a) ***Oscillations libres et modes propres*** :

1) **Les déplacements $x_1(t)$ du chariot et $x_2(t)$ du pendule par rapport à leur position d'équilibre obéissent aux équations du mouvement (RFD projetée sur la direction Ox du mouvement de G et A) :**

- **Pour le centre de masse G du chariot :**

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \boldsymbol{k_c}(x_2 - x_1)$$

- **Pour le centre de masse A du pendule :**

$$m\ddot{x}_2 = -\boldsymbol{k_c}(x_2 - x_1) - \boldsymbol{F}\sin\boldsymbol{\theta}$$

On note F, la tension du fil du pendule simple ($\boldsymbol{F} \approx \boldsymbol{mg}$) et avec sin $\boldsymbol{\theta} \approx \frac{x_2}{l}$, donc :

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{\boldsymbol{k_c} + k}{\boldsymbol{m}}\right)x_1 = \frac{\boldsymbol{k_c}}{\boldsymbol{m}}x_2$$

Et si l'on pose $\boldsymbol{\omega_1} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\boldsymbol{\omega_2} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\Omega = \sqrt{\frac{k_c}{m}}$ alors nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\boldsymbol{\omega_1}^2 + \Omega^2)x_1 = \Omega^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 + (\boldsymbol{\omega_2}^2 + \Omega^2)x_2 = \Omega^2 x_1 \end{cases}$$

2) **Les modes propres de pulsation $\boldsymbol{\omega}$ correspondent aux solutions du système précédent, où G et A oscillent harmoniquement à la même pulsation $\boldsymbol{\omega}$:**

$$x_1(t) = \boldsymbol{a_1}\cos(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_1}) \text{ et } x_2(t) = \boldsymbol{a_2}\cos(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_2})$$

Donc $\ddot{x}_1 = -\boldsymbol{\omega}^2 x_1$ et $\ddot{x}_2 = -\boldsymbol{\omega}^2 x_2$. On obtient le système suivant (appelé système final) si on remplace dans le système précédent :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\omega_1}^2 + \Omega^2 - \boldsymbol{\omega}^2)x_1 - \Omega^2 x_2 = 0 \\ -\Omega^2 x_1 + (\boldsymbol{\omega_2}^2 + \Omega^2 - \boldsymbol{\omega}^2)x_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution simple qui correspond à l'équilibre et qui est

$$x_1(t) = x_2(t) = 0$$

Mais si le déterminant du système est nul, on trouvera les autres solutions non triviales, soit :

$$\boldsymbol{det} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{\omega_1}^2 + \Omega^2 - \boldsymbol{\omega}^2) - \Omega^2 = 0 \\ -\Omega^2 + (\boldsymbol{\omega_2}^2 + \Omega^2 - \boldsymbol{\omega}^2) = 0 \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\boldsymbol{\omega}^4 - (2\Omega^2 + \boldsymbol{\omega_1}^2 + \boldsymbol{\omega_2}^2)\boldsymbol{\omega}^2 + \Omega^2(\boldsymbol{\omega_2}^2 + \boldsymbol{\omega_1}^2) + \boldsymbol{\omega_2}^2\boldsymbol{\omega_1}^2 = 0$$

Les deux solutions acceptables ω' et ω'' de cette équation bicarrée sont les pulsations propres du système étudié (à calculer s'il y a le temps en TD, sinon à la maison) avec $\omega' > 0$ et $\omega'' > 0$.

3) **Pour trouver le rapport des amplitudes, il est commode d'utiliser la notation complexe et d'écrire les deux solutions complexes associées aux solutions réelles $\underline{x_1} = \boldsymbol{a_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}}$ et $\underline{x_2} = \boldsymbol{a_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}}$.**

De fait, le rapport des amplitudes complexes du pendule et du chariot est :

$$\frac{a_2 e^{j\varphi_2}}{a_1 e^{j\varphi_1}} = \frac{\underline{x_2}}{\underline{x_1}} = \frac{\omega_1{}^2 + \Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} = réel$$

Donc $\varphi_2 = \varphi_1$ si ce réel est positif, ou $\varphi_2 + \pi = \varphi_1$ si ce réel est négatif.

Donc le rapport des amplitudes est (compte tenu aussi de l'équation bicarrée) :

- **Pour le mode propre $\omega' > 0$:** $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\omega_1{}^2+\Omega^2-\omega'^2}{\Omega^2} = \frac{\Omega^2}{\omega_2{}^2+\Omega^2-\omega'^2}$
- **Pour le mode propre $\omega'' > 0$:** $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\omega_1{}^2+\Omega^2-\omega''^2}{\Omega^2} = \frac{\Omega^2}{\omega_2{}^2+\Omega^2-\omega''^2}$

La solution générale est la superposition des solutions en modes propres soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1' \cos(\omega' t + \varphi_1') + a_1'' \cos(\omega'' t + \varphi_1'') \\ x_2(t) = a_2' \cos(\omega' t + \varphi_2') + a_2'' \cos(\omega'' t + \varphi_2'') \end{cases}$$

b) Oscillations forcées :

4) **Les nouvelles équations du mouvement (sous forme canonique) pour ce système couplé en oscillations forcées sont :**

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\omega_1{}^2 + \Omega^2)x_1 - \Omega^2 x_2 = \omega_1{}^2 a_0 \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2 + (\omega_2{}^2 + \Omega^2)x_2 - \Omega^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

5) **En régime permanent forcé, les solutions du système précédent peuvent s'écrire sous la forme complexe :**

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \\ x_2(t) = a_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} \end{cases}$$

D'où $\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$ et $\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$ que l'on injecte dans le système précédent pour obtenir :

$$\begin{cases} a_1 e^{j(\varphi_1)}(\omega_1{}^2 + \Omega^2 - \omega^2) - a_2 e^{j(\varphi_2)} = \omega_1{}^2 a_0 \\ a_2 e^{j(\varphi_2)}(\omega_2{}^2 + \Omega^2 - \omega^2) - a_1 e^{j(\varphi_1)} = 0 \end{cases}$$

D'où les amplitudes complexes de G et A en régime forcé, respectivement :

$$\underline{a_1} = a_1 e^{j(\varphi_1)} = a_0 \frac{{\omega_1}^2({\omega_2}^2 + \Omega^2 - \omega^2)}{({\omega_1}^2 + \Omega^2 - \omega^2)({\omega_2}^2 + \Omega^2 - \omega^2) - \Omega^4}$$

$$\underline{a_2} = a_2 e^{j(\varphi_2)} = a_0 \frac{{\omega_1}^2\Omega^2}{({\omega_1}^2 + \Omega^2 - \omega^2)({\omega_2}^2 + \Omega^2 - \omega^2) - \Omega^4}$$

Ces amplitudes sont réels, donc $\varphi_1 = 0 \; ou \; \pi$ et$\varphi_2 = 0 \; ou \; \pi$.

6) **Le chariot demeure immobile si $x_1(t) = 0$, donc si $\underline{a_1} = 0$, soit $ {\omega_2}^2 + \Omega^2 - \omega^2 = 0$ ou $\omega = \sqrt{{\omega_2}^2 + \Omega^2}$ d'où la période de l'excitateur qui immobilise le chariot :**

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_2}^2 + \Omega^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_c}{m} + \frac{g}{l}}}$$

A.N.

$$T = 1{,}26 \; s$$

Exercice 4 : *Fréquence propre d'une molécule diatomique*

1) **D'après le principe des actions mutuelles (action-réaction), on a :**

$$m_1\ddot{x_1} + m_2\ddot{x_2} = 0$$

Soit :

$$m_1\dot{x_1} + m_2\dot{x_2} = constante = 0$$

Donc le centre d'inertie G du système est animé d'un mouvement rectiligne uniforme et *ce référentiel barycentrique est donc galiléen.*

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc, en projection suivant Ox, puisque l'allongement du ressort de couplage est $\overline{M_1M_2} - l_0 = x_2 - x_1 - l_0 = X - l_0$:

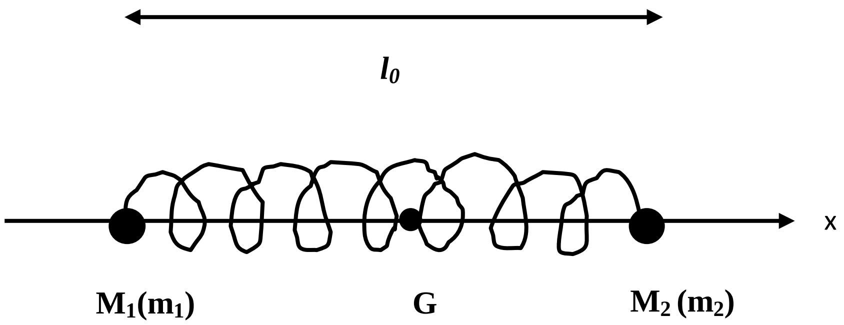
- **Pour la masse m_1 :**

$$m_1\ddot{x_1} = k(X - l_0)$$

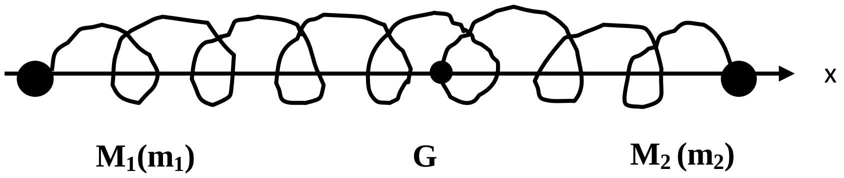
- **Pour la masse m_2 :**

$$m_2\ddot{x_2} = -k(X - l_0)$$

Equilibre



Hors équilibre



On en déduit d'après les équations précédentes :

$$\ddot{X} = \ddot{x_2} - \ddot{x_1} = -\frac{k}{m_2}(X - l_0) - \frac{k}{m_1}(X - l_0)$$

Soit :

$$\ddot{X} + k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)X = k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)l_0$$

Donc $X(t) = x_2(t) - x_1(t)$ obéit à l'équation différentielle du 2ème ordre :

$$\ddot{X} + k\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 \times m_2}\right)X = k\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 \times m_2}\right)l_0$$

2) **La solution de l'équation différentielle précédente ci-dessus est donc oscillatoire sinusoidale de la forme :**

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) + l_0$$

Avec $\omega = \sqrt{k\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 \times m_2}\right)}$ d'où la période d'oscillation $T = \frac{2\pi}{\omega}$ soit

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k\left(\frac{m_1+m_2}{m_1\times m_2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1\times m_2}{k(m_1+m_2)}}$$

3) **Pour un système couplé symétrique $(m_1 = m_2 = m)$, la masse réduite vaut :**

$$\frac{m}{2} = \frac{m_1\times m_2}{(m_1+m_2)}$$

Donc la période d'oscillation est $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$. La raideur du ressort de couplage vaut donc $k = \frac{2\pi^2 m}{T^2}$ avec en A.N. : $k = 2\ {}^{N}/_{m}$

4) **La fréquence propre $f_0$associée à la molécule CO est :**

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

A.N. $f_0 = 6{,}5.10^{23}$ Hz

D'où la période propre $T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1\times m_2}{k(m_1+m_2)}}$, d'où la constante de rappel élastique de la molécule CO :

$$k = \frac{4\pi^2{f_0}^2 m_1\times m_2}{m_1+m_2}$$

A.N. $m_1 = \frac{12\times10^{-3}}{6.10^{23}} = 2.10^{-26}kg$et $m_2 = \frac{16\times10^{-3}}{6.10^{23}} = 2,67.10^{-26}\ kg$, on obtient donc :

$$k \approx 1918\ {}^{N}/_{m}$$