I.P.S.A
63, Bvd de Brandebourg
94200 Ivry Sur Seine

Date de l'épreuve :
Jeudi 2 Mai 2019

AERO 1

Professeur responsable : PEREZ-RAMOS

Durée de l'épreuve : 1h

Sans : **Notes de cours**

Avec : **Calculatrice non programmable**

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE II

Question:	1	2	3	Total
Points:	6	9	6	21
Note:				

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous paraît être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, vous le signalez clairement dans votre copie et vous poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le barème est donné à titre indicatif.

Pour les QCM, chaque question comporte une réponse. Lorsque l'étudiant ne répond pas à une question ou si la réponse est fausse, il n'a pas de point de pénalité.

Rédigez directement sur la copie en dessous de chaque exercice.

Inscrivez vos : nom, prénom et classe. Justifiez vos affirmations si nécessaire. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

NOM :

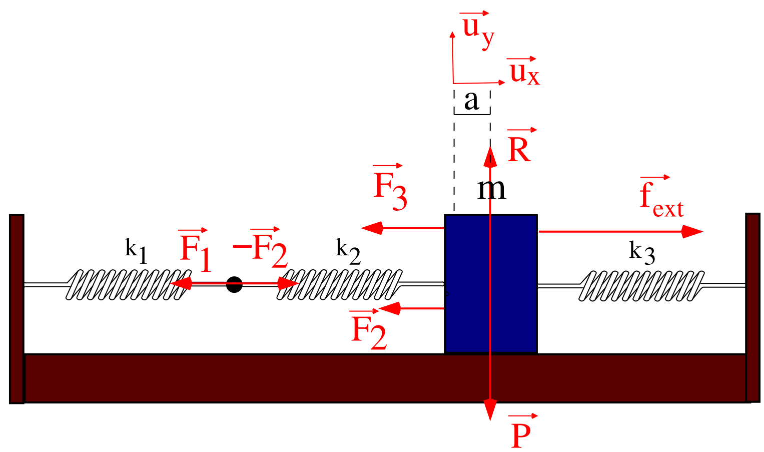
PRENOM :

1. (6 points) (6.5) **Questions diverses**

Questions	**Réponses**
1. L'équation canonique d'un oscillateur harmonique est : **(0.5)**	☐ $m\ddot{x}+kx=0$ ☐ $\ddot{x}-\omega_0^2 x=0$ ■ $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ ☐ $\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2 x=0$
2. La pulsation propre d'un système mécanique composé d'un ressort attaché à une masse est : **(0.5)**	☐ $\omega_0=\frac{k}{m}$ ■ $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ☐ $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$
3. L'équation canonique d'un oscillateur amorti est : **(0.5)**	☐ $m\ddot{x}+\lambda\dot{x}+kx=0$ ■ $\ddot{x}+\frac{\lambda}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$ ☐ $\ddot{x}-2\alpha\dot{x}+\omega_0^2 x=0$ ☐ $\ddot{x}+2\alpha\dot{x}-\omega_0^2 x=0$
4. Le régime apériodique d'un oscillateur amorti est décrit par la loi : **(0.5)**	☐ $x(t)=(a+bt)e^{-\alpha t}$ ☐ $x(t)=ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$ ■ $x(t)=ae^{-\alpha t}(ae^{\beta t}+be^{-\beta t})$ ☐ $x(t)=a\cos(\omega_0 t+\varphi)$
5. Le régime pseudo-périodique d'un oscillateur amorti est donné par la loi : **(0.5)**	☐ $x(t)=\mathrm{A}\cos(\Omega+\varphi)$ ■ $x(t)=\mathrm{A}e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$ ☐ $x(t)=\mathrm{A}e^{-\alpha t}\cosh(\omega t+\varphi)$ ☐ $x(t)=\mathrm{A}e^{\alpha t}\cos(\omega_0 t+\varphi)$
6. Après un temps suffisamment grand la loi du mouvement d'un oscillateur amorti tend vers : **(0.5)**	☐ $x(t)=ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$ ☐ $x(t)=a\cos(\omega_0 t+\varphi)$ ■ 0
7. L'énergie mécanique totale d'un pendule simple qui ne subit pas de frottements est donnée par : **(0.5)**	☐ $\mathrm{E}_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$ ☐ $\mathrm{E}_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$ ■ $\mathrm{E}_m=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+mg\ell(1-\cos\theta)$ ☐ Aucune réponse

2. (9 points) (**8.5**) **Association de ressorts**

   Le système mécanique de la figure est composé de trois ressorts de même longueur à vide ℓ_0 initialement non-déformés avec des constantes de raideur k_1, k_2 et k_3. La masse m est attachée au ressort de constante k_2 à gauche et au ressort de constante k_3 à droite.



   Questions :

   (a) **(0.5)** Donner la condition d'équilibre dynamique du système ainsi que la distance qui sépare la masse de l'extrémité gauche.

   > **Solution:** Condition d'équilibre dynamique : $\sum \vec{F} = \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$ **(0.25)**. La distance est égale à $2\ell_0$**(0.25)**.

   On fixera l'origine du référentiel à cette position, on écarte la masse de $a > 0$ et on la relâche sans vitesse initiale.

   (b) **(1)** Représenter toutes les forces qui agissent sur la masse m ainsi que les vecteurs unitaires de la base cartésienne.

   > **Solution:** Dans cette question on ne note que les forces qui agissent sur la masse : $\vec{F}_2$ **(0.25)**, $\vec{F}_3$ **(0.25)**, $\vec{R}$ **(0.25)** et $\vec{P}$ **(0.25)**. On pourrait aussi considérer une force externe auxilaire agissant dans le sens positif de l'axe Ox pour répondre à la question suivante.

   (c) **(2)** Trouver la constante de raideur équivalente k_{eq} du système.

   > **Solution:** À l'aide de la force externe auxiliaire, on établit, à l'équilibre, l'équation pour la masse : Les ressorts k_1 et k_2 étant en série, on pose un ressort équivalent de

constante :

$$k'_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \textbf{(0.5)}$$

à partir du système d'équation $k_1 x_1 = k_2 x_2$ **(0.25)** au niveau de la jonction, puis les équations $f_{ext} = k_2 x_2$ **(0.25)** et $f_{ext} = k'_{eq}(x_1 + x_2)$ **(0.25)**. On mettra le ressort k'_{eq} en dérivation avec le ressort k_3, d'où,

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_3, \textbf{(0.5)}$$

à partir du système $f_{ext} = (k'_{eq} + k_3)x$ et $f_{ext} = k_{eq} x$ **(0.25)**. Les systèmes d'équations s'obtiennent à partir des bilans des forces à l'équilibre et sous l'action de la force auxiliaire, on notera les étapes justes même si l'élève ne parvient pas à terminer l'exercice. Si la réponse est donnée sans démonstration, on attribue tous les points.

(d) **(0.5)** Rappeler le principe fondamental de la dynamique.

Solution: PFD :

$$\sum \overrightarrow{\mathrm{F}} = m\vec{a}.$$

(e) **(1)** Écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse en fonction de k_1, k_2 et k_3.

Solution: Dans cette question, on revient sur le problème classique d'un ressort de constante k_{eq} dans ce cas-ci attaché à la masse m sur un plan horizontal :

$$-k_{eq} x = m\ddot{x} \textbf{(0.5)}$$

car $\overrightarrow{\mathrm{R}} + \overrightarrow{\mathrm{P}} = \vec{0}$ **(0.25)** d'où

$$m\ddot{x} + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_3\right) x = 0. \textbf{(0.25)}$$

(f) **(1)** Donner la pulsation propre ainsi que la période des oscillations de la masse.

Solution: La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_3\right)} \textbf{(0.5)}$$

et la période :

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_3}}. \textbf{(0.5)}$$

(g) **(1.25)** Donner la solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales données.

Solution: La masse, étant écartée de $a > 0$ sans vitesse initiale, on a les conditions : $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$ respectivement. Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi), \textbf{(0.25)}$$

puis,

$$x(0) = a \Rightarrow a = \mathrm{A}\cos\varphi \textbf{(0.25)}$$

et

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = -\mathrm{A}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \textbf{(0.25)} \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0. \textbf{(0.25)}$$

On remplace dans l'équation précédente et on a $\mathrm{A} = a$. On trouve la loi du mouvement de l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t). \textbf{(0.25)}$$

(h) **(0.25)** Donner l'allure de la loi du mouvement sur une période.

Solution: Il s'agit de la fonction cosinus dans l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{\omega_0}\right]$.

(i) **(1)** Tracer la vitesse $\dot{x}$ en fonction de la position x pour les valeurs des énergies mécaniques E_1 et E_2 telles que $\mathrm{E}_1 < \mathrm{E}_2$. Quel est le sens physique de cette représentation ?

Solution: À partir de la solution précédente :

$$\frac{x}{a} = \cos(\omega_0 t) \textbf{(0.25)}, \qquad \frac{\dot{x}}{a\omega_0} = -\sin(\omega_0 t) \textbf{(0.25)}$$

on trouve deux ellipses concentriques en $(0;0)$ d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2\omega_0^2} = 1, \textbf{(0.25)}$$

où celle décrivant le mouvement d'énergie E_1 se trouve à l'intérieur de celle décrivant le mouvement d'énergie E_2. **(0.25)** On mettra tous les points si l'élève a juste fait le graphique.

3. (6 points) **Le pendule simple amorti**

Dans la figure on considère un pendule constitué d'une tige de longueur ℓ rigide de masse négligeable. Elle peut tourner librement autour d'un axe (Δ) passant par l'extrémité supérieure O. Au niveau de la jonction, le pendule subit des frottements visqueux modélisés par le couple $\overrightarrow{M}_{fr} = -\lambda\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z$. À l'extrémité inférieure M est fixée une masse m que l'on suppose ponctuelle. On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre et on le laisse osciller.

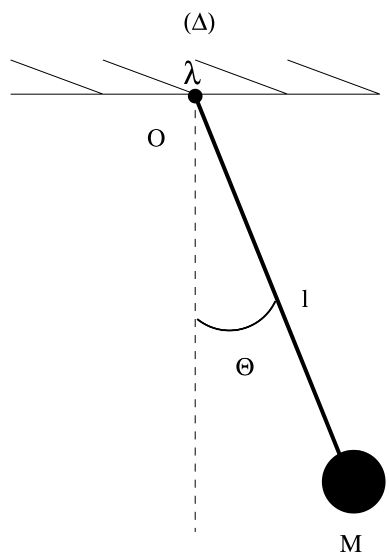


FIGURE 1 – Pendule simple.

Questions :

(a) **(0.25)** Tracer le système des coordonnées polaires sur la masse.

> **Solution:** Question triviale ! La représentation doit suivre un trièdre directe :
>
> $$\vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta.$$

(b) **(1.25)** En plus du moment de frottement, donner le moment de la réaction ou tension du fil ainsi que celui provoqué par le poids de la masse.

> **Solution:** On doit écrire le vecteur position de la masse $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$ **(0.25)** et
> — La réaction du fil : $\overrightarrow{R} = -R\vec{u}_r$ **(0.25)**,
> — et le poids de la masse : $\overrightarrow{P} = mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta$ **(0.25)**. On utilise la définition du moment d'une force ou le couple associé à cette force : $\overrightarrow{M}_{F/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$. Ainsi,
>
> $$\overrightarrow{M}_{R/O} = \vec{0}\,\textbf{(0.25)}$$

car les deux vecteur sont anti-colinéaires. Finalement,

$$\overrightarrow{\mathrm{M}}_{\mathrm{P/O}} = -mg\ell\sin\theta\vec{u}_z.(\mathbf{0.25})$$

Le moment du poid est dirigé selon l'axe de rotation du pendule.

(c) **(0.5)** Énoncer le théorème du moment cinétique.

Solution:

$$\sum\overrightarrow{\mathrm{M}} = \frac{d\overrightarrow{\mathscr{L}}_{\mathrm{O}}}{dt},$$

où $\overrightarrow{\mathscr{L}}_{\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{p}$ est le moment cinétique du pendule.

(d) **(2)** Établir l'équation différentielle du mouvement pour la variable θ dans l'approximation des petits angles $\theta \ll 1$.

Solution: On écrit l'expression du moment cinétique. D'abord,

$$\overrightarrow{p} = m\vec{v} = m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

On effectue le produit vectoriel avec $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et on a :

$$\overrightarrow{\mathscr{L}}_{\mathrm{O}} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z(\mathbf{0.25}) \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{\mathscr{L}}_{\mathrm{O}}}{dt} = m\ell^2\ddot{\theta}\vec{u}_z.(\mathbf{0.25})$$

D'où

$$\overrightarrow{\mathrm{M}}_{fr/\mathrm{O}} + \overrightarrow{\mathrm{M}}_{\mathrm{P/O}} + \overrightarrow{\mathrm{M}}_{\mathrm{R/O}} = m\ell^2\ddot{\theta}\vec{u}_z,(\mathbf{0.25})$$

ou

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \lambda\ell^2\dot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0(\mathbf{0.5})$$

d'où, sous la forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.(\mathbf{0.25})$$

Dans l'approximation souhaitée : $\sin\theta \approx \theta$, on pose $2\alpha = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, et on trouve

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.(\mathbf{0.5})$$

(e) **(0.5)** Donner la solution générale de l'équation $\theta(t)$ en régime oscillatoire amorti.

Solution: Il suffit d'écrire la solution connue du cours :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi), \textbf{(0.25)}$$

où

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \textbf{(0.25)}$$

est la pseudo-pulsation du pendule !

(f) **(0.5)** Donner l'allure de la loi du mouvement du pendule ainsi que l'expression de la pseudo-période.

Solution: L'allure doit suivre une enveloppe d'équation $\pm e^{-\alpha t}$ et celle d'une fonction sinusoïdale à l'intérieur !

(g) (**Bonus**) **(1)** Donner le décrément logarithmique de ce système.

Solution:

$$\delta = \ln\left[\frac{x(t)}{x(t+\mathrm{T})}\right] = \alpha \mathrm{T} = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}},$$

où on a utilisé la pseudo-période :

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}.$$

Tout ou rien !