I.P.S.A
63, Bvd de Brandebourg
94200 Ivry Sur Seine

Date de l'épreuve :
Mercredi 06 décembre 2017

AERO 1

Professeurs : FRIHA/PEREZ-RAMOS/ROLLINDE

Durée de l'épreuve : 1h

Sans : **Notes de cours**

Avec : **Calculatrice non programmable**

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE I

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	8	8	8	3	27
Note:					

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous paraît être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, vous le signalez clairement dans votre copie et vous poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le barème est donné à titre indicatif.

Pour les QCM, chaque question comporte une réponse. Lorsque l'étudiant ne répond pas à une question ou si la réponse est fausse, il n'a pas de point de pénalité.

Rédigez directement sur la copie en dessous de chaque exercice.

Inscrivez vos : nom, prénom et classe. Justifiez vos affirmations si nécessaire. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

NOM :

PRENOM :

1. (8 points) **Coordonnées et cinématique du point matériel**

Coordonnées cartésiennes :

(a) Écrire les vecteurs unitaires de la base en coordonnées cartésiennes.

Solution: $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ **(0.5 pt)**

(b) Écrire le vecteur position.

Solution: $\vec{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ **(0.5 pt)**

(c) Écrire le vecteur vitesse.

Solution: $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ **(1 pt)**

(d) Écrire le vecteur accélération.

Solution: $\vec{a}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$ **(1 pt)**

(e) Écrire le vecteur élément de longueur ou déplacement élémentaire.

Solution: $d\vec{\ell} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ **(1 pt)**

Coordonnées polaires :

(f) Écrire les vecteurs unitaires de la base en coordonnées polaires.

Solution: $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ **(0.75 pt)**

(g) Écrire le vecteur position.

Solution: $\vec{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = r\vec{u}_r$ **(0.75 pt)**

(h) Écrire le vecteur vitesse.

Solution: $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ **(0.5+0.5=1 pt), 0.5 pour composante selon $\vec{u}_r$ et 0.5 pour composante selon $\vec{u}_\theta$**

(i) Écrire le vecteur accélération.

Solution: $\vec{a}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$ **(0.5+0.5=1 pt), 0.5 pour composante selon $\vec{u}_r$ et 0.5 pour composante selon $\vec{u}_\theta$**

(j) Donner l'élément de surface.

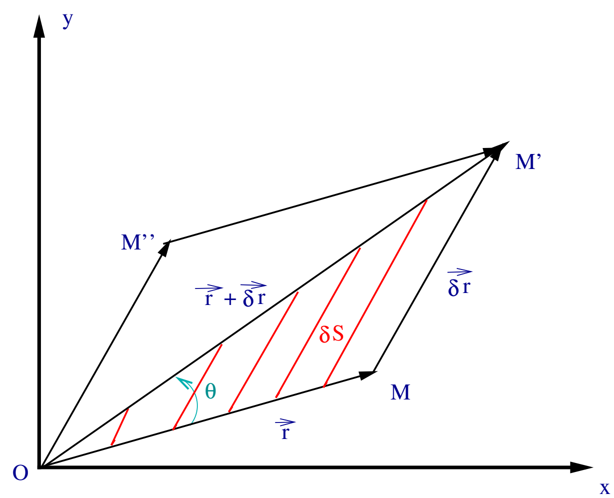
Solution: $dS = r\,dr\,d\theta$ **(0.5 pt)**

2. (8 points) **Vitesse Aréolaire**

Lorsqu'une particule M décrit une courbe plane, sa vitesse aréolaire $\dfrac{dS}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps de l'aire S balayée par le rayon-vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

(a) **(sur 2 pt)** Montrer que l'on a :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge \vec{v}\|.$$



Solution: L'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ est celle du triangle OMM', soit la moitié de l'aire du parallélogramme OMM'M''. Ainsi,

$$dS = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge d\vec{r}\|. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

On utilise alors la différentielle de la fonction $S(t)$ que l'on écrit sous la forme $dS = S'(t)dt$ ou $dS = \dfrac{dS}{dt}dt$ ainsi que $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Alors,

$$dS = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge \vec{v}\|dt, \quad \textbf{(1pt, ou pour des étapes intermédiaires)}$$

d'où, par identification avec la différentielle de la fonction $S(t)$, on a bien,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge \vec{v}\|. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

(b) **(sur 3 pt)** En déduire l'expression de la vitesse aréolaire en coordonnées polaires r et θ dans le plan.

Solution: Avec $\vec{r} = r\vec{u}_r$ **(0.5 pt)** et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ **(0.5 pt)**, on peut simplement effectuer le produit vectoriel dans l'expression de la vitesse aréolaire obtenue à la question précédente sous la forme,

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = r\vec{u}_r \wedge \left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) = r\dot{r}(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r) + r^2\dot{\theta}(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta). \ \mathbf{(0.25 + 0.25 = 0.5pt)}$$

Or $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r = \vec{0}$ et $\vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$, donc $\vec{r} \wedge \vec{v} = r^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ et $\|\vec{r} \wedge \vec{v}\| = r^2\dot{\theta}\|\vec{u}_z\| = r^2\dot{\theta}$. **(0.25+0.25=0.5 pt)** D'où,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}. \ \mathbf{(1pt)}$$

La règle du γ est tout à fait légitime dans la résolution de cet exercice à partir du moment où on ajoute une composante nulle selon l'axe Oz dans les vecteurs position et vitesse.

(c) **(sur 2 pt)** Les coordonnées polaires d'une particule sont données en fonction du temps par :

$$r(t) = a\Big(1 + \cos(\omega t)\Big), \quad \theta(t) = \omega t.$$

Solution: On donne $\dot{\theta} = \omega$ **(0.5 pt)** et on remplace r et $\dot{\theta}$ dans la formule précédemment obtenue :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}a^2\omega\Big(1 + \cos(\omega t)\Big)^2. \ \mathbf{(1.5pt)}$$

(d) **(sur 1 pt)** Donner les valeurs de la vitesse aréolaire pour $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$ et $t_3 = \frac{2\pi}{\omega}$. Que remarquez-vous ? Justifier.

Solution: On calcule :

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_1=0} = 2a^2\omega, \quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_2=\frac{\pi}{\omega}} = 0, \quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_3=\frac{2\pi}{\omega}} = 2a^2\omega. \ \mathbf{(0.25 + 0.25 + 0.25 = 0.75pt)}$$

On remarque que la vitesse aréolaire de la trajectoire $(r(t), \theta(t))$ est périodique car

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_1=0} = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_3=\frac{2\pi}{\omega}} = 2a^2\omega$$

au bout d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. **(0.25 pt)**

3. (8 points) **Cinématique du point**

Les coordonnées d'une particule sont données en fonction du temps par l'équation paramétrique :

$$x(t) = a\omega t,$$
$$y(t) = a e^{\omega t}.$$

(a) **(sur 0.5 pt)** Donner l'équation de la trajectoire de la particule $y(x)$. Quel type de trajectoire suit la particule ?

Solution: On fait $t = \frac{x}{a\omega}$ et on obtient $y(x) = a\exp(\frac{x}{a})$ **(0.25 pt)**. Il s'agit d'un mouvement curviligne (on admettra trajectoire exponentielle). **(0.25 pt)**

(b) **(sur 2.5 pt)** Déterminer la norme de la vitesse $v(t)$ et de l'accélération $a(t)$ de la particule en fonction du temps t et en déduire leur valeur à l'instant initial $t = 0$.

Solution: La norme de la vitesse est donnée par la formule en coordonnée cartésiennes :

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \ (\mathbf{0.25pt}) \qquad a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \ (\mathbf{0.25pt})$$

avec les dérivées par rapport à la variable t :

$$\dot{x} = a\omega, \quad \ddot{x} = 0, \quad \dot{y} = a\omega e^{\omega t}, \quad \ddot{y} = a\omega^2 e^{\omega t}. \ (\mathbf{4 \times 0.25 = 1pt})$$

D'où,

$$v(t) = a\omega\sqrt{1 + e^{2\omega t}}, \ (\mathbf{0.25pt}) \quad a(t) = |\ddot{y}| = a\omega^2 e^{\omega t}. \ (\mathbf{0.25pt})$$

Pour $t = 0$ on a,

$$v(0) = a\omega\sqrt{2}, \ (\mathbf{0.25pt}) \quad a(0) = a\omega^2. \ (\mathbf{0.25pt})$$

(c) **(sur 1.5 pt)** Déterminer l'accélération tangentielle $a_t(t)$ de la particule en fonction du temps t et en déduire sa valeur à $t = 0$.

Rappel :

$$\boldsymbol{a_t} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{v}}.$$

Solution: On exprime d'abord la formule de a_t en coordonnées cartésiennes :

$$a_t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \ (\mathbf{0.5pt})$$

d'où,

$$a_t(t) = \frac{a\omega \times 0 + a\omega e^{\omega t} \times a\omega^2 e^{\omega t}}{a\omega\sqrt{1+e^{2\omega t}}} = \frac{a^2\omega^3 e^{2\omega t}}{a\omega\sqrt{1+e^{2\omega t}}} = a\omega^2 \frac{e^{2\omega t}}{\sqrt{1+e^{2\omega t}}}, \ (\mathbf{2 \times 0.25 = 0.5pt})$$

$$a_t(0) = \frac{a\omega^2}{\sqrt{2}}. \ (\mathbf{0.5pt})$$

(d) **(sur 1.5 pt)** Déterminer l'accélération normale $a_n(t)$ de la particule en fonction du temps t et en déduire sa valeur à $t = 0$.

Rappel :

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{\|\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{a}}\|}{\boldsymbol{v}}.$$

Solution: On exprime d'abord la formule de a_t en coordonnées cartésiennes :

$$a_n = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}{v} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \ (\mathbf{0.5pt})$$

d'où,

$$a_n(t) = \frac{|a^2\omega^3 e^{\omega t} - a\omega e^{\omega t} \times 0|}{a\omega\sqrt{1+e^{2\omega t}}} = \frac{a\omega^2 e^{\omega t}}{\sqrt{1+e^{2\omega t}}}, \ (\mathbf{2 \times 0.25 = 0.5pt})$$

$$a_n(0) = \frac{a\omega^2}{\sqrt{2}}. \ (\mathbf{0.5pt})$$

(e) **(sur 1.5 pt)** Ecrire le vecteur accélération $\vec{a}$ à $t = 0$ dans la base de Frenet.

Solution: Dans la base $(\vec{u}, \vec{n})$ de Frenet, l'accélération se décompose d'après la formule,

$$\vec{a}(0) = a_t(0)\vec{u} + a_n(0)\vec{n} \ (\mathbf{1pt}) = \frac{a\omega^2}{\sqrt{2}}(\vec{u} + \vec{n}). \ (\mathbf{0.5pt})$$

(f) **(sur 0.5 pt)** En déduire la norme de l'accélération obtenue à la question précédente et comparer avec l'expression obtenue à la question (b) pour $t = 0$.

Solution:

$$a = \frac{a\omega^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + 1^2} = a\omega^2. \ (\mathbf{2 \times 0.25 = 0.5pt})$$

On obtient la même norme qu'à la question (b) car il s'agit du même vecteur indépendamment de la base choisie pour le calcul de sa norme.

4. (3 points) **Rayon de courbure (bonus) :**
Un point matériel M suit une trajectoire curviligne quelconque.

(a) **(sur 1.5 pt)** Donner une formule globale du rayon de courbure R du cercle osculateur sur un point de la trajectoire en fonction de la vitesse et de l'accélération.

Solution:
$$R = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}. \ (\mathbf{1.5pt})$$

(b) **(sur 1 pt)** Donner son expression pour une trajectoire d'équation horaire : $(x(t), y(t))$.

Solution: On prend les vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et on trouve :
$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}. \ (\mathbf{1pt})$$
Si vous n'avez pas donné la formule sans la démonstration, vous obtenez la totalité des points.

(c) **(sur 0.5 pt)** Déterminer le rayon de courbure R dans le cas de la trajectoire d'équation horaire
$$\begin{aligned} x(t) &= a\omega t, \\ y(t) &= ae^{\omega t} \end{aligned}$$
de l'exercice (3) et en déduire sa valeur à $t = 0$.

Solution: On prend la formule trouvée à la question précédente :
$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$$
et on remplace les dérivées,
$$R(t) = \frac{a^3\omega^3(1 + e^{2\omega t})^{3/2}}{a^2\omega^3 e^{\omega t}} = ae^{-\omega t}(1 + e^{2\omega t})^{3/2}, \ (\mathbf{0.25pt}) \ R(0) = 2\sqrt{2}a. \ (\mathbf{0.25pt})$$