Correction DS 1
mécanique des fluides

Le 20/11/19

Ex 1 :

1) $PV = nRT$

P : pression [Pa]

V : volume [m^3]

n : nbre de moles [mol]

R : constante des gaz parfaits = 8,314 J/mol

T : Température [K]

$P = \rho r T$

ρ : masse volumique [Kg/m^3]

r : constante massique des GP $= \frac{R}{M}$ [J/KgK]

2) la force d'Archimède est une force verticale égale et opposée au poids du fluide déplacé

$$\vec{F_a} = -\vec{P_f} = -\rho_{fluide} V_{immergé} \vec{g}$$

3) Les variables de Lagrange : $(\vec{OM_0}(x_0, y_0, z_0), t)$

Les variables d'Euler : $(x, y, z, \underset{=\text{donné}}{t})$

Exercice 2 : Pression au fond d'un réacteur :

1) $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m_{eau} = \rho_{eau} \times V_{eau}$

A.N : $m_{eau} = 1000 \times 35 \times 10^{-3} = 35\ Kg. \rightarrow \boxed{m_{eau} = 35\ Kg}$

2) le volume de l'eau dans le réacteur : $V_{eau} = 35L$

$\rightarrow \boxed{V_{eau} = 35.10^{-3}\ m^3}$

Or $V_{eau} = \pi R^2 \times h \rightarrow h = \frac{V_{eau}}{\pi R^2}$

A.N : $h = \frac{35.10^{-3}}{\pi \times (20.10^{-2})^2} = 27,85\ cm \rightarrow \boxed{h = 27,85\ cm}$

3/ $Poids_{eau} = m_{eau}\, g \Rightarrow$ A.N : $Poids_{eau} = 35 \times 9,81 = 343,35\, N$

4/ PFS : $dP = -\rho g\, dz$

$\rightarrow P - P_{atm} = -\rho g (\underbrace{z - z_{atm}}_{= -h})$

$\rightarrow P = P_{atm} + \rho g h$

A.N : $P = 101325 + 1000 \times 9,81 \times 0,2785 = 104057,29\, Pa$.

Conversion d'unités :

$1\ atm = 101325\ Pa = 10,33\ m\ H_2O = 10,33 \times 10^3\ mm\ H_2O$

$\rightarrow P = 10608,55\ mmCE$.

5/ $P_{relative} = P - P_{atm}$

A.N

$\rightarrow P_{rel} = 2732,29\ Pa = 0,027\ bar$ $\qquad 1\ bar = 10^5\ Pa$

6/ $P = \frac{F}{S} \rightarrow F = P \times S = P \times \pi R^2$

A.N : $F = 104057,29 \times \pi \times (20.10^{-2})^2$

$\rightarrow \boxed{F = 13076,2\, N}$

Exercice 2 : Cinématique des fluides

$$\vec{U} = \begin{cases} u = \beta x \\ v = \alpha \beta y + \beta^2 y t \\ w = \beta x \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{matrix}$$

1/ Il s'agit de la représentation Eulérienne : champ de vitesse donné avec les variables d'Euler (x, y, z, t).

2/ $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \beta y \, \vec{y} \neq \vec{0}$: l'écoulement est instationnaire.

→ l'écoulement est stationnaire $\Rightarrow \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \beta^2 y = 0$

$\rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \text{ (impossible car } \beta > 0) \\ \text{ou} \\ y = 0 \end{cases}$

→ L'écoulement est stationnaire ssi $y = 0 \rightarrow v = 0$.

→ écoulement plan selon (x, z)

3/ Eq. des L.D.C : $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v} = \dfrac{dz}{w}$

* 1ère série de L.D.C :

* $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v} \rightarrow \dfrac{dx}{\beta x} = \dfrac{dy}{\alpha \beta y + \beta^2 y t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\alpha y + \beta y t} = \frac{dy}{(\alpha + \beta t) y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{1}{(\alpha + \beta t)} \times \frac{1}{y} dy .$$

On intègre $\Rightarrow$

$$\ln(|x|) + cste_1 = \frac{1}{(\alpha + \beta t)} \ln(|y|) + cste_2$$

$$\rightarrow (\alpha + \beta t) \ln|x| + (\alpha + \beta t) \, cste_1 = \ln(|y|) + cste_2 \times (\alpha + \beta t)$$

$$\rightarrow \ln|x|^{\alpha + \beta t} + cste_3 = \ln|y| + cste_4$$

$$\rightarrow x^{\alpha + \beta t} \times \exp(cste_3) = y \times \exp(cste_4)$$

$$\rightarrow \boxed{x^{\alpha+\beta t} = cste \times y}$$

* $2^{\text{ème}}$ série de L.D.C : $\dfrac{dy}{v} = \dfrac{dz}{w}$

On remarque que $u = w$: écoulement symétrique.

Donc on trouve la même equation en remplaçant x par z.

$$\rightarrow \boxed{z^{\alpha+\beta t} = cste \times y}$$

*Autre méthode : $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dz}{w} \Rightarrow \dfrac{dx}{\beta x} = \dfrac{dz}{\beta x} \Rightarrow dx = dz \Rightarrow \boxed{x = z}$

↓

écoulement symétrique.

4) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{grad}\,\vec{u}.\vec{u}$

* $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \beta^2 y\,\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^2 y \\ 0 \end{pmatrix}$

* $\vec{grad}\,\vec{u}.\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta + \beta^2 t & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta x \\ \alpha\beta y + \beta^2 y t \\ \beta x \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \beta^2 x \\ (\alpha\beta + \beta^2 t)(\alpha\beta y + \beta^2 y t) \\ \beta^2 x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \beta^2 x \\ \beta^2 y + (\alpha\beta + \beta^2 t)(\alpha\beta y + \beta^2 y t) \\ \beta^2 x \end{pmatrix}$$

5/ $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{rot}\, \vec{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - \beta \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\rightarrow$ l'écoulement est rotationnel