I.P.S.A
63, Bvd de Brandebourg
94200 Ivry Sur Seine

Date de l'épreuve :
Jeudi 21 février 2019

AERO 1 Conventionnel

Professeur responsable : PEREZ-RAMOS

Durée de l'épreuve : 1h

Sans : **Notes de cours**

Avec : **Calculatrice non programmable**

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE II

Question:	1	2	3	Total
Points:	5	10	6	21
Note:				

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous paraît être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, vous le signalez clairement dans votre copie et vous poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le barème est donné à titre indicatif.

Pour les QCM, chaque question comporte une réponse. Lorsque l'étudiant ne répond pas à une question ou si la réponse est fausse, il n'a pas de point de pénalité.

Rédigez directement sur la copie en dessous de chaque exercice.

Inscrivez vos : nom, prénom et classe. Justifiez vos affirmations si nécessaire. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

NOM :

PRENOM :

1. (5 points) **Théorème du moment cinétique**

   Un corps de masse m est reperé par rapport à l'origine O de son référentiel par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ où O est le point d'application du vecteur et S la position de la masse à un instant t quelconque. Supposons que le corps est soumis à l'action d'une seule force quelconque $\overrightarrow{\mathrm{F}}$.

   (a) **(0.5)** Donner la définition du moment de la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ par rapport à O.

   Solution: $\overrightarrow{\mathrm{M}}_{\overrightarrow{\mathrm{F}}/\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{F}}$ **(0.5)**.

   (b) **(0.5)** Donner la définition du moment cinétique par rapport à O.

   Solution: $\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} \wedge \vec{p}$ **(0.5)**.

   (c) **(0.5)** Enoncer le théorème du moment cinétique associé à la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$.

   Solution:

   $$\sum \overrightarrow{\mathrm{M}}_{\overrightarrow{\mathrm{F}}/\mathrm{O}} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{O}}}}{dt}.\mathbf{(0.5)}$$

   (d) **(1)** Supposons que la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est centrale. Donner alors la définition d'une force centrale, faire un schéma et en déduire son moment par rapport à O.

   Solution: Définition d'une force centrale : $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \pm \mathrm{F}(r)\vec{u}_r$ **(0.25)** et pour le schéma **(0.25)**. Son moment est donc $\overrightarrow{\mathrm{M}}_{\overrightarrow{\mathrm{F}}/\mathrm{O}} = r\vec{u}_r \wedge \mathrm{F}(r)\vec{u}_r = \vec{0}$ **(0.5)** car le vecteur $\vec{r}$ est colinéaire à la force.

   (e) **(1)** Démontrer alors que le moment cinétique par rapport à O est conservé.

   Solution: On en déduit : $\frac{d\overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{O}}}}{dt} = \vec{0}$ **(0.5)** $\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{O}}} = \overrightarrow{const}$ **(0.5)** donc le moment cinétique est conservé sous l'action d'une force centrale.

   (f) **(1.5)** Énoncer la deuxième loi de Kepler et évoquer son lien avec la conservation du moment cinétique.

   Solution: Deuxième loi de Kepler : Le rayon-vecteur reliant un corps à une masse qui le soumet à une force centrale (le Soleil par exemple) balaie des aires égales en des temps égaux. **(0.5)**

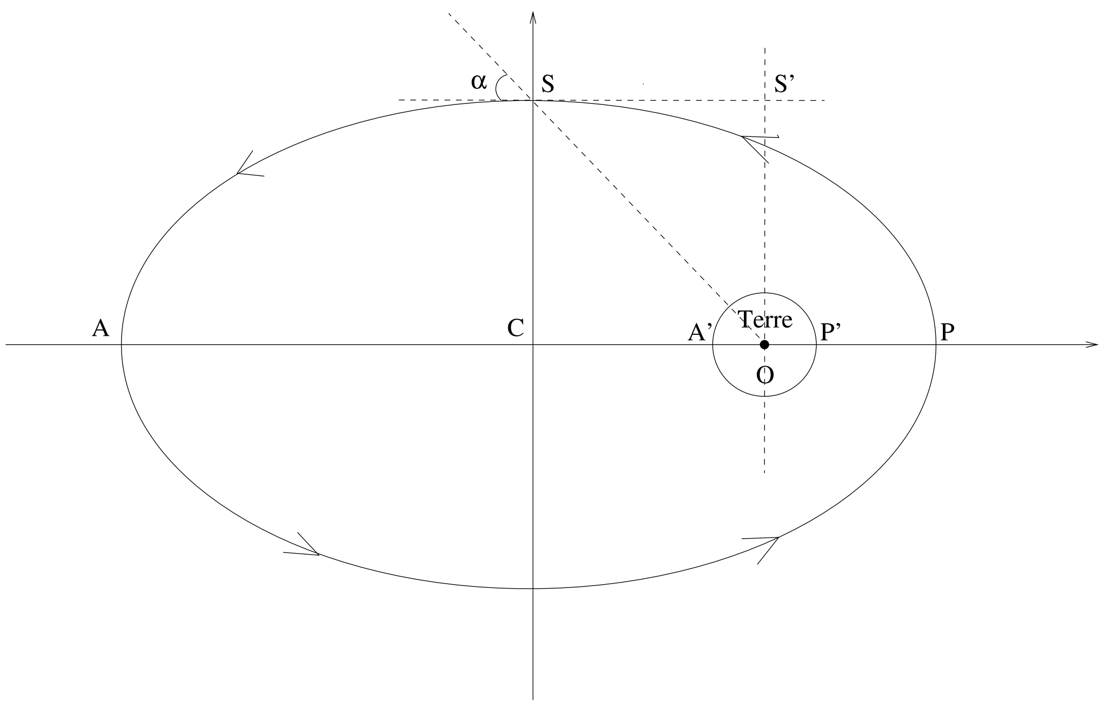
   À partir de la vitesse aréolaire :

   $$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{O}}}\|}{2m} = const\,\mathbf{(1.0)}.$$

2. (10 points) **Mouvement d'un satellite en orbite autour de la terre**

On considère un satellite de masse 1000 Kg en orbite elliptique autour de la Terre comme le montre la figure ci-dessous. Le satellite se maintient sur cette trajectoire car il est soumis à la force gravitationnelle qu'exerce la Terre. Cette force est en permanence dirigée vers le centre de la Terre. On note :

1. O le centre de la Terre qui est l'un des foyers de l'ellipse ;
2. A l'apogée du satellite (point de l'orbite le plus éloignée de la surface de la Terre) ;
3. P son périgée (point de l'orbite le plus proche de la surface de la Terre) ;
4. A' le point de la surface de la Terre qui fait face à A, l'apogée du satellite ;
5. P' le point de la surface de la Terre qui fait face à P, le périgée du satellite ;
6. C est le centre de l'ellipse ;
7. S le point tel que CS représente le demi-petit axe de l'ellipse.
8. Les flèches sur l'ellipse indiquent le sens du mouvement du satellite.



On donne les grandeurs suivantes :

— Distance CS=16715 km,
— Distance AA'=35000 km,
— Distance PP'=350 km,
— OA'=OP'=6400 km.

On considère que le satellite est en mouvement dans un référentiel galiléen dont le centre est situé au centre de la Terre.

(a) **(0.75)** Représenter le satellite sur la figure en S avec sa vitesse $\vec{v}_S$, le vecteur position $\overrightarrow{OS}$ et les vecteurs polaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

> **Solution:** La vitesse en S est tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement du satellite**(0.25)**. Le vecteur $\vec{u}_r$ est sortant et colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OS}$**(0.25)**. Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$ **(0.25)** et tous les deux forment un trièdre direct avec $\vec{u}_z$ sortant par rapport au plan de la feuille.

(b) **(1.25)** La vitesse en S est $v_S = 14650\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Calculer le moment cinétique du satellite en S par rapport au point O (l'angle α permettant de repérer le satellite peut être utile).

> **Solution:**
>
> $$\vec{L}_S = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{p}_S \Rightarrow \left\|\vec{L}_S\right\| = m\left\|\overrightarrow{OS}\right\| \|\vec{v}_S\| \sin(\alpha)\,(\mathbf{0.25}) = m v_S \mathrm{CS}\,(\mathbf{0.25})$$
>
> car $\left\|\overrightarrow{CS}\right\| = \left\|\overrightarrow{OS}\right\| \sin(\alpha)$. Pour l'application numérique, on convertit la valeur de la vitesse au S.I :
>
> $$1\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{5}{18}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}(\mathbf{0.25})$$
>
> de sorte que,
>
> $$\left\|\vec{L}_S\right\| = 10^3 \cdot \frac{5}{18} \cdot 14650 \cdot 16715 \cdot 10^3 \approx 6.8 \cdot 10^{13}\ \text{Kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}.(\mathbf{0.5})$$

(c) **(0.5)** Le moment cinétique, est-il conservé ? Justifier votre réponse.

> **Solution:** Le moment cinétique est conservée car la force gravitationnelle subie par le satellite est bien une force centrale (voir exercice 1).

(d) **(0.5)** Quel est le sens du vecteur moment cinétique par rapport au plan de la trajectoire elliptique ?

> **Solution:** Le vecteur moment cinétique est perpendiculaire au plan de la figure.

(e) **(2)** Utiliser les formules des vecteurs position et vitesse en coordonnées polaires pour démontrer que les vecteurs vitesses en A et P, $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_P$, sont perpendiculaires aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}$ respectivement.

> **Solution:** On utilise les formules de position et vitesse exprimées en coordonnées polaires (Ph11) : $\vec{r} = r\vec{u}_r$ **(0.25)** et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}\theta$ **(0.25)** et on effectue le produit

scalaire : $\vec{r} \cdot \vec{v} = r\dot{r}$ **(0.5)**. Puisque P et le point de l'orbite le plus proche de la terre et A est le point le plus eloigné, la fonction $r(t)$ a un maximum en A et en minimum en P et par conséquent $\dot{r} = 0$ **(0.5)** dans les deux cas. Ainsi,

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{OA}, \vec{v}_A\right) = 90^\circ (\mathbf{0.25}) \textbf{ et } \left(\overrightarrow{OP}, \vec{v}_P\right) = 90^\circ.(\mathbf{0.25})$$

Ce résultat est utile par la suite.

(f) **(3)** Utiliser les résultats des questions précédentes pour calculer la vitesse v_A du satellite à son apogée A et sa vitesse v_P à son périgée P.

Solution: La coservation du moment cinétique impose alors que $\left\|\overrightarrow{L}_S\right\| = \left\|\overrightarrow{L}_A\right\| = m\mathrm{OA}v_A$ (1) **(0.5)** et $\left\|\overrightarrow{L}_S\right\| = \left\|\overrightarrow{L}_P\right\| = m\mathrm{OP}v_P$ (2) **(0.5)** car le sinus de l'angle entre les deux vecteurs est égale à 1 dans les deux cas.
D'après l'équation (1) :

$$v_P = \frac{CS}{OP} v_S (\mathbf{0.5}) = \frac{CS}{OP' + P'P} v_S (\mathbf{0.25}) \overset{A.N.}{=} \frac{16715}{6750} \cdot 14650 \approx 3.6 \cdot 10^4 \ \mathrm{Km} \cdot \mathrm{h}^{-1} (\mathbf{0.25})$$

et d'après l'équation (2) :

$$v_A = \frac{CS}{OA} v_S (\mathbf{0.5}) = \frac{CS}{OA' + A'A} v_S (\mathbf{0.25}) \overset{A.N.}{=} \frac{16715}{41400} \cdot 14650 = 5.0 \cdot 1^1 0^3 \ \mathrm{Km} \cdot \mathrm{h}^{-1}.(\mathbf{0.25})$$

(g) **(1)** Sans faire de calcul et en justifiant votre réponse, que vaut la vitesse du satellite sur le point de la trajectoire axialement opposé à S ? La représenter sur la figure.

Solution: La conservation du moment cinétique impose que la vitesse est la même qu'en S mais de sens opposée.

(h) **(1)** Représenter les vitesses en A et P en tenant compte des résultats numériques obtenus ainsi que de la valeur de sa vitesse en S donnée dans l'énoncé. Conclure.

Solution: On tiendra compte des normes des vecteurs, dans l'ordre : $v_P > v_S > v_A$. Les vecteurs sont tangents à la trajectoire sur chacun des points.

3. (6 points) **Équations différentielles**

Résoudre les équations différentielles suivantes pour la fonction du temps t : $x(t)$.

(a) **(1)** Donner la solution générale de l'équation

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0.$$

Solution: Par étapes, on écrit l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ **(0.25)**. Le discriminant $\Delta = 0$ donc $r = -1$ **(0.25)** est une racine double. Ainsi,

$$x(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{-t}.(\mathbf{0.5})$$

(b) **(4)** Donner la solution de l'équation

$$\ddot{x} + x = 1$$

avec la condition initiale : $x(0) = 5$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Solution: On pose l'équation homogène associée : $\ddot{x} + x = 0$ **(0.25)** dont l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ **(0.25)**. Le discriminant vaut $\Delta = -4 < 0$ donc on a deux racines complexes : $r_1 = i$ **(0.25)** et $r_2 = -i$ **(0.25)**. Ainsi, la solution de l'équation homogène est : $x_H(t) = a\cos(t + \phi)$ **(0.5)**. La solution particulière est triviale : $x_p(t) = 1$ **(0.5)** et par conséquent, la solution générale est

$$x(t) = a\cos(t + \phi) + 1.(\mathbf{0.5})$$

On évalue la première condition initiale : $x(0) = a\cos(\phi) + 1 = 5 \Rightarrow a\cos(\phi) = 4$ **(0.25)**. La dérivée donne :

$$\dot{x}(t) = -a\sin(t + \phi)(\mathbf{0.25})$$

donc,

$$\dot{x}(0) = -a\sin(\phi) = 0(\mathbf{0.25}) \Rightarrow \phi = 0,\ a = 4.(\mathbf{0.25})$$

Finalement,

$$x(t) = 4\cos(t) + 1.(\mathbf{0.5})$$

(c) **(1 pt de bonus : tout ou rien !)** Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 9x = e^{4t}.$$

Solution: On pose l'équation homogène associée : $\ddot{x} + 9x = 0$ dont l'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = -36 < 0$ donc on a deux racines complexes : $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$. Ainsi, la solution de l'équation homogène est : $x_{\mathrm{H}}(t) = a\cos(3t + \phi)$. La solution particulière est de la forme : $x_p(t) = \lambda e^{4t}$. On rempace pour trouver la valeur de λ en dérivant cette proposition : $\ddot{x} = 16\lambda e^{4t}$ et on a finalement :

$$\lambda = \frac{1}{25}.$$

La solution générale est :

$$x(t) = a\cos(3t + \phi) + \frac{e^{4t}}{25}.$$