Date de l'épreuve :
Jeudi 2 Mai 2019

AERO 1 : Cycle Renforcé

Durée de l'épreuve : 1h

Sans : **Notes de cours** Avec : **Calculatrice**

Devoir surveillé de Physique 2
Corrigé

Partie	I	II	Total
Points :	12	8	20
Notes			

Si au cours de l'épreuve, vous repérez une erreur ou un oubli dans l'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le sujet comporte 2 parties.
Le barème est donné à titre indicatif.
Les calculs doivent être détaillés et les réponses justifiées.

NOM :

PRENOM :

CLASSE :

Rédigez directement sur la copie en dessous de chaque question.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. Bon travail à vous !!

Système masse-ressort vertical

On se propose d'étudier l'équilibre puis les oscillations libres d'un système masse-ressort vertical. On se place dans un référentiel galiléen fixe.

La masse m supposée ponctuelle en M est accrochée à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est fixe.

I-1. (1 ½ points) **Schéma du système**

La figure ci-dessous schématise :

— *à gauche* : le ressort vertical à vide, de longueur ℓ_0

— *au centre* : le système à l'équilibre, on note $\ell_{éq}$ la longueur du ressort.

— *à droite* : le système hors équilibre, on note $\ell(t)$ la longueur du ressort à l'instant t.

On suppose que la masse M ne peut se déplacer que verticalement : sa position est repérée par la coordonnée x de l'axe vertical descendant Ox (vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$). On choisira de prendre comme origine O la position de M à l'équilibre.

a. Représenter sur la figure les données de l'énoncé.

b. Définir les forces qui s'exercent sur M et les représenter sur la figure.

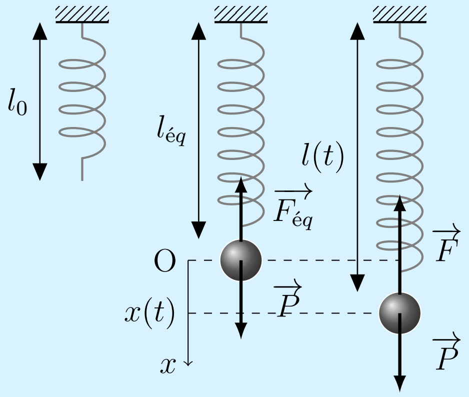
M est soumis :

— à son poids

$$\overrightarrow{P} = m\,g\overrightarrow{e_x} \qquad \textbf{(0.25)}$$

— à la force de rappel du ressort

$$\overrightarrow{F}_{\text{rappel}} = -k\,(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_x} \qquad \textbf{(0.5)}$$



(0.75)

I-2. (1 ½ points) **Etude de l'équilibre.**

La masse m est suspendue au ressort et le système est à l'équillibre.

a. Etablir la condition d'équilibre de M.

(0.5) A l'équilibre, les forces se compensent :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_{\text{rappel/éq}} = \overrightarrow{0}$$

b. Donner l'expression de la force de rappel $\overrightarrow{F}_{rappel}$ à l'équilibre. Est elle nulle ?

(0.5) Le ressort a une longueur d'équilibre $\ell_{éq}$ différente de sa longueur au repos ℓ_0 donc la force de rappel à l'équilibre $\overrightarrow{F}_{rappel/éq}$ n'est pas nulle et s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{rappel/éq} = -k\,(\ell_{éq} - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$$

c. En déduire la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{éq}$ en fonction des paramètres du système.

(0.5) En projetant la PFD sur l'axe (Ox), on obtient :

$$m\,g - k\,(\ell_{éq} - \ell_0) = 0$$
$$\iff \ell_{éq} = \ell_0 + \frac{m\,g}{k}$$

I-3. (4 points) **Etude des oscillations libres sans frottement.**

A $t = 0$, la masse est écartée de sa position d'équilibre d'une distance $x_0 = a$ et est lâchée avec une vitesse initiale nulle. On néglige les frottements

a. Décrire le mouvement de M.

(0.5) La masse M décrit un mouvement **rectiligne** selon l'axe vertical, **oscillant** autour de sa position d'équilibre - *celle-ci coïncide avec la longueur du ressort à l'équilibre* $\ell_{éq}$.

b. Exprimer la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F}_{rappel}$ en fonction de x.

(0.5) On prend comme origine O de l'axe, la position de la masse à l'équilibre. La coordonnée x permettant de repérer M correspond alors à l'allongement ℓ du ressort par rapport à sa longueur à l'équilibre $\ell_{éq}$, autrement dit "écart à l'équilibre" :

$$x = \ell - \ell_{éq}$$

La force de rappel s'écrit donc en fonction de x :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{\text{rappel}} &= -k\,(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_x}\\ &= -k\,(x + \ell_{éq} - \ell_0)\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

c. Établir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par x.

(1) En appliquant la PFD à la masse M et en projetant sur l'axe (Ox) colinéaire au mouvement :

$$\begin{array}{rl} \text{PFD} \ : & \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_{rappel} = m\,\overrightarrow{a} \\ \text{Projection} \implies & m\,\ddot{x} = m\,g - k\,(\ell - \ell_0) \\ \iff & m\,\ddot{x} = m\,g - k\,(x + \ell_{\text{éq}} - \ell_0) \\ \iff & m\,\ddot{x} = m\,g - k\,x - k\,(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \\ \text{Or à l'équilibre} \ : & m\,g - k\,(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \\ \text{On obtient donc} \ : & \boxed{m\,\ddot{x} = -k\,x \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \end{array}$$

d. Montrer que le système étudié est un oscillateur harmonique dont on donnera l'expression de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0.

(1) On retrouve donc l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 et de période propre T_0 :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \omega_0 & = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ T_0 & = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{array} \right.$$

e. Écrire la solution générale de l'équation et déterminer les constantes compte-tenu des conditions initiales.

(1) L'équation horaire $x(t)$ des oscillations a pour expression :

$$x(t) = A\,\cos(\omega_0\,t + \phi)$$

A et ϕ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales. A est appelé amplitude et s'exprime en mètre (m) et ϕ phase à l'origine exprimée en radian (rad).

Utilisation des conditions initiales :

— A $t = 0$, $x(t=0) = a \implies A\,\cos\,\phi = a$

— On a : $v(t) = -\omega_0\,A\,\sin(\omega_0\,t + \phi)$
  Alors à $t = 0$, $v(t=0) = -\omega_0\,A\,\sin(\phi) = 0$.
  A et ω_0 ne peuvent être nuls donc $\sin\,\phi = 0 \implies \boxed{\phi = 0\ [\pi]}$.
  Et finalement $\boxed{A = a}$.

La solution s'écrit donc :

$$x(t) = a\,\cos(\omega_0\,t)$$

I-4. (5 points) **Oscillations amorties.**

La masse accrochée au ressort est soumise à une force de frottement fluide opposée au mouvement, d'expression : $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$

a. Etablir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par x.

(0.5) La masse accrochée au ressort est maintenant soumise à une force de frottement fluide d'expression $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$ (force opposée au mouvement). L'équation différentielle qui régit l'oscillation de la masse s'obtient en appliquant la PFD à la masse et en projetant sur l'axe colinéaire au mouvement :

$$\begin{aligned} \text{PFD} \ : \quad & \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_{rappel} + \overrightarrow{f} = m\,\overrightarrow{a} \\ \text{Projection} \implies & m\,\ddot{x} = -k\,x - \lambda\,\dot{x} \\ \iff & \boxed{\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0} \end{aligned}$$

b. En reprenant l'expression de la pulsation propre ω_0 et en posant $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$, paramètre caractéristique de l'amortissement, montrer que l'équation s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\,\alpha\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, sans second membre.

(0.25) En utilisant la pulsation propre des oscillations $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et le facteur caractéristique de l'amortissement : $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$ on obtient l'équation :

$$\ddot{x} + 2\,\alpha\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

c. Ecrire l'équation caractéristique associée à l'équation et calculer son discriminant Δ en fonction des paramètres α et ω_0 du système.

(0.5) On écrit l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\,\alpha\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \implies \boxed{r^2 + 2\,\alpha\,r + \omega_0^2 = 0}$$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = 4\,\alpha^2 - 4\,\omega_0^2$$

. Les racines de l'équation caractéristique dépendent du signe du discriminant donc selon le signe de Δ, on distingue 3 différents régimes d'oscillations amorties.

d. Montrer que l'on distingue 3 régimes d'oscillations amorties en précisant les conditions sur les paramètres.

e. Résoudre l'équation caractéristique et écrire la solution générale de l'équation différentielle dans les 3 cas.

$$\Delta = 4\,\alpha^2 - 4\,\omega_0^2$$

$\boxed{\Delta < 0 \Longleftrightarrow \alpha < \omega_0}$ **(0.25)** **: régime pseudo-périodique**

Les deux racines de l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont complexes, conjuguées entre elles.

$$r_\pm = -\alpha \pm i\,\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\,\omega \qquad \textbf{(0.5)}$$

Le paramètre ω est appelé pseudo-pulsation des oscillations.
Donc la solution $x(t)$ dans le cas du régime pseudo-périodique s'écrit :

$$\boxed{x(t) = A\,\exp\left(-\alpha\,t\right)\,\cos\left(\omega\,t + \phi\right)} \qquad \textbf{(0.5)}$$

L'amortissement est faible : on observe des oscillations avant le retour à l'équilibre du système.

$\boxed{\Delta > 0 \Longleftrightarrow \alpha > \omega_0}$ **(0.25)** **: régime apériodique**

Les deux racines de l'équation caractéristique sont réelles et opposées :

$$r_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad \textbf{(0.5)}$$

Dans ce cas, la solution s'écrit :

$$\boxed{x(t) = A\,\exp(r_-\,t) + B\,\exp(r_+\,t)} \qquad \textbf{(0.5)}$$

L'amortissement l'emporte sur les oscillations : il n'y a pas d'oscillations du système

$\boxed{\Delta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \omega_0}$ **(0.25)** **: régime critique**

L'équation caractéristique possède une racine double :

$$r_0 = -\alpha \qquad \textbf{(0.5)}$$

Dans ce cas, la solution s'écrit :

$$\boxed{x(t) = \exp(r_0\,t)\,\Big(A + B\,t\Big)} \qquad \textbf{(0.5)}$$

L'oscillateur revient rapidement à l'équilibre, sans osciller.

Etude d'un pendule simple

On se propose d'étudier les oscillations d'un pendule simple. On se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

Il s'agit d'un système à un seul degré de liberté : une seule grandeur scalaire caractérise le mouvement, il est donc possible d'utiliser une approche énergétique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement.

II-1. (6 points) Pendule simple : approche énergétique

Un pendule simple est constitué d'une boule assimilée à un point matériel M de masse m attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable, suspendu à un point fixe O. On repère M par son altitude z, coordonée de l'axe Oz, vertical orienté vers le bas.

On écarte la masse d'un angle θ_0 puis on lâche sans vitesse à $t = 0$. On néglige tous les frottements.

En supposant θ petit, l'approximation des petits angles donne :

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) \approx \theta$$

On étudie le mouvement de la boule M dans un référentiel lié à un observateur fixe par rapport à O.

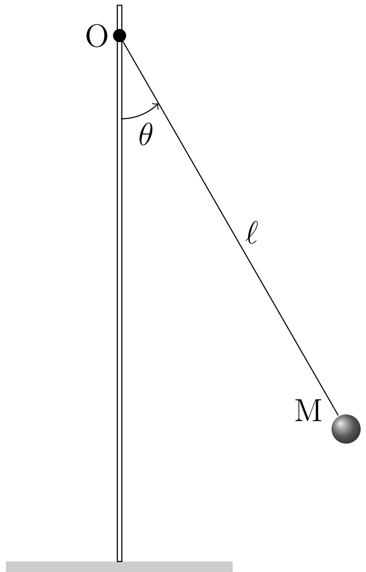
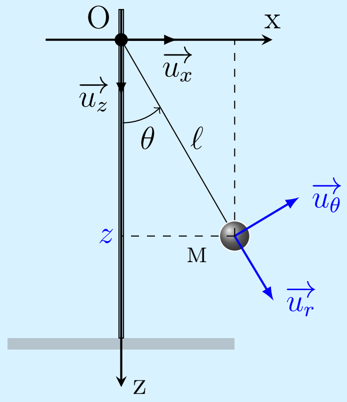


FIGURE 1 – Pendule simple

a. Décrire le mouvement de M. Dans quelle base se place t'on pour étudier le mouvement de M ? Représenter les vecteurs de la base sur la figure.

(0.5) M effectue un mouvement de rotation autour d'un axe fixe et peut être repéré facilement par un angle.
On utilise la base polaire composée de deux vecteurs unitaires :
- $\overrightarrow{u_r}$ colinéaire et dirigé suivant $\overrightarrow{OM}$; on l'appelle vecteur radial.
- $\overrightarrow{u_\theta}$ perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$ et dirigé comme l'angle θ, de l'axe Ox vers l'axe Oy ; on l'appelle vecteur orthoradial.

On repère alors le point M par une longueur, ici ℓ, et par un angle θ.



Base polaire

b. Donner l'expression du vecteur position et du vecteur vitesse dans cette base.

(0.5) Les vecteurs de la base polaire sont mobiles, il faut donc prendre en compte leurs dérivées par rapport au temps qui sont non nulles.

— Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \ell\,\overrightarrow{u_r}$$

— Vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \dot{\ell}\,\overrightarrow{u_r} + \ell\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \\ &= \ell\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

c. Donner l'expression de l'énergie cinétique de M.

(1) L'énergie cinétique de rotation de M s'écrit : $E_c = \frac{1}{2}\,I\dot{\theta}^2$
où I est le moment cinétique de M par rapport à l'axe de rotation : $I = m\,\ell^2$

$$\text{Donc} \;:\quad E_c = \frac{1}{2}\,m\,\ell^2\dot{\theta}^2$$

d. Donner l'expression de l'énergie potentielle de M, en fonction de son altitude z, puis en fonction de l'angle θ. On choisira la position d'équilibre de M comme origine de l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle de pesanteur de M est définie à une constante K près :

$$E_p(z) = m\,g\,z + K \qquad \mathbf{(0.25)}$$

A l'équilibre, le pendule est en position vertical : $z_{éq} = -\ell$. L'origine de l'énergie potentielle nous donne :

$$\begin{aligned}E_p(z_{éq}) = 0 &\Longrightarrow -m\,g\,\ell + K = 0 \\ &\Longrightarrow K = m\,g\,\ell \quad \mathbf{(0.25)}\end{aligned}$$

En exprimant z en fonction de θ : $z = -\ell\,cos\theta$,on obtient :

$$E_p(\theta) = m\,g\,\ell(1 - cos\theta) \quad \mathbf{(0.5)}$$

En utilisant l'approximation des petits angles $\cos(\theta) \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

$$E_p(\theta) = m\,g\,\ell\,\frac{\theta^2}{2} \quad \mathbf{(0.25)}$$

e. En déduire l'énergie mécanique de M. Simplifier l'expression en utilisant l'approximation des petits angles.

(0.5) L'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}\, m\, \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\, g\, \ell \theta^2 \end{aligned}$$

f. Justifier que l'énergie mécanique est conservée puis établir l'équation différentielle du mouvement.

M est soumis à des forces conservatives donc l'énergie mécanique est conservée c'est à dire constante au cours du temps. **(0.25)**

$$\begin{aligned} &\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \textbf{(0.25)} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{2}\, m\, \ell^2 \frac{d\,(\dot{\theta}^2)}{dt} + \frac{1}{2} m\, g\, \ell \frac{d\,(\theta^2)}{dt} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{2}\, m\, \ell^2\ \times\ 2\, \ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{1}{2} m\, g\, \ell\ \times\ 2\, \dot{\theta}\theta = 0 \quad \textbf{(0.5)} \\ \Longleftrightarrow\ & \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\, \theta = 0 \quad \textbf{(0.5)} \end{aligned}$$

g. Déterminer la pulsation propre ω_0 des oscillations du pendule.

On retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\, \theta = 0$$

où ω_0 est la pulsation propre des oscillations : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ **(0.5)**

h. Montrer que la période propre T_0 des oscillations s'écrit :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

La période propre T_0 des oscillations est donnée par :

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \textbf{(0.25)}$$

II-2. (2 points) **Expédition à Cayenne**

Lors de l'expédition de l'Académie des Sciences en Guyane en 1672, on s'aperçut que la longueur du pendule à secondes utilisé à Cayenne devait être diminué de 2,8 mm par rapport à sa longueur à Paris, qui était de 993,9 mm.

a. Montrer que ce résultat pouvait être interprété comme une conséquence de l'aplatissement terrestre.

La période propre T_0 des oscillations d'un pendule est donnée par :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Si l'on doit diminuer la longueur ℓ, cela signifie que g est plus faible donc que Cayenne est plus loin du centre de la Terre que Paris. **(0.5)**

b. Calculer l'intensité de pesanteur à Cayenne g_C sachant que sa valeur à Paris est $g_P = 9{,}81\,m.s^{-2}$.

Après raccourcissement, les périodes sont les mêmes, donc :

$$\frac{\ell_C}{g_C} = \frac{\ell_P}{g_P} \qquad \textbf{(0.5)}$$

Soit :

$$\begin{aligned} g_C &= g_P \times \frac{\ell_C}{\ell_P} \qquad \textbf{(0.5)} \\ &= 9{,}78\,m.s^{-1} \qquad \textbf{(0.5)} \end{aligned}$$

Fin de l'énoncé.