Ppr-Ph14 – Initiation à la mécanique du solide – Mercredi 12 juin 2019
Classe Aéro 1 *(UE encadrée par D. Lounis)*

Corrigé

PARTIE 1

Montrer qu'un champ de moment est équiprojectif :

Il faut montrer l'égalité $\overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B}.\overrightarrow{AB}$. En utilisant la relation de changement de point d'un moment on écrit $\overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}).\overrightarrow{AB}$ et en développant on constate que le produit mixte $(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}).\overrightarrow{AB}$ est nul. On confirme l'égalité des produits scalaires $\overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B}.\overrightarrow{AB}$.

Les deux invariants scalaires : le premier invariant scalaire est le produit scalaire entre les deux éléments de réduction du torseur. $I = \vec{R}.\overrightarrow{M_A} = \vec{R}.(\overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R})$ avec $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$

On vérifie alors que : $I = \vec{R}.\overrightarrow{M_A} = \vec{R}.\overrightarrow{M_B}$

Le deuxième invariant scalaire est le comoment. La démonstration se fait par le même protocole.

Orthogonalité d'un torseur glisseur : il suffit d'écrire le premier invariant scalaire pour constater que ce dernier est nul. On montre alors l'orthogonalité d'un torseur glisseur.

PARTIE 2

Après simplification, nos vecteurs deviennent : $\vec{U} = -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ et $\vec{V} = 4\overrightarrow{\imath_\psi} + 2\overrightarrow{\jmath_\psi} + \overrightarrow{k_\psi}$

$$\lambda = -(8 + 3\cos\psi + 22\sin\psi)$$

$$\begin{aligned}\vec{W} = {} & [4(-1 + \sin\psi) - 10\cos\psi]\overrightarrow{\imath_\psi} + (22\cos\psi - 3\sin\psi)\overrightarrow{\jmath_\psi} \\ & + 2[8 - 2\cos\psi - 5\sin\psi]\overrightarrow{k_\psi}\end{aligned}$$

PARTIE 3

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_0} + \int \overrightarrow{F_{1(M)}} d\mu + \int \overrightarrow{F_{2(M)}} d\mu + \overrightarrow{F_3}$$

$$\vec{R} = (F_0 - F_3 - 2fa - \frac{pa^2}{12})\vec{\jmath}$$

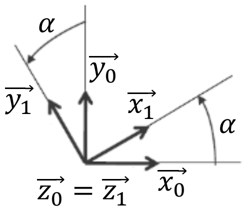
$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AA} \wedge \overrightarrow{F_0} + \int (\overrightarrow{AP_1} \wedge \overrightarrow{F_{1(M)}} d\mu) + \int (\overrightarrow{AP_2} \wedge \overrightarrow{F_{2(M)}} d\mu) + \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{F_3}$$

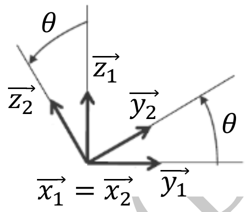
$$\overrightarrow{M_A} = \vec{0} + \int_0^a (x\vec{\imath} \wedge -\frac{p}{6} x dx\vec{\jmath}) + \int_{3a}^{5a} (x\vec{\imath} \wedge -f dx\vec{\jmath}) + 6a\vec{\imath} \wedge -F_3\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{M_A} = -\left(\frac{a^3 p}{18} + 8a^2 f + 6aF_3\right)\vec{k}$$

PARTIE 4

1ère façon





2ème façon $\quad (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}) \underset{\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}}{\overset{\alpha}{\rightarrow}} (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}) \underset{\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}}{\overset{\theta}{\rightarrow}} (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

<u>Torseurs cinématiques</u> :

$$\{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S_1/S_0}} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{A(S_1/S_0)}} = \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{V_{B(S_2/S_1)}} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

<u>Avec</u> : $\dot{\alpha} = \omega_{10}$ et $\dot{\theta} = \omega_{21}$ en radian par seconde

En A et B, liaisons parfaites n'autorisant qu'un ddl chacune.

- En A : Pivot$(A, \overrightarrow{z_0})$
- En B : Pivot$(B, \overrightarrow{x_1})$

<u>Utilisation de la relation des champs de moments</u> :

$$\overrightarrow{V_{B(S_2/S_0)}} = \overrightarrow{V_{B(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{V_{B(S_1/S_0)}}$$

Informations connues à partir des torseurs cinématiques

$$\text{Et} \quad \overrightarrow{V_{B(S_1/S_0)}} = \overrightarrow{V_{A(S_1/S_0)}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/S_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

<u>On a alors</u> :

$$\overrightarrow{V_{B(S_2/S_0)}} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} \wedge (a\overrightarrow{z_0} + b\overrightarrow{x_1})$$
$$\overrightarrow{V_{B(S_2/S_0)}} = \dot{\alpha}b\overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{V_{G_2(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{V_{B(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} \wedge \overrightarrow{BG_2}$$
$$\overrightarrow{V_{G_2(S_2/S_1)}} = -\dot{\theta} c \overrightarrow{y_2}$$

Torseurs actions mécaniques :

$$\{T_{S_0 \to S_1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{S_0 \to S_1}} = X_{01}\overrightarrow{x_1} + Y_{01}\overrightarrow{y_1} + Z_{01}\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{M_{A(S_0 \to S_1)}} = L_{01}\overrightarrow{x_1} + M_{01}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}$$
$$\{T_{S_1 \to S_2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} = X_{12}\overrightarrow{x_2} + Y_{12}\overrightarrow{y_2} + Z_{12}\overrightarrow{z_2} \\ \overrightarrow{M_{B(S_1 \to S_2)}} = M_{12}\overrightarrow{y_2} + N_{12}\overrightarrow{z_2} \end{Bmatrix}$$

Preuve que les liaisons sont parfaites : le produit torsoriel de chaque liaison est nul.

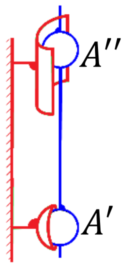
- $\mathcal{P}_{S_1/S_0} = \{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\}\{T_{S_0 \to S_1}\} = 0$
- $\mathcal{P}_{S_2/S_1} = \{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\}\{T_{S_1 \to S_2}\} = 0$

Liaisons équivalentes :

- En A : liaison pivot$(A, \overrightarrow{z_0})$ remplacée par liaison équivalente série (rotule + linéaire annulaire).
- En B : liaison pivot$(B, \overrightarrow{x_1})$ remplacée par liaison équivalente série (rotule + linéaire annulaire).

Schéma cinématique : il suffit de remplacer, sur le schéma, les liaisons originelles par les liaisons équivalentes citées ci-dessus.

Actions mécaniques transmises par ces liaisons :



$$\{T_{S_0 \to S_1}\} = {}_{A'}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{S_0 \to S_1}} = X_{01}\overrightarrow{x_1} + Y_{01}\overrightarrow{y_1} + Z_{01}\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{M_{A'(S_0 \to S_1)}} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{S_0 \to S_1}\} = {}_{A''}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{S_0 \to S_1}} = X_{01}\overrightarrow{x_1} + Y_{01}\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{M_{A''(S_0 \to S_1)}} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Idem pour la liaison équivalente en B…