

Cours Mécanique des fluides

Mme. KASRAOUI
taissir.kasraoui@ipsa.fr

2020-2021

Plan du cours

- ➡ **Chapitre I:** Introduction et généralités sur les fluides
- ➡ **Chapitre II:** Statique des fluides
- ➡ **Chapitre III:** Cinématique des fluides
- ➡ **Chapitre IV:** Dynamique des fluides (conservation de masse)
- ➡ **Chapitre V:** Dynamique des fluides parfaits (conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie)
- ➡ **Chapitre VI:** Etude des fluides visqueux
- ➡ **Chapitre VII:** Etude des fluides visqueux (Notion de pertes de charges)

Chapitre I:

Introduction et généralités sur les fluides

Introduction générale

- La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui concerne le comportement des liquides (**hydraulique**) et des gaz (**aérodynamique**) au repos ou en mouvement.

Divers domaines d'applications

Exemple 1: l'étude de l'écoulement sanguin dans des capillaires déformables (de diamètre de quelques microns): **microfluidique**

Exemple 2: l'écoulement de pétrole brut dans des conduites de l'ordre du mètre de diamètre avec des longueurs pouvant aller jusqu'à 13 000 km

Exemple 3: expliquer pourquoi les avions volent et quel est le profil d'aile idéal pour avoir un vol le plus efficace possible en termes de coûts liés au kérosène et de vitesse.

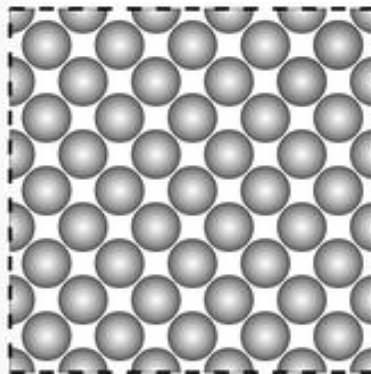
Qu'est-ce qu'un fluide?

1.1 Définition

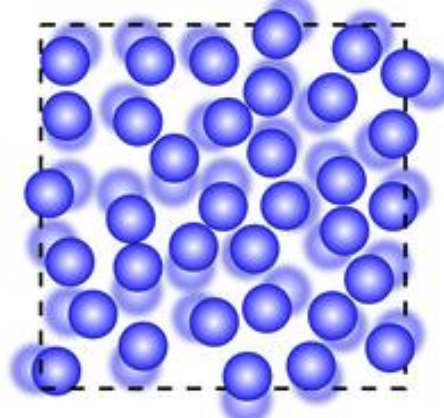
1.1.1 Description physique d'un fluide

- Le fluide est constitué d'un ensemble de molécules libres de se déplacer les unes par rapport aux autres, contrairement au solide où les forces de cohésion intermoléculaires sont fortes et créent des réseaux.

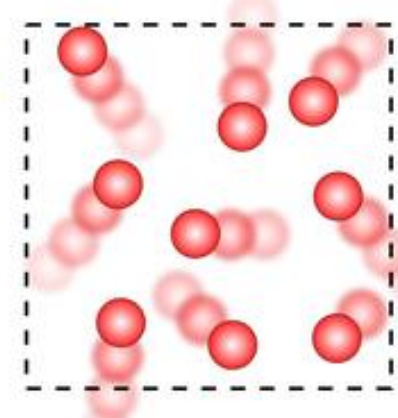
Solide



Liquide

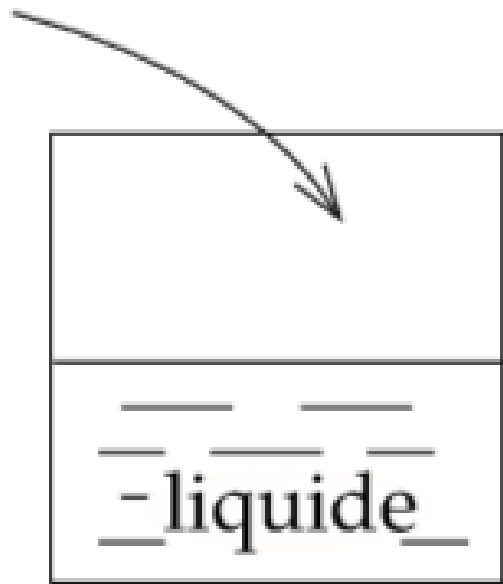


Gaz

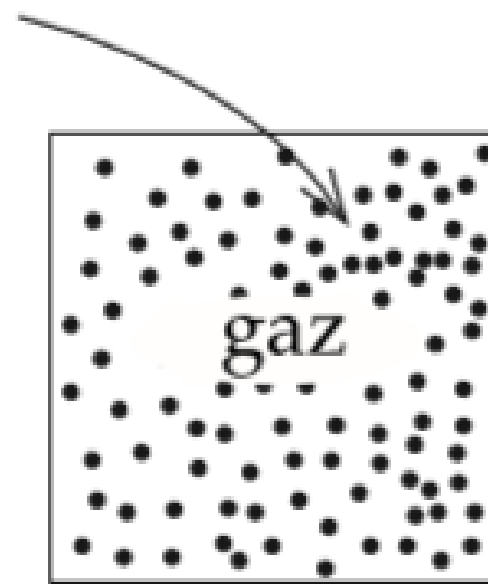


1.1.2 Propriétés:

- Le fluide a la propriété de pouvoir s'écouler,
- Lorsqu'on impose une force à un solide, la déformation peut être élastique si elle disparaît lorsque la force n'est plus appliquée ou au contraire plastique si elle persiste.
- Pour un fluide, la déformation augmente continuellement même sous l'effet d'une force faible, le fluide s'écoule.
- Le fluide est sans rigidité.
- Le fluide n'a pas de forme propre.



Le liquide remplit le
fond du récipient



Le gaz occupe tout le
volume disponible

On notera une différence entre liquide et gaz :

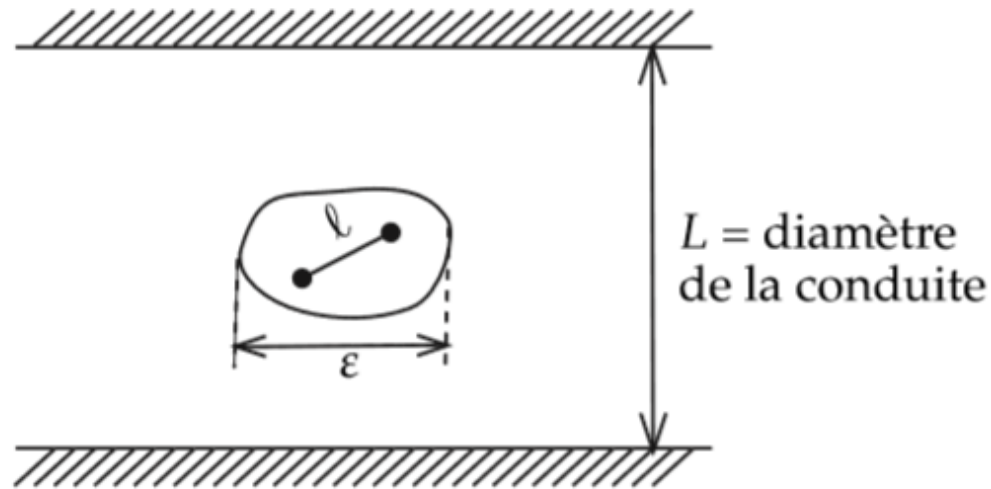
 le phénomène d'expansion du gaz.

1.2 Le modèle du milieu continu fluide

Pour l'étude des fluides, on définit un modèle mécanique à l'échelle macroscopique :

On considère que le fluide est constitué de domaines fluides élémentaires $d\Omega$ comportant un grand nombre de molécules. On définit alors 3 échelles de longueur :

- l : libre parcours moyen entre deux molécules : échelle microscopique,
- ε : échelle de longueur du volume fluide $d\Omega$,
- L : longueur caractéristique de l'écoulement à l'échelle macroscopique (exemples : diamètre d'une conduite, dimension d'une aile)



$$l \ll \varepsilon \ll L$$

L'hypothèse de milieu continu est justifiée si les échelles de longueur l et L ont des ordres de grandeur différents.

- **Définition** : nombre de Knudsen: $K_n = \frac{l}{L}$

L'hypothèse de milieu continu est vérifiée si $K_n \ll 1$

1.3 Cas particuliers :

En physique, la notion de fluide recouvre l'état liquide et l'état gazeux. Cependant, d'autres milieux peuvent présenter des comportements fluides.

Exemples:

- les milieux granulaires (écoulement de sable),
- certains solides sur des échelles de temps longues (les glaciers),
- les suspensions ou les pâtes qui constituent des fluides très visqueux ayant des comportements rhéologiques particuliers (variations des propriétés selon les contraintes exercées)

1.3 Cas particuliers :

En physique, la notion de fluide recouvre l'état liquide et l'état gazeux. Cependant, d'autres milieux peuvent présenter des comportements fluides.

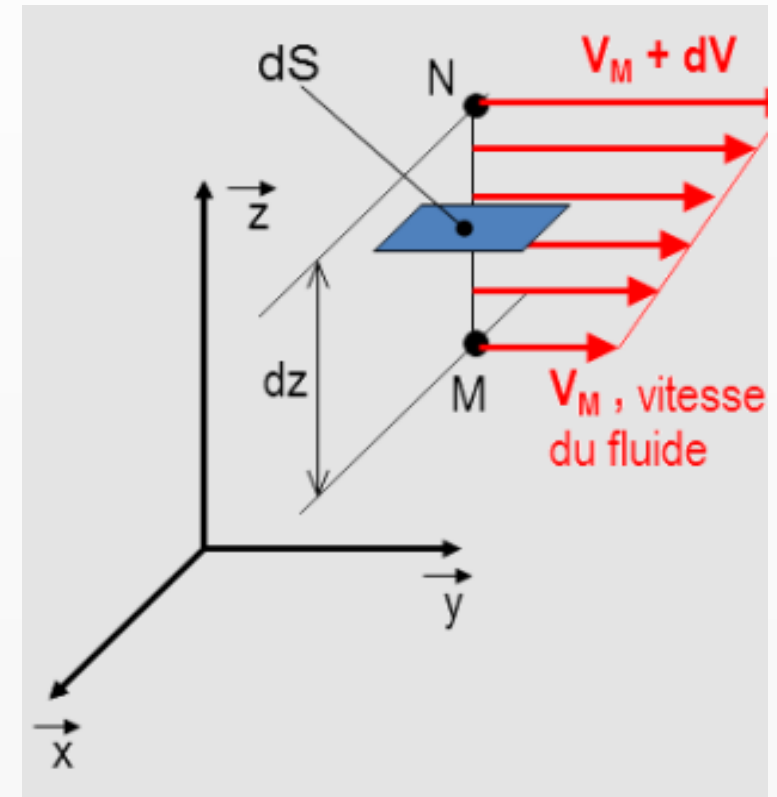
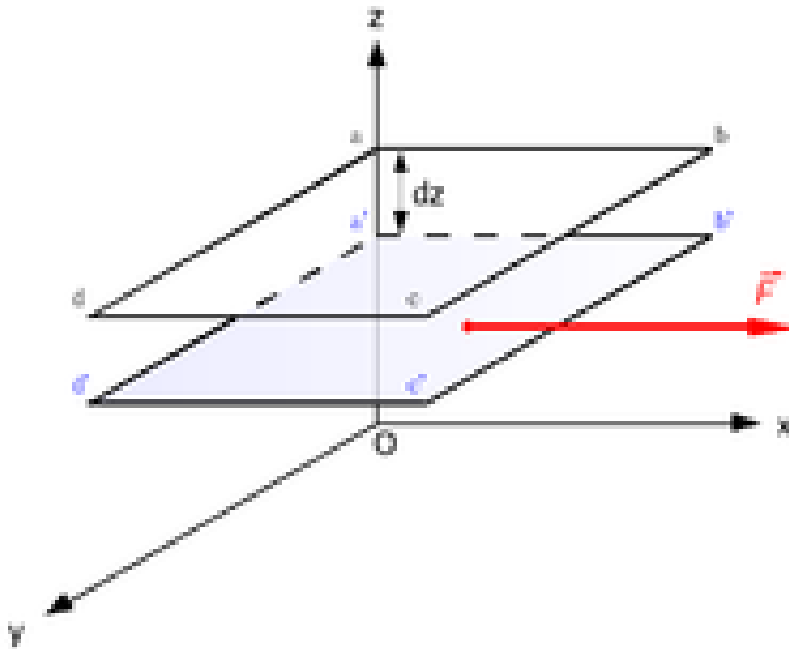
Exemples:

- les milieux granulaires (écoulement de sable),
- certains solides sur des échelles de temps longues (les glaciers ou le camembert),
- les suspensions ou les pâtes qui constituent des fluides très visqueux ayant des comportements rhéologiques particuliers (variations des propriétés selon les **contraintes** exercées)

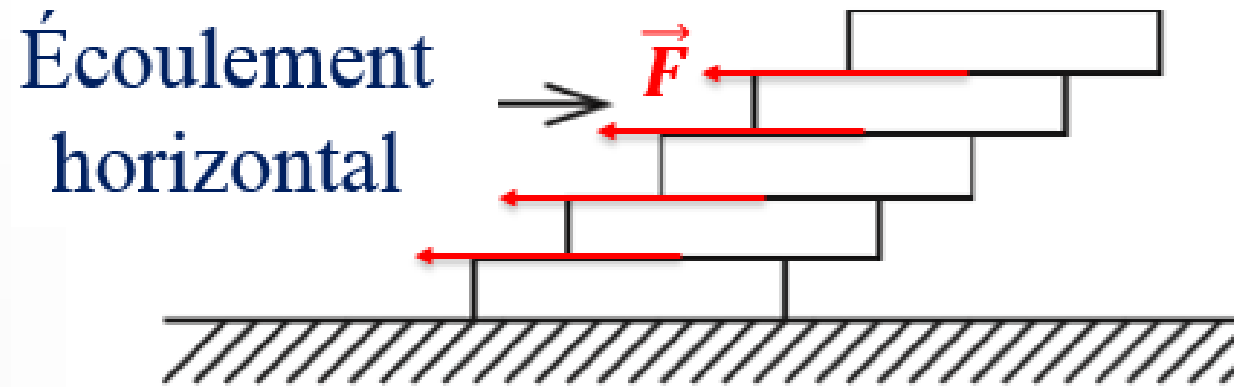
❖ Notion de viscosité:

La viscosité caractérise la résistance qu'oppose un fluide à sa mise en mouvement.

C'est l'effet du frottement interne pour un fluide en mouvement.

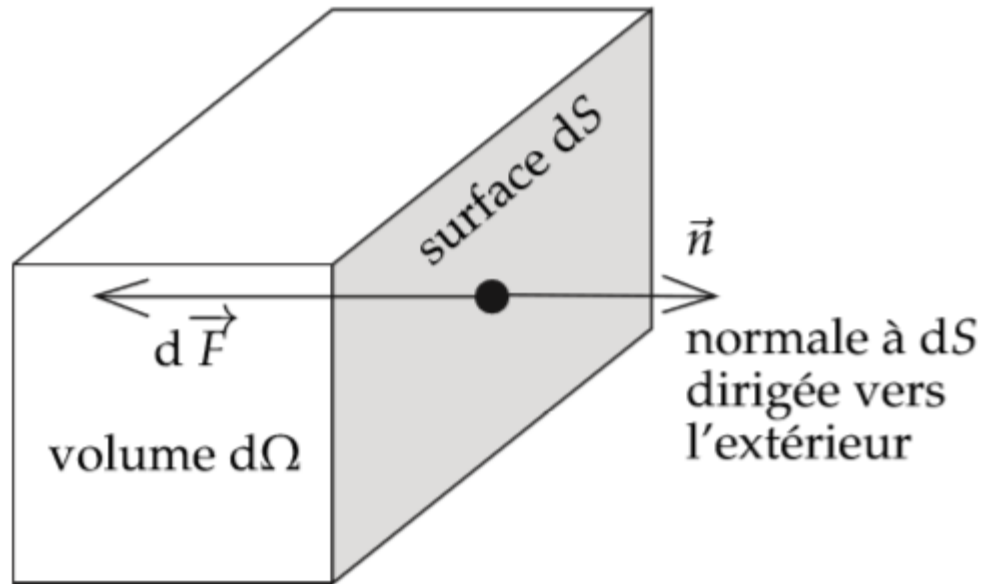


- Dans le mouvement d'un fluide il y a glissement avec frottements d'un volume fluide sur un autre.



Il y a **une force tangentielle** de frottement entre chaque volume fluide en mouvement.

- Pour un fluide au repos: Absence de cisaillement.
- Isolons un volume élémentaire de fluide $d\Omega$ au sein d'un milieu fluide statique.
- En effectuant le bilan des forces exercées par le fluide environnant sur $d\Omega$, sur chaque surface dS s'exerce une force compressive $d\vec{F}$ orthogonale à dS :



$$d\vec{F} = -dF \vec{n}$$

La force de pression est exprimée par:

$$d\vec{F} = -P \vec{n} dS$$

1.4 Équations d'état d'un fluide

- Fluide incompressible : $\rho = cste$
- Gaz parfait : $PV = nRT \leftrightarrow P = \rho rT$ avec $r = \frac{R}{M}$
- Gaz réel Van der Waals: $\left(P + \frac{n^2}{V^2} a^2 \right) (V - nb) = nRT$

Avec:

- ρ : masse volumique
- P : pression
- n : nombre de moles composant le système
- V : volume du système
- R =constante molaire des gaz parfaits $R=8,314$ J/mol.K
- r : constante massique des gaz parfait (pour l'air $r=287$ J/kg.K)
- a et b : paramètres empiriques

1.5 Propriétés des fluides

❖ Masse volumique:

Par définition, dans un milieu continu, la masse volumique est :

$$\rho = \frac{dm}{dv} \quad (Kg/m^3)$$

- Ordres de grandeur : $\left\{ \begin{array}{l} \rho_{gaz} \sim 1 \text{ Kg/m}^3, \rho_{air} = 1,29 \text{ Kg/m}^3 \\ \rho_{liq} \sim 800 \text{ à } 1200 \text{ Kg/m}^3 \end{array} \right.$
- Facteurs influençant ρ : la pression P, la température T.

❖ Densité:

Par définition, dans un milieu continu, la densité est définie par :

$$d = \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{référence}}}$$

- Pour un gaz, la référence est l'air : $d = \frac{M}{29}$ où M est la masse molaire exprimée en g/mol.
- Pour un liquide, la référence est l'eau : $d = \frac{\rho}{1000}$.

❖ Les coefficients thermoélastiques

- Compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$

Pour un gaz parfait $\chi_T = \frac{1}{P}$

Ordres de grandeurs: $\chi_{Tair} = 10^{-5} Pa^{-1}$ $\chi_{Teau} = 5 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}$

- Compressibilité isentropique $\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$

Pour un gaz parfait $\chi_S = \frac{1}{\gamma p}$

Avec γ est le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant.

$$\gamma = \frac{\chi_T}{\chi_S} = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{Relation de Reech}$$

- Compressibilité isochore

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

Pour un gaz parfait $\beta = \frac{1}{T}$

- Dilatation volumique isobare

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Pour un gaz parfait $\alpha = \frac{1}{T}$

❖ Les capacités thermiques

- Capacité thermique à volume constant: $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ (en J/K)

- Capacité thermique à pression constant: $C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ (en J/K)

- Pour un fluide incompressible (cas des liquides), comme pour un solide :

$$C_p \approx C_v$$

- Pour un gaz:

Relation de Mayer en gaz parfait

$$C_p - C_v = nR$$

Relation de Mayer pour un gaz réel

$$C_p - C_v = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Chapitre II:

Statique des fluides

❖ Définition:

- La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement.
- Il s'agit sans doute de la partie la plus ancienne de la mécanique des fluides, historiquement basée sur le principe d'Archimède. L'étude de l'équilibre des liquides comme l'eau a donné lieu à l'hydrostatique.

❖ Objectif:

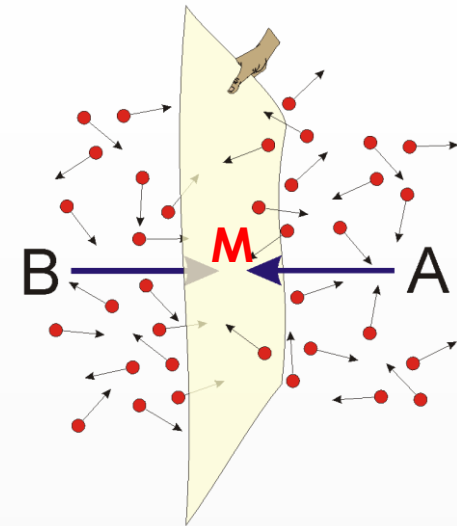
- Calculer la pression en tout point du domaine fluide.
- Calculer les efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec lequel il est en contact.

Relation de la statique

2.1 Force de pression

Soit $\delta\vec{F}(M)$ la force élémentaire exercée par un fluide sur un élément de surface δS entourant le point M . Cette force est perpendiculaire à la surface. La pression au point M est définie comme :

$$P(M) = \frac{\delta F(M)}{\delta S} \quad \text{Eq. 2.1}$$



Ceci conduit à définir la force exercée par un fluide sur une surface S à partir de la répartition de pression sur la surface comme :

$$\vec{F} = - \iint_S P(M) \vec{n} dS \quad \text{Eq. 2.2}$$

2.2 Principe fondamental de la statique (PFS)

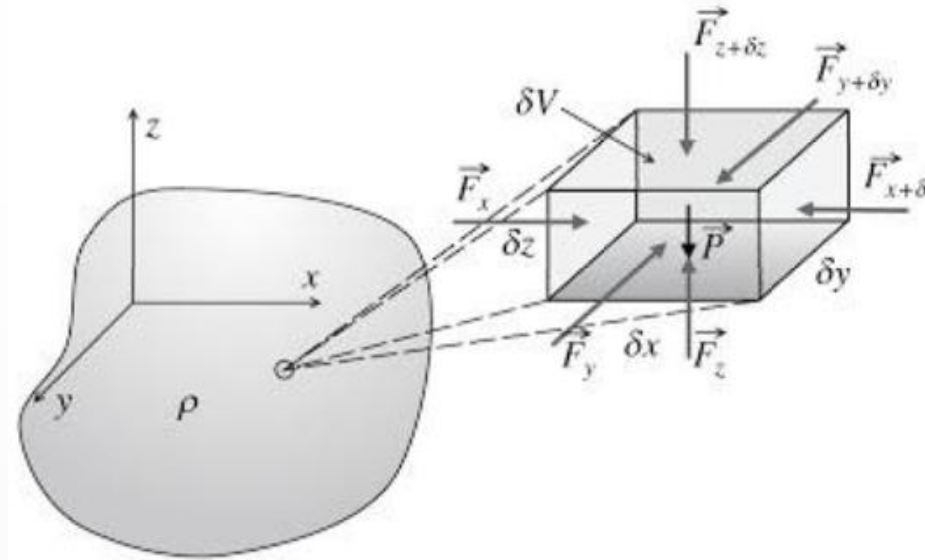


Figure 2.1: un élément parallélépipédique d'un domaine fluide au repos.

Considérons:

δV : le volume du fluide de dimensions infiniment petites δx , δy , δz

ρ : la masse volumique.

Les forces exercées sur ce domaine par le fluide environnant sont reportées sur la Figure 2.1.

2.2.2 Équation fondamentale

- La condition d'équilibre est : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_s + \vec{F}_V = \vec{0}$ *Eq. 2.4*

- Avec le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iint_S -P(M)\vec{n} dS = \iiint_V -\vec{\nabla}P dV$$
 Eq. 2.5

 il résulte :

$\forall dV \in \text{milieu fluide:}$ $\iiint_V (-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g})dV = \vec{0}$ *Eq. 2.6*

d'où l'équation locale : $-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} = \vec{0}$ *Eq. 2.7*



Équation fondamentale de la statique des fluides

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} \quad \text{Eq. 2.8}$$

Remarque:

Le résultat reste inchangé pour un champ de force volumique \vec{F}_V autre que le champ gravitationnel. Exemple : les forces électromagnétiques.

2.2.3 Expression du champ de pression en coordonnées cartésiennes

D'après l'équation fondamentale, le gradient de pression est :

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{z}$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

Or, la pression est uniforme dans un plan horizontal, elle dépend uniquement de la variable z \longrightarrow **$P = P(z)$**

On a donc :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \leftrightarrow P(z) - P(z_0) = - \int_{z_0}^z \rho g \, dz$$

Or,

- la masse volumique ρ peut varier suivant l'altitude,
- g est considéré comme une constante pour des échelles usuelles.

On a alors :

$$P(z) - P(z_0) = -g \int_{z_0}^z \rho(z) \, dz$$

et si $\rho = \text{Cte}$, on a :

$$P(z) - P(z_0) = -\rho g (z - z_0)$$

Eq. 2.9

Remarque: Dans le cas général, ρ dépend de P et de T , mais aussi des concentrations comme la salinité de l'eau de mer.

2.2.4 Equation de l'hydrostatique

En hydrostatique $\rho(M) = \text{Cte}$.

Loi fondamentale de la statique $\mathbf{P}(z) = \mathbf{P}(z_0) - \rho g(z - z_0)$ *Eq. 2.10*

Les isobares ($P = \text{Cte}$) sont des plans horizontaux ($z = \text{Cte}$)

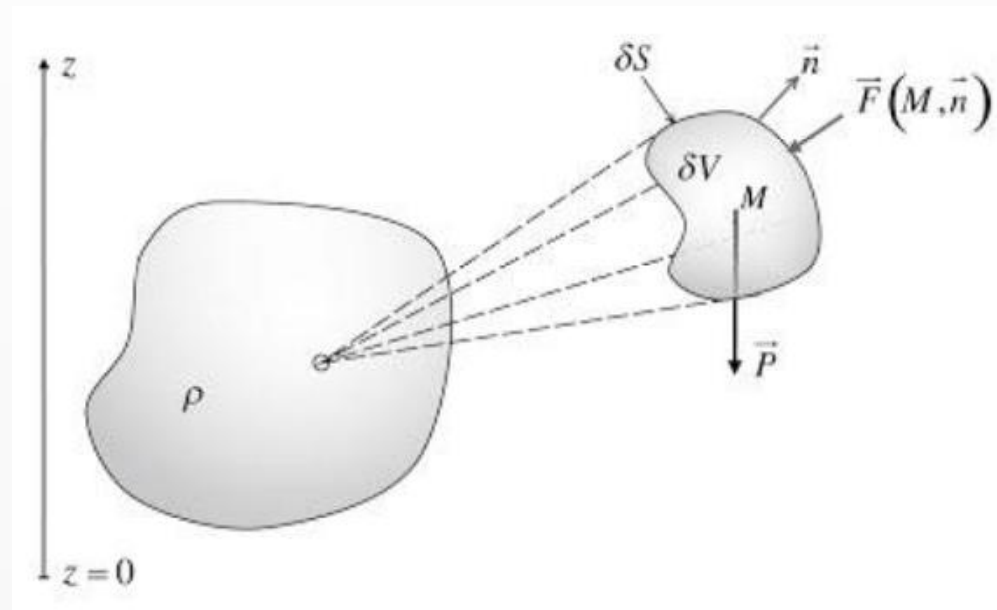
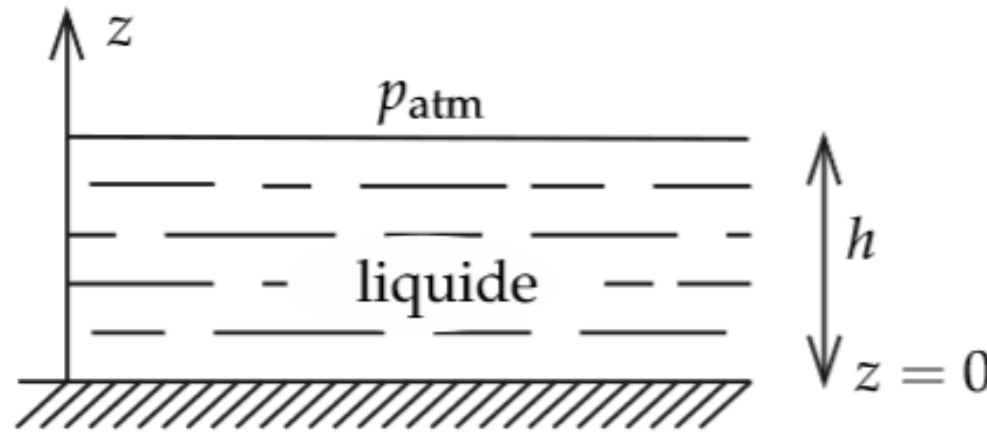


Figure 2.2 : On isole un volume élémentaire de fluide d'un domaine fluide au repos.

2.2.5 Exemples

❖ Calcul de la pression au fond d'un réservoir avec surface libre

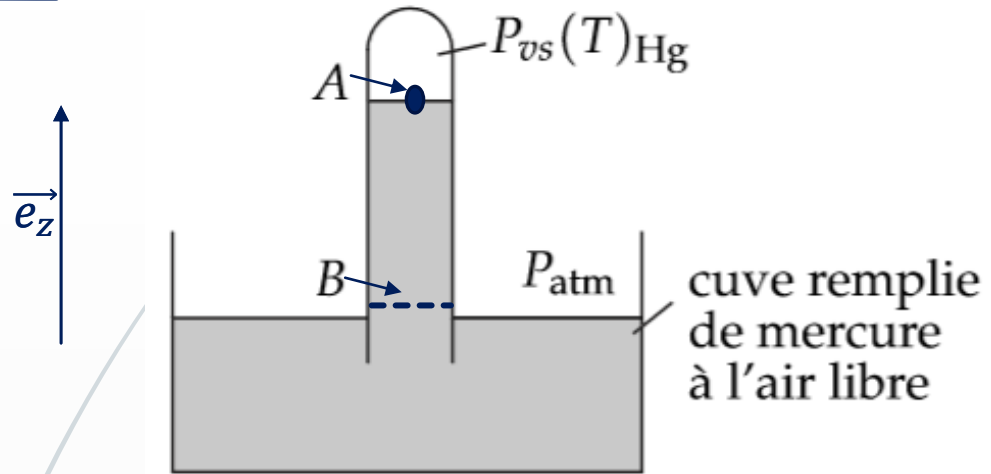


$$P(z = 0) = P(z = h) - \rho g(0 - h)$$



$$P(0) = P_{atm} + \rho gh$$

❖ Mesure de la pression atmosphérique : expérience de Torricelli



P_{vs} = pression de vapeur saturante

On a:

$$\begin{cases} P_A = P_{vs}(T)_{Hg} \ll P_B \\ P_B = P_{atm} \end{cases}$$

Figure 2.3: Un baromètre à mercure de Torricelli

On pose $h = z_A - z_B$

$$\rightarrow P_B = P_A + \rho_{Hg} * g * h$$

Comme $P_A \ll P_B = P_{atm}$

$$\rightarrow P_{atm} = \rho_{Hg} * g * h$$

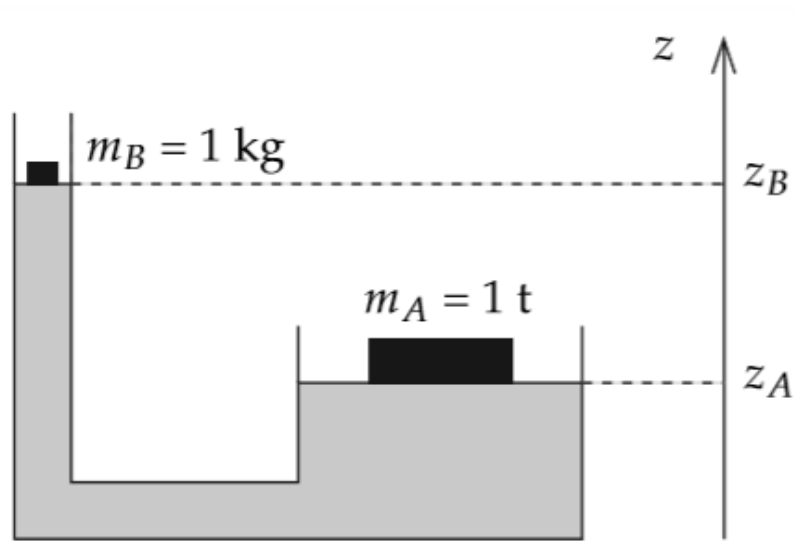
A.N: Avec $h = 0,76 \text{ m}$, on a :

$$d_{Hg} = 13,6 \rightarrow \rho_{Hg} = 13,6 * 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\longrightarrow P_{atm} = 13,6 * 10^3 * 9,81 * 0,76 = 1,013 * 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

Remarque: $1 \text{ atm} = 1,013 * 10^5 \text{ Pa} = 0,76 \text{ m Hg} = 10,33 \text{ m H}_2\text{O}$

❖ Presse hydraulique



On a: $\begin{cases} m_B = 1 \text{ kg}; S_B \\ m_A = 1 \text{ t}; S_A \end{cases}$

Figure 2.4: Presse hydraulique

- La pression $P_B = \frac{F_B}{S_B} = \frac{m_B g}{S_B}$ est appliquée en z_B .
- Cette surpression est transmise intégralement en A $\Rightarrow F_A = P_B S_A$

$$\Rightarrow F_A = \frac{m_B g}{S_B} S_A = m_A g$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m_A}{m_B} = \frac{S_A}{S_B}}$$



Si une force F_A est appliquée sur une surface S_A d'un liquide confiné, il en résulte une force F_B s'appliquant sur une surface S_B telle que: $\frac{F_A}{S_A} = \frac{F_B}{S_B}$

2.2.6 Théorème de Pascal

Enoncé:

- Dans un liquide en équilibre de masse volumique uniforme, la pression est la même en tout point du liquide et cela aussi longtemps que ces points sont à la même profondeur.
- Toute variation de pression en un point d'un liquide contenu dans un récipient s'accompagne d'une égale variation de pression en tout point du liquide.

2.2.7 Statique des gaz

La masse volumique ρ ne peut plus être considérée comme une constante. La loi de la statique est :

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g}$$

et l'on doit tenir compte de la loi d'état. Pour un gaz parfait :

$$P = \rho r T$$

Pour l'air :

$$r = \frac{R}{M} = 287 \text{ J/KgK}$$

$$c_p - c_v = r \left(\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right)$$

2.3. Théorème d'Archimède

2.3.1 Énoncé du théorème d'Archimède

Tout corps totalement immergé dans un fluide au repos subit une poussée verticale égale et opposée au poids du fluide déplacé.
Le point d'application de la force d'Archimède est le centre de gravité du fluide déplacé, appelé centre de poussée C.

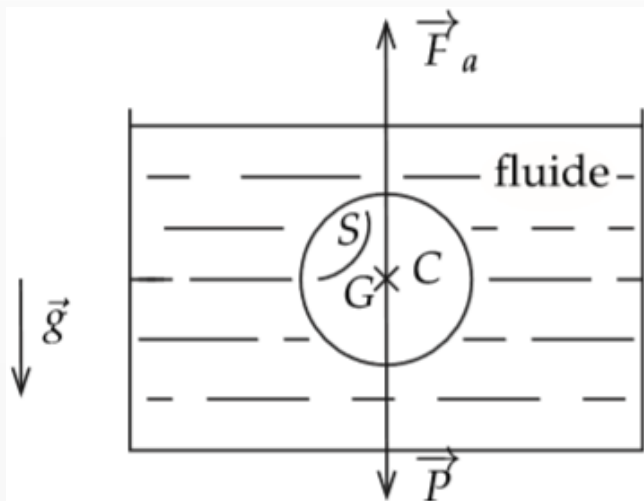


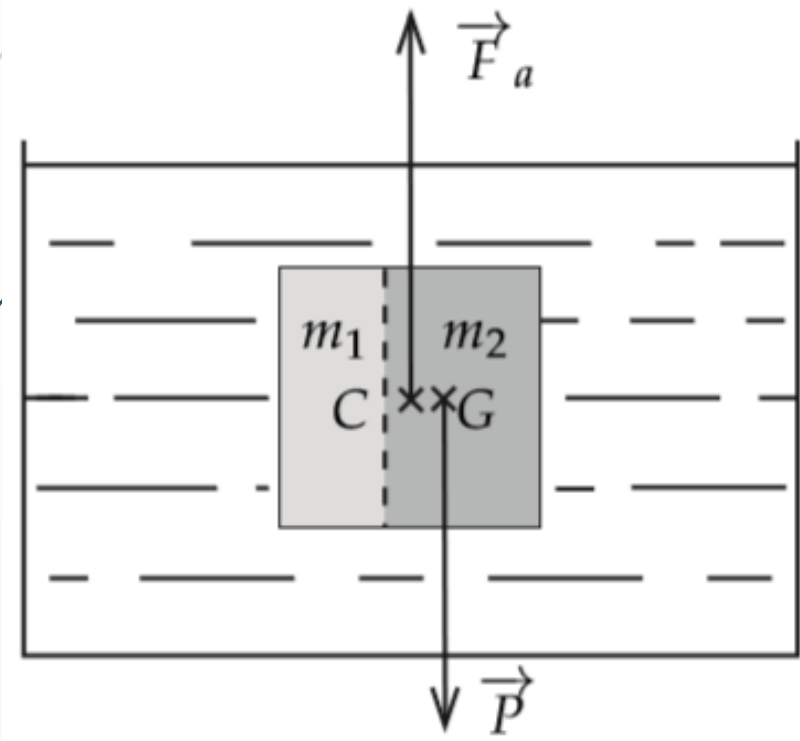
Figure 2.5: Principe d'Archimède

On a $\vec{P}_s = \rho_s V_s \vec{g}$

$\vec{F}_a = -\vec{P}_f = -\rho_f V_s \vec{g}$

2.3.2. Cas particuliers:

- Ne pas confondre le centre de gravité du solide immergé G et le centre de poussée C (centre de gravité du fluide déplacé).

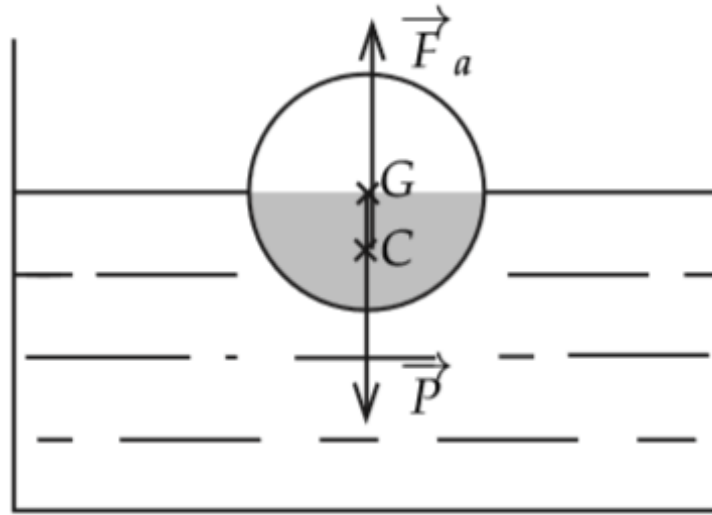


Cas d'un solide non homogène
 $m = m_1 + m_2$ avec $m_1 \neq m_2$

\vec{F}_a appliquée en C
 \vec{P} appliqué en G

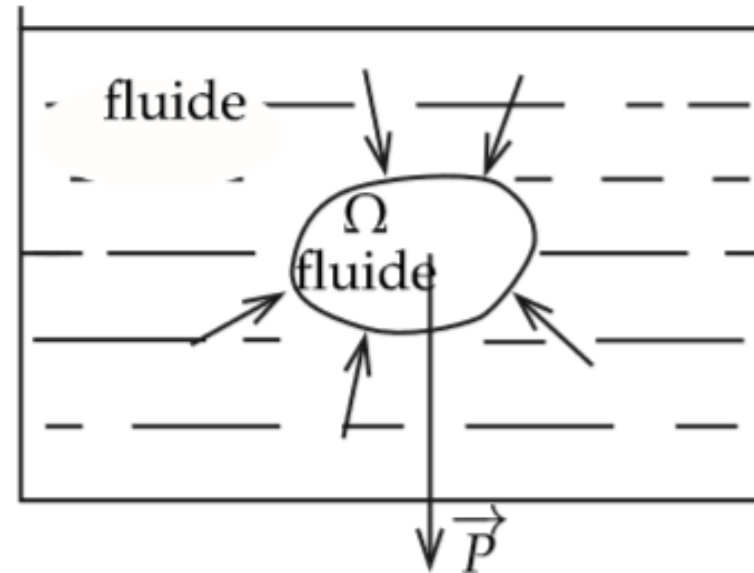
Figure 2.6: Illustration: centre de gravité
et centre de poussée

- Cas d'un solide non totalement immergé.



- Le centre de poussée doit être calculé pour **le volume immergé uniquement**.
- Dans ce cas, le centre de poussée C est différent du centre de gravité du solide.

2.3.3 Représentation physique de la poussée d'Archimède



Cette force est due à la résultante des forces de pression exercées par le fluide environnant sur l'objet immergé. Il suffit d'imaginer un volume fluide (Ω) immergé dans le même fluide. Il est donc en équilibre, alors :

$$\vec{F}_a + \vec{P}_f = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_a = -\rho_f V_\Omega \vec{g}$$

Chapitre III:

Cinématique des fluides

❖ Introduction

- La cinématique d'un milieu continu repose sur la notion d'espace et de temps.
- C'est une branche de la mécanique des fluides qui décrit le mouvement du fluide et ses conséquences sans considération de la nature des forces provoquant le mouvement.
- Une masse de fluide peut être conçue comme un ensemble de particules fluides.
- Pour les fluides en mouvement, l'écoulement est spécifié par des vitesses en différents points dans le fluide et à différents instants: Vitesse instantanée en chaque point.

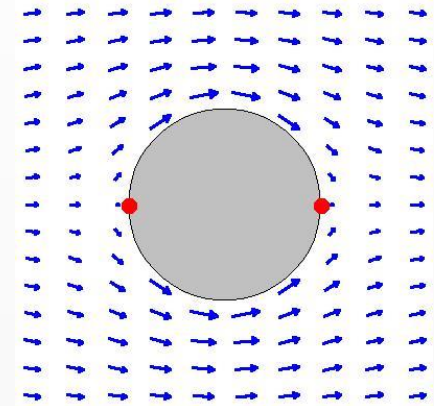


Figure 3.1: Champ de vitesse pour un écoulement autour d'une sphère

→ Afin d'obtenir une image complète de l'écoulement, le mouvement du fluide est décrit par deux méthodes: **description lagrangienne** et **description eulérienne**.

3.1.Description Lagrangienne (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)

- Elle consiste à suivre chaque particule matérielle prise individuellement dans son mouvement au cours du temps.
- Soit $\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM_0}, t)$ le vecteur position d'une particule (M) donnée et $\overrightarrow{OM_0}$ sa position initiale au temps initial t_0 .

❖ Notion de trajectoire:

On définit ainsi **la trajectoire** d'une particule comme l'ensemble des positions successives prises par la particule fluide au cours du temps.

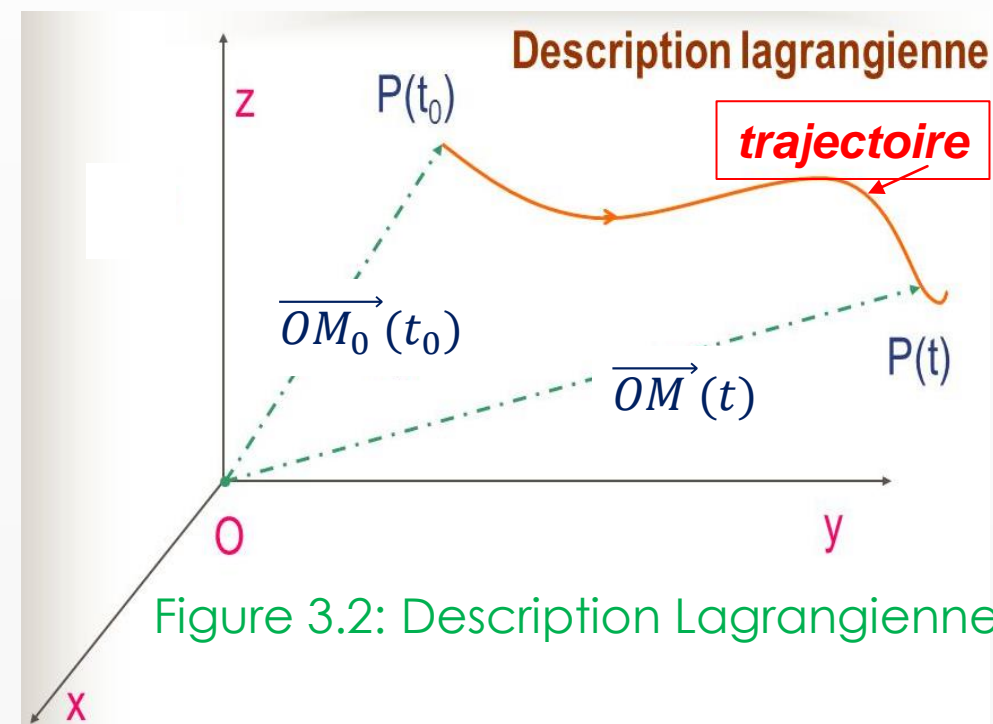


Figure 3.2: Description Lagrangienne

En coordonnées cartésiennes:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



La description lagrangienne de l'écoulement :

$$\overrightarrow{OM} : \begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$



Les variables de Lagrange: (x_0, y_0, z_0, t)

3.2. Description Eulérienne (Leonhard Euler, 1707-1783)

- On fixe un point géométrique dans l'écoulement et on observe le passage des particules par ce point au cours du temps.
- C'est le point de vue eulérien qui est perçu lorsque nous observons l'écoulement d'une rivière du haut d'un pont. Les particules fluides qui défilent sous nos yeux sont différentes à chaque instant.

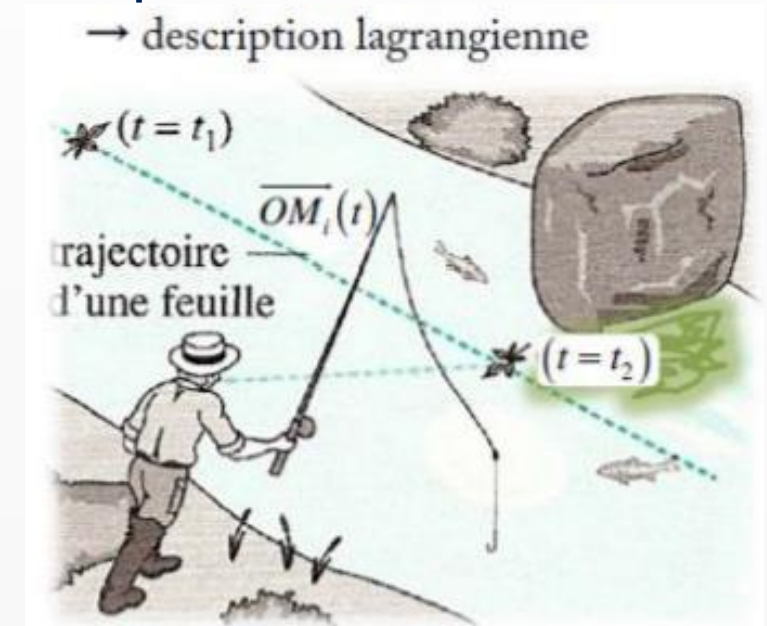
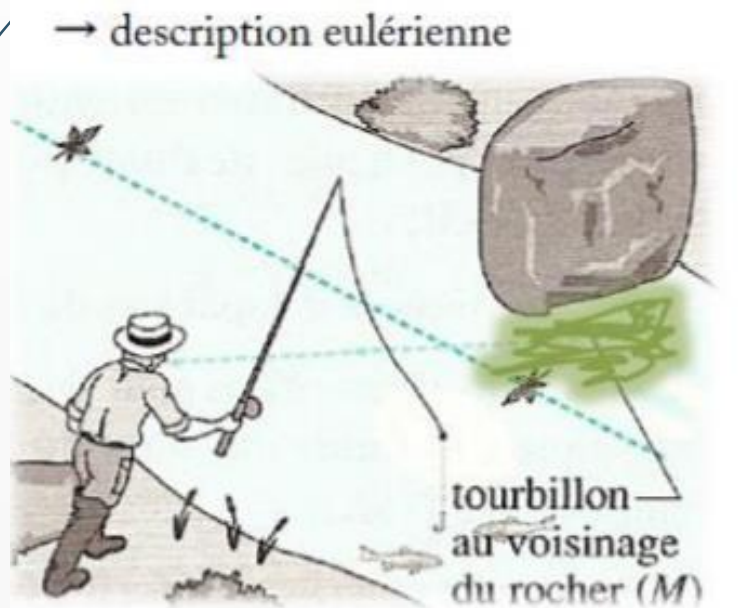


Figure 3.3: Comparaison entre la description Lagrangienne et la description Eulérienne

- L'approche eulérienne consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide.

→ La représentation mathématique de la méthode eulérienne s'écrit pour la vitesse:

$$\vec{u}(\vec{OM}, t) \text{ où } \vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \text{ et } \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- Les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme:

$$\vec{u} \begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

→ Les variables d'Euler: (x, y, z, t)

❖ Notion de ligne de courant:

Une ligne de courant est une ligne tangente en chaque point au vecteur vitesse, t est fixé.

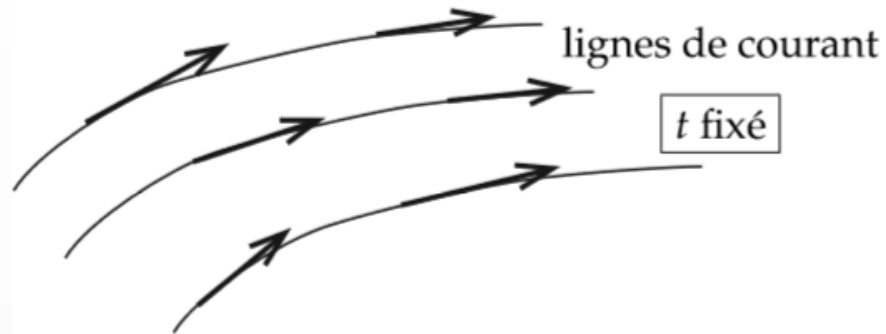


Figure 3.4: Illustrations des lignes de courant

3.3. Relation entre la description eulérienne et lagrangienne

La méthode d'Euler permet d'exprimer la vitesse comme suit:

$$\vec{u}(\vec{OM}, t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

Après intégration → constantes d'intégration qui sont exprimées à partir des conditions initiales.

➔ **La solution:** les équations de Lagrange qui sont déduites à partir de l'approche Eulérienne.

3.4. Lignes de courant, Trajectoires

3.4.1. Lignes de courant

Les lignes de courant sont des lignes tangentes au vecteur vitesse en chacun de ses points pour un instant fixé.

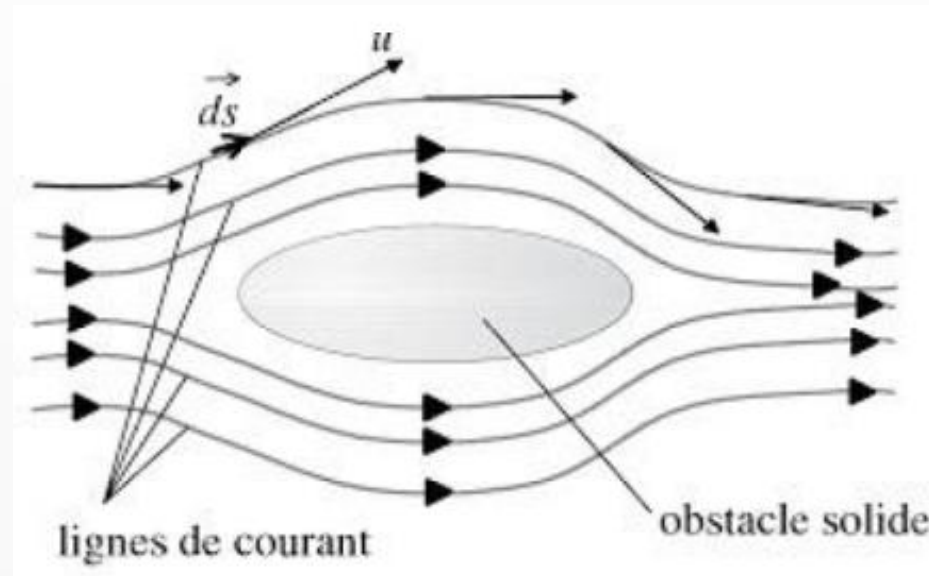


Figure 3.5: Illustration de lignes de courant à un instant donné pour un fluide s'écoulant autour d'un solide

- Soit \overrightarrow{dOM} un segment de courbe infinitésimal.
- Le vecteur vitesse \vec{u} est porté par ce segment.
- Ces deux vecteurs sont colinéaires.

→ En coordonnées cartésiennes et à t donné :

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{dOM} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{dOM} = k \vec{u} \rightarrow \begin{cases} dx = ku_x \\ dy = ku_y \\ dz = ku_z \end{cases}$$

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)} = k$$

Eq. 3.1

C'est l'équation des lignes de courant

3.4.2. Trajectoires

- On appelle trajectoire la courbe décrite au cours du temps par une particule fluide quel conque du champ de l'écoulement.
- C'est une courbe paramétrée en temps.
- Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont définies par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

Eq. 3.2



L'équation de la trajectoire: $\mathbf{dt} = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$

❖ Comparaison lignes de courant - trajectoires:

En comparaison avec les lignes de courant, il apparaît que la ligne de courant est relative à un même instant mais regroupe des particules différentes alors que la trajectoire, qui réfère à une même particule, est une courbe paramétrée en temps.

❖ Remarque:

Lorsque l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps, les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

Démonstration: Ici, u_x , u_y , u_z ne dépendent pas de t . L'équation des trajectoires est :

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt$$

Ces équations sont vraies pour tout t fixé et donc :

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

ce qui représente l'équation des lignes de courant.

3.5. Dérivée particulaire et accélération

3.5.1. Dérivée particulaire

Il s'agit de la dérivation temporelle d'une grandeur Φ relative à une particule fluide en mouvement (ou au domaine fluide D).

❖ Notation:

$$\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{D\Phi}{Dt}$$

❖ Coordonnées de Lagrange:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi(\overrightarrow{OM_0}, t)}{\partial t}$$

Eq. 3.3

❖ Coordonnées d'Euler:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi(x, y, z, t)}{dt}$$

Eq 3.4

L'expression de la différentielle totale de Φ est :

$$d\Phi(x, y, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt \quad Eq. 3.5$$

d'où:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad Eq. 3.6$$

Or, par définition de la vitesse:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i$$

➔ Soit le résultat en variables d'Euler:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \nabla \Phi \cdot \vec{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad Eq. 3.7$$

Terme de **convection** dû au mouvement des particules (uniformité)

Terme **temporel** relatif à la stationnarité de la grandeur Φ

Remarque: Si $\Phi = \vec{u}$, le terme $\nabla \Phi \cdot \vec{u}$ est appelé **advection**

3.5.1. Accélération

❖ Coordonnées de Lagrange: $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}(\overrightarrow{OM_0}, t)}{\partial t}$ *Eq. 3.8*

❖ Coordonnées d'Euler: $\vec{a} = \frac{d\vec{u}(x, y, z, t)}{dt} \rightarrow \text{Dérivée particulière}$ *Eq 3.9*

Pour chaque composante u_i du vecteur vitesse \vec{u} , on a:

$$\frac{du_i}{dt} = (\vec{\nabla} u_i) \cdot \vec{u} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \text{Eq. 3.10}$$

Avec la notation vectorielle, on aura :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \underbrace{(\vec{\nabla} \vec{u}) \cdot \vec{u}}_{\text{Gradient vectoriel}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad \text{Eq. 3.11}$$

- Le gradient vectoriel est une matrice exprimée dans le repère cartésien orthonormé comme suit:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Le produit scalaire par le vecteur \vec{u} se fait en appliquant la règle « produit ligne x colonne »

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot u_z \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot u_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot u_z \end{pmatrix}$$

De façon équivalente:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) + (\overrightarrow{rot} \vec{u}) \wedge \vec{u} \quad Eq. 3.12$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{grad} \vec{u} \right) . \vec{u} \quad Eq. 3.13$$

3.6. Analyse du mouvement d'un domaine matériel D

Soit D un domaine fluide en mouvement dans l'écoulement : D est centré sur le point M à l'instant t , il est centré sur le point M' à l'instant $t + dt$.

$$\vec{u}(M') = \underbrace{\vec{u}(M)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'}}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\vec{D}}_{\text{Déformation}} \quad \text{Eq. 3.14}$$

En mécanique des fluides, on définit le vecteur tourbillon :

$$\vec{T} = \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{u}$$

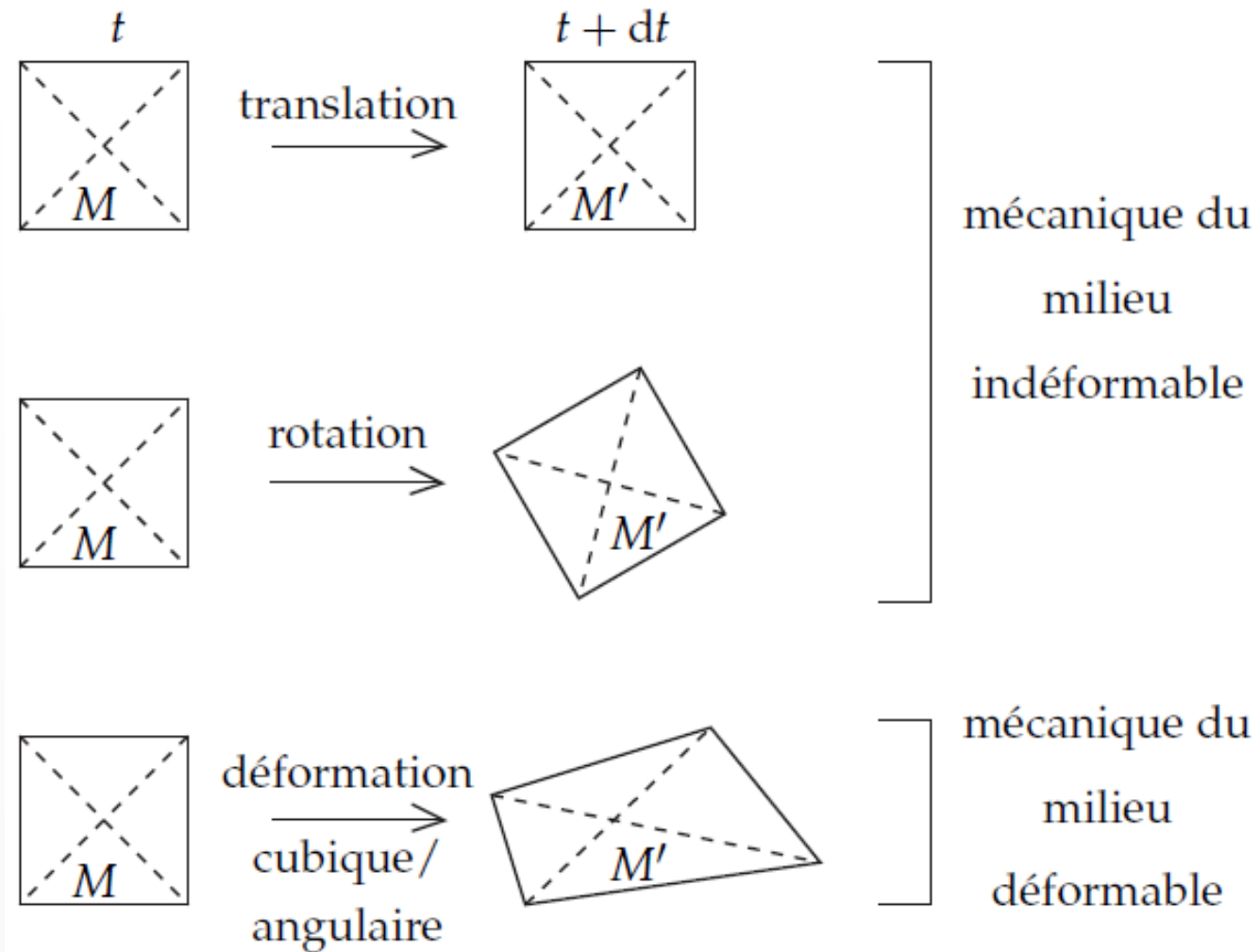


Figure 3.6: Analyse du mouvement de D

3.6.1 Écoulement uniforme

En l'absence de déformation et de rotation, l'écoulement est qualifié d'uniforme. Ce mouvement correspond à un mouvement de translation solide.

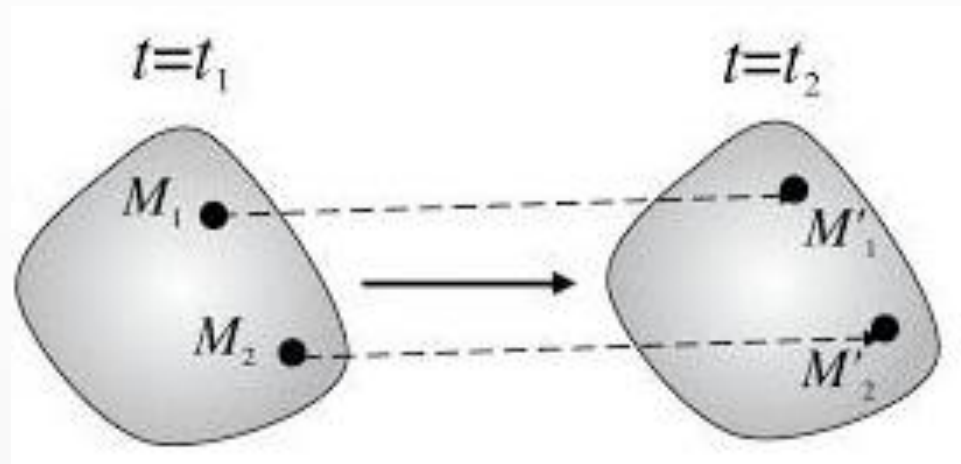


Figure 3.7: Écoulement uniforme (sans déformation et sans rotation)

3.6.2 Écoulement rotationnel / irrotationnel

❖ écoulement rotationnel

Le mouvement de rotation pure s'effectue sans déformation et est donc comparable à la rotation solide.

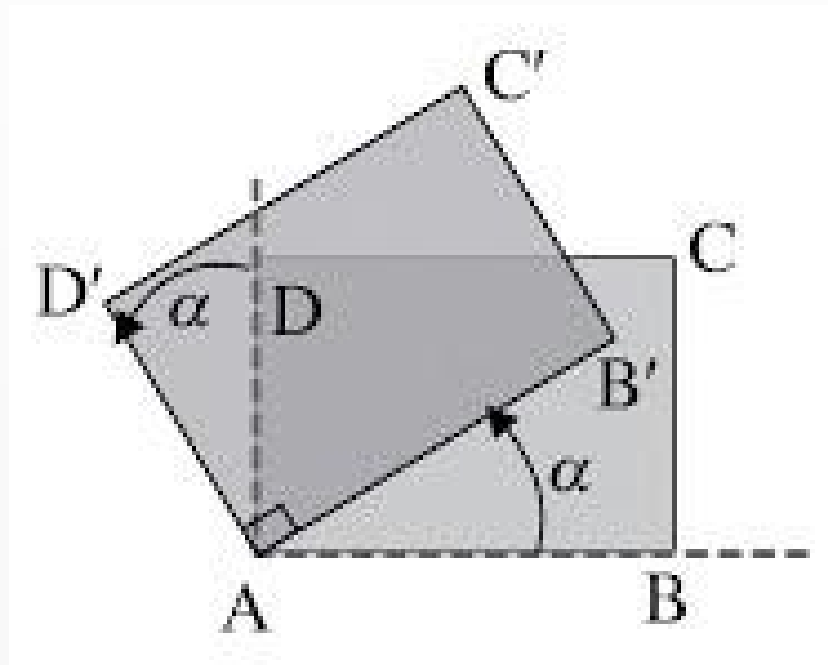


Figure 3.8: Mouvement de rotation d'un volume de fluide sans déformation



Figure 3.9: Exemple de mouvement rotationnel (tourbillon)

❖ écoulement irrotationnel

Définition : un écoulement est irrotationnel si:

$$\vec{T} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \overrightarrow{rot} \vec{u} = \vec{0} \quad \text{Eq. 3.15}$$

Or, comme

$$\overrightarrow{rot} (\overrightarrow{grad}(\varphi)) = \vec{0}$$

Alors, il $\exists \varphi$ tel que $\vec{u} = (\overrightarrow{grad}(\varphi))$

La fonction φ est appelée la fonction potentiel de vitesse.

L'écoulement est appelé « écoulement potentiel » lorsque \vec{u} dérive d'un potentiel $\varphi \rightarrow$ Un écoulement irrotationnel est un écoulement potentiel

Exemple : écoulement dans un rétrécissement

Pas de mouvement tourbillonnaire, mais augmentation de la vitesse dans le rétrécissement.

$$\vec{U}(M') = \vec{U}(M) + \vec{D}$$

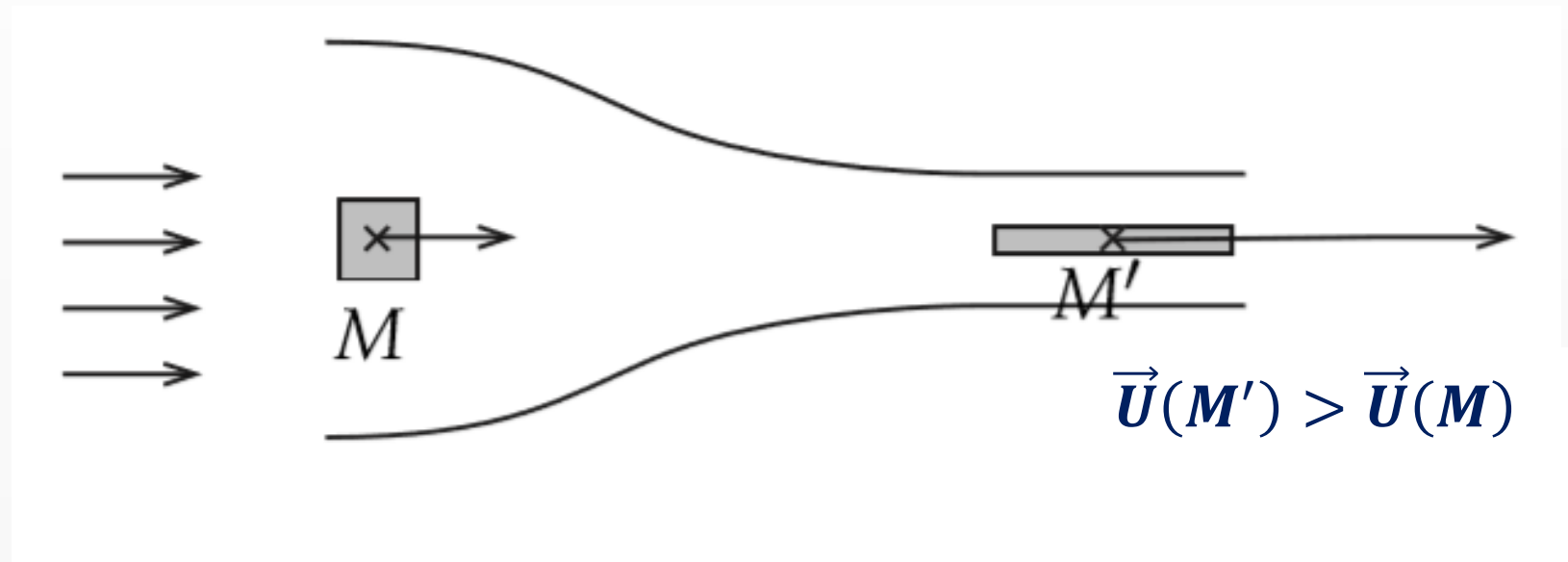


Figure 3.10: Ecoulement dans un rétrécissement

Chapitre IV:

Dynamique des fluides (conservation de masse)

❖ Introduction

- Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides en mouvement.
- Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes.
- Afin de calculer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets solides avec lesquels il est en contact, nous allons nous intéresser aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles, en particulier :
 - l'équation de continuité et l'équation de conservation de la masse,
 - le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement),
 - le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie).

❖ Introduction

- Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides en mouvement.
 - Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes.
 - Afin de calculer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets solides avec lesquels il est en contact, nous allons nous intéresser aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles, en particulier :
 - l'équation de continuité et l'équation de conservation de la masse,
 - le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement),
 - le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie).
- (Voir chapitres suivants)**

4.1. Écoulement permanent

- Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas des écoulements permanents.

❖ Définition:

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace.

4.2. Loi de conservation de la masse

4.2.1 Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

❖ Théorème de Reynolds

Soit D un domaine de fluide,

$$\frac{d}{dt} \int_D c(x_1, x_2, x_3, t) dv = \int_D \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla c \cdot \vec{u} \right] dv \quad \text{Eq. 4.1}$$

4.2.2 Application: loi de conservation de la masse

- Soit ρ la masse volumique en un point du fluide $\rho(M, t) = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$.
On a :

$$\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \rho dV \quad \text{Eq. 4.2}$$

- Considérons un domaine fluide D de masse globale $m(D)$:

$$m(D) = \int_D dm = \int_D \rho dV \quad \text{Eq. 4.3}$$

- Le domaine fluide conserve sa masse lorsque t varie car il contient toujours les mêmes particules (système fermé). Ainsi, pour D :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad \text{Eq. 4.4}$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \, dV = 0$$

Eq. 4.5

Par application du théorème de Reynolds, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \, dV = \int_D \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dv = 0$$

Eq. 4.6

d'où :

L'équation locale de conservation de la masse (ou équation locale de continuité):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Eq. 4.7

❖ Formulation équivalente de l'équation de conservation de la masse :

L'équation de conservation de la masse (Eq.4.7) peut s'écrire sous une autre forme équivalente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \vec{u} + \rho (\nabla \cdot \vec{u}) = 0 \quad \text{Eq. 4.8}$$

Avec :

$$\nabla \rho = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Vecteur

$$\nabla \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Scalaire

- Si l'écoulement est permanent $\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

\rightarrow L'équation locale de continuité devient :

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (\nabla \rho) \cdot \vec{u} + \rho (\nabla \cdot \vec{u}) = 0 \quad \text{Eq. 4.9}$$

- Si, de plus, l'écoulement est incompressible ($\rho = \text{cste}$) $\rightarrow \nabla \rho = 0$

\rightarrow L'équation locale de continuité (**Eq.4.9**) devient :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{Eq. 4.10}$$

En coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{Eq. 4.11}$$

4.2.3 Équation de continuité

- L'équation de continuité résulte de l'équation de conservation de la masse pour un écoulement permanent.
- Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.

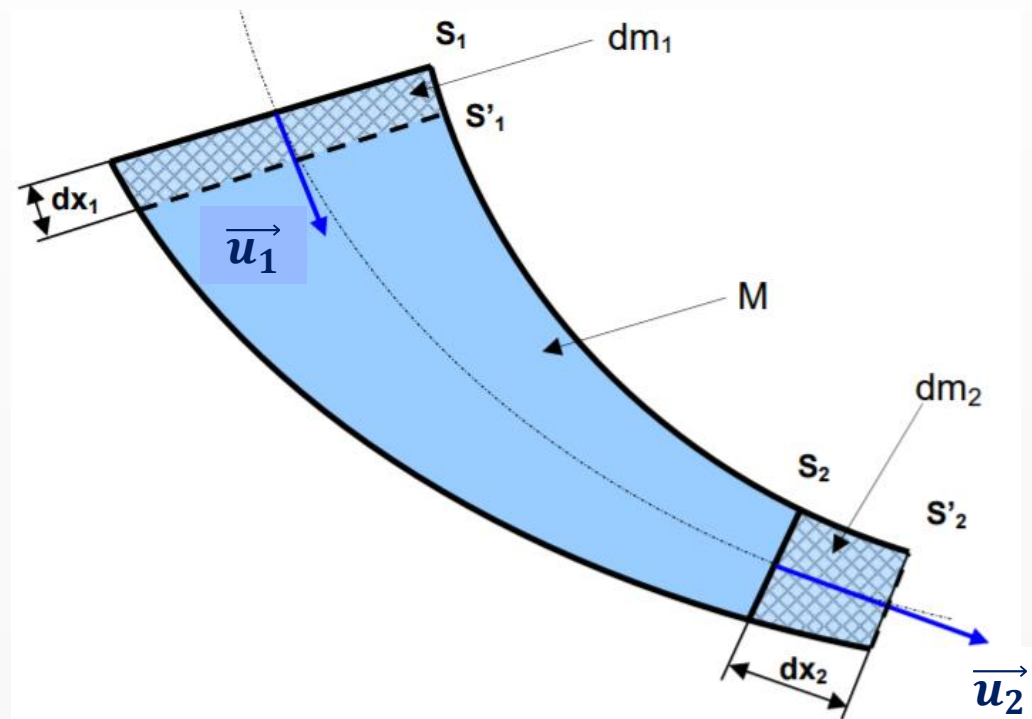


Figure 4.1: Ecoulement permanent dans une veine à section variable

On désigne par :

- S_1 et S_2 , respectivement, la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t ,
- S'_1 et S'_2 , respectivement, les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t' = (t + dt)$,
- \vec{u}_1 et \vec{u}_2 les vecteurs vitesse d'écoulement, respectivement, à travers les sections S_1 et S_2 de la veine,
- dx_1 et dx_2 , respectivement, les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ,
- M : masse comprise entre S_1 et S_2 ,
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 .

- A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1 + M)$,
- A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(M + dm_2)$.

- Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ **Eq. 4. 12**

- En simplifiant par M on aura: $dm_1 = dm_2$ **Eq. 4. 13**

 Donc $\rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2$ ou encore $\rho_1 S_1 dx_1 = \rho_2 S_2 dx_2$ **Eq. 4. 14**

- En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 S_1 u_1 = \rho_2 S_2 u_2 \quad \text{Eq. 4. 15}$$

- Pour un fluide incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

On obtient l'équation de continuité suivante : $S_1 u_1 = S_2 u_2$ **Eq. 4. 16**

4.3. Notions de débit / flux

4.3.1 Notion de débit

❖ Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0. On le note q_m . Ainsi, $q_m = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dm}{dt}$.

Avec:

- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt ,
- dt : intervalle de temps en (s),
- q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

En tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt} \quad \text{Eq. 4.17}$$

Avec :

$\frac{dx_1}{dt} = u_1 = \|\vec{u}_1\|$: Vitesse moyenne de l'écoulement de la veine fluide à travers S_1 ,

$\frac{dx_2}{dt} = u_2 = \|\vec{u}_2\|$: Vitesse moyenne de l'écoulement de la veine fluide à travers S_2 ,

D'après l'équation 4.17 :

$$q_m = \rho_1 S_1 u_1 = \rho_2 S_2 u_2 \quad \text{Eq. 4.18}$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne u :

$$q_m = \rho S u \quad \text{Eq. 4. 19}$$

où :

- q_m : Débit massique en (kg/s),
- ρ : Masse volumique en (kg/m^3),
- S : Section de la veine fluide en (m^2),
- u : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s).

❖ Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers 0. On le note q_V . Ainsi, $q_V = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dV}{dt}$.

Avec:

- dV : volume élémentaire en (m³) qui traverse une surface pendant un intervalle de temps dt ,
- dt : intervalle de temps en (s),
- q_V : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

On a $q_V = \frac{dV}{dt}$ et en notant que $dV = \frac{dm}{\rho}$

On peut écrire également que:

$$q_V = \frac{qm}{\rho}$$

Eq. 4. 20

D'après la relation **Eq. 4. 19**, on obtient :

$$q_V = S u$$

Eq. 4. 21

❖ Relation entre débit massique et débit volumique

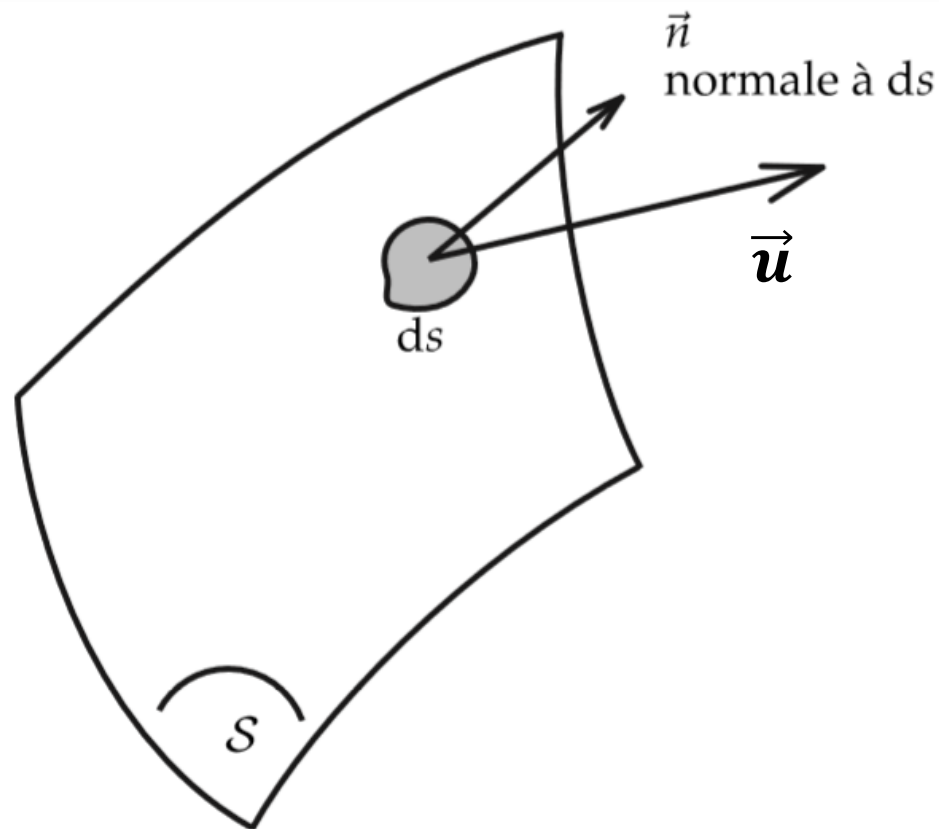
A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$q_m = \rho q_v$$

Eq. 4.22

4.3.2 Notion de flux

Soit $\varphi(\mathbf{x}_i, t)$ une fonction caractéristique de l'écoulement et \mathbf{S} une surface de contrôle fixe. Les particules fluides traversent \mathbf{S} à la vitesse \vec{u} .



- Le flux élémentaire:

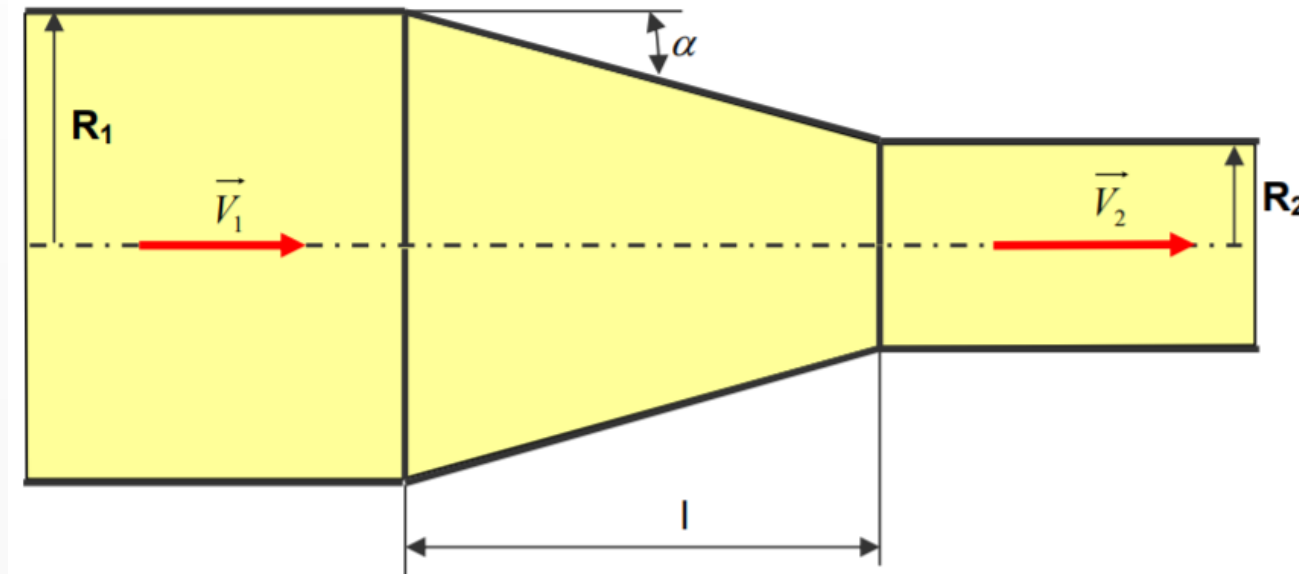
$$d\Phi = \varphi \vec{u} \cdot \vec{dS} = \varphi \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \text{Eq. 4.23}$$

- Le flux total:

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \varphi \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad \text{Eq. 4.24}$$

Exercice d'application :

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait incompressible dans une conduite, de section circulaire, de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α (schéma ci-dessus).



- 1) Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).
- 2) Calculer ($R_1 - R_2$) en fonction de l et α . En déduire la longueur l . ($R_1 = 50 \text{ mm}$, $\alpha = 15^\circ$).

Correction:

1. On applique l'équation de continuité : $q_m = \text{constante} \rightarrow q_{m1} = q_{m2}$

$$\longrightarrow \rho_1 S_1 u_1 = \rho_2 S_2 u_2$$

Comme le fluide est incompressible $\rightarrow \rho = \text{cste}$, ainsi, $S_1 u_1 = S_2 u_2$

Ou encore,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{u_2}{u_1}$$

Comme, $S_1 = \pi R_1^2$ et $S_2 = \pi R_2^2$ D'où:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{u_2}{u_1}} = 2$$

2. On a $\text{tg} \alpha = \frac{R_1 - R_2}{l}$ Donc, $l = \frac{R_1 - R_2}{\text{tg} \alpha} = \frac{R_1(1 - \frac{R_2}{R_1})}{\text{tg} \alpha}$

Or, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}$ Donc

$$l = \frac{R_1(1 - \frac{1}{2})}{\text{tg} \alpha} = \frac{R_1}{2 * \text{tg} \alpha}$$

$$\text{A.N: } l = \frac{50}{2 * \text{tg}(\frac{\pi * 15}{180})} = 93,3 \text{ mm}$$



Chapitre V:

Dynamique des fluides parfaits

❖ Introduction

- Ce chapitre fait suite au chapitre précédent.
- Il est également consacré à l'étude des fluides **parfaits incompressibles** en mouvement.
- Parmi les équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles, nous nous intéressons en particulier à :
 - L'équation de conservation de la quantité de mouvement (le théorème d'Euler),
 - L'équation de conservation de l'énergie (le théorème de Bernoulli).

❖ Fluide parfait: définition

- Il s'agit d'un fluide pour lequel on néglige l'effet de la viscosité.

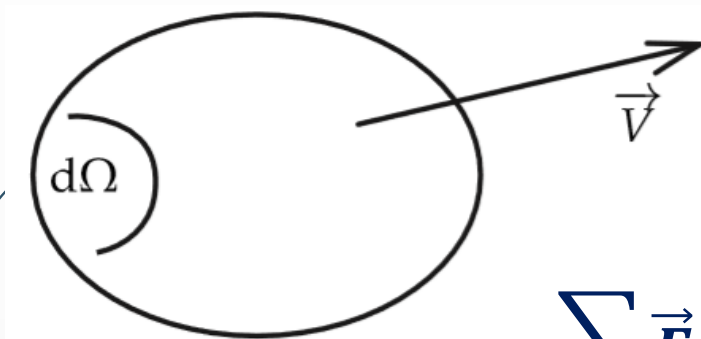
On parlera d'un écoulement non visqueux

- Un fluide parfait ne présente pas de forces internes.

➔ L'énergie mécanique se conserve.

5.1 Équation du mouvement pour un fluide parfait : Équation d'Euler

Reprenons le bilan des efforts s'appliquant à un domaine fluide $d\Omega$ en mouvement.



En appliquant la RFD, on obtient :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_s + \vec{F}_{int} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{d\Omega} \rho \vec{u} dv \quad \text{Eq. 5.1}$$

Avec:

\vec{F}_v : forces volumiques.

\vec{F}_s : forces surfaciques.

\vec{F}_{int} : forces internes (de viscosité).

$\vec{P} = m\vec{u} = \int_{d\Omega} \rho \vec{u} dv$: quantité de mouvement

On utilise le théorème de Reynolds :

$$\frac{d}{dt} \int_{d\Omega} (\rho \vec{u}) dv = \int_{d\Omega} \left[\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) \cdot \vec{u} \right] dv \quad \text{Eq. 5.2}$$

$$= \int_{d\Omega} \left[\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla(\vec{u}) \cdot \vec{u} + \vec{u} \nabla(\rho) \cdot \vec{u} \right] dv \quad \text{Eq. 5.3}$$

$$= \int_{d\Omega} \left[\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\vec{u}) \cdot (\rho \vec{u}) + \vec{u} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dv \quad \text{Eq. 5.4}$$

$$= \int_{d\Omega} \left[\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \cdot \rho \vec{u} + \vec{u} \text{div}(\rho \vec{u}) \right] dv \quad \text{Eq. 5.5}$$

Or, le fluide est incompressible ($\rho = \text{cste}$) $\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Et d'après l'équation de continuité pour un fluide incompressible (**Eq. 4.10**):

$$\mathbf{div} \vec{u} = 0$$

$$\text{Eq. 5.5} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{d\Omega} (\rho \vec{u}) dv = \int_{d\Omega} \left[\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \cdot \rho \vec{u} \right] dv \quad \text{Eq. 5.6}$$

$$= \int_{d\Omega} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] dv \quad \text{Eq. 5.7}$$

$$= \int_{d\Omega} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \vec{u} \cdot \vec{u} \right] dv \quad \text{Eq. 5.8}$$

$$= \int_{d\Omega} \rho \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right] dv = \int_{d\Omega} \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right] dm \quad \text{Eq. 5.9}$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} \int_{d\Omega} (\rho \vec{u}) dv = \int_{d\Omega} \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right] dm$$

Eq. 5.10

On peut écrire la RFD sous la forme :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_s + \vec{F}_{int} = \int_{d\Omega} \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right] dm$$

Eq. 5.11

Dans le cas d'un fluide parfait, les forces sont :

- les forces de volume dues au poids \overrightarrow{F}_v ,
- les forces de surface dues à la pression \overrightarrow{F}_s ,
- Il n'y a pas de forces internes dues aux effets visqueux.

➔ Le bilan des forces extérieures:

$$\overrightarrow{F}_v = \int_{d\Omega} \rho \overrightarrow{g} dv = \int_{d\Omega} \overrightarrow{g} dm \quad \text{Eq. 5.12}$$

$$\overrightarrow{F}_s = - \int_{dS} P \overrightarrow{n} dS = - \int_{d\Omega} \nabla P dv \quad \text{Eq. 5.13}$$

(Théorème de Green–Ostrogradsky (voir Eq. 2.5))

$$\overrightarrow{F}_{int} = \overrightarrow{0} \quad (\text{hypothèse fluide parfait}) \quad \text{Eq. 5.14}$$

Donc :

$$\sum \vec{F} = \int_{d\Omega} \vec{g} \, dm - \int_{d\Omega} \nabla P \, dv = \int_{d\Omega} \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right] dm \quad \text{Eq. 5.15}$$

Or, comme L'accélération \vec{a} est donnée par :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\nabla \vec{u}) \cdot \vec{u} \quad \text{Eq. 5.16}$$

Dérivée particulaire

Finalement, la RFD peut s'écrire comme:

$$\int_{d\Omega} \rho \vec{g} \, dv - \int_{d\Omega} \nabla P \, dv = \int_{d\Omega} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\nabla \vec{u}) \cdot \vec{u} \right] dv \quad \text{Eq. 5.17}$$

La RFD doit être valable pour tout domaine $d\Omega$. On en déduit l'équation locale du mouvement:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\nabla \vec{u}) \cdot \vec{u} \right] = \rho \vec{g} - \nabla P \quad \text{Eq. 5.18}$$

**C'est l'équation d'Euler
(équation locale de conservation de quantité de mouvement)**

De façon équivalente:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\nabla \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) + (\nabla \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \nabla P \quad \text{Eq. 5.19}$$

voir Eq. 3.12

5.2 Relation de Bernoulli

Hypothèses:

- fluide parfait: pas d'effet de viscosité
- fluide incompressible: $\rho = \text{cste}$
- écoulement stationnaire: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$
- force volumique dérivant d'un potentiel
(force de pesanteur par unité de volume:
 $\vec{F}_v = \rho \vec{g} = -\nabla E_p$)

Reprenons l'équation d'Euler:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\nabla \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) + (\nabla \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \nabla P$$

Eq. 5.20

❖ Autre hypothèse: Si l'écoulement est irrotationnel

On a: $\nabla \wedge \vec{u} = \overrightarrow{rot} \vec{u} = \vec{0}$ (voir Eq.3.15)



L'équation d'Euler devient:

$$\rho \nabla \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + \nabla P - \rho \vec{g} = \vec{0}$$

Eq. 5.21

Or, $\vec{F}_v = \rho \vec{g} = -\nabla E_p$

→
$$\rho \nabla \frac{\|\vec{u}^2\|}{2} + \nabla P + \nabla E_p = \vec{0}$$

Eq. 5.22

Finalement,

→
$$\nabla \left[\frac{1}{2} \rho \|\vec{u}^2\| + P + \rho g z \right] = \vec{0}$$

Eq. 5.23

On appelle f :
$$f = \frac{1}{2} \rho \|\vec{u}^2\| + P + \rho g z$$

→ On a:
$$\nabla f = \vec{0}$$

Cette équation signifie que $f = \text{Cte}$ dans tout l'écoulement.



La relation de Bernoulli appliquée à un point M d'un écoulement irrotationnel le long d'une ligne de courant (voir hypothèses 5.2):

$$\forall M, \quad \frac{1}{2} \rho \|\vec{u}^2\| + P + \rho g z = \textit{constante}$$

Eq. 5.24

❖ Expressions équivalentes

- $\frac{1}{2}\rho\|\vec{u}^2\| + P + \rho g z = \textit{constante}$ = charge totale ou pression totale (Pa)
- $P + \rho g z$ = pression statique (Pa)
- $\frac{1}{2}\rho\|\vec{u}^2\|$ = pression dynamique (Pa)
- $z + \frac{\|\vec{u}^2\|}{2g} + \frac{P}{\rho g} = H = \textit{cste}$ = hauteur de charge totale (m)
- $z + \frac{P}{\rho g}$ = hauteur piézométrique (m)

- $gz + \frac{\|\vec{u}^2\|}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{cste} = \text{énergie spécifique totale (J/kg)}$

Avec:

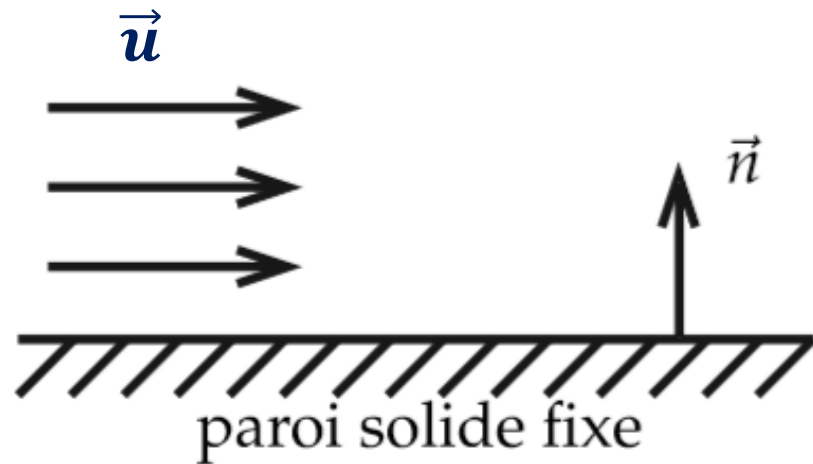
$\frac{\|\vec{u}^2\|}{2}$: énergie cinétique spécifique (J/kg)

gz : énergie potentielle spécifique (J/kg)

$\frac{P}{\rho}$: énergie des forces pressantes (J/kg)

5.3 Les conditions aux limites

5.3.1 Fluide parfait en mouvement au contact d'une paroi



Il y a glissement sans frottement à la paroi.

- Condition de glissement à la paroi solide:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

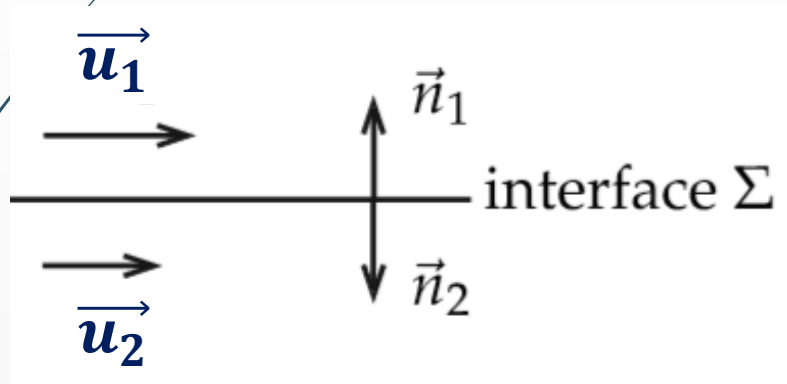
Remarque: Pour le fluide visqueux, il y a adhérence à la paroi:

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ (à la paroi)}$$

5.3.2 Fluide en contact avec l'air à la pression atmosphérique

- A la surface de contact fluide/air (surface plane), on a: $P = P_{atm}$

5.3.3 Interface entre deux fluides 1 et 2

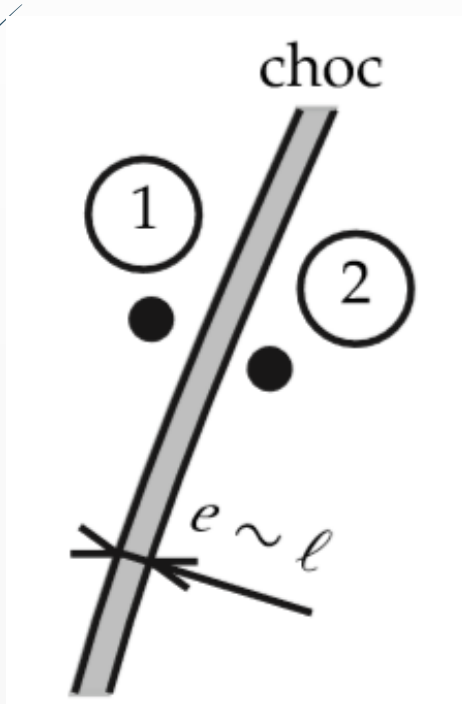


- Sur Σ : continuité des composantes normales de vitesse : $\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2$
- Sur Σ plane : continuité des pressions: $P_1 = P_2$

5.3.4 A travers une onde de choc

L'épaisseur d'une onde de choc est de l'ordre de quelques libres parcours moyens, le nombre de Knudsen est de l'ordre de 1.

A l'intérieur de l'onde de choc, l'hypothèse de milieu continu n'est plus valable:

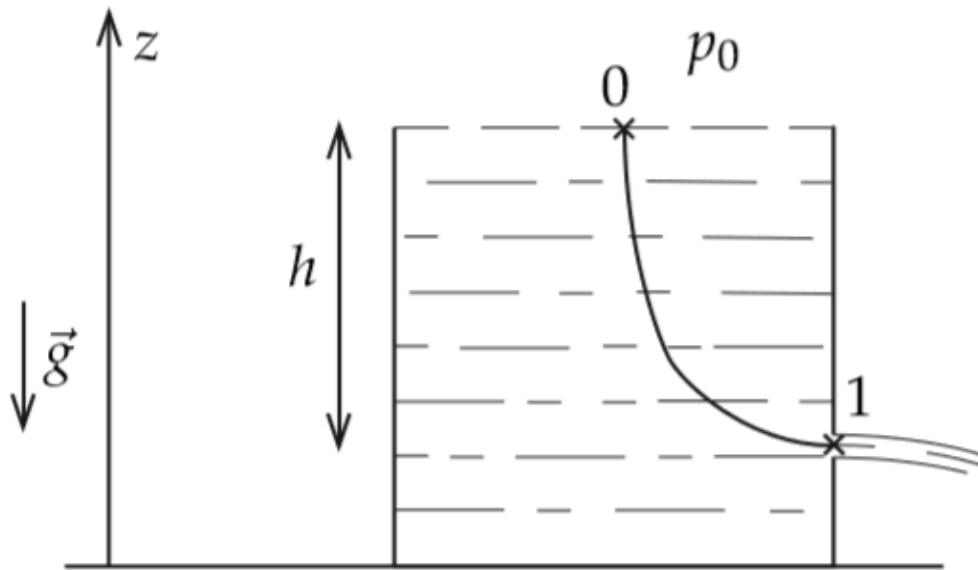


$$P_1 \neq P_2$$

$$\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2$$

5.4 Application du théorème de Bernoulli

5.4.1 Formule de Torricelli: vidange d'un réservoir



On applique la relation de Bernoulli sur la ligne de courant entre les points 0 et 1, calculer la vitesse de chute libre pour une hauteur h .

En déduire le débit volumique de la vidange.

$$P_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 = P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2$$

Or,

En 0: P_0 ; z_0 ; $u_0 \approx 0$ c'est-à-dire $u_0 \ll u_1$

En 1: $P_1 = P_0$ (jet à l'air libre); z_1 ; $u_1 = u$

Soit, $u^2 = 2g(z_0 - z_1) = 2gh \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{2gh}$

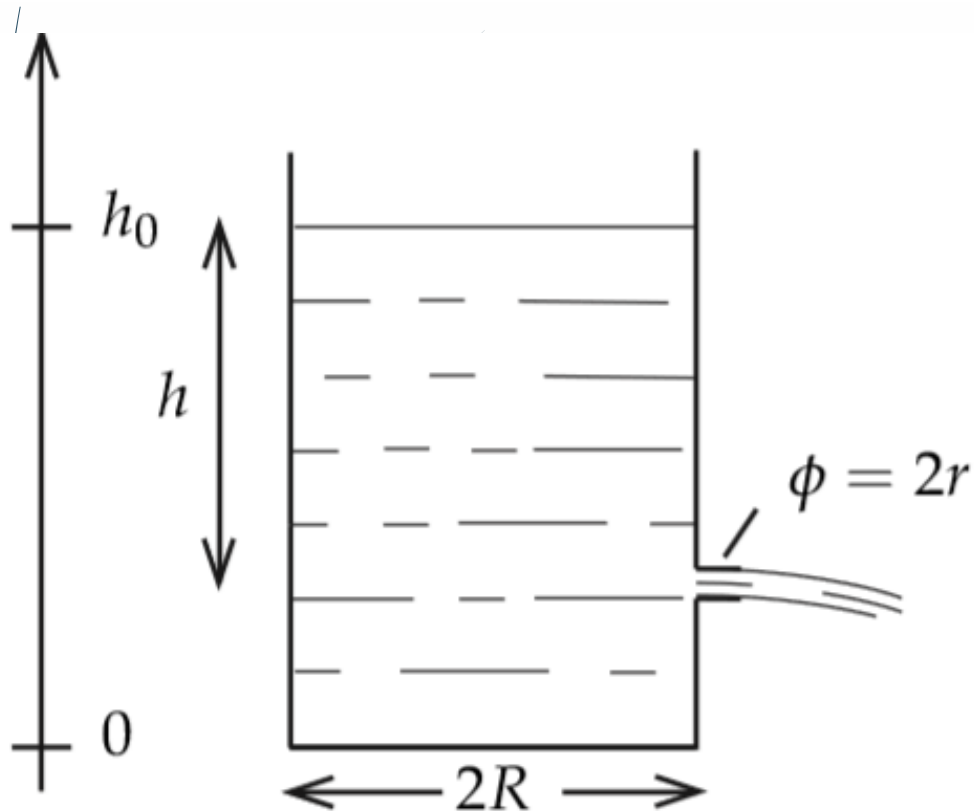
On retrouve la vitesse de chute libre pour une hauteur h .

❖ Calcul du débit de la vidange:

$$Q_v = uS = \sqrt{2gh}S$$

Où S est la section de l'orifice:

5.4.2 Mesure du temps de vidange d'un réservoir cylindrique




- D'après la formule de Torricelli, la vitesse de sortie du liquide est: $u = \sqrt{2gh}$
- Chercher la loi horaire $h(t)$ en fonction de h_0 et de T avec:
 - h_0 : l'hauteur initiale du fluide,
 - T : le temps de vidange (temps nécessaire pour vider tout le réservoir)


❖ loi de conservation de débit:


$$\rightarrow -\pi R^2 \dot{h} = \pi r^2 u$$


$$\rightarrow -\dot{h} = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} h^{1/2}$$

$$\rightarrow -\dot{h} h^{-1/2} = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g}$$


$$-\dot{h} \ h^{-1/2} = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g}$$


$$\int_{h_0}^h -h^{-1/2} dh = \int_0^t \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} dt$$


$$[-2h^{1/2}]_{h_0}^h = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} t$$


$$h_0^{1/2} - h^{1/2} = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2}} t$$

Temps de vidange du réservoir lorsque $h=0$:

On obtient:

$$T = \frac{R^2}{r^2} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Puis :
$$h(t)^{\frac{1}{2}} = h_0^{1/2} - \frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2}} t = h_0^{\frac{1}{2}} - \frac{t}{T} \sqrt{h_0} = h_0^{1/2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

Donc :

$$h(t) = h_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$$

Chapitre VI:

Étude des fluides visqueux

❖ Introduction

- Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude des fluides réels (visqueux), en particulier :
- Notion de viscosité, types de viscosité, contrainte de cisaillement.
- Les conditions aux limites appliquées aux fluides visqueux,
- Les régimes d'écoulement: nombre de Reynolds.

6.1 Notion de viscosité

6.1.1. Définition

- C'est une grandeur qui caractérise les **frottements internes du fluide**, autrement dit sa capacité à s'écouler.
- Elle caractérise la **résistance** d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement.

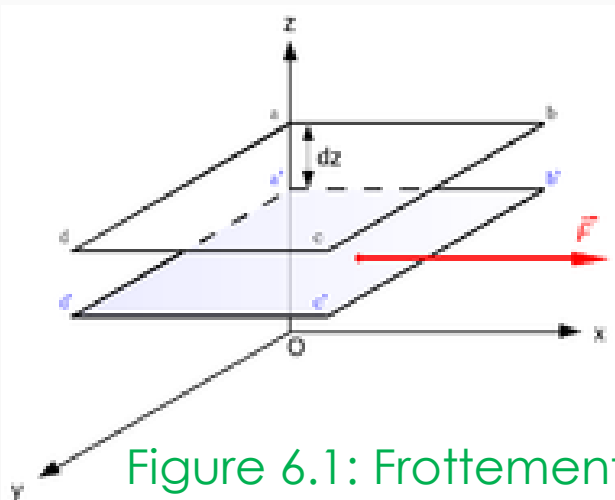


Figure 6.1: Frottement internes entre les différentes couches du fluide

La viscosité peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille, dans lequel on mesure le temps écoulé pour la chute d'une bille dans le fluide.

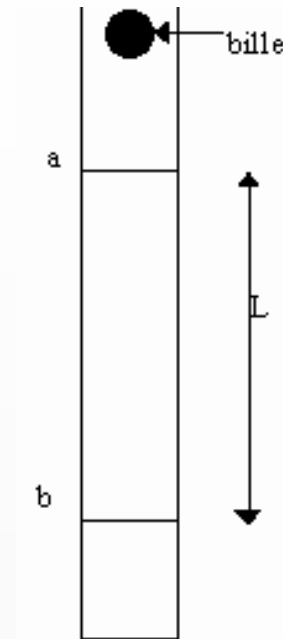


Figure 6.2: Viscosimètre à chute de bille

Elle peut également être mesurée par un récipient dont le fond comporte un orifice de taille standardisée. La vitesse à laquelle le fluide s'écoule par cet orifice permet de déterminer la viscosité du fluide.

6.1.2. Profil des champs de vitesse:

Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement, la courbe liant les extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse.

Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres.

La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance Z .

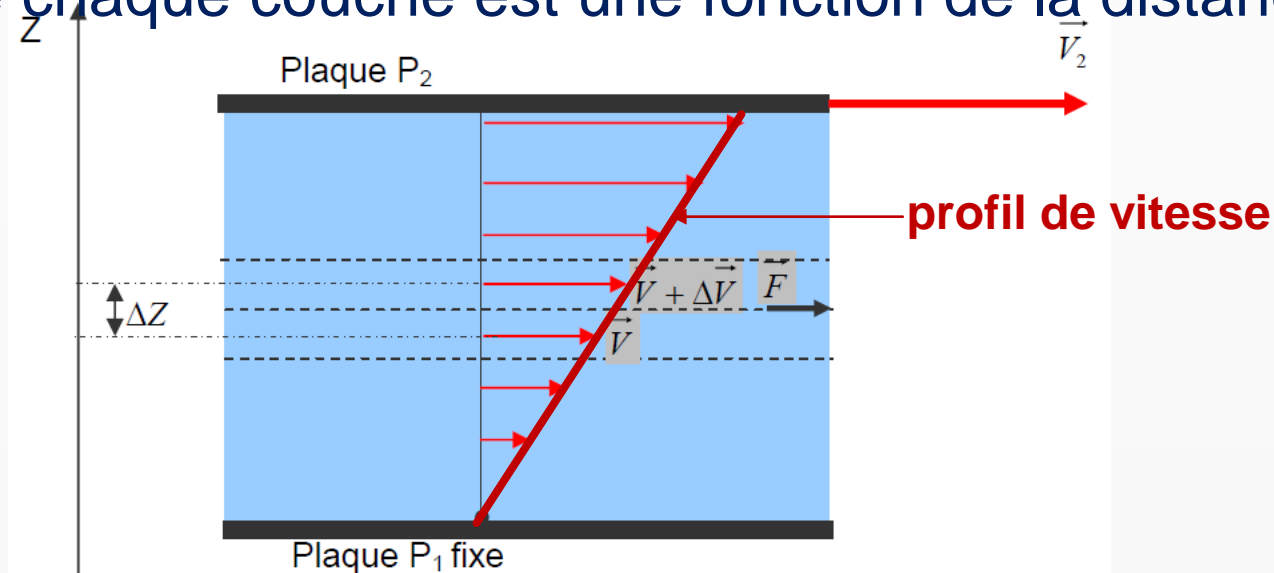


Figure 6.3: Profil de vitesse d'un fluide visqueux

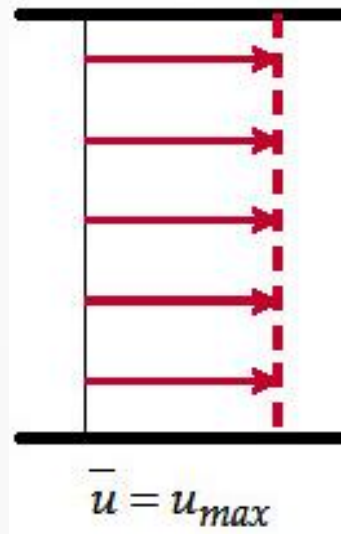
Fluide parfait (non visqueux)

- Absence des forces internes de frottement.

$$\vec{U} = \overrightarrow{Cste} = \overrightarrow{U_{max}}$$

- Vitesse à la paroi: $\overrightarrow{U_{paroi}} = \overrightarrow{U_{max}}$
(condition de glissement à la paroi)

→ profil parallèle des champs de vitesse



Fluide réel (visqueux)

- Présence des forces internes de frottement.

$$\vec{U} \neq \overrightarrow{Cste}$$

- Vitesse à la paroi: $\overrightarrow{U_{paroi}} = \vec{0}$
(condition de non glissement à la paroi)

→ profil non parallèle des champs de vitesse.

Nous distinguons deux cas majeurs:

- Profil linéaire
- Profil parabolique

❖ Profil linéaire des champs de vitesse d'un fluide visqueux

Il s'agit du profil des champs de vitesses d'un écoulement entre deux parois planes l'une fixe et l'autre mobile.

Exemple:

Pour $y=0$ (paroi mobile) $\rightarrow v = v_0$

Pour $y=L$ (paroi fixe) $\rightarrow v = 0$

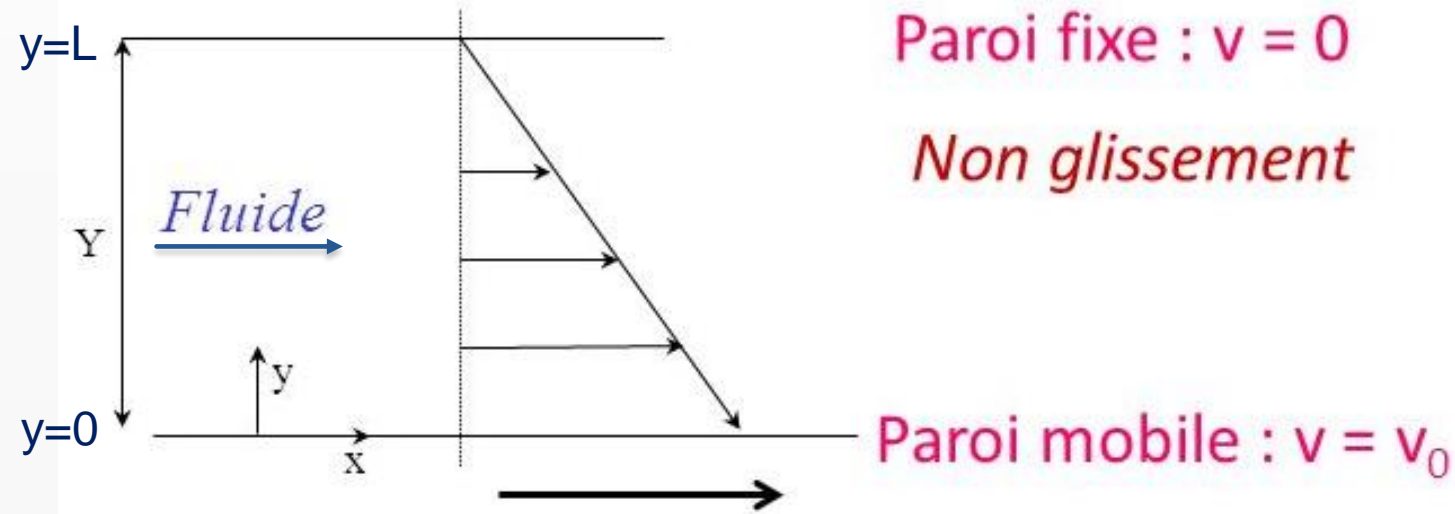


Figure 6.4: Profil linéaire de vitesse d'un fluide visqueux

❖ Profil parabolique des champs de vitesse d'un fluide visqueux

Il s'agit du profil des champs de vitesses d'un écoulement entre deux parois planes fixes.

Exemple:

Pour $y=0$ (paroi fixe) $\rightarrow v = 0$

Pour $y=L$ (paroi fixe) $\rightarrow v = 0$

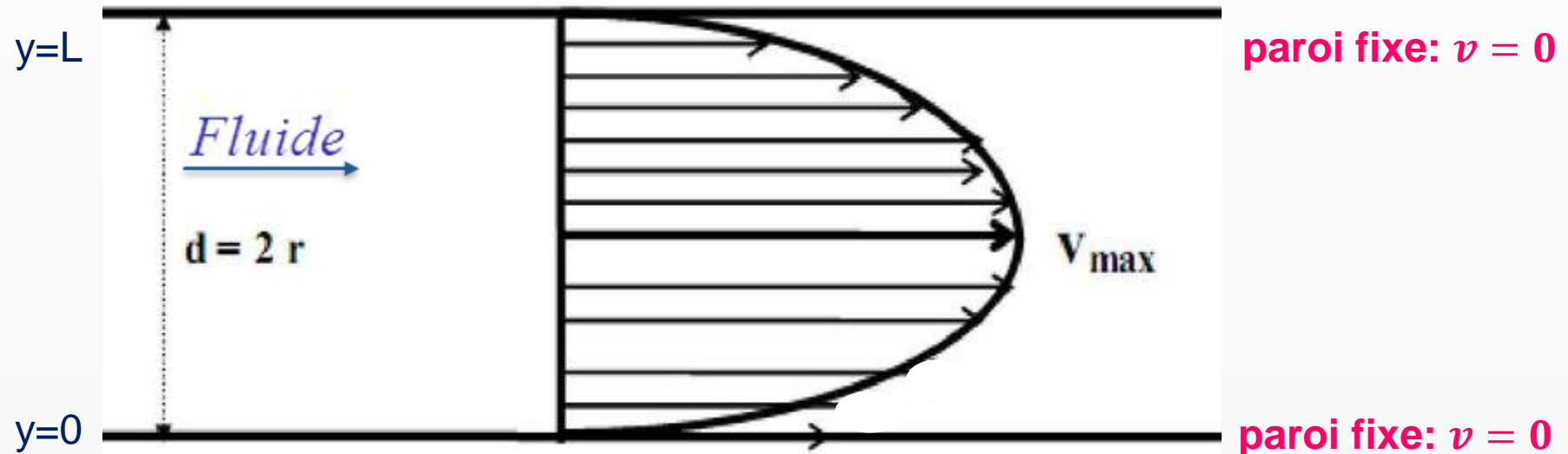


Figure 6.5: Profil parabolique de vitesse d'un fluide visqueux

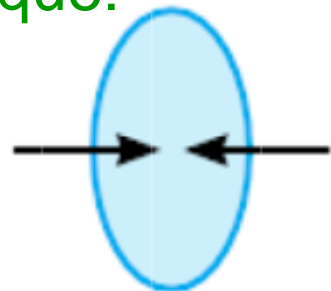
6.1.3. Différents types de viscosité:

❖ Viscosité dynamique

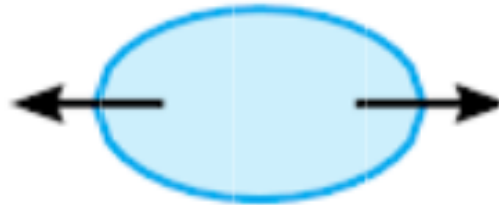
La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque.

Elle est exprimée par un coefficient représentant la **contrainte de cisaillement** τ ($\tau = \frac{F}{S}$) nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière.

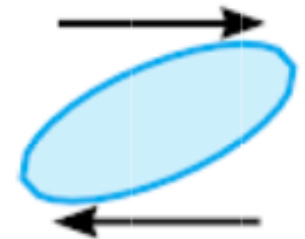
Remarque:



Compression



Étirement



Cisaillement

Considérons deux couches de fluide adjacentes distantes de ΔZ .

La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre.

Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit ΔU , à leur surface S et inversement proportionnelle à ΔZ :

Le facteur de proportionnalité μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F = \mu \cdot S \cdot \frac{\Delta U}{\Delta Z}$$

Où:

F : Force de glissement entre les couches (N)

μ : Viscosité dynamique en (Kg/m.s)

S : Surface de contact entre deux couches (m²)

ΔU : Ecart de vitesse entre deux couches (m/s)

ΔZ : Distance entre deux couches (m)

Remarque: Dans le système international (SI), la viscosité dynamique s'exprime en Pascal seconde (Pa.s) ou poiseuille (PI): $1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ PI} = 1 \text{ kg/m.s}$

Exemple :

Fluide	μ (Pa·s)
eau (0 °C)	$1,787 \cdot 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$
eau (100 °C)	$0,2818 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive (20 °C)	$\approx 100 \cdot 10^{-3}$
glycérol (20 °C)	$\approx 1000 \cdot 10^{-3}$
Hydrogène (20 °C)	$0,86 \cdot 10^{-5}$
Oxygène (20 °C)	$1,95 \cdot 10^{-5}$

Remarque:

- Pour les liquides: la viscosité diminue avec la température
- Pour les gaz: la viscosité augmente avec la température

❖ Viscosité cinématique

La viscosité cinématique caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation (effort).

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le (m²/s).

On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique.

$$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Exercice:

Déterminer la viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa densité est 0,918 et sa viscosité cinématique est 1,089 Stockes.

REPONSE

$$\boxed{\mu = \rho \cdot \nu} \text{ A.N. } \boxed{\mu = 918 \cdot 1,089 \cdot 10^{-4} = 0,1 \text{ Pa.s}}$$

6.2 Les conditions aux limites pour un fluide visqueux

6.2.1 Fluide visqueux en mouvement au contact d'une paroi

Sur une paroi, il y a continuité le long de l'interface entre le fluide et le solide.

$$\overrightarrow{U_{fluide}} = \overrightarrow{U_{paroi}}$$

Or, pour une paroi fixe $\overrightarrow{U_{paroi}} = \vec{0}$

 $\overrightarrow{U_{fluide}} = \vec{0}$

(Condition de non glissement à la paroi solide)

6.2.2 Fluide en contact avec l'air à la pression atmosphérique

- A la surface de contact fluide/air (surface plane), on a: $P_{fluide} = P_{ext}$
- Le long de la surface libre, on a :

$$\frac{d\vec{U}}{d\vec{n}} = \mathbf{0}$$

→ la condition stricte est : continuité des contraintes et continuité de la vitesse.

6.3 Régimes d'écoulement- Nombre de Reynolds

Il existe deux régimes d'écoulement :

- Régime laminaire
- Régime turbulent.

L'expérience de Reynolds (1880) permet de mettre en évidence la transition entre le régime d'écoulement laminaire et le régime turbulent dans une conduite à l'aide de l'injection d'un colorant.

6.3.1 Régime laminaire :

Les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles.

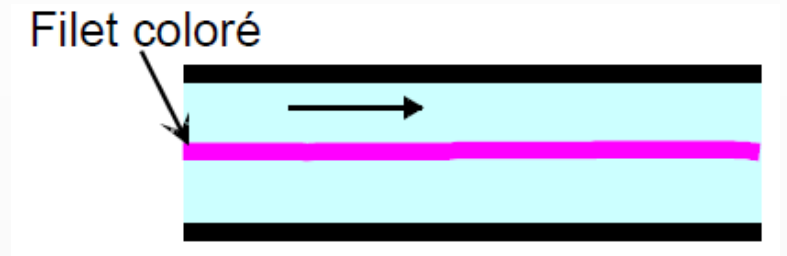
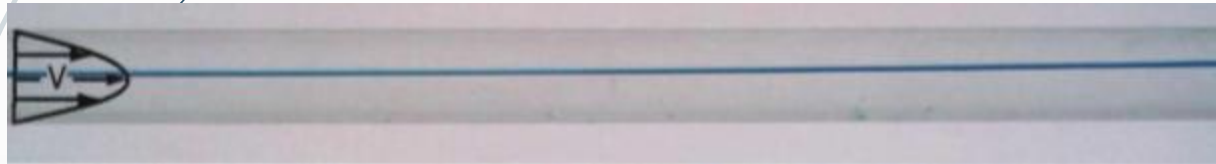
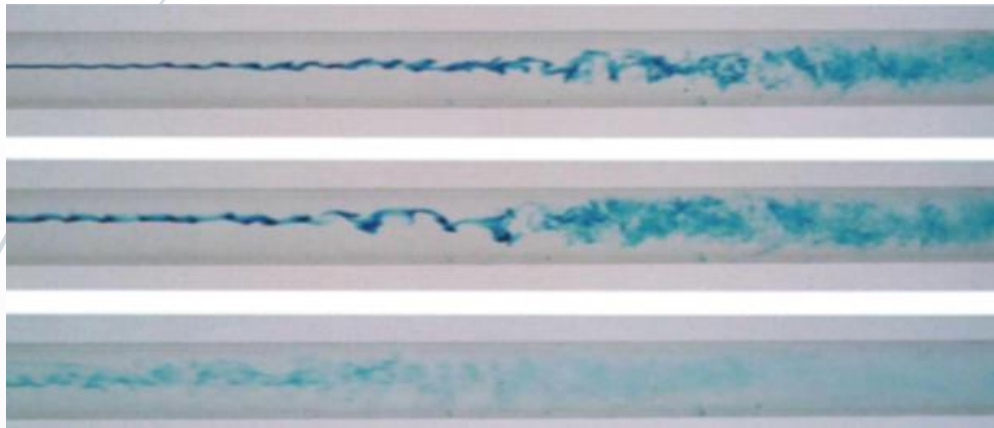


Figure 6.6: Ecoulement laminaire

6.3.2 Régime turbulent :

Les filets fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-mêmes.



Vue instantanée



Vue en pose

Figure 6.7: Ecoulement turbulent

Des études plus fines ont montré qu'il existe encore une subdivision entre :

- les écoulements turbulents lisses et
- les écoulements turbulents rugueux.

La limite entre ces différents types d'écoulements est évidemment difficile à appréhender.

En utilisant divers fluides à viscosités différentes et en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds** donné par l'expression suivante:

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} = \frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu}$$

Où:

U : Vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée (m/s)

D : Diamètre de la conduite ou largeur de la veine fluide (m)

ν : Viscosité cinématique (m²/s)

μ : Viscosité dynamique (Pa.s)

ρ : Masse volumique (Kg/m³)

Le nombre de Reynolds ne prend tout son sens que pour des écoulements soumis à la fois à des forces de frottement et d'inertie. Il permet alors d'en comparer les ordres de grandeur :

$$Re = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de frottement}}$$

Il peut prendre des valeurs allant de l'ordre de 10^{-6} pour la nage d'une bactérie jusqu'à 10^7 pour un avion en vol.

Dans une conduite de section circulaire, le nombre de Reynolds critique est environ **$Re \sim 2000$**

- Si **$Re < 2000$** : l'écoulement est **laminaire**
- Si **$Re > 2000$** : l'écoulement est **turbulent**
 - **$2000 < Re < 10^5$** : l'écoulement est **turbulent lisse**
 - **$Re > 10^5$** : l'écoulement est **turbulent rugueux**

Exercice d'application

Déterminer le régime d'écoulement dans une conduite de 3 cm de diamètre pour:

- 1)** De l'eau circulant à la vitesse $v=10,5$ m/s et de viscosité cinématique 1.10^{-6} m²/ s
- 2)** Du fuel lourd à 50 °C circulant à la même vitesse (Viscosité cinématique 110.10^{-6} m² / s).
- 3)** Du fuel lourd à 10 °C circulant à la même vitesse (Viscosité cinématique 290.10^{-6} m² / s).

Corrigé de l'exercice

$$1. Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{10,5 * 3 * 10^{-2}}{1 * 10^{-6}} = 315000 > 10^5 \quad \longrightarrow \quad \text{Régime turbulent rugueux}$$

$$2. Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{10,5 * 3 * 10^{-2}}{110 * 10^{-6}} = 2863 > 2000 \quad \longrightarrow \quad \text{Régime turbulent lisse}$$

$$3. Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{10,5 * 3 * 10^{-2}}{290 * 10^{-6}} = 1086 < 2000 \quad \longrightarrow \quad \text{Régime laminaire}$$

\longrightarrow A la même vitesse (même force d'inertie) , plus la viscosité augmente, plus on tend vers le régime laminaire (forces visqueuses augmentent)

Chapitre VII:

Étude des fluides visqueux (Notion de pertes de charges)

❖ Introduction

- Ce chapitre représente la suite :
 - Du chapitre 5 qui montre l'intérêt du théorème de Bernoulli pour calculer la vitesse et la pression en tout point d'une ligne de courant d'un **fluide parfait** en écoulement incompressible et ,
 - Du chapitre 6 qui s'intéresse à la définition des **fluides visqueux**.
- ➔ • Nous nous intéressons au théorème de Bernoulli généralisé (pour les fluides réels) et à la notion de pertes de charges.

7.1 Théorème de Bernoulli généralisé

132


7.1.1. Théorème de l'énergie cinétique

- L'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m u^2$ avec u : vitesse de l'écoulement.
- Pour une particule fluide en mouvement, le variation de l'énergie cinétique au cours du temps est égale à:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} m u^2)}{dt} = m \frac{du}{dt} u = m a u \quad \text{Eq 7.1}$$

Or, d'après le principe fondamental de la dynamique des fluides parfaits (cf. Chapitre 5), on a :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_v} + \overrightarrow{F_s} + \overrightarrow{F_{int}} = m \overrightarrow{a}$$


$$\frac{dE_c}{dt} = u \sum F_{ext} = \sum (F_{ext} u) = \sum P \quad \text{Eq 7.2}$$

avec $P = F_{ext} u$:
Puissance des forces

❖ Enoncé du théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces.

On peut écrire ce théorème sous forme différentielle :

$$\longrightarrow dE_c = \sum P \times dt = \sum \delta W \quad \text{Eq 7.3}$$

Avec δW : travaux élémentaires des forces

Ou sous forme de variation:

$$\longrightarrow \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) \quad \text{Eq 7.4}$$

$$\longrightarrow \Delta E_c = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\overrightarrow{Poids}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{pression}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{viscosité}) \quad \text{Eq 7.5}$$

7.1.2. Théorème de Bernoulli généralisé

Hypothèses:

- fluide réel: visqueux
- fluide incompressible: $\rho = \text{cste}$
- écoulement stationnaire: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$
- Écoulement irrotationnel
- force volumique dérivant d'un potentiel
(force de pesanteur par unité de volume:
 $\vec{F}_v = \rho \vec{g} = -\nabla E_p$)

A partir de l'équation (7.5) :

$$\Delta E_c = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{viscosité}}) \quad \text{Eq 7.5}$$

$$\diamond \text{ On a : } \vec{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g} \quad \longrightarrow \quad W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P}_A \times \vec{z}_A - \vec{P}_B \times \vec{z}_B$$

$$\longrightarrow \quad W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \rho_A V_A g z_A - \rho_B V_B g z_B$$

Comme, $\rho_A = \rho_B$ (fluide incompressible)
 $V_A = V_B$ (conservation de volume)

\longrightarrow Le travail par élément de volume $w_{A \rightarrow B}(\vec{P})$, est égal à :

$$w_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \frac{W_{A \rightarrow B}(\vec{P})}{V} = \rho g z_A - \rho g z_B \quad (\text{a})$$

❖ On a :

$$\vec{F}_{\text{pression}} = - \iint_S P(M) \vec{n} dS \longrightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}}) = P_A S_A z_A - P_B S_B z_B$$

Comme, $S_A z_A = V_A$ et $S_B z_B = V_B$

$$\longrightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}}) = P_A V_A - P_B V_B$$

Comme, $V_A = V_B$ (conservation de volume)

$$\longrightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}}) = V(P_A - P_B)$$

\longrightarrow Le travail par élément de volume $w_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}})$, est égal à :

$$w_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}}) = \frac{W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}})}{V} = P_A - P_B \quad (\text{b})$$

❖ On a :

$$w_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{viscosité}}) = \xi_{AB} \quad (\text{c})$$

ξ_{AB} : travail des forces visqueuses par unité de volume qui s'exprime en
[J/m³]=[Pa]

ξ_{AB} : Équivalent à la pression

❖ On a : la variation de l'énergie cinétique entre A et B ΔE_c :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_B u_B^2 - \frac{1}{2} m_A u_A^2$$

$$\longrightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} \rho_B V_B u_B^2 - \frac{1}{2} \rho_A V_A u_A^2$$

Comme, $\rho_A = \rho_B = \rho$ (fluide incompressible)
 $V_A = V_B = V$ (conservation de volume)

$$\longrightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} \rho V u_B^2 - \frac{1}{2} \rho V u_A^2$$

\longrightarrow La variation de l'énergie cinétique par élément de volume est égal à :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \rho u_B^2 - \frac{1}{2} \rho u_A^2 \quad (d)$$

A partir de l'équation (7.5) :

$$\Delta E_c = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{viscosité}}) \quad \text{Eq 7.5}$$

Avec:

$$w_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \frac{W_{A \rightarrow B}(\vec{P})}{V} = \rho g z_A - \rho g z_B \quad (\text{a})$$

$$w_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}}) = \frac{W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{pression}})}{V} = P_A - P_B \quad (\text{b})$$

$$w_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{viscosité}}) = \xi_{AB} \quad (\text{c})$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \rho u_B^2 - \frac{1}{2} \rho u_A^2 \quad (\text{d})$$



$$\frac{1}{2} \rho u_B^2 - \frac{1}{2} \rho u_A^2 = \rho g z_A - \rho g z_B + P_A - P_B + \xi_{AB} \quad \text{Eq 7.6}$$



$$P_B + \frac{1}{2} \rho u_B^2 + \rho g z_B = P_A + \frac{1}{2} \rho u_A^2 + \rho g z_A + \xi_{AB} \quad \text{Eq 7.7}$$

C'est le théorème généralisé de Bernoulli

$\xi_{AB} < 0$: C'est une perte d'énergie par frottement visqueux

L'équation 7.7 s'exprime en [Pa]: Conservation de la charge totale (pression totale)

D'une façon générale,


$$P_A + \frac{1}{2} \rho u_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho u_B^2 + \rho g z_B + \Delta P_c \quad \text{Eq 7.8}$$

 Conservation de la pression totale [Pa] $\Delta P_c = -\xi_{AB}$

❖ En divisant l'Eq 7.8 par ρg :

$$\longrightarrow \frac{P_A}{\rho g} + \frac{1}{2g} u_A^2 + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{1}{2g} u_B^2 + z_B + \Delta H \quad \text{Eq 7.9}$$

\longrightarrow Conservation de la hauteur totale du liquide [m] $\Delta H = \frac{\Delta P_c}{\rho g}$

$\frac{P}{\rho g} + z$: hauteur piézométrique

❖ En divisant l'Eq 7.8 par ρ :

$$\longrightarrow \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} u_A^2 + g z_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2} u_B^2 + g z_B + \Delta J \quad \text{Eq 7.10}$$

\longrightarrow Conservation de l'énergie spécifique [J/kg] $\Delta J = \frac{\Delta P_c}{\rho}$

7.2 Pertes des charges

7.2.1. Définition

Le fluide est réel et incompressible : cela suppose l'existence de forces élémentaire de frottement visqueux $d\tau$ qui contribue dans l'équation de bilan par un travail négatif et donner naissance à des pertes de charges.

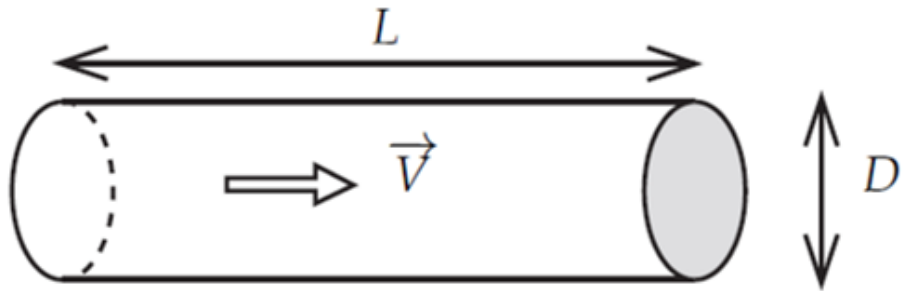
Dans l'équation 7.8: $\Delta P_c = -\xi_{AB}$: Pertes de charges [Pa]

→ En cas de présence d'une différence de pression totale entre 2 particules d'un fluide visqueux en mouvement.

7.2.2. Calcul des pertes de charges en conduite

7.2.2.1 Pertes de charges linéaires (régulières)

Les pertes de charges linéaires sont des pertes de charge réparties régulièrement le long des conduites rectilignes (de géométrie linéaire).



$$\Delta P_{c,l} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{1}{2} \rho u^2 \quad \text{Eq. 7.11}$$

Avec:

$\Delta P_{c,l}$: Pertes de charges linéaires [Pa]

λ : Coefficient des pertes de charges linéaires (sans dimension)

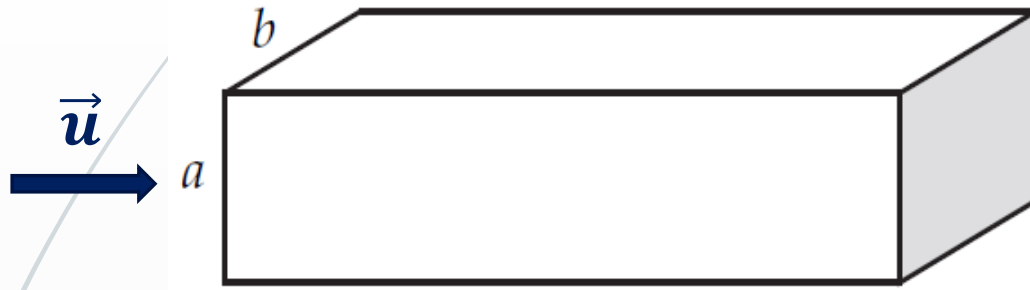
ρ : Masse volumique [Kg/m³]

u : Vitesse de l'écoulement dans la conduite [m/s]

D_H : Diamètre hydraulique [m]

$$D_H = 4 \frac{\text{surface de la section débitante}}{\text{périmètre de la section débitante}}$$

❖ Exemple : gaine rectangulaire



$$D_H = \frac{4 \text{ surface}}{\text{périmètre}} = \frac{4 a b}{2(a + b)} = \frac{2 a b}{(a + b)}$$

λ : Coefficient des pertes de charges linéaires qui dépend de la nature du régime

En régime laminaire: $\lambda = f(Re)$

En régime turbulent: $\lambda = f(Re, \text{rugosité } \varepsilon)$

❖ Détermination du coefficient des pertes de charges linéaires λ

145

- En régime laminaire : $Re < 2000$

➔ $\lambda = \frac{64}{Re}$ (Formule de Poiseuille)

Eq. 7.12

- En régime turbulent lisse : $2000 < Re < 10^5$

➔ $\lambda = 0,316 Re^{-0,25}$ (Formule de Blasius)

Eq. 7.13

- En régime turbulent rugueux : $Re > 10^5$

- Pour une conduite industrielle (rugosité non uniforme)

➔ $\lambda = 0,79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$ (Formule de Blench)

Eq. 7.14

- Pour une conduite expérimentale (rugosité uniforme)

➔ $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 - 2 \log\left(\frac{2\varepsilon}{d}\right)$ (Formule de von Kàrmàn)

Eq. 7.15

Avec:

ε : rugosité de la surface interne de la conduite [mm]

d : Diamètre intérieur de la conduite [mm]

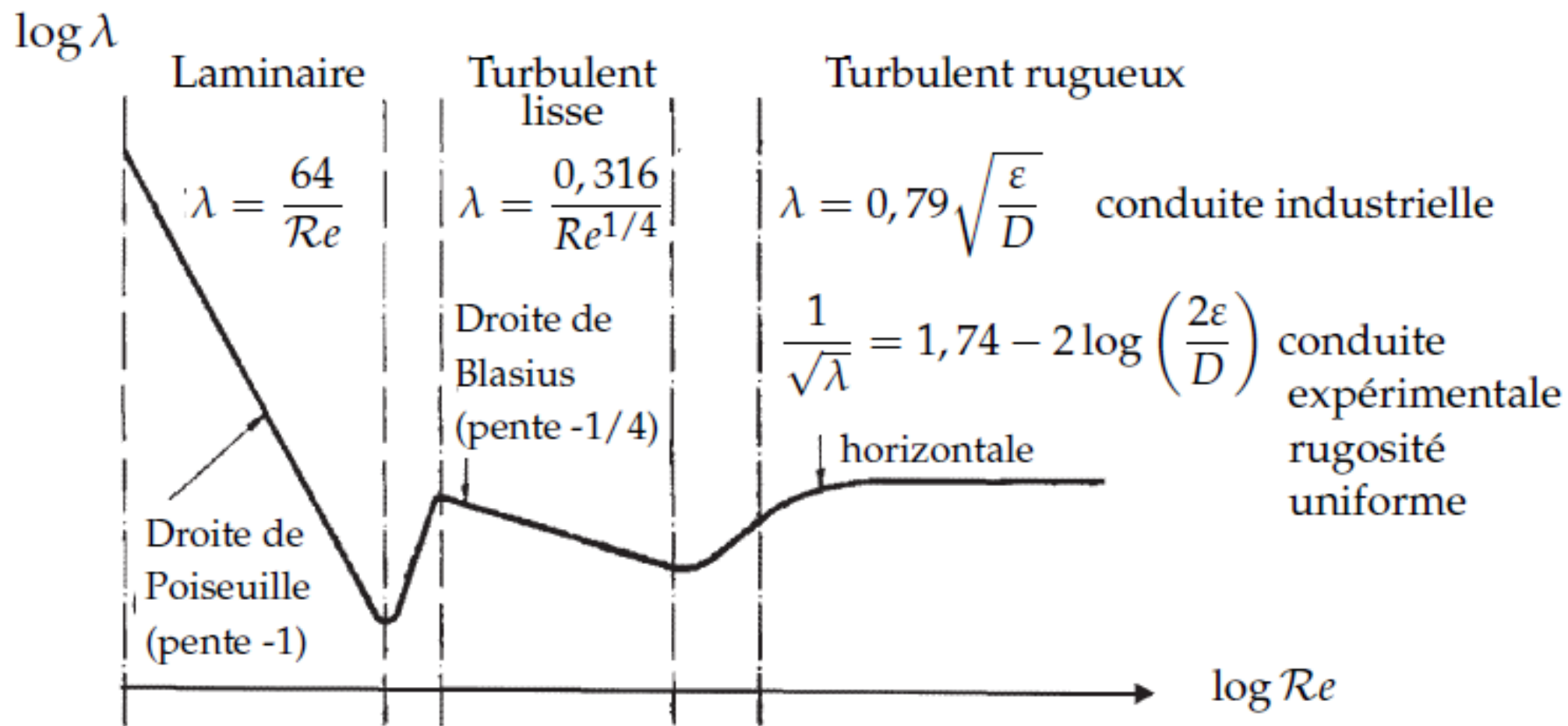


Figure 1: Loi de Colebrook (1939)

Parfois, on lit la valeur de λ sur un abaque établie par Moody.

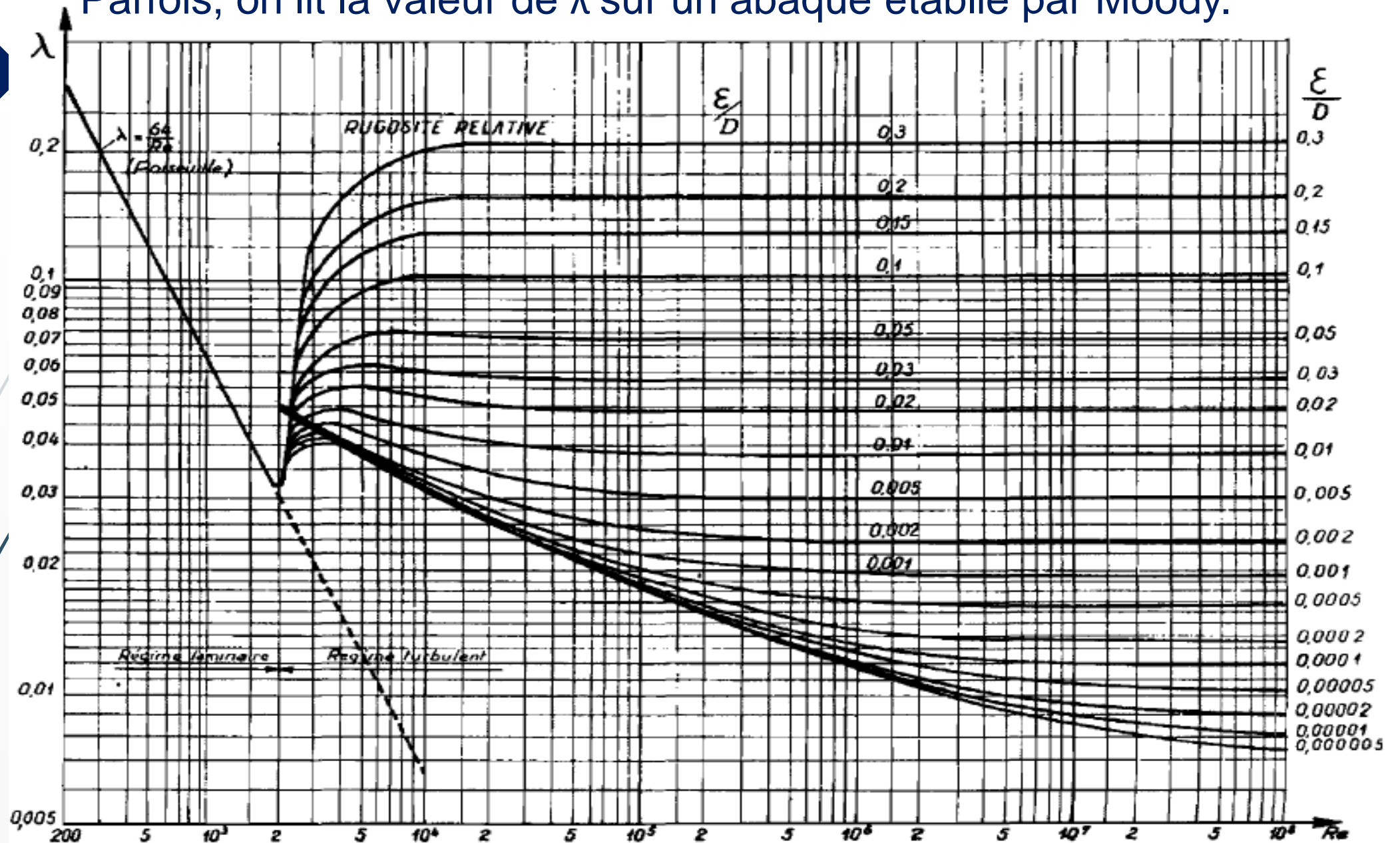
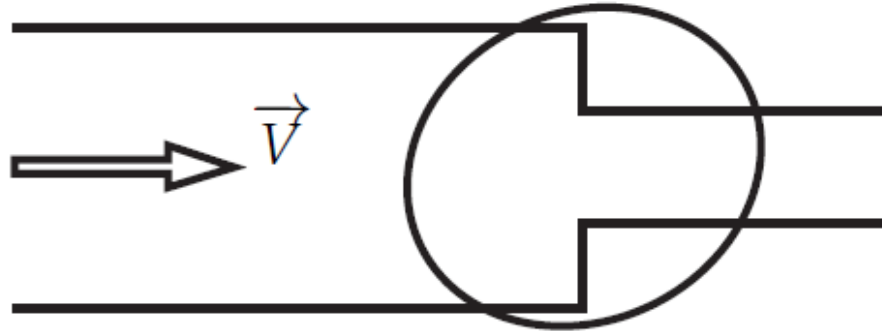


Figure 2: Diagramme de Moody

7.2.2.2 Pertes de charges singulières

Ces pertes de charges se produisent lorsqu'il y a un obstacle ou une variation de section dans la conduite.



$$\Delta P_{c,s} = k \frac{1}{2} \rho u^2 \quad \text{Eq. 7.16}$$

Avec:

$\Delta P_{c,s}$: Pertes de charges singulières [Pa]

k : Coefficient des pertes de charges singulières (sans dimension)

ρ : Masse volumique [Kg/m³]

u : Vitesse de l'écoulement dans la conduite [m/s]

Les valeurs de k sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

Tableau 1: coefficient des pertes de charges singulières

149

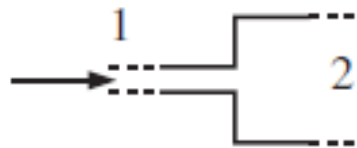


Diagram showing a sudden expansion from section 1 to section 2. The flow area increases from S_1 to S_2 .

$$k = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

$$\Delta P_c = k\rho \frac{V_1^2}{2}$$

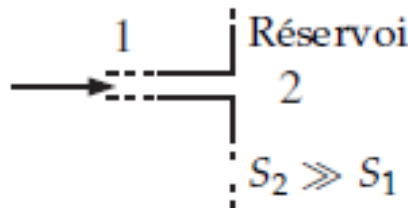


Diagram showing flow from a reservoir into a pipe at section 1. The flow area is S_1 at section 1 and S_2 at section 2. The condition $S_2 \gg S_1$ is indicated.

Réservoir

$$k = 1$$

en pratique $1,06 \leq k \leq 1,1$

$$\Delta P_c = k\rho \frac{V_1^2}{2}$$

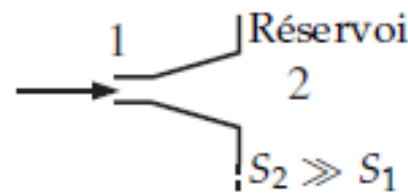


Diagram showing flow from a reservoir into a pipe with a conical diffuser. The flow area is S_1 at section 1 and S_2 at section 2. The condition $S_2 \gg S_1$ is indicated.

Réservoir

$$k = 0,2 + 2 \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

$$\Delta P_c = k\rho \frac{V_1^2}{2}$$

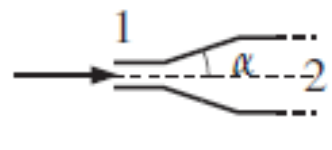


Diagram showing flow through a converging pipe with a conical nozzle. The flow area is S_1 at section 1 and S_2 at section 2. The angle of the nozzle is α .

$$k = 0,46 Re^{-0,06} \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^{0,5}$$

$$\Delta P_c = k\rho \frac{V_1^2}{2}$$

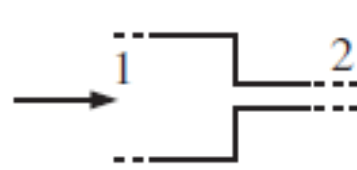
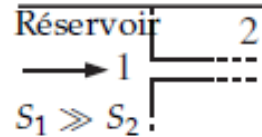
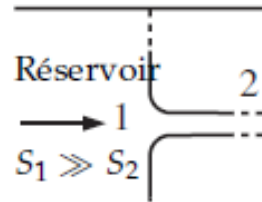
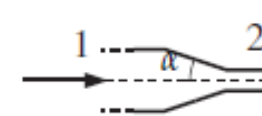
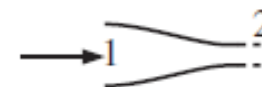
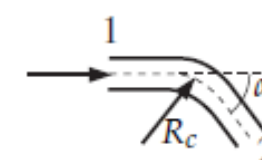
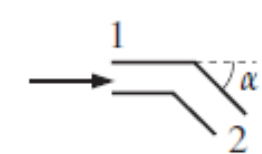


Diagram showing flow through a sudden contraction from section 1 to section 2. The flow area decreases from S_1 to S_2 .

$$k = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2$$

$$C_c = 0,59 + 0,41 \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^3$$

$$\Delta P_c = k\rho \frac{V_2^2}{2}$$

	$k = 0,5$	$\Delta P_c = k\rho \frac{V_2^2}{2}$
	$k = 0,05$	$\Delta P_c = k\rho \frac{V_2^2}{2}$
	$k = a \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2$ $a = \sin \alpha$ pour $\alpha < 90^\circ$ $a = 1$ pour $\alpha > 90^\circ$	$\Delta P_c = k\rho \frac{V_2^2}{2}$
	$k = 0,02$	$\Delta P_c = k\rho \frac{V_2^2}{2}$
	$k = \left[0,13 + 1,85 \left(\frac{D}{2R_c} \right)^{3,5} \right] \frac{\alpha}{90}$ (lisse) $k = 0,42 \left(\frac{D}{R_c} \right)^{0,5}$ (rugueux)	$\Delta P_c = k\rho \frac{V_2^2}{2}$
	$k = 1,3(1 - \cos \alpha)$	$\Delta P_c = k\rho \frac{V_2^2}{2}$

7.3 Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel

Considérons un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite.

En conservant la charge totale tout au long d'une ligne de courant, le théorème de Bernoulli prend la forme générale suivante :

$$\frac{1}{2} \rho (u_B^2 - u_A^2) + \rho g (z_B - z_A) + (P_B - P_A) = \xi_{AB} = -\Delta P_c \quad \text{Eq 7.17}$$

Avec $\Delta P_c = \Delta P_{c,l} + \Delta P_{c,s}$

 $\xi_{AB} < 0$

La perte de charge ΔP_c peut être due à une perte de charge linéaire **et/ou** une perte de charge singulière.

On note :

J_{12} : Somme de toutes les pertes de charge (perte d'énergie spécifique), singulière et linéaires entre les sections (1) et (2).

En conservant l'énergie spécifique totale tout au long d'une ligne de courant, le théorème de Bernoulli prend la forme générale suivante :

$$\frac{1}{2} (u_B^2 - u_A^2) + g (z_B - z_A) + \frac{1}{\rho} (P_B - P_A) = J_{12} = -\frac{\Delta P_c}{\rho} \quad \text{Eq 7.18}$$

Avec $J_{12} = J_L + J_s$



$J_{12} < 0$

J_L : Pertes de charges linéaires [J/Kg]

J_s : Pertes de charges singulières [J/Kg]

Fin du cours