I.P.S.A
63, Bvd de Brandebourg
94200 Ivry Sur Seine

Date de l'épreuve :
Mardi 22 octobre 2019

AERO 1

Professeur responsable : PEREZ-RAMOS

Durée de l'épreuve : 1h

Sans : **Notes de cours**

Avec : **Calculatrice non programmable**

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE I

Question:	1	2	3	Total
Points:	8	6	7	21
Note:				

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous paraît être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, vous le signalez clairement dans votre copie et vous poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le barème est donné à titre indicatif.

Pour les QCM, chaque question comporte une réponse. Lorsque l'étudiant ne répond pas à une question ou si la réponse est fausse, il n'a pas de point de pénalité.

Rédigez directement sur la copie en dessous de chaque exercice.

Inscrivez vos : nom, prénom et classe. Justifiez vos affirmations si nécessaire. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

CLASSE :

NOM et Prénoms :

1. (8 points) **Fréquence cyclotron d'un électron dans un champ magnétique**

Un proton de charge e et de masse m qui se déplace initialement sur une trajectoire rectiligne à la vitesse v entre dans un champ magnétique d'intensité B de telle sorte que le vecteur vitesse et le vecteur du champ magnétique sont perpendiculaires. À son entrée dans le champ magnétique, le proton décrit une trajectoire circulaire sous l'action de la force de Lorentz de module :

$$F = evB$$

Dans cet exercice, on déterminera l'expression de la fréquence cyclotron du proton par analyse dimensionnelle.

(a) **(0.5)** Rappeler la définition d'homogénéité.

Solution: Si deux grandeurs s'expriment dans la même unité, elles sont homogènes ou encore si deux grandeurs ont la même dimension elles sont alors homogènes.

(b) **(0.5)** Rappeler les définitions de grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées.

Solution: Une grandeur fondamentale est une grandeur de base qui ne peut pas se découper(**0.25**). Tel est le cas d'une longueur, d'une masse etc. Une grandeur dérivée est une grandeur qui peut s'exprimer en fonction des grandeurs fondamentales (**0.25**).

(c) **(1.5)** Parmi les grandeurs mentionnées dans l'énoncé, donner les grandeurs fondamentales et les grandeurs dérivées avec leur dimensions.

Solution:
Dans l'ordre de l'énoncé :

1. charge e : grandeur dérivée de dimension TI, **(0.25)**
2. masse m : grandeur fondamentale de dimension $[m] = M$, **(0.25)**
3. vitesse v : grandeur dérivée de dimension $[v] = LT^{-1}$, **(0.25)**
4. champ magnétique B : grandeur dérivée dont la dimension s'obtient à partir du module de la force de Lorentz en faisant :

$$[B] = \frac{[F]}{[e][v]} = \frac{LMT^{-2}}{TILT^{-1}} = MT^{-2}I^{-1}.(\mathbf{0.25 + 0.25 = 0.5})$$

5. fréquence f : grandeur dérivée donnée par l'inverse d'un temps d'après sa définition : T^{-1}. **(0.25)**

(d) **(1.5)** Établir par analyse dimensionnelle, à une constante k multiplicative près, l'expression de la fréquence cyclotron f en fonction de e, m et B. Pour le monôme proposé, on prendra les puissances a, b et c.

Solution: On pose l'équation donnée par :

$$f = ke^a m^b B^c (\mathbf{0.5})$$

et on passe à l'équation aux dimensions

$$[f] = [k][e]^a[m]^b[B]^c(\mathbf{0.25}) \Rightarrow T^{-1} = T^a I^a M^b M^c T^{-2c} I^{-c}(\mathbf{0.25})$$
$$= M^{b+c} T^{a-2c} I^{a-c}(\mathbf{0.25})$$

avec $[k] = 1$. **(0.25)**

(e) **(3)** Établir le système d'équations qui permet de déterminer les puissances a, b et c et le résoudre.

Solution: À partir de l'équation donnée à la question précédente, on écrit le système par identification entre les deux membres, soit :

$$M^0 T^{-1} I^0 = M^{b+c} T^{a-2c} I^{a-c},$$

d'où le système suivant :

$$a - 2c = -1(\mathbf{0.5}); \quad b + c = 0(\mathbf{0.5}); \quad a - c = 0(\mathbf{0.5}).$$

On résout le système et on donne les solutions :

$$a = 1(\mathbf{0.5}); \quad b = -1(\mathbf{0.5}); \quad c = 1(\mathbf{0.5}).$$

(f) **(1)** Donner alors la formule de la fréquence cyclotron en posant $k = \frac{1}{2\pi}$.

Solution:

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{eB}{m}.$$

2. (6 points) **Questions diverses**

2.1 Calcul approché

(a) **(0.5)** Rappeler la formule approchée de la série du binôme $(1+\epsilon)^n$ au premier ordre pour $\epsilon \ll 1$.

Solution:
$$(1+\epsilon)^n \approx 1+n\epsilon$$

(b) **(1.5)** Calculer, en utilisant l'approximation donnée à la question précédente :

$$1)\ \frac{(1-\epsilon)^2}{1+\epsilon'}, \qquad 2)\ \frac{\sqrt{1+\epsilon'}}{\sqrt{1-\epsilon}},$$

pour $\epsilon \ll 1$ et $\epsilon' \ll 1$.

Solution:

$$1)\ \frac{(1-\epsilon)^2}{1+\epsilon'} \approx (1-2\epsilon)(1-\epsilon') \approx 1-2\epsilon-\epsilon', (\mathbf{0.25+0.25+0.25=0.75})$$

$$2)\ \frac{\sqrt{1+\epsilon'}}{\sqrt{1-\epsilon}} \approx (1+\frac{1}{2}\epsilon')(1+\frac{1}{2}\epsilon) \approx 1+\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon'.(\mathbf{0.25+0.25+0.25=0.75})$$

2.2 Calcul d'incertitude

Dans un circuit électrique RL, l'inductance L est connue à 5% et la résistence R est connue à 2%. La décroissance du courant électrique dans le circuit est donné par la loi :

$$i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

où $\tau = L/R$ et E est la tension initiale aux bornes de la bobine, connue à 1%.

(a) **(3)** Avec quelle incertitude relative le courant $i(t)$ est-il connu?

Solution:

1. On prend le $\ln$ des deux membres et on développe en posant l'expression de τ :

$$\ln(i) = \ln(E) - \ln(R) - \frac{R}{L}t, (\mathbf{0.5})$$

2. on prend la différentielle logarithmique en tenant compte de la linéarité de cette opération :
$$\frac{di}{i} = \frac{dE}{E} - \frac{dR}{R} - d\left(\frac{R}{L}\right)t - \frac{R}{L}dt.(\mathbf{0.5})$$
3. Dans l'expression précédente, on développe la différentielle du quotient et on réécrit le quatrième terme :
$$d\left(\frac{R}{L}\right)t = \frac{t}{\tau}\frac{dR}{R} - \frac{t}{\tau}\frac{dL}{L},\ \frac{R}{L}dt = \frac{t}{\tau}\frac{dt}{t}.(\mathbf{0.5})$$
On remplace et on obtient :
$$\frac{di}{i} = \frac{dE}{E} - \frac{dR}{R} - \frac{t}{\tau}\frac{dR}{R} + \frac{t}{\tau}\frac{dL}{L} - \frac{t}{\tau}\frac{dt}{t},(\mathbf{0.5})$$
4. on regroupe les termes semblables (erreurs liées) :
$$\frac{di}{i} = \frac{dE}{E} - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\frac{dR}{R} + \frac{t}{\tau}\frac{dL}{L} - \frac{t}{\tau}\frac{dt}{t},(\mathbf{0.5})$$
5. on prend les valeurs absolues des coefficients et on remplace $d \to \delta$ dans chaque terme :
$$\frac{\delta i}{i} = \frac{\delta E}{E} + \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\frac{\delta R}{R} + \frac{t}{\tau}\left(\frac{\delta L}{L} + \frac{\delta t}{t}\right).(\mathbf{0.5})$$

(b) **(1)** Application numérique: calculer l'incertitude relative sur le courant électrique 2 s plus tard si le temps est mesuré à 1% près. On prendra $\tau = 1$ s.

Solution: D'après l'énoncé :
$$\frac{\delta L}{L} = 0.05,\ \frac{\delta R}{R} = 0.02,\ \frac{\delta E}{E} = 0.01,\ t = 2,\ \frac{\delta t}{t} = 0.01.(\mathbf{0.5})$$
On remplaces ces valeurs dans la formule donnée à la question précédente pour ainsi obtenir :
$$\frac{\delta i}{i} = 0.01 + (1+2)0.02 + 2(0.05 + 0.01) = 0.19.(\mathbf{0.5})$$
Conclusion : le courant électrique est donc connu à 19% près.

3. (7 points) **Cinématique du point en coordonnées cartésiennes**

Un point matériel M suit la trajectoire donnée par les équations horaires :

$$x(t) = a + bt,$$
$$y(t) = ct^2$$

où a, b et c sont des constantes positives.

(a) **(0.75)** Donner les dimensions de a, b et c qui permettent de garantir l'homogénéité des équations précédentes.

Solution: On a $[x] = [y] = L \Rightarrow [a] = L$, $[b] = LT^{-1}$ et $[c] = LT^{-2}$.**(3x0.25=0.75)**

(b) **(0.25)** Donner les coordonnées du point M à l'instant $t = 0$.

Solution: $M(a; 0)$.

(c) **(1)** Déterminer l'équation de la trajectoire et la représenter sur une figure.

Solution: On isole t de l'équation pour $x(t)$: $t = (x - a)/b$ **(0.25)** et on remplace dans la deuxième :

$$y(x) = \frac{c}{b^2}(x - a)^2.(\mathbf{0.5})$$

Il s'agit donc d'une parabole centrée en $M(a; 0)$ qui ouvre vers le haut **(0.25)**. On ne garde que la moitié droite de la fonction pour ainsi respecter les contraintes physiques temporelles $t \geq 0$.

(d) **(1.25)** Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}$ et donner sa norme.

Solution: Le vecteur vitesse s'obtient à partir de la dérivée première du vecteur position donné à la question précédente :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2ct \\ 0 \end{pmatrix}.(\mathbf{0.25 + 2x0.25 = 0.75})$$

Pour l'expression de chaque dérivée 0.25+0.25=0.5 et pour l'expression du vecteur vitesse 0.25

On en déduit la norme d'après la formule :

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\mathbf{0.25}) = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}.(\mathbf{0.25})$$

(e) **(1.25)** Calculer le vecteur accélération $\vec{a}$ et en déduire sa norme.

Solution: Le vecteur vitesse s'obtient à partir de la dérivée première du vecteur position donné à la question précédente :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix}.(\mathbf{0.25 + 2x0.25 = 0.75})$$

Pour l'expression de chaque dérivée 0.25+0.25=0.5 et pour l'expression du vecteur vitesse 0.25

On en déduit la norme d'après la formule :

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}(\mathbf{0.25}) = 2c.(\mathbf{0.25})$$

(f) **(1)** Calculer l'angle formé entre le vecteur vitesse et le vecteur accélération à un instant t quelconque.

Solution: L'angle formé entre les deux vecteurs s'obtient à partir du produit scalaire donné par :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{av}(\mathbf{0.5}) = \frac{4c^2t}{2c\sqrt{b^2+4c^2t^2}}(\mathbf{0.25}) = \frac{2ct}{\sqrt{b^2+4c^2t^2}}.(\mathbf{0.25})$$

(g) **(1)** Représenter les vecteurs vitesse et accélération sur un point arbitraire de la trajectoire.

Solution: Le vecteur accélération est toujours dirigé dans le sens positif de l'axe des ordonnées **(0.5)** et le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire **(0.5)**. L'angle α diminue au cours du temps, comme le montre la formule du produit scalaire.

(h) **(0.5)** Que vaut l'angle formé entre le vecteur vitesse et le vecteur accélération lorsque $t \to \infty$.

Solution: Dans la limite $t \to \infty$, on trouve $\alpha = 0$ **(0.25)**. À l'infini, le vecteur accélération devient colinéaire au vecteur vitesse.**(0.25)**