

# LA COMETE DE HALLEY

IPSA-2020



PROFESSEUR : MME. NGUYEN

CLASSE : 1PR

ANNEE : 2020

## TABLES DES MATIERES

### ❖ INTRODUCTION AU MINI PROJET

### ❖ HISTORIQUE DE LA MECANIQUE CELESTE

### ❖ LOI DE KEPLER

- *1 ère loi*
- *2 -ème loi*
- *3 -ème loi*

### ❖ LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE

- *Force attractive*
- *Conservation moment cinétique*
- *Conservation énergie mécanique*

*Revenir au début.*

## **I. INTRODUCTION AU MINI PROJET**

Les comètes proviennent des régions les plus externes de notre Système Solaire, elles sont formées d'un noyau solide, d'un diamètre compris entre 1 et 20 kilomètres, composé d'un mélange de roches, de glace et de poussières. Lors de ce mini-projet, nous allons étudier la comète de Halley qui a été aperçue à différentes dates avant J.C mais aussi par nos contemporains en 1835, 1910 et 1986. Par cette étude, notre but est de vérifier les lois de Kepler, vérifier le théorème du moment cinétique, vérifier la conservation de l'énergie mécanique totale

## **II. HISTORIQUE DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE**

La mécanique céleste pourra être définie comme étant l'étude des trajectoires, mouvement des objets astronomiques grâce aux outils mathématiques et physique.

Ainsi plusieurs astronome, physicien ont contribues à ces recherches sur la mécanique céleste en apportant leurs théories, découverte listes ci-dessous. (Ces outils sont indispensables quant à la compréhension de ce mini projet sur la Comete de Halley).

### **Qui est Nicolas Copernic ?**

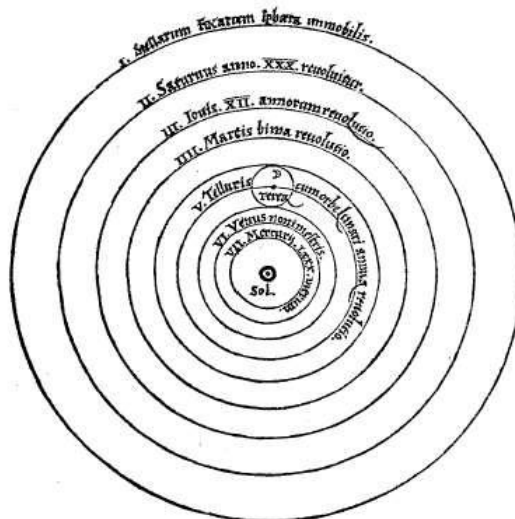
Nicolas Copernic est d'origine polonaise, il découvre la médecine, les mathématiques et surtout l'astronomie à l'université de Bologne en Italie. Le reste de sa vie sera consacré en partie aux recherches astronomiques.

Copernic envisage un système Héliocentrique (le système Copernic).

### **Système Héliocentrique.**

Dans ce système le soleil est placé au centre de tout. Ainsi le soleil sera au centre de l'univers.

Cependant avec les temps moderne le système Héliocentrique place le centre non plus au centre de l'univers mais uniquement autour de notre propre système solaire :



*Revenir au début.*

## **Qui est Tycho Brahe ?**

Astronome danois, considéré comme un simple observateur à l'époque trouvera une place de premier rang au 20<sup>-ème</sup> siècle dans l'histoire de l'astronomie et dans l'histoire des sciences avec le concept d'immuabilité des cieux.]

### **Le concept d'immuabilité des cieux est faux**

\*Immuable (=qui ne change pas)

Les observations menées par Tycho Brahe sur une supernova en 1572 (une Etoile de notre galaxie qui venait d'exploser) ont montré que la position précise de cette Etoile par rapport aux autres restait la même (immobile et fixe). Or si l'Etoile était proche de la Terre, l'astre aurait dû se déplacer dans le ciel comme les planètes. De ce fait Brahe en tire une conclusion, la seule conclusion possible : L'Etoile nouvelle se trouve bien plus loin que les autres planètes. Ainsi les cieux changent comme la Terre, rien n'est immuable.

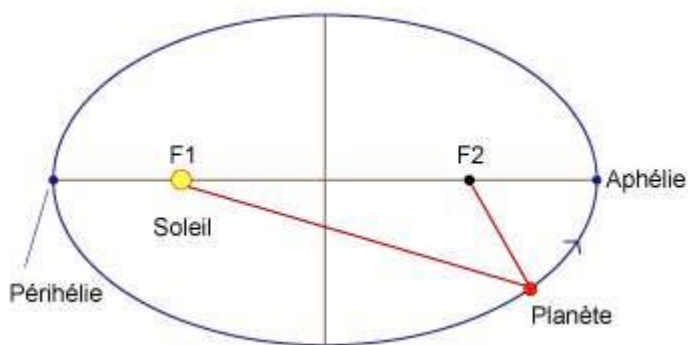
Aparté : ce concept mettra à tort le concept d'immuabilité d'Aristote.

## **Qui est Johannes Kepler ?**

Universellement connu pour les trois lois planétaires qui portent son nom, Kepler a aussi marqué l'optique. On peut donc le considérer comme fondateur de deux branches de la science.

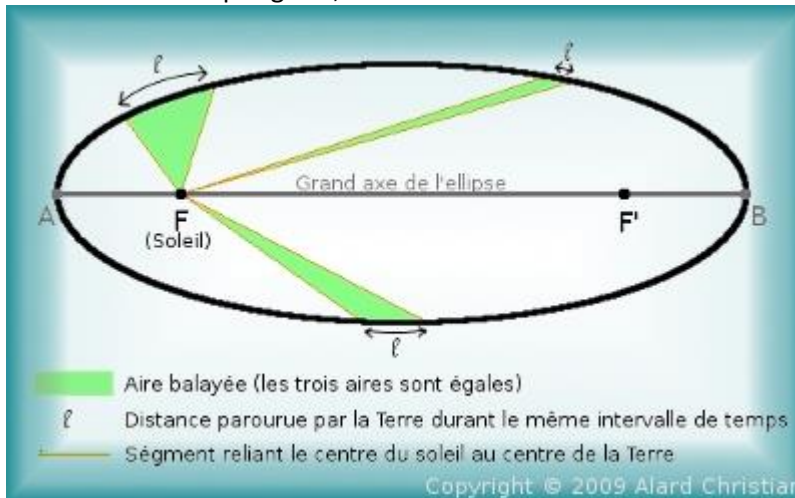
### **Lois De Kepler**

1. Première loi de Kepler : les planètes décrivent une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers ;



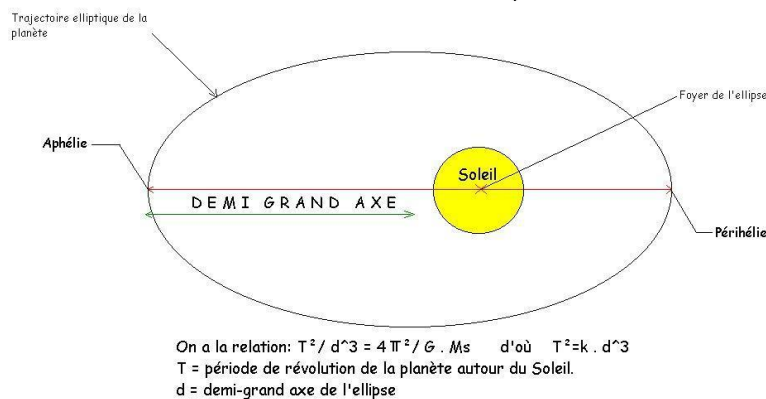
*Revenir au début.*

2. Deuxième loi de Kepler : le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux ;



3. Troisième loi de Kepler : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbi

### Troisième loi de Kepler



### Qui est Galilée ?

Mathématicien, géomètre, physicien et astronome italien, il a perfectionné et exploité la lunette astronomique. Ses études sur le mouvement lui ont permis de montrer que les projectiles suivent dans le vide des trajectoires paraboliques.

### Les trajectoires des projectiles selon Galilée

C'est en étudiant le mouvement d'objet dans des plans inclinés, qu'il tira l'hypothèse de la trajectoire parabolique. Il démontrera ensuite mathématiquement que la trajectoire idéale d'un projectile est une parabole et que son mouvement est composé à la fois d'un mouvement uniforme et d'un mouvement uniformément accéléré.

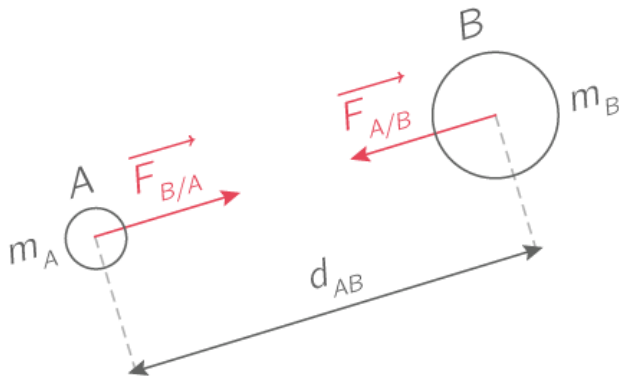
*Revenir au début.*

### **Qui est Isaac Newton ?**

Alors que la peste sévissait à Londres, Newton se refugia chez sa mère, c'est durant ce séjour que la célèbre pomme est tombée. De là, il a pu établir une relation entre la chute d'un corps à la surface de la Terre et le mouvement de la Lune.

### **La théorie de la gravitation de Newton**

La gravitation est décrite comme étant une force responsable du mouvement des planètes et des satellites, et plus généralement comme l'attraction à distance entre deux corps qui ont une masse.



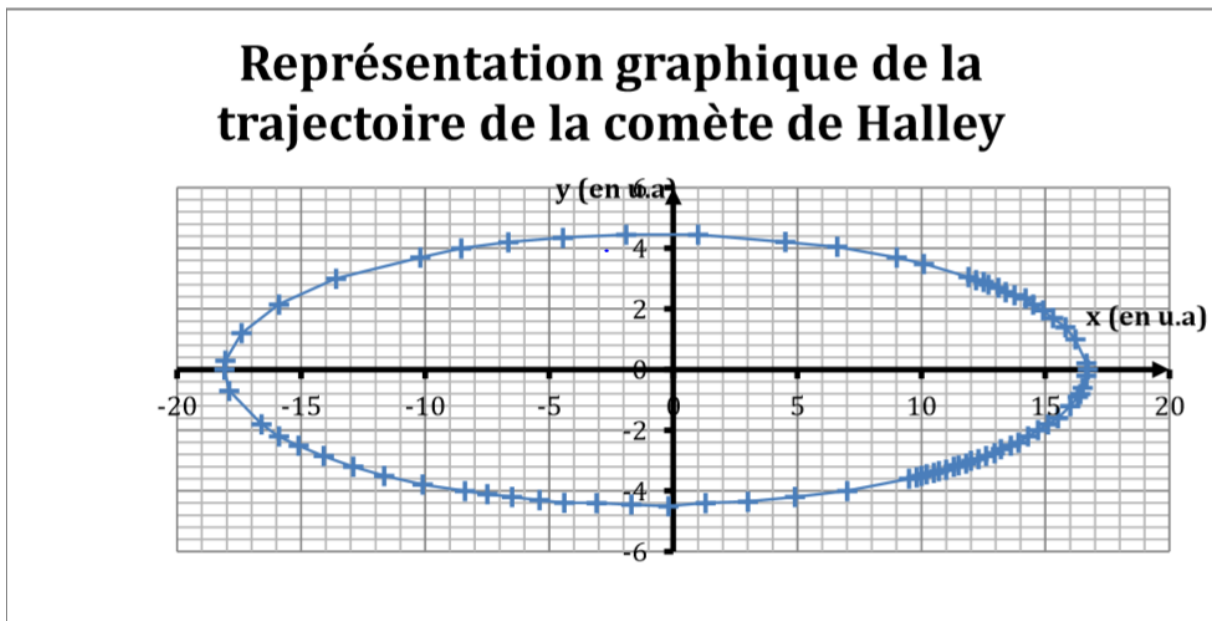
Revenir au début.

### III. LES LOIS DE KEPLER

#### A. 1ère Loi de Kepler : la loi des orbites

Chaque planète décrit autour du Soleil une orbite elliptique Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse.

Dans cette première partie, nous allons étudier la trajectoire de la comète. Nous pouvons remarquer que celle-ci décrit une trajectoire elliptique dont les foyers se nomme F1 et F2. Ainsi par l'étude graphique et théorique nous allons déterminer les caractéristiques de cette trajectoire.



Nous avons déterminé :

- Le demi grand axe :  $a = 17.88$  ua
- La distance focale  $F_1F_2 = 2c = 34.5$  ua donc  $c = 17.25$  ua
- Le demi petit axe :  $b = 4.5$  ua

Nous trouvons par le calcul l'excentricité :  $e = \frac{F_1F_2}{2a} = \frac{c}{a}$  et le paramètre focal de l'ellipse :  $p = a(1 - e^2)$ . Pour vérifier ses résultats nous avons utilisé le solveur Excel. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	theorique	experimentale
e	0,966288499	0,964651114
p	1,186114835	1,241881059
Ecart de e	0,001637385	
Ecart de p	0,055766224	

Revenir au début.

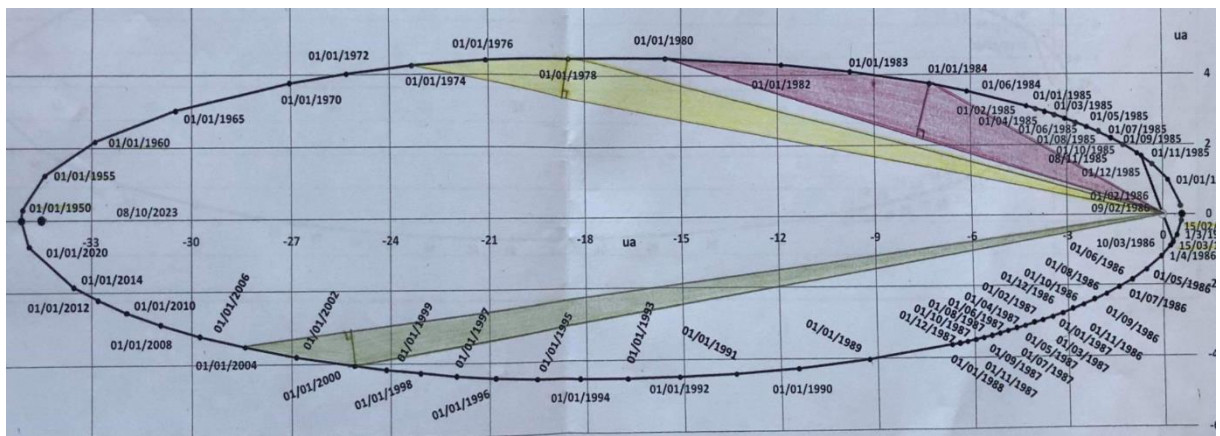
### B. 2<sup>ème</sup> loi de Kepler : la loi des aires

Dans cette partie nous avons tracé sur la feuille les triangles représentant les surfaces balayées par le rayon vecteur pour une même durée. Les résultats sont récapitulés dans le tableau suivant :

Cas	Dates	Bases(u.a)	Hauteur(u.a)	Air(u.a <sup>2</sup> )	Vitesse Aerolaire (ua <sup>2</sup> /an)
1	01/01/1974 01/01/1978	22,5	1,1	12,375	3,09375
2	01/01/1980 01/01/1984	16,3	1,5	12,225	3,05625
3	01/01/2000 01/01/2004	27,5	0,9	12,375	3,09375
4	T periode=	78,39894545	Aire Totale =	241,5667507	Moyenne= 3,08125

Pour déterminer la période de la comète nous avons réalisé le calcul suivant :

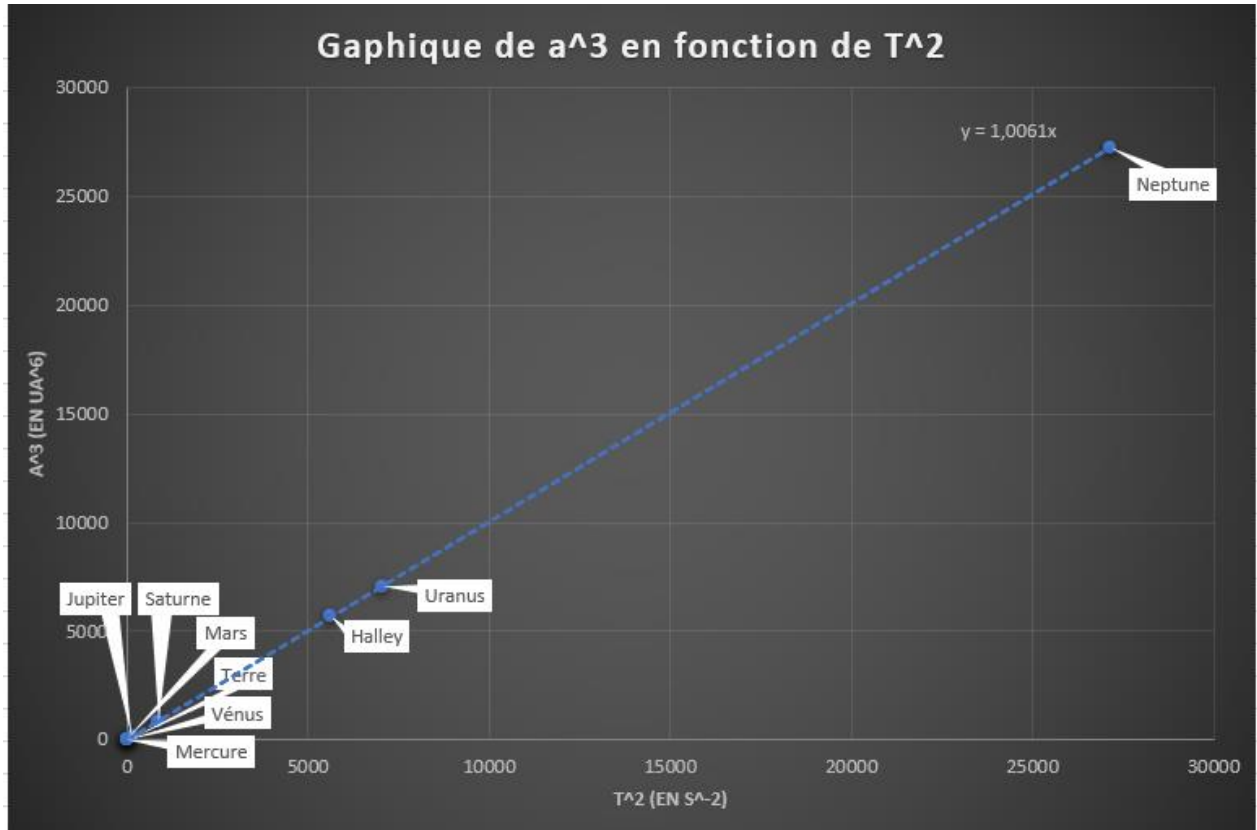
$$\text{Période} = \frac{\text{aire totale de l'ellipse}}{\text{vitesse aérolaire}} \Leftrightarrow T = \frac{\pi * a * b}{V}$$





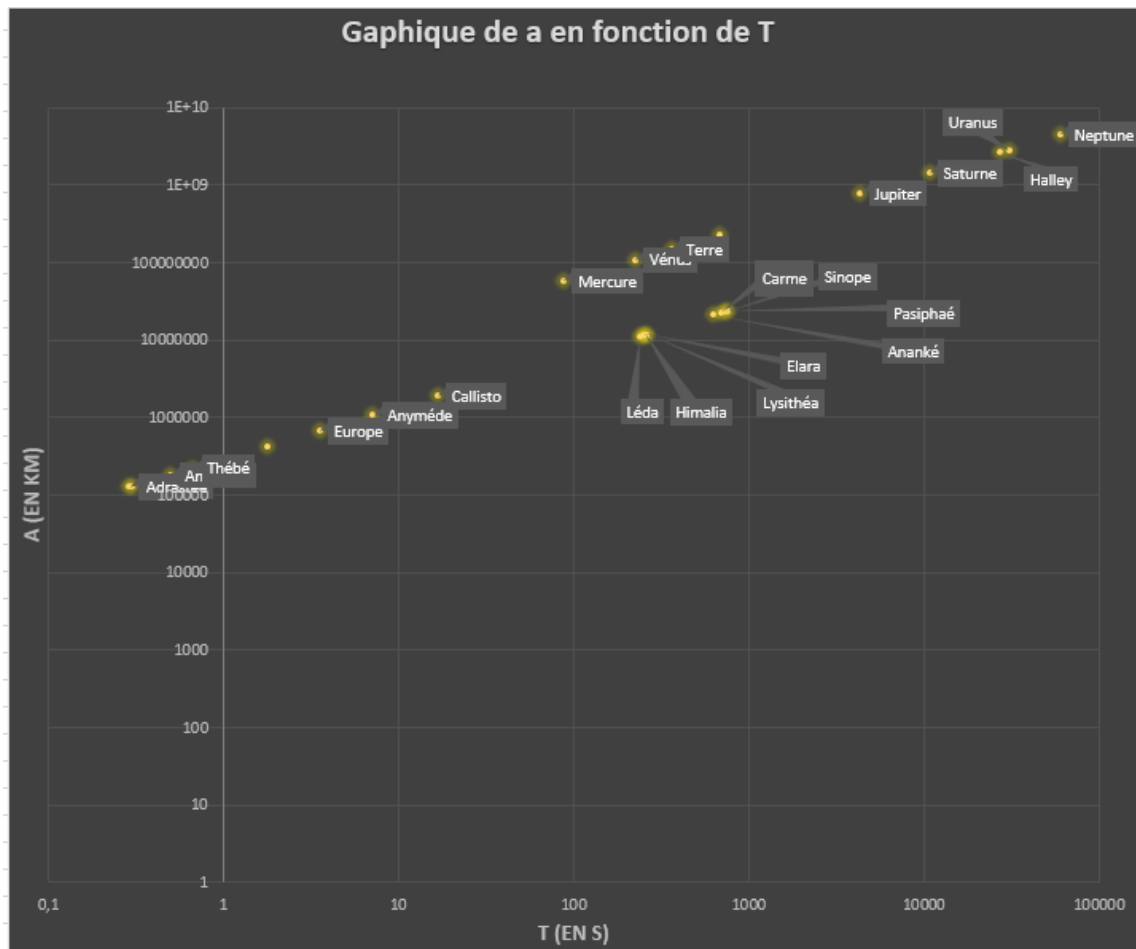
*Revenir au début.*

3<sup>ème</sup> loi de Kepler, nous avons un rapport constant pour l'ensemble des planètes de notre système solaire.



Ce graphique nous donne  $a^3$  en fonction de  $T^2$ , nous avons une droite passant par chaque planète et l'origine du repère. On peut en conclure que  $a^3$  est proportionnel à  $T^2$ .

Revenir au début.



Par suite des mesures et des graphiques expérimentaux nous obtenons des droites proportionnelles ou des constantes. Donc cela confirme la troisième loi de Kepler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{constante}$$

#### IV. LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE

##### A. Force attractive en $1/r^2$

##### Question 1 :

Pour cette question, nous avons calculé les coordonnées à l'aide de l'annexe afin d'obtenir notre x et y en unité astronomique puis notre rayon et  $1/r^2$  :

Revenir au début.

PARTIE II	x (u.a)	y (u.a)	R (ua)	1/r <sup>2</sup>
10/12/1985	-0.165	1.31	1.320350332	0.573616509
16/12/1985	-0.072	1.23	1.232105515	0.658725077
21/12/1985	0	1.16	1.16	0.743162901
25/12/1985	0.06	1.09	1.091650127	0.839137367
29/12/1985	0.125	1.02	1.02763077	0.946947279
05/01/1986	0.25	0.9	0.934077085	1.146131805
10/01/1986	0.31	0.79	0.84864598	1.388503194
15/01/1986	0.37	0.69	0.782943165	1.63132137
20/01/1986	0.455	0.55	0.713810199	1.962612237
25/01/1986	0.51	0.42	0.660681466	2.290950745
30/01/1986	0.55	0.3	0.626498204	2.547770701
05/02/1986	0.585	0.11	0.595252047	2.822267692
09/02/1986	0.59	0	0.59	2.872737719
15/02/1986	0.585	-0.19	0.615081295	2.643230027
20/02/1986	0.54	-0.34	0.638122245	2.455795678
26/02/1986	0.475	-0.51	0.696939739	2.058778115
01/03/1986	0.45	-0.57	0.726223106	1.896094046
05/03/1986	0.36	-0.7	0.787146746	1.61394448

### Question 2 et 3 :

#### Méthode choisis : 2eme

Puis nous avons effectué le calcul de la vitesse selon x et y en unité astronomique (en prenant la norme) puis en km/s. Cela nous permettra de déterminer l'accélération dans une seconde étape

$\ \vec{v}\ $ (ua/j)		$\ \vec{v}\ $ (km/s)		$\ \vec{v}\ $ (km/s)	$\ \vec{a}\ $ (ua/j)		$\ \vec{a}\ $ (km/s <sup>2</sup> )		$\ \vec{a}\ $ (km/s <sup>2</sup> )
Vx	Vy	Vx	Vy	v	Ax	Ay	Ax	Ay	a
0.0155	0.013333333	26.82002315	23.07098765	35.37773471					
0.0144	0.011666667	24.91666667	20.1871142	32.06805041	0.00022	0.000333333	4.40592E-06	6.67563E-06	
0.015	0.011666667	25.95486111	20.1871142	32.88121645	0.00012	7.63278E-18	2.40323E-06	1.52861E-19	2.4032E-06
0.01625	0.011666667	28.1177662	20.1871142	34.61399075	0.00025	7.63278E-18	5.00672E-06	1.52861E-19	
0.020833333	0.02	36.04841821	34.60648148	49.97096173	0.000916667	0.001666667	1.8358E-05	3.33782E-05	3.8094E-05
0.012	0.018333333	20.76388889	31.72260802	37.91388851	0.001766667	0.000333333	3.53809E-05	6.67563E-06	
0.012	0.016666667	20.76388889	28.83873457	35.53606187	0	0.000333333	0	6.67563E-06	6.6756E-06
0.017	0.023333333	29.41550926	40.3742284	49.9534834	0.001	0.001333333	2.00269E-05	2.67025E-05	
0.011	0.021666667	19.03356481	37.49035494	42.04525304	0.0012	0.000333333	2.40323E-05	6.67563E-06	2.4942E-05
0.008	0.02	13.84259259	34.60648148	37.27232123	0.0006	0.000333333	1.20161E-05	6.67563E-06	
0.005833333	0.031666667	10.0935571	54.79359568	55.71550971	0.000433333	0.002333333	8.67832E-06	4.67294E-05	4.7528E-05
0.00125	0.018333333	2.162905093	31.72260802	31.79625793	0.000916667	0.002666667	1.8358E-05	5.34051E-05	
0.000833333	0.031666667	1.441936728	54.79359568	54.81256525	8.33333E-05	0.002666667	1.66891E-06	5.34051E-05	5.3431E-05
0.009	0.025	15.57291667	43.25810185	45.97585355	0.001633333	0.001333333	3.27106E-05	2.67025E-05	
0.010833333	0.028333333	18.74517747	49.02584877	52.48728918	0.000666667	0.000666667	7.3432E-06	1.33513E-05	1.5237E-05
0.008333333	0.01	14.41936728	17.30324074	22.52377173	0.0005	0.003666667	1.00134E-05	7.3432E-05	
0.0225	0.021666667	38.93229167	37.49035494	54.04858969	0.002833333	0.002333333	5.67429E-05	4.67294E-05	7.3508E-05
0.01	0.015	17.30324074	25.95486111	31.19386086	0.0025	0.001333333	5.00672E-05	2.67025E-05	

*Revenir au début.*

#### Question 4 :

Calcul de la vitesse de la comète  $v_p$  au perihelie de sa trajectoire :

Périhélie =  $(1-e) * a$  (Avec  $e$  le paramètre elliptique indique dans la partie A et  $a$  le demi-grand axe)

On a :

$$v_p = \sqrt{\frac{G(M+m)*(1+e)}{a(1-e)}}$$

Avec G la constante de gravitation :  $G = 6.674 * 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ ,

$M_{soleil}$  La masse du soleil :  $M_{soleil} = 1.9891 * 10^{30} kg$ ,

$m_{comete}$  La masse de la comète :  $m_{comete} = 1024 * 10^{14} kg$

a le demi grand axe :  $a = 24.8 \text{ u.a} = 3\,710\,027\,000\,000 \text{ m}$ ,

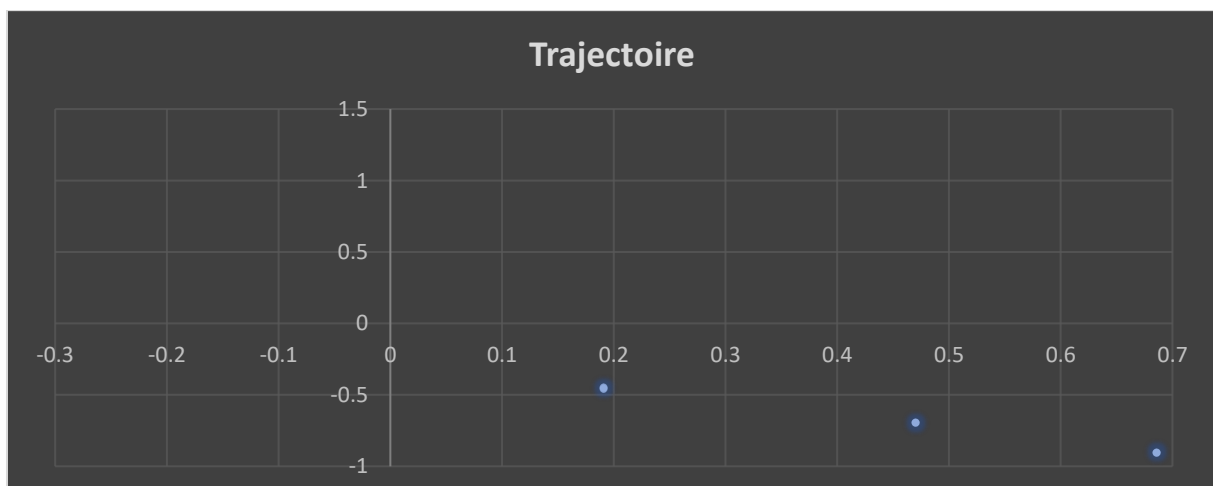
e le paramètre d'excentricité de l'ellipse :  $e = 0.96$ .

On a alors, par application numérique de la formule :

$$v_p = 41\,872.6951 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow 41.9 \text{ km.s}^{-1}$$

Ce résultat semble en accord avec les données existantes sur internet.

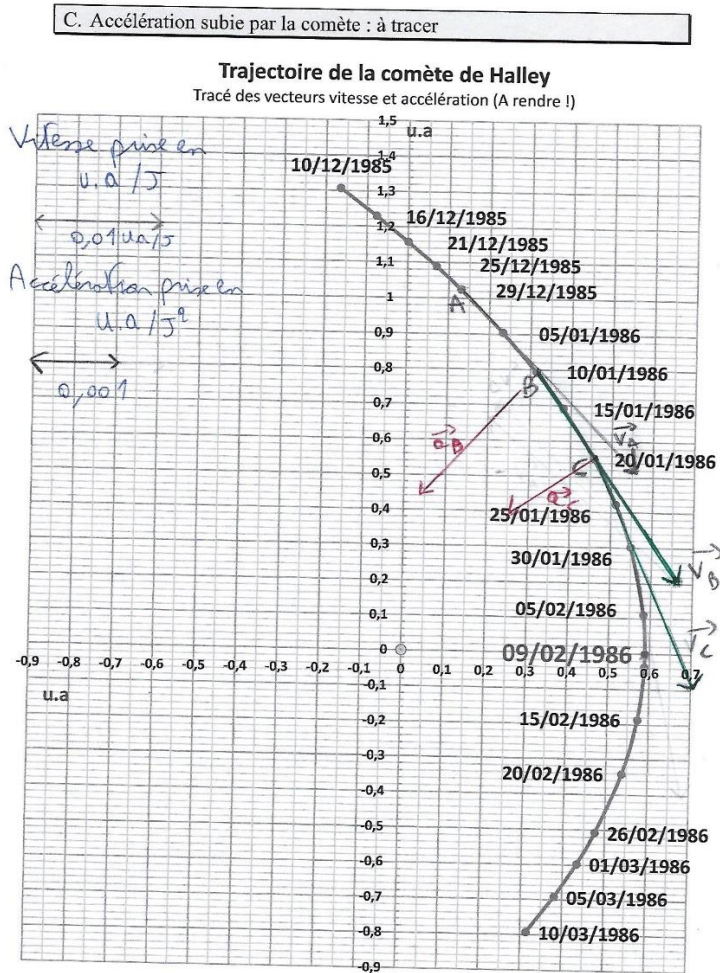
Avec ces tableaux on peut tracer la courbe de l'accélération en fonction de  $1/r^2$ . On vérifie préalablement que les coordonnées ont bien été prise en traçant la trajectoire (y en fonction de x en u.a).



Revenir au début.

### Question 5 :

19



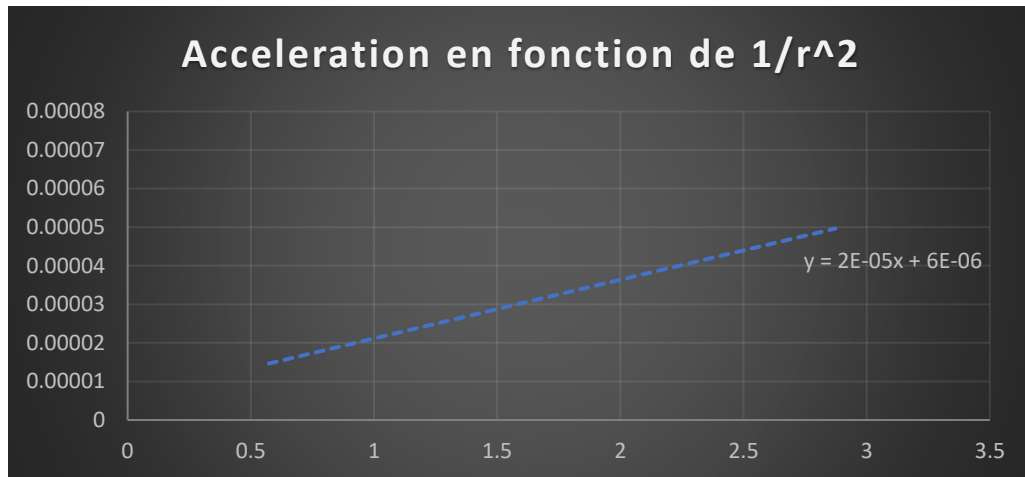
On observe que les tracés des vecteurs vitesse et accélérations sont dirigés vers le soleil. Tous les vecteurs étant dirigés vers le soleil on a des vecteurs centraux.

De plus, l'accélération est colinéaire au vecteur  $\Delta v$  et ainsi la force  $F$  est colinéaire aux vecteur  $\mathbf{a}$ , donc la force  $F$  qui s'exerce sur la comète est une force centrale.

*Revenir au début.*

### Question 6 :

Accélération en fonction de  $1/r^2$  :



On obtient alors graphiquement le coefficient de proportionnalité qui est  $2 \times 10^{-5}$

### Question 7 :

Interprétation des résultats :

On peut observer que notre accélération de la comète d'Halley est inversement proportionnelle a.

Ainsi lorsque la comète s'éloigne du soleil la force gravitationnelle exerce sur la comète est moindre. Cela implique une chute dans l'accélération et donc dans la vitesse.

### Question 8 :

D'après la loi de gravitation de Newton on a :

$$\vec{F}_{grav} = -G * \frac{M_{soleil} * m_{comète}}{r^2} \vec{U}_r$$

$$\text{Or on a aussi : } \sum \vec{F}_{ext} = m_{comète} * \vec{a}$$

Ainsi on peut en déduire la masse du soleil :

$$\vec{F}_{grav} = -G * \frac{M_{soleil} * m_{comète}}{r^2} \vec{U}_r = m_{comète} * \vec{a}$$

$$G * \frac{M_{soleil} * m_{comète}}{r^2} = m_{comète} * a \Leftrightarrow M_{soleil} = \frac{a}{G} * r^2$$

*Revenir au début.*

On prend l'accélération égale à :  $a = 2.05E - 02$  (accélération probablement incorrect), on a  $r^2 = 1,56647E + 22$  et  $G = 6.67 E - 11$

$$\text{Donc } M_{\text{soleil}} = \frac{2.05E-02 * 1,56647E+22}{6.67 E-11} = 4.81E + 30$$

Nous calculons l'écart relatif :

$$Ecart = \frac{|M_{\text{mesurée}} - M_{\text{théorique}}|}{|M_{\text{théorique}}|} * 100 = 142 \%$$

Nous avons un écart relatif assez important dû à l'erreur sur l'accélération cependant nous avons notre masse du soleil qui est bien  $10^{30}$ .

## B. CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE

### Question 1.

Le moment des forces appliquées sur la comète est tel que :

$$\vec{M}_O = r\vec{U}_r \wedge \vec{F}_{\text{grav(soleil} \rightarrow \text{comete)}}$$

Avec M le moment appliqué en O (au foyer : soleil) et F la force agissant sur la comète.

$$\vec{M}_O = r\vec{U}_r \wedge -G * \frac{M_{\text{soleil}} * m_{\text{comète}}}{r^2} \vec{U}_r = \vec{0}$$

Car nous avons le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires  $\vec{U}_r \wedge \vec{U}_r = 0$

### Question 2.

Le moment cinétique est tel que :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}$$

$$\text{Or } \sum \vec{M} = \vec{0}$$

$$\text{Donc : } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \Rightarrow L_O = \text{cste}$$

Donc le moment cinétique de la comète est bien conservé.

*Revenir au début.*

### Question 3.

Démonstration de la relation entre moment cinétique et vitesse aréolaire :

Soit le moment cinétique :  $L_0 = \vec{r} \wedge m \vec{v}$

On exprime en coordonnées polaire  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  :

$$\vec{r} = r * \vec{U}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} * \vec{U}_r + r * \dot{\theta} * \vec{U}_\theta$$

D'où :

$$L_0 = m * r^2 * \dot{\theta} * \vec{U}_z$$

De plus :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge \vec{v}\| = \frac{1}{2} * r^2 * \dot{\theta}$$

On a ainsi :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2*m} * \|\vec{L}_0\|$$

Déterminons à présent la constante des aires C :

On sait que :

$$C = r^2 * \dot{\theta}$$

Et

$$L_0 = m * r^2 * \dot{\theta} * \vec{U}_z$$

$$\Leftrightarrow L_0 = m * C \vec{U}_z$$

$$\text{Donc } C = \left\| \frac{\vec{L}_0}{m} \right\|$$

### Question 4 :

La vitesse  $v_a$  de la comète a l'aphélie est tels que :

$$v_a^2 = \frac{G*(M_{soleil} + m_{comete})}{a} * \frac{1-e}{1+e}$$

Avec G la constante de gravitation :  $G = 6.674 * 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ ,



*Revenir au début.*

$M_{\text{soleil}}$  La masse du soleil :  $M_{\text{soleil}} = 1.9891 * 10^{30} \text{ kg}$ ,

$m_{\text{comete}}$  La masse de la comète :  $m_{\text{comete}} = 1024 * 10^{14} \text{ kg}$

a le demi grand axe :  $a = 24.8 \text{ u.a} = 3\,710\,027\,000\,000 \text{ m}$ ,

e le paramètre d'excentricité de l'ellipse :  $e = 0.96$ .

Donc :  $v_a^2 = 730\,246.8116 \Rightarrow v_a = 854.54 \text{ m.s}^{-1}$

Ce résultat semble en accord avec les données existantes sur internet.

### C. CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE

#### Question 1 :

On sait que :

$$F = -\frac{dE_p}{dr} = G * \frac{M_{\text{soleil}} * m_{\text{comete}}}{r^2}$$

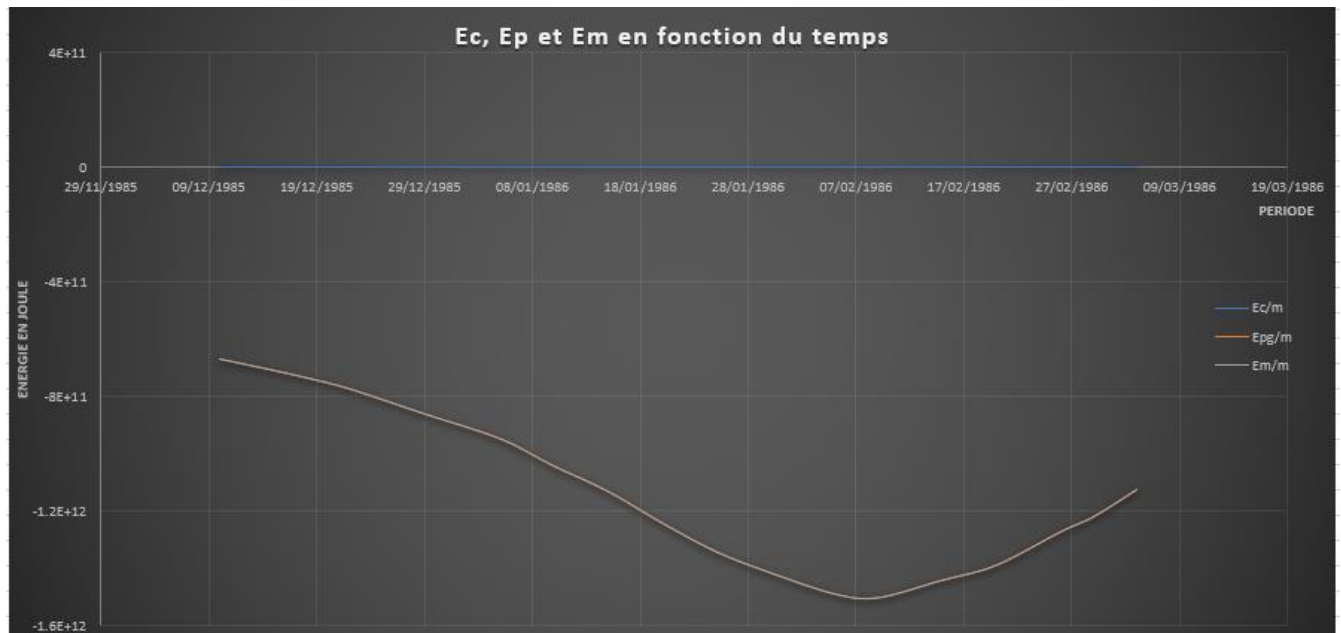
$$\text{Donc } E_{pg} = -G * \frac{M_{\text{soleil}} * m_{\text{comete}}}{r}$$

#### Question 3 :

Ec/m	Ep/m	Em/m
625.7920565	-6.72091E+11	-6.72091E+11
514.1799287	-7.20227E+11	-7.20227E+11
540.5871975	-7.64996E+11	-7.64996E+11
599.064178	-8.12894E+11	-8.12894E+11
1248.548508	-8.63536E+11	-8.63536E+11
718.7314708	-9.50024E+11	-9.50024E+11
631.4058466	-1.04566E+12	-1.04566E+12
1247.675252	-1.13341E+12	-1.13341E+12
883.9016515	-1.24318E+12	-1.24318E+12
694.6129651	-1.34315E+12	-1.34315E+12
1552.109011	-1.41644E+12	-1.41644E+12
505.5010092	-1.49079E+12	-1.49079E+12
1502.208654	-1.50406E+12	-1.50406E+12
1056.889555	-1.44273E+12	-1.44273E+12
1377.457763	-1.39064E+12	-1.39064E+12
253.6601465	-1.27327E+12	-1.27327E+12
1460.625024	-1.22193E+12	-1.22193E+12
486.5284777	-1.12736E+12	-1.12736E+12

*Revenir au début.*

**Question 4 :**



On remarque que l'Énergie cinétique est très faible casi nulle ainsi, l'énergie mécanique est casi égale a l'énergie potentielle au court d'une certaine période indique sur le graphe.

De plus cette énergie est négative.

**Question 5 :**

Le signe de l'énergie totale étant négatif on peut en déduire que la comète à une trajectoire borné et qu'elle est donc dans un état lié. Dans ce cas, la trajectoire est une ellipse dont le centre attracteur occupe l'un des foyers. On retrouve bien la première loi de Kepler.