Corrigé du DS - Ma 211 - 19 Octobre 2019

Questions de cours :

Application : $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

- f est au moins une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
- $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0$ $\iff \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 ; \; x(x^8-1) = 0 ; \; x = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1. \end{cases}$

  $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0$
- Les pts critiques sont $A(0,0)$; $B(+1,1)$ et $C(-1,-1)$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$ (Thm de Schwarz)
- Extrema locaux

Pour $A(0,0)$: $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -4$

$rt - s^2 = -16 < 0$ donc pas d'extremum local.

$A(0,0)$ est un pt selle.

Pour $B(1,1)$ et $C(-1,-1)$: $r = 12$; $t = 12$ et $s = -4$

$rt - s^2 > 0$ donc B et C sont des minimums.

Ex-1 ① $f(x,y,z,t) = (x^2y^4z^7t \; ; \; \cos(2xyzt))$. continue et dérivable sur $\mathbb{R}^4$

$D_f = \mathbb{R}^4$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = (2xy^4z^7t \; ; \; -2yzt\sin(2xyzt))$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = (4x^2y^3z^7t \; ; \; -2xzt\sin(2xyzt))$.

$\frac{\partial f}{\partial z} = (7x^2y^4z^6t \; ; \; -2xyt\sin(2xyzt))$.

$\frac{\partial f}{\partial t} = (x^2y^4z^7 \; ; \; -2xyz\sin(2xyzt))$.

2) $f(x,y,z) = x^3 y^5 (z+3)^{12}$.

$D_f = \mathbb{R}^3$. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^5 (z+3)^{12}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^3 y^4 (z+3)^{12}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 12\, x^3 y^5 (z+3)^{11}.$$

3) $f(x,y,z) = \ln(x^2+2y^2+z^4)$. f est continue et dérivable sur D_f.

$D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+2y^2+z^4} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{x^2+2y^2+z^4} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{4z^3}{x^2+2y^2+z^4}.$$

4) $f(x,y,z,t) = \dfrac{1}{(x+y+z+t)^5}$

$D_f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x+y+z+t \neq 0\}$.

f est continue et dérivable sur D_f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-5}{(x+y+z+t)^6}.$$

5) $f(x,y,z,t) = \left(e^{xy} \sin^2(tx+y) \; ; \; \dfrac{x}{y} \; ; \; 5xyz \right)$.

$D_f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } y \neq 0\}$

$D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.

f est continue et dérivable sur D_f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\left(y \sin^2(tx+y) + 2t \sin(tx+y)\cos(tx+y)\right) e^{xy} \; ; \; \frac{1}{y} \; ; \; 5yz \right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\left(x \sin^2(tx+y) + 2\sin(tx+y)\cos(tx+y)\right) e^{xy} \; ; \; \frac{-x}{y^2} \; ; \; 5xz \right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (0 \; ; \; 0 \; ; \; 5xy).$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(2x\, e^{xy} \sin(tx+y)\cos(tx+y) \; ; \; 0 \; ; \; 0 \right).$$

Exercice 2 : $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{z-y^2}$.

a) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z \neq y^2\}$.

f est au moins de classe C^2 sur D_f.

b) **Dérivées d'ordre 1 :**

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{z-y^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x^2y}{(z-y^2)^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-x^2}{(z-y^2)^2}$.

Dérivées d'ordre 2 :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2}{z-y^2}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{4xy}{(z-y^2)^2}$ car f est $C^2(D_f, \mathbb{R})$ Thm de Schwarz
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{-2x}{(z-y^2)^2}$ car f est $C^2(D_f, \mathbb{R})$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x^2z + 6x^2y^2}{(z-y^2)^3} = \dfrac{2x^2(z+3y^2)}{(z-y^2)^3}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{-4x^2y}{(z-y^2)^3}$. car f est $C^2(D_f, \mathbb{R})$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{2x^2}{(z-y^2)^3}$.

Exercice 3 :

1) $2|xy| \leq x^2+y^2$??

On a ; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $(x \mp y)^2 \geq 0 \iff$

$$x^2+y^2 \mp 2xy \geq 0 \iff$$

$$x^2+y^2 \geq \pm 2xy$$

D'où $\boxed{2|xy| \leq x^2+y^2}$.

2) $f(x,y) = \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$|f(x,y)| \leq 4\sqrt{x^2+y^2}$??

d'après ① ; $\boxed{|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

D'autre part, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^2 \leq x^2+y^2$

alors $\boxed{3x^2 \leq 3(x^2+y^2)}$.

Ce qui donne : $|f(x,y)| = \dfrac{|3x^2+xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (|a+b| \leq |a|+|b|)$

$$|f(x,y)| \leq \frac{3x^2+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

donc $|f(x,y)| \leq \dfrac{3(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{7}{2}\sqrt{x^2+y^2} < 4\sqrt{x^2+y^2}$.

D'où, $|f(x,y)| \leq 4\sqrt{x^2+y^2}$ Pour tout $(x,y) \in A$.

Déduire : Comme $|f(x,y)| \leq 4\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$;

alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Exercice 4 :

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ⓐ f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme produit des fcts continues.

Montrons que f est continue en $(0,0)$ càd $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=0$??

En coordonnées polaires : $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r>0$; $\theta\in[0,2\pi[$

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)-0| = \left|r^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}\right|$$

$$= r^2|\sin\theta\cos\theta.\cos(2\theta)|$$

$$\leq r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

D'où, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

ⓑ f est de classe C^1 ??

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; f est de classe C^1 (produit de fcts de classe C^1).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h-0}=0.$$

Pour $(x,y)\neq(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

En coordonnées polaires : $x=r\cos\theta$; $y=r\sin\theta$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)-0\right| = r|\sin\theta(\cos^4\theta-\sin^4\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta)|$$

$$\leq 6r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad ; \qquad \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t) \qquad\qquad u \longmapsto \varphi(u)$$

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = f(x+\varphi(y)).$$

a) F est le composé de fcts de classe C^2, alors F est C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

b) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial y} \overset{?}{=} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}$

On a $F(x,y) = f(t)$ où $t = x+\varphi(y)$.

- $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial t} \times \dfrac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \times 1 = f'(x+\varphi(y))$
- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(f'(x+\varphi(y))\Big) = f''(x+\varphi(y)).$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial t} \times \dfrac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \times \varphi'(y) = f'(x+\varphi(y)) \times \varphi'(y).$
- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = \varphi'(y)\, f''(x+\varphi(y)) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)$ car F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (thm de schwarz).

Conclusion :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y} = f''(x+\varphi(y))\, f'(x+\varphi(y))\, \varphi'(y) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x} = f''(x+\varphi(y))\, f'(x+\varphi(y))\, \varphi'(y). \end{array}\right\} \text{ sont égales.}$$