I.P.S.A
63, Bvd de Brandebourg
94200 Ivry Sur Seine

Date de l'épreuve :
Mardi 22 janvier 2019

AERO 1 : Cycle Conventionnel

Professeur responsable : PEREZ-RAMOS

Durée de l'épreuve : 2h

Sans : **Notes de cours**

Sans : **Calculatrice**

EXAMEN FINAL DE PHYSIQUE I

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	6	5	5	5	21
Note:					

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous paraît être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, vous le signalez clairement dans votre copie et vous poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le barème est donné à titre indicatif.

Pour les QCM, chaque question comporte une réponse. Lorsque l'étudiant ne répond pas à une question ou si la réponse est fausse, il n'a pas de point de pénalité.

Rédigez directement sur la copie en dessous de chaque exercice.

Inscrivez vos : nom, prénom et classe. Justifiez vos affirmations si nécessaire. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

NOM :

PRENOM :

CLASSE :

1. (6 points) **Composition des mouvements**

Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement sur une tige rigide (D). La tige (D) tourne dans un plan horizontal (xOy) autour de l'axe vertical (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, où θ représente l'angle orienté $(Ox, \overrightarrow{OM})$. Le mouvement du point matériel M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire : $r(t) = r_0(1+\sin(\omega t))$ où r_0 est une constante positive et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$. On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère (Oxyz).

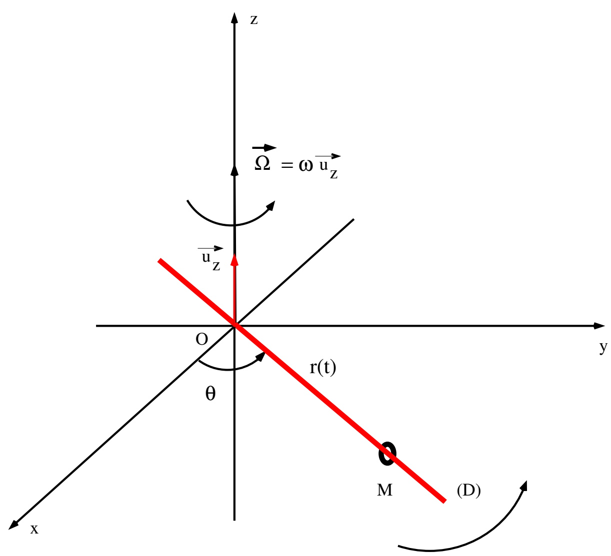

FIGURE 1 – Composition des mouvements

(a) **(0.5)** Placer les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sur la figure.

> **Solution:** Le vecteur $\vec{u}_r$ est porté par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ **(0.25)** selon la tige (D). Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire à la tige dans le sens de rotation **(0.25)**.

(b) **(0.5)** Quel type de mouvement suit l'anneau par rapport au référentiel de la tige ? Déterminer la vitesse relative dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

> **Solution:** L'anneau suit un mouvement rectiligne par rapport à la tige **(0.25)**. La vitesse relative est : $\vec{v}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r = r_0\cos(\omega t)\omega\,\vec{u}_r$ **(0.25)**.

(c) **(0.5)** En déduire l'accélération relative dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

> **Solution:** L'accélération relative est : $\vec{a}_r = \ddot{r}\,\vec{u}_r$ **(0.25)** $= -r_0\sin(\omega t)\omega^2\vec{u}_r$ **(0.25)** car la dérivée temporelle de $\vec{u}_r$ est nulle dans ce référentiel.

(d) **(0.5)** Déterminer la vitesse d'entraînement en donnant sa définition qualitativement.

Solution: La vitesse d'entraînement ou la vitesse du point coïncidant **(0.25)** s'obtient lorsqu'on fixe le point M dans le référentiel relatif. Ainsi, $r = const$ et $\vec{v}_e = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = r_0(1+\sin(\omega t))\omega\vec{u}_\theta$ **(0.25)**.

À partir de la formule donnée dans le cours, on a :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_a(\mathrm{O}') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{M}}.$$

On pose $\vec{v}_a(\mathrm{O}') = \vec{0}$ car le référentiel relatif est en rotation (pas en translation) par rapport au référentiel fixe avec $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$. On a,

$$\vec{v}_e = r\omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = r_0(1+\sin(\omega t))\omega\vec{u}_\theta.$$

(e) **(0.75)** Calculer l'accélération d'entraînement en donannt sa définition qualitativement.

Solution: Par définition, l'accélération d'entraînement ou accélération du point coïncidant vaut : $\vec{a}_e = \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$ **(0.25)**. On pose $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$ **(0.25)** et on obtient :

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -r_0(1+\sin(\omega t))\omega^2\vec{u}_r.\textbf{(0.25)}$$

À partir de la formule donnée dans le cours, on a :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_a(\mathrm{O}') + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{M}} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{M}}\right).$$

De même, $\vec{a}_a(\mathrm{O}') = \vec{0}$, $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e = r\omega^2\vec{u}_z \wedge \left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta\right) = -r_0(1+\sin(\omega t))\omega^2\vec{u}_r$.

(f) **(0.5)** Déterminer l'accélération de Coriolis.

Solution: Par définition,

$$\vec{a}_\mathrm{C} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r\,\textbf{(0.25)} = 2\dot{r}\omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = 2r_0\cos(\omega t)\omega^2\vec{u}_\theta.\textbf{(0.25)}$$

(g) **(0.5)** Donner la loi de composition des vitesses et en déduire la vitesse absolue.

Solution:

$$\vec{v}_a(\mathrm{M}) = \vec{v}_r(\mathrm{M}) + \vec{v}_e(\mathrm{M})\,\textbf{(0.25)} = r_0\cos(\omega t)\omega\vec{u}_r + r_0(1+\sin(\omega t))\omega\vec{u}_\theta.\textbf{(0.25)}$$

(h) **(0.75)** Donner la loi de composition des accélérations et en déduire l'accélération absolue.

Solution:

$\vec{a}_a(\mathrm{M}) = \vec{a}_r(\mathrm{M})+\vec{a}_e(\mathrm{M})+\vec{a}_C(\mathrm{M})$ **(0.5)** $= -r_0(1+2\sin(\omega t))\omega^2\vec{u}_r+2r_0\cos(\omega t)\omega^2\vec{u}_\theta.$ **(0.25)**

(i) **(1.5)** Dans le cas de l'accélération, faire une analogie entre l'expression précédente et la formule d'accélération en coordonnées polaires.

Solution: Formule de l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta,\ \textbf{(0.5)}$$

on remplace,

$$\ddot{r} = -r_0\sin(\omega t)\omega^2,\ \textbf{(0.25)} \quad r\dot{\theta}^2 = r_0(1+\sin(\omega t))\omega^2\ \textbf{(0.25)}$$

et

$$2\dot{r}\dot{\theta} = 2r_0\cos(\omega t)\omega^2\theta\ \textbf{(0.25)}, \quad \ddot{\theta} = 0,\ \textbf{(0.25)}$$

ce qui conduit au résultat de la question précédente. Ainsi, dans cet exercice, on a donné le sens physique de chacun des termes qui interviennent dans la formule d'accélération exprimée en coordonnées polaires.

2. (5 points) **Choc frontal de deux billes**

Deux billes, de masses m_1 et $m_2 = 2m_1$ posées sur un plan horizontal, se déplacent sans frottements sur un même axe Ox. Les mesures algébriques des composantes de leurs vitesses sont v_1 et v_2. Elles entrent en collision et leur choc est parfaitement élastique.

(a) **(0.25)** Faire un schéma du système avant et après le choc en représentant les vecteurs quantités de mouvement : $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_1'$ et $\vec{p}_2'$.

Solution: On choisit l'axe Ox comme seul direction du mouvement avant et après le choc. **(0.25)**

(b) **(0.5)** Donner les expressions des vecteurs quantités de mouvement avant et après le choc.

Solution:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i (\mathbf{0.25}), \qquad \vec{p}_i' = m_i \vec{v}_i' (\mathbf{0.25}), \quad i = 1, 2.$$

(c) **(0.5)** Quelle est la condition physique permettant de justifier l'application de la conservation de la quantité de mouvement dans ce problème.

Solution: Cette condition découle du PFD : $\sum \overrightarrow{\mathrm{F}} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{p}_i = \overrightarrow{const}$.

(d) **(0.25)** Y a-t-il conservation de l'énergie cinétique ? Justifier votre réponse.

Solution: Oui car le choc est parfaitement élastique !

(e) **(2.5)** Déterminer les vitesses v_1' et v_2' après le choc en fonction des données du problème.

Solution: On écrit les équations exprimant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique sous forme d'un système de deux équations et deux inconnues :

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Leftrightarrow m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2, (\mathbf{0.5})$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 . (\mathbf{0.5})$$

L'application de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ **(0.5)** permet alors de réduire le système précédent à un système linéaire qui pourra s'écrire sous la forme équivalente :

$$v_1' + 2v_2' = v_1 + 2v_2, (\mathbf{0.25})$$

$$v_1' - v_2' = v_2 - v_1, (\mathbf{0.25})$$

d'où les solutions

$$v_1' = \frac{1}{3}(4v_2 - v_1), (\mathbf{0.25}) \qquad v_2' = \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1). (\mathbf{0.25})$$

(f) **(0.5)** Montrer à partir des équations obtenues que la vitesse relative $\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ est conservée en module, mais que son sens s'inverse.

> **Solution:** Si on écrit l'équation $v_1' - v_2' = v_2 - v_1$ du système sous la forme $v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2) \Leftrightarrow \vec{w}' = -\vec{w}$, on constate que le sens de l'accélération relative s'inverse après le choc.

(g) **(0.5)** Donner la valeur de la quantité de mouvement du système avant et après le choc dans le référentiel barycentrique.

> **Solution:** Dans le référentiel barycentrique (sans démonstration) $\vec{p}'_{tot} = \vec{p}_{tot} = \vec{0}$.

3. (5 points) **Système mécanique composé de deux masses**

Le système mécanique de la figure est composé de deux points matériels de masses m_1, m_2 avec $m_2 \gg m_1$, une poulie de masse négligeable et un fil inextensible couplant le mouvement des masses. La masse m_1, lâchée à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale du point A, glisse sur un plan incliné formant un angle α avec le plan horizontal. La masse m_2 est suspendue dans le champs de pensanteur d'intensité g comme le montre la figure. On néglige toutes sortes de frottements.

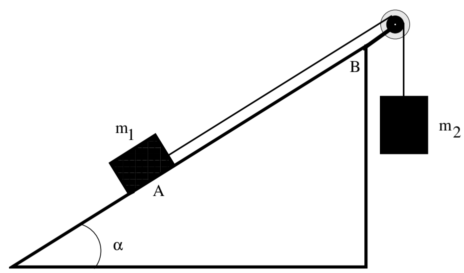

FIGURE 2 – Système mécanique de deux masses.

(a) **(0.25)** Représenter le sens du mouvement du système sur la figure.

> **Solution:** Le sens du mouvement est dirigé de la masse 1 à la masse 2 !

(b) **(0.75)** Représenter toutes les forces qui agissent sur le système.

> **Solution:** Sur la masse 1, on a la réaction (perpenduculaire au plan incliné), le poids et la tension du fil **(0.5)**. Sur la masse 2, la même tension du fil vers le haut et le poids de la masse vers le bas **(0.25)**. Tous ces vecteurs sont à représenter sur la figure donnée dans l'exercice.

(c) **(1.75)** Tracer un référentiel pour chaque masse et décomposer les différentes forces sur le système de coordonnées choisi.

> **Solution:** Le choix le plus judicieux est imposé par la forme du système mécanique, sur la masse 1, on trace l'axe Ox dans la direction du mouvement et l'axe Oy selon la réaction du plan ; le poids forme avec l'axe Oy un angle égale à α **(0.25)**. Sur la masse 2, il suffit de tracer un seul axe (Ox ou Oy) dans le sens du mouvement vers le bas **(0.25)**. Ainsi, sur la masse 1,
>
> $$\vec{R} = R\vec{u}_y(\mathbf{0.25}), \quad \vec{P}_1 = -m_1 g \sin\alpha \vec{u}_x - m_1 g \cos\alpha \vec{u}_y(\mathbf{0.25}), \quad \vec{T} = T\vec{u}_x(\mathbf{0.25}).$$
>
> Sur la masse 2,
>
> $$\vec{P}_2 = m_2 g \vec{u}_x(\mathbf{0.25}), \qquad \vec{T} = -T\vec{u}_x(\mathbf{0.25}).$$

(d) **(0.75)** Donner l'énoncé de la deuxième loi de Newton. L'appliquer à chaque masse.

Solution: Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F} = m\vec{a}$ **(0.25)**. Ici,

$$\vec{R} + \vec{P}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}_1, (\mathbf{0.25}) \qquad \vec{T} + \vec{P}_2 = m_2\vec{a}_2 (\mathbf{0.25}).$$

(e) **(1)** Trouver les accélérations des masses et la tension du fil.

Solution: Il faut poser un système en fonction de la tension et de l'accélération. En fait, $a_1 = a_2$ car les masses se déplacent de la même distance et on obtient :

$$T - m_1 g \sin\alpha = m_1 a_1, (\mathbf{0.25})$$

$$-T + m_2 g = m_2 a_1, (\mathbf{0.25})$$

d'où

$$a_1 = a_2 = \frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g (\mathbf{0.25}), \qquad T = (1 + \sin\alpha)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (\mathbf{0.25}).$$

(f) **(0.5)** Sachant que la distance du point A au point B est égale à $AB = a$, calculer le temps t_{AB} mis par la masse m_1 pour atteindre le point B.

Solution: On utilise l'expression obtenue pour l'accélération a et on exprime le temps :

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2a}{a_1}} = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)a}{(m_2 - m_1 \sin\alpha)g}}.$$

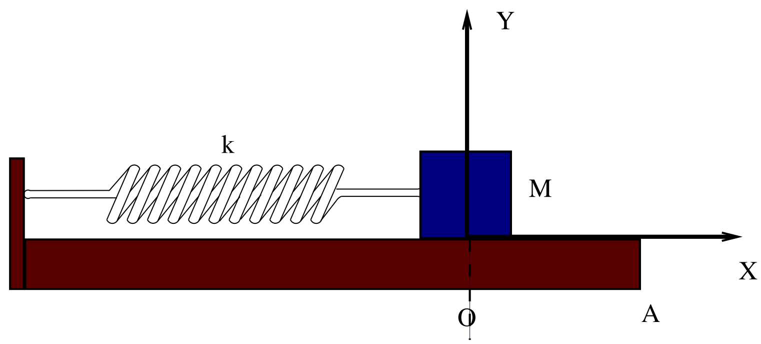

FIGURE 3 – Point matériel attaché à un ressort.

4. (5 points) **Ressorts, travail et énergie**

   Un cube de masse m, assimilable à un point matériel, est relié à un ressort de constante de raideur k et peut glisser sans frottements sur un plan horizontal. À l'équilibre le ressort n'est pas allongé et l'abscisse du cube est nulle.

   (a) **(0.75)** Donner l'expression des vecteurs force appliqués au cube de masse m au point A dans la base cartésienne et les représenter sur la figure 3.

   Solution: On représente la réaction **(0.25)**, le poids **(0.25)** et la force de rappel **(0.25)**, dirigée vers le point O d'équilibre.

   (b) **(0.5)** Donner l'expression générale du travail élémentaire δW d'un vecteur force le long d'un trajet élémentaire dx.

   Solution:
   $$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dx} = F_x dx.$$

   (c) **(0.5)** Donner la valeur du travail du poids lorsque la masse se déplace du point A d'abscisse a au point O d'équilibre.

   Solution: $W_P = 0$ car le poids est perpendiculaire par rapport au sens du mouvement.

   (d) **(0.5)** Donner l'expression du travail de la force de rappel lorsque la masse se déplace du point A d'abscisse a au point O d'équilibre.

   Solution: On utilise l'expression de la question b) avec $F_x = -kx$ **(0.25)**, ainsi
   $$W_{A\to O} = -k\int_a^0 x\,dx = \frac{1}{2}ka^2.\textbf{(0.25)}$$

(e) **(0.75)** On relâche la masse m au point d'abscisse a avec une vitesse initiale v_0, quelle est alors sa vitesse v' lorsqu'elle passe par l'origine.

Solution: On utilise la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv'^2, (\mathbf{0.5})$$

d'où,

$$v' = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}a^2}.(\mathbf{0.25})$$

(f) **(2)** On tient compte de la force de frottement et on considère qu'elle vaut en module $f = \mu mg$. Que devient la vitesse lorsque la masse passe par l'origine ? On l'appelera v'_f. Interpréter le résultat physiquement.

Solution: On utilise le théorème du travail et de l'énergie mécanique : $\mathrm{W}_f = \Delta\mathrm{E}_m$. La force étant constante de A à O, pour calculer le travail de la force de frottement, on peut utiliser la formule (du lycée) :

$$\mathrm{W}_f = \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \mu mga\cos(\pi) = -\mu mga(\mathbf{0.5})$$

ou d'après la réponse de la question b) :

$$\mathrm{W}_f = \mu mg\int_a^0 dx = -\mu mga.$$

On pose ;

$$-\mu mga = \frac{1}{2}mv_f'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}ka^2, (\mathbf{0.5})$$

d'où la vitesse finale :

$$v'_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}a^2 - 2\mu ga} < v'.(\mathbf{0.5})$$

On en conclut que la vitesse diminue car la masse perd une partie de son énergie mécanique initiale à cause des frottements. **(0.5)**