LES ANGLES D'EULER

3 Mouvements essentiels :

- Mouvement de précession
- Mouvement de nutation
- Mouvement de rotation propre

Exercice type : On vous donne une base initiale ainsi que l'axe auquel de tour le mouvement de précession s'effectue.

Puis on vous donne la première base intermédiaire puis la deuxième base intermédiaire.

Finalement, on vous donne la base finale.

Il faut :
-Schématiser chaque rotation en repérant bien :

- Vecteur nodal
- Vecteur ou s'effectue la rotation propre

Puis représenter :

- Vecteur rotation (version compacte) conventionnellement les 3 angles de rotations seront pris : ψ, θ, φ
- Vecteur rotation dans la base liée à S

Nous allons donc effectuer toute ces étapes ici, et, bien évidemment, les détaillés.

Etape 1 : Schémas

Prenons pour exemple une base initiale : $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

une *base intermédiaire :* $R_1(0, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

une *2nd base intermédiaire :* $R_2\ (0, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

une *base finale :* $R_s\ (0, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

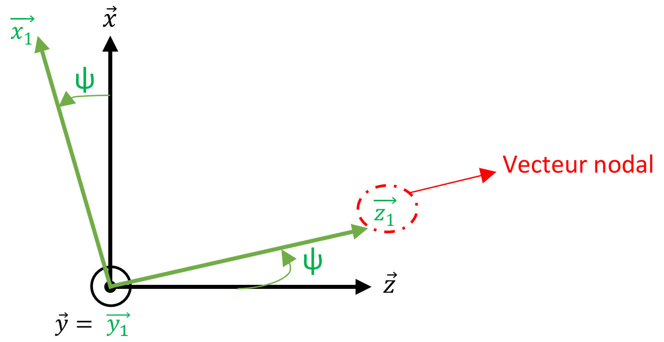
Il est essentiel de comprendre que l'on cherche à chaque étape de représenter le mouvement de rotation d'une base par rapport à une autre.

C’est-à-dire 3 rotations : R_1/R ; R_2/R_1 ; R_S/R_2

Premier schéma : mouvement de précession

- Axe de rotation : (O, y) => ce sera l’axe que l’on ne voit pas
- Ensuite, vous pouvez soit utilisé la méthode des trois doigts ou autre pour représenter l’axe x et z :
- Mouvement de la première base intermédiaire par rapport à la base initiale selon un angle Psi (ψ) (angle de précession).

$$R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow{\text{Angle } \psi} R_1(0, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1} = \vec{y}, \overrightarrow{z_1})$$



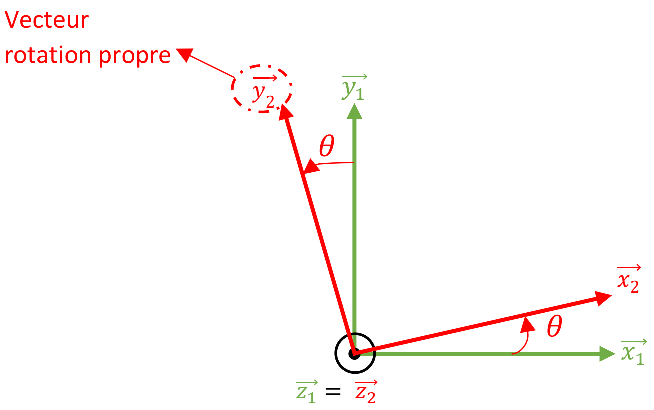
Le vecteur nodal est une notion qui n’est pas à connaitre mais il faut juste savoir que sur le premier schéma correspondant au mouvement de précession il correspond au vecteur de la première base intermédiaire entourée (il faut donc juste savoir le repérer, si vous tracez le schéma de la même façon, quelque soit les axes il sera au même endroit : ici $\overrightarrow{z_1}$

Plus d’infos pour la variable nodal (vecteur nodal, scalaire etc => https://dianafea.com/manuals/d101/Theory/node87.html)

Deuxième schéma : Mouvement de nutation

- Axe de rotation : vecteur nodal => (O, $\overrightarrow{z_1}$) => l'axe qu'on ne voit pas
- Tracés les autres axes de la base $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- Mouvement de rotation de la deuxième base intermédiaire par rapport à la première selon un angle téta (ϴ) (angle de nutation).

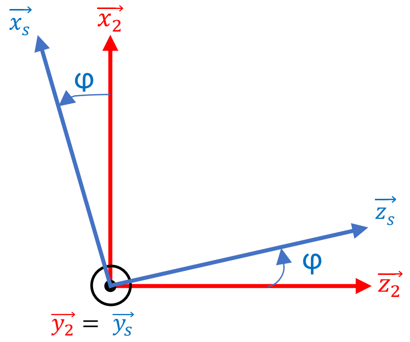
$$R_1\ (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}) \xrightarrow{\text{Angle } \theta} R_2(O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1})$$



Troisième schéma : Mouvement de rotation propre

- Axe de rotation : vecteur de rotation propre=> (O, $\overrightarrow{y_2}$) => l'axe qu'on ne voit pas
- Tracés les autres axes de la base $R_2(O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$
- Mouvement de rotation de la base finale par rapport à la deuxième base intermédiaire selon un angle phi (φ) (angle de rotation propre)

$$R_2\ (O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}\ , \overrightarrow{z_2})\ \text{------------------>}\ R_s(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s} = \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_s})$$



Maintenant que la façon de procéder pour tracer les schémas est acquise (et après avoir essayé par vous-mêmes, je vous invite à lire la suite.

Etape 2 : Calculs

Vitesse angulaire absolue dans la base d'Euler (base finale par rapport à la base initiale (ici R_S/R)

Pour cela on a besoin des vitesses angulaires selon chaque rotation $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ chacun de ses angles multipliés par le vecteur auquel de tour la base tourne, bien entendu, on prendra le vecteur que l'on ne voit pas à chaque fois appartenant à la base tournante.

Soit :

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} = \dot{\psi}\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{z_2} + \dot{\varphi}\overrightarrow{y_s}$$

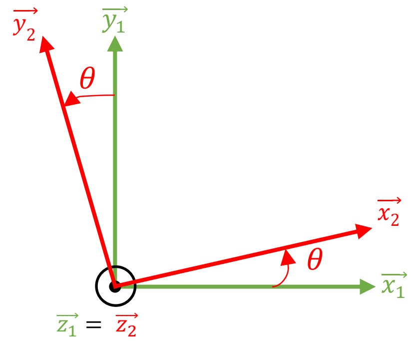
La dernière étape consiste à expliciter la formule dans la base d'Euler seulement en fonction de la base finale $R_s(0, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

Tout d'abord le vecteur $\overrightarrow{y_s}$ est déjà dans sa base.

L'objectif est d'exprimer les vecteurs selon la deuxième base intermédiaire puis la base finale :

- Puisque nous ne pouvons pas exprimer le vecteur $\overrightarrow{y_1}$ directement dans la base finale, nous allons alors prendre un détour en l'exprimant d'abord dans la deuxième base intermédiaire (qui on le rappel tourne autour de la première base intermédiaire)
- Puis grâce à ça nous aurons plus qu'à exprimer les vecteurs de la deuxième base intermédiaire par rapport à la base finale

On reprend le schéma 2 (R_2 par rapport à R_1):



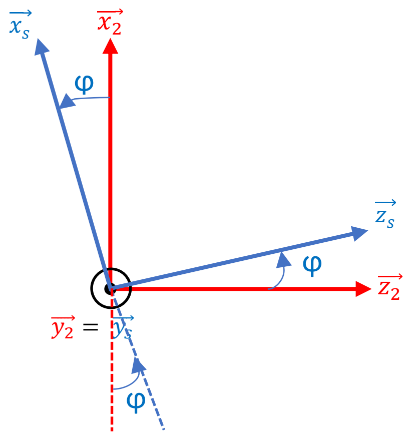
Si vous n'êtes pas familier avec les projections de vecteur (i!coordo bot discord commande)

$$\vec{y_1} = \vec{y_2}.\cos(\theta) + \vec{x_2}.\sin(\theta)$$

On sait que $\vec{y_2} = \vec{y_s}$ (selon dernier schéma),

Il nous reste plus qu'à exprimer $\vec{x_2}$ selon la base R_s et $\vec{z_2}$ selon la base R_s

On reprend le schéma 3 (R_s par rapport à R_2):



Finalement on a par projection :

$\vec{x_2} = \vec{x_s}.\cos(\varphi) + \vec{z_s}.\sin(\varphi)$

$\vec{z_2} = \vec{z_s}.\cos(\varphi) - \vec{x_s}.\sin(\varphi)$

Finalement :

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} = \dot{\psi}\vec{y_1} + \dot{\theta}\vec{z_2} + \dot{\varphi}\vec{y_s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} = \dot{\psi}.(\vec{y_2}.\cos(\theta) + \vec{x_2}.\sin(\theta)) + \dot{\theta}.(\vec{z_s}.\cos(\varphi) - \vec{x_s}.\sin(\varphi)) + \dot{\varphi}\vec{y_s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} = \dot{\psi}.(\vec{y_s}.\cos(\theta) + (\vec{x_s}.\cos(\varphi) + \vec{z_s}.\sin(\varphi)).\sin(\theta)) + \dot{\theta}.(\vec{z_s}.\cos(\varphi) - \vec{x_s}.\sin(\varphi)) + \dot{\varphi}\vec{y_s}$$

Avec ($\vec{y_s} = \vec{y_2}$)

Plus qu'a développé et factorisé pour les termes communs en $\overrightarrow{x_S}$, $\overrightarrow{y_S}$ et $\overrightarrow{z_S}$:

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} = \overrightarrow{y_S}.\cos(\theta).\dot{\psi} + \overrightarrow{x_s}.\cos(\varphi).\sin(\theta).\dot{\psi} + \overrightarrow{z_S}.\sin(\varphi).\sin(\theta).\dot{\psi} + \overrightarrow{z_S}.\cos(\varphi).\dot{\theta} - \overrightarrow{x_S}.\sin(\varphi).\dot{\theta} + \dot{\varphi}\overrightarrow{y_S}$$

Conclusion :

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} = (\cos(\varphi).\sin(\theta).\dot{\psi} - \sin(\varphi).\dot{\theta}).\overrightarrow{x_s} + (\cos(\theta).\dot{\psi} + \dot{\varphi}).\overrightarrow{y_s} + (\sin(\varphi).\sin(\theta).\dot{\psi} + \cos(\varphi).\dot{\theta}).\overrightarrow{z_s}$$