I.P.S.A
63, Bvd de Brandebourg
94200 Ivry Sur Seine

Date de l'épreuve :
Mardi 12 novembre 2019

AERO 2

Professeurs : LEKIC/PEREZ-RAMOS

Durée de l'épreuve : 1h

Sans : **Notes de cours**

Sans : **Calculatrice**

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE DES ONDES 1

Question:	1	2	Total
Points:	10	12	22
Note:			

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous paraît être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, vous le signalez clairement dans votre copie et vous poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le barème est donné à titre indicatif.

Rédigez directement sur la copie en dessous de chaque exercice.

Inscrivez vos : nom, prénom et classe. Justifiez vos affirmations si nécessaire. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

CLASSE :

NOMS et prénoms :

1. (10 points) **Oscillations sur un plan horizontal**

   On dispose de deux ressorts verticaux de raideur identique k_1, d'un ressort horizontal de raideur k_2, tous les trois de même longueur ℓ_0 à vide et d'une masse m ponctuelle reliée par une tige métallique aux trois ressorts comme le montre la figure 1. La distance entre la tige et l'extrémité fixe de chaque ressort vertical k_1 est de $a > \ell_0$ et le ressort k_2 n'est pas déformé initialement. On déplace horizontalement la masse m jusqu'à une abscisse x. On suppose que $x \ll a$ et on néglige toutes sortes de frottements. On appelle α l'angle entre les ressorts k_1 et le ressort k_2.

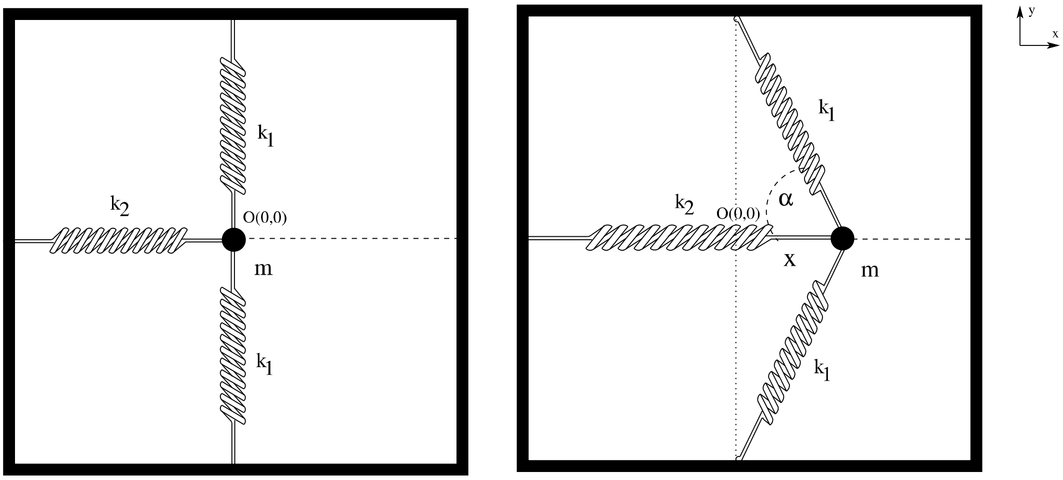

Figure 1: Oscillations transversales d'une masse attachée à deux ressorts.

(a) **(2)** Faire le bilan des forces et les représenter sur la figure 1 droite.

Solution: Voici l'ensemble des forces qui agissent sur la masse :

- la force de tension selon le ressort horizontal $\overrightarrow{F}_1$ **(0.25)**,
- la force de tension selon le ressort au dessus : $\overrightarrow{F}_2$ **(0.25)**,
- la force de tension selon le ressort au dessus : $\overrightarrow{F}_3$ **(0.25)**,
- la réaction du plan horizontal sur la masse et le poids tel que $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} = \vec{0}$ **(0.5)**

Pour les trois forces sur la figure **(0.25+0.25+0.25=0.75)**

(b) **(1.5)** Projeter les forces sur les vecteurs unitaires de la base cartésienne $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ en fonction de l'angle α.

Solution: La force du ressort horizontal est $\overrightarrow{F}_1 = -kx\vec{u}_x$ **(0.5)**. On écrit les forces des ressorts verticaux en fonction de l'angle α sous la forme :

$$\overrightarrow{F}_2 = -k(\ell(x)-\ell_0)\cos(\alpha)\vec{u}_x + k(\ell(x)-\ell_0)\sin(\alpha)\vec{u}_y, (\mathbf{0.25+0.25=0.5})$$

$$\overrightarrow{F}_3 = -k(\ell(x)-\ell_0)\cos(\alpha)\vec{u}_x - k(\ell(x)-\ell_0)\sin(\alpha)\vec{u}_y, (\mathbf{0.25+0.25=0.5})$$

(c) **(2)** Appliquer le principe fondamentale de la dynamique et en déduire l'équation différentielle du mouvement.

Solution:

$$\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 = m\vec{a}, (\mathbf{0.5})$$

où l'on doit tenir compte des réponses données aux questions précédentes (pour α) :

$$-2k_1(\ell(x)-\ell_0)\cos(\alpha) - k_2 x = m\ddot{x}, (\mathbf{0.5}) \qquad \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{\ell(x)}, (\mathbf{0.5})$$

donc on peut réécrire :

$$m\ddot{x} + \left[2k_1\left(1-\frac{\ell_0}{\ell(x)}\right)+k_2\right]x = 0.(\mathbf{0.5})$$

(d) **(1.5)** L'équation différentielle obtenue, est-elle linéaire? Le cas échéant, appliquer l'approximation qui permettrait de la linéariser.

Solution:
L'équation n'est pas linéaire **(0.25)**. Il faut donc linéariser dans le cas présent :
$*$ la linéarité, étant brisée par le terme en $\ell_0/\ell(x)$, on fait un développement de Taylor au voisinage de $x \approx 0$ pour de petites oscillations (approximation de l'oscillateur harmonique) et on pose :

$$\sqrt{a^2+x^2} \approx a, (\mathbf{0.25})$$

d'où,

$$\ddot{x} + \left[\frac{2k_1}{m}\left(1-\frac{\ell_0}{a}\right)+\frac{k_2}{m}\right]x = 0.(\mathbf{1})$$

(e) **(2)** Donner la solution générale de l'équation obtenue ainsi que la période du mouvement que l'on notera T_1.

Solution: On pose :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right) + \frac{k_2}{m}}(\mathbf{0.5})$$

et la solution générale :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi).(\mathbf{1})$$

L'expression de la période est :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k_1\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right) + k_2}}.(\mathbf{0.5})$$

(f) **(0.5)** On enlève le ressort horizontal k_2. Que devient alors la période du mouvement? On la notera T_2.

Solution: On pose :
L'expression de la période est :

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k_1\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)}}.(\mathbf{0.5})$$

(g) **(0.5)** Comparer T_1 et T_2.

Solution: $T_1 < T_2$

2. (12 points) **Oscillations harmoniques couplées**

On considère deux points matériels de même masse m reliés à trois ressorts non déformés initialement de même longueur ℓ_0. La constante de raideur des deux ressorts attachés au support mécanique à gauche et à droite, est égale à k, et la constante de raideur du ressort de couplage est égale à k' comme le montre la figure 2. On néglige les frottements, les dimensions des masses et on fixe la longueur du système selon l'axe Ox à $3\ell_0$.

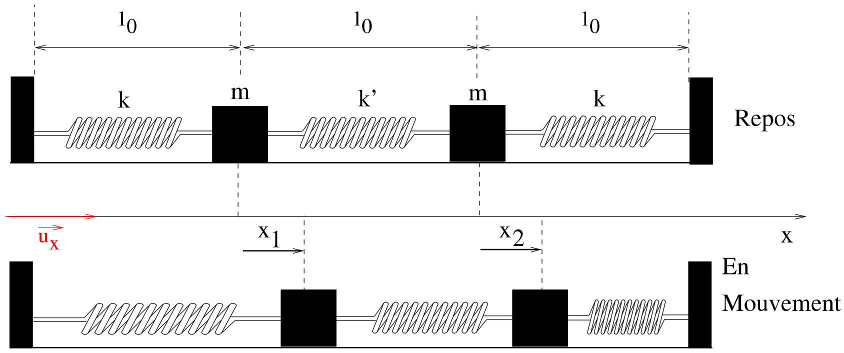

Figure 2: Masses couplées sur un plan horizontal.

On écarte le système de sa position d'équilibre (figure 2 en haut) en déplaçant l'une ou les deux masses et en lâchant l'ensemble. Le système se met à osciller comme le montre la figure 2 en bas. On appellera x_1 et x_2 les abscisses des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre.

(a) **(0.75)** Donner les allongements des ressorts lorsque le système est en mouvement.

Solution:
D'après la figure ci-dessus (en mouvement) :

- Ressort à gauche : allongement = $\ell_0 + x_1$, **(0.25)**
- Ressort de couplage (au milieu) : allongement = $\ell_0 - x_1 + x_2$, **(0.25)**
- Ressort à droite : allongement = $\ell_0 - x_2$. **(0.25)**

(b) **(2)** Faire le bilan des forces, les représenter sur la figure et donner leurs expressions.

Solution:

1. L'action du ressort à gauche sur la masse à gauche est de sens opposé à l'axe

Ox :

$$\overrightarrow{F_1} = -kx_1\vec{u}_x, (\mathbf{0.25})$$

2. Le ressort de couplage est étiré si (i) $x_2 > x_1$, comprimé si (ii) $x_2 < x_1$. Dans le cas (i) :

$$\overrightarrow{F_2} = k'(x_2 - x_1)\vec{u}_x = -k'(x_1 - x_2)\vec{u}_x, (\mathbf{0.5})$$

la force est orienté selon l'axe Ox et dans le cas (ii) :

$$\overrightarrow{F_2} = -k'(x_1 - x_2)\vec{u}_x,$$

la force est de sens opposée. Cependant, quel que soit le cas, il s'agit de la même expression car $(x_1 - x_2)$ est une valeur algébrique. Ces expressions sont en effet valables quelle que soit la configuration choisie pour cette étude.

3. Finalement, le ressort à droite étant comprimé, la force est opposée à l'axe Ox donc :

$$\overrightarrow{F_3} = -kx_2\vec{u}_x.(\mathbf{0.25})$$

Pour les 4 forces sur la figure **(4x0.25=1)**

(c) **(1.25)** Écrire le système d'équations différentielles couplées.

Solution:
On applique le PFD pour la masse à droite sachant que $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} = \vec{0}$ **(0.25)** :

$$\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = m\vec{a}_1 \Rightarrow -kx_1 + k'(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1, (\mathbf{0.25})$$

d'où l'équation du mouvement de la masse à gauche :

$$m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0.(\mathbf{0.25})$$

Pour la masse à droite, le système étant parfaitement symétrique par rapport au centre de la figure, il suffit d'échanger les indices 1 et 2 dans l'équation précédente, d'où

$$m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0.(\mathbf{0.5})$$

Sinon, on peut aussi appliquer le PFD de la même manière en suivant la figure pour arriver au même résultat.

(d) **(0.5)** Le système mécanique donné, est-il symétrique? Le changement de variable $X_1 = x_1 + x_2$ et $X_2 = x_1 - x_2$ est-il adapté ici ?

Solution:
Le système est bien symétrique **(0.25)**. Le changement de variable proposé permet de diagonaliser le système et par conséquent, celui-ci permet de le découpler pour ainsi obtenir les modes propres du système. **(0.25)**

(e) **(2)** Découpler alors le système que l'on réécrira pour les variables X_1 et X_2 et en déduire les modes propres.

Solution: En additionnant d'abord les deux équations obtenues précédemment on obtient :

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0, (\mathbf{0.25}) \qquad X_1 = x_1 + x_2,$$

d'où

$$m\ddot{X}_1 + kX_1 = 0 \Rightarrow \ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 = 0, \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}.(\mathbf{0.25})$$

En soustrayant les deux équation on a :

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (k + 2k')(x_1 - x_2) = 0, (\mathbf{0.25}) \qquad X_2 = x_1 - x_2,$$

d'où

$$m\ddot{X}_2 + (k + 2k')X_2 = 0 \Rightarrow \ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}.(\mathbf{0.25})$$

Les modes propres sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, (\mathbf{0.5}) \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}.(\mathbf{0.5})$$

avec $\omega_2 > \omega_1$.

(f) **(1.5)** Donner la solution générale du système original : $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Solution:
On donne la solution général du système découplé pour les variables X_1 et X_2 :

$$X_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), (\mathbf{0.25}) \qquad X_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)(\mathbf{0.25})$$

et on doit inverser le système, soit :

$$x_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2), (\mathbf{0.25}) \qquad x_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2).(\mathbf{0.25})$$

Par conséquent,

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), (\mathbf{0.25})$$

$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).(\mathbf{0.25})$$

(g) **(1.5)** On donne les conditions initiales suivantes : pour $t = 0$, $x_1 = 0$, $v_1 = 0$, $x_2 = a$, $v_2 = 0$. Quelle est alors la solution du système? En déduire la période des battements.

Solution:
À partir des conditions initiales, on doit dériver x_1 et x_2 par rapport au temps pour ainsi obtenir le système **(0.25)**:

$$0 = A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2), \quad (1)$$
$$0 = -A_1\omega_1 \sin(\varphi_1) - A_2\omega_2 \sin(\varphi_2), \quad (2)$$
$$a = A_1 \cos(\varphi_1) - A_2 \cos(\varphi_2), \quad (3)$$
$$0 = -A_1\omega_1 \sin(\varphi_1) + A_2\omega_2 \sin(\varphi_2), \quad (4)$$

d'où

$$A_1 = A_2 = \frac{a}{2}(\mathbf{0.25})$$

et

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0(\mathbf{0.25})$$

On obtient ainsi la solution du système associée aux conditions initiales :

$$x_1(t) = \frac{a}{2}\left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right] = a \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), (\mathbf{0.25}) \quad (5)$$
$$x_2(t) = \frac{a}{2}\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] = a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right).(\mathbf{0.25}) \quad (6)$$

La période de battements **(0.25)** :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}.$$

(h) **(0.5)** Donner l'allure de la loi du mouvement pour la masse à gauche.

Solution: Il suffit de donner l'allure comme le montre la figure, quel que soit : x_1 ou x_2.

(i) (**Bonus sur 2 points**) On applique une force externe sinusoïdale sur la masse à gauche qui s'écrit sous la forme : $\vec{F} = F_0 \cos(\Omega t)\vec{u}_x$. (i) Pour quelles valeurs de Ω la réponse du sytème est-elle maximale? et (ii) expliquer le phénomène d'anti-résonance.

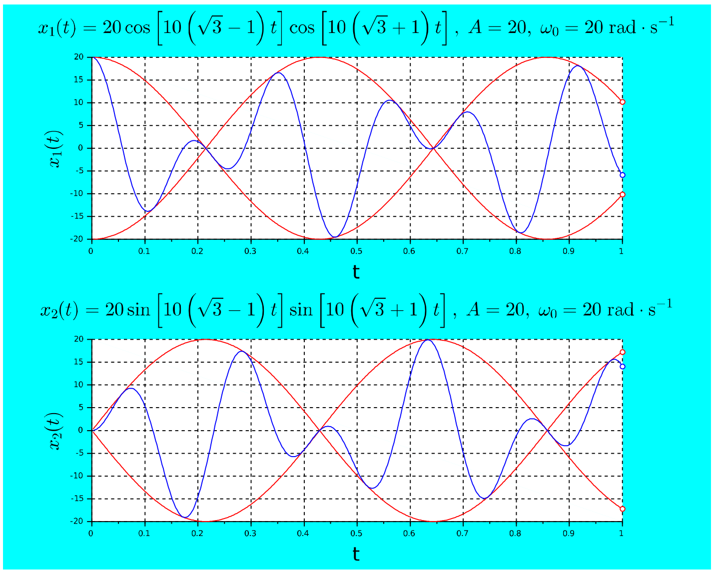

Figure 3: Battements dans le cas.

Solution: Pour que le système entre en résonance, il suffirait que $\Omega = \omega_1$ ou $\Omega = \omega_2$. À l'anti-résonance, la réponse du système est minimale, ce le contraire de qui se passe à la résonance.

Rappel mathématique :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{b-a}{2}\right),$$
$$\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right).$$