Compte rendu du Mini-projet Ressort

Fauquembergue Vincent
Jeannot Lucas
1PE
07/10/2020

1.1. La loi de Hooke

Hooke nous énonce “telle extension, telle force”, soit que l’allongement est proportionnel à la force appliquée. Afin de vérifier cette loi de Hooke, nous procédons à une mise en pratique à l’aide d’un dispositif composé d’un ressort. Cette expérience nous permettra de déduire une constante de raideur ainsi que l’expression de la force de rappel du ressort.

1.2. Dispositif expérimental et exploitation des données

Le dispositif consiste à placer une masse au bout d’un ressort suspendu verticalement et dont l’extrémité supérieure est attachée à une potence.

Donnons dans un premier temps le bilan des forces.
On constate que dans ce montage, seules deux forces d’applique sur la masse M ; Le Poids et la Force de Rappel.
On remarque que le solide est à l’équilibre au point M. Cela signifie que les forces se compensent en ce point.
On a donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

On peut donc déduire de ce bilan des forces que

$$\vec{P} = -\overrightarrow{F_{rappel}}$$

On rédige donc le tableau suivant :

Résultats expérimentaux								
Masse (kg)	10^-3	0,0	50	100	150	200	250	300
Allongement x (m)	10^-2	0	1,6	2,9	4,5	6,0	7,4	9,1
Incertitude absolue δm (kg)	10^-2	0,0	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300
Incertitude relative $\delta m/m$ (%)	%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%
Force de traction F = mg (N)	10^-3	0,0	4,9E+02	981	1,47E+03	1,96E+03	2,45E+03	2,94E+03
Incertitude absolue δF (N)	10^-3	0,0	4,9	9,81	14,7	19,6	24,5	29,4

Incertitude relative $\delta F/F$ (%)	%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%
Incertitude absolue δx (m)	10^-2	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
Incertitude relative δx/x (%)	%		0,063%	0,034%	0,022%	0,017%	0,014%	0,011%
Force de rappel (-F)(N)	10^-3	0	-4,9E+02	-981	-1,47E+03	-1,96E+03	-2,45E+03	-2,94E+03

Pour les calculs d'incertitude, on connait l'incertitude relative de la masse qui est de 1% ainsi que l'incertitude absolue de l'allongement qui est de 1mm. On a donc :

$\frac{\delta m}{m} = 1$ et $\delta x = 0.001$

On déduit de cela les incertitudes absolues et relatives de la masse et de l'allongement.

Considérons maintenant l'incertitude relative et absolue de la Force de traction (qui est le poids)

F = mg

On a donc

$$F = mg \equiv \ln(F) = \ln(m) + \ln(g) \equiv dln(F) = dln(m) + dln(g) \equiv \frac{dF}{F} = \frac{dm}{m} + \frac{dg}{g}$$

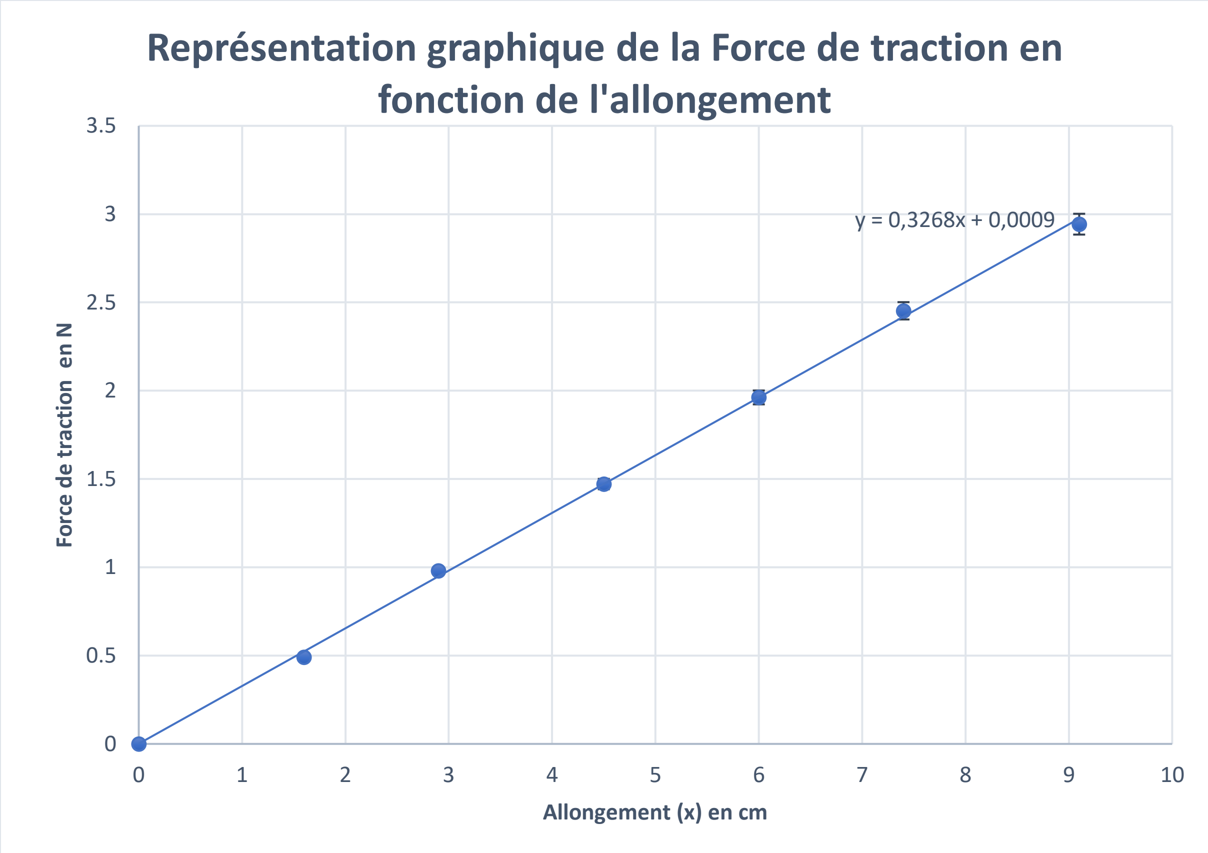
Or dg = 0 donc :

$$\frac{dF}{F} = \frac{dm}{m} = 0.01$$

Donc :

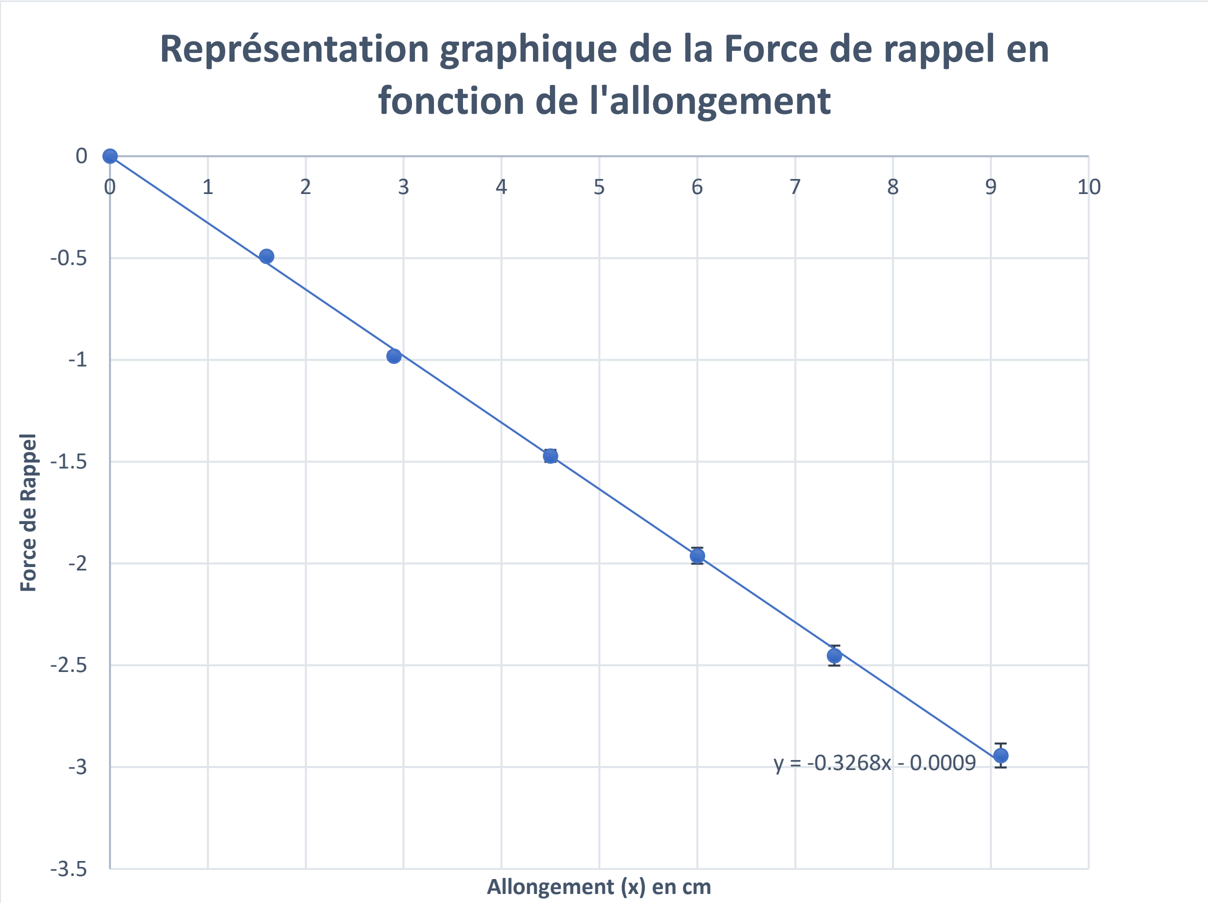
$$\delta F = 0.01 * F$$

On représente alors un graphique des données obtenues.



On peut constater une relation de proportionnalité entre la force de traction et l'allongement (x) car l'ensemble des points sont alignés avec l'origine du repère. On obtient ainsi la courbe de tendance qui nous dit que $F = 0.3268x$

De part cette relation, on peut en déduire que k = 0.3268
[F] = MLT^(-2) et [x] = L donc [k] = MT^(-2)
La constante de raideur k peut s'exprimer en N/m ce qui signifie que c'est une force par des mètre.
Ce que cette constante nous montre c'est que plus l'allongement est important, plus la force de traction est importante.



On peut donc exprimer la force de rappel par $\overrightarrow{F_{traction}} = -\overrightarrow{F_{rappel}}$
On a donc : $F_{rappel} = -0.3268 * x$
On peut donc dire que cette force est égale à -kx.
On peut donc conclure que la force de rappel grandit dans un sens opposé par rapport a la force de traction lorsque l'allongement grandit.

2. Aspects énergétiques

Nous nous intéressons maintenant aux notions théoriques de travail d'une force, de force conservative et d'énergie potentielle élastique à travers l'étude d'un système masse-ressort, pour lequel nous allons vérifier expérimentalement la conservation de l'énergie mécanique.

2.1. Dispositif expérimentale

Le dispositif se résume à un solide S de masse *m* = 400 g accroché à un ressort horizontal de coefficient de raideur *k* = 25 N/m et posé sur un banc à coussin d'air horizontale.
Une règle graduée est utilisée comme repère en abscisses. Lorsque le ressort est au repos, l'abscisse du solide est *x* = 0 et est notée M_0.

2.2. Etude théorique

Au repos

Il y a équilibre du solide au point M_0
On réalise un bilan des forces :

- Poids $\vec{P}$
- Réaction normale du support $\overrightarrow{R_n}$

On applique le principe fondamentale de la dynamique pour un système immobile à notre système {masse-ressort} :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ soit, $\vec{P} + \overrightarrow{R_n} = \vec{0}$

En traction

On réalise un bilan des forces :

- Poids $\vec{P}$
- Réaction normale du support $\overrightarrow{R_n}$
- Force de traction $\vec{f}$
- Force de rappel $\overrightarrow{f_R}$

On applique le principe fondamentale de la dynamique pour un système immobile à notre système {masse-ressort} :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ soit, $\vec{P} + \overrightarrow{R_n} + \vec{f} + \overrightarrow{f_R} = \vec{0}$ c'est-à-dire, $\vec{f} + \overrightarrow{f_R} = \vec{0}$ car $\vec{P} + \overrightarrow{R_n} = \vec{0}$

On a donc, $\vec{f} = -\overrightarrow{f_R}$ avec $\overrightarrow{f_R} = -\mathrm{kx}\overrightarrow{u_x}$

Soit, $\boxed{\vec{f} = \mathrm{kx}\overrightarrow{u_x}}$

En compression

On réalise un bilan des forces :

- Poids $\vec{P}$
- Réaction normale du support $\overrightarrow{R_n}$
- Force de compression $\overrightarrow{f'}$
- Force de rappel $\overrightarrow{f_R}$

On applique le principe fondamentale de la dynamique pour un système immobile à notre système {masse-ressort} :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ soit, $\vec{P} + \overrightarrow{R_n} + \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{f_R} = \vec{0}$ c'est-à-dire, $\overrightarrow{f'} + \overrightarrow{f_R} = \vec{0}$ car $\vec{P} + \overrightarrow{R_n} = \vec{0}$

On a donc, $\overrightarrow{f'} = -\overrightarrow{f_R}$ avec $\overrightarrow{f_R} = -\mathrm{kx}\overrightarrow{u_x}$

Soit, $\boxed{\overrightarrow{f'} = \mathrm{kx}\overrightarrow{u_x}}$

Travail de la force $\vec{f}$

Pour une force constante, son travail est : $W_{AB} = \overrightarrow{AB}.\vec{f}$

Or, ici la force $\vec{f}$ n'est pas constante donc on ne peut pas calculer son travail de cette manière.

Lorsque $\vec{f}$ n'est pas constante son travail se calcule grâce à la relation suivante :

$W_{AB} = \int_A^B \delta W$ avec δW le travail élémentaire de la force $\vec{f}$ dont l'expression est $\delta W = \vec{f}.d\overrightarrow{AB}$

Ici, on a :

$\delta W = \vec{f}.d\overrightarrow{OM} = \vec{f}.\delta x\,.\overrightarrow{u_x} = kx\,.\overrightarrow{u_x}.\delta x\,.\overrightarrow{u_x}$

Soit, $\boxed{\delta W = kx\delta x}$

On applique le résultat obtenue à la relation du travail :

$W_{M_0M}(\vec{f}) = \int_{M_0}^{M} \delta W = \int_{M_0}^{M} kx\delta x = k\int_{M_0}^{M} x\delta x = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{M_0}^{M}$

Soit, $\boxed{W_{M_0M}(\vec{f}) = \frac{1}{2}k(M^2 - {M_0}^2)}$

Travail de la force $\overrightarrow{f_R}$

La force n'est pas constante.
Donc,

$W_{M_0M}(\overrightarrow{f_R}) = \int_{M_0}^{M} \delta W = \int_{M_0}^{M} \overrightarrow{f_R}.\delta x = \int_{M_0}^{M} - kx.\overrightarrow{u_x}.\delta x.\overrightarrow{u_x} = -k\int_{M_0}^{M} x\delta x = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{M_0}^{M}$

Soit, $\boxed{W_{M_0M}(\overrightarrow{f_R}) = -\frac{1}{2}k(M^2 - {M_0}^2)}$

Somme des travaux

Si on réalise la somme des travaux, on obtient :

$$\sum W = W_{M_0M}(\overrightarrow{f_R}) + W_{M_0M}(\vec{f}) = -\frac{1}{2}k(M^2 - {M_0}^2) + \frac{1}{2}k(M^2 - {M_0}^2) = 0$$

Or, d'après le théorème de l'énergie cinétique, on a que $\sum W = \Delta E_c$.
On a donc, $\Delta E_c = 0$
Ainsi, la variation de l'énergie cinétique du système {masse-ressort} est nulle.

Force conservative et énergie potentielle

On a,
$W_{M_0M}(\overrightarrow{f_R}) = -\frac{1}{2}k(M^2 - {M_0}^2)$
Ici, la force ne dépend pas du chemin suivi mais des points de départ et d'arrivée.
Ainsi, la force de rappel est une force conservative.

On sait que dans le cas d'une énergie potentielle :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} E_p = - \vec{\nabla} E_p$$

Ici, on a,
$\overrightarrow{f_R} = -\vec{\nabla} E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$ soit $\overrightarrow{f_R}\,\partial x = -\partial E_p\overrightarrow{u_x}$ c'est-à-dire $-kx\overrightarrow{u_x}\partial x = -\partial E_p\overrightarrow{u_x}$
Soit, $\partial E_p = kx\partial x$
On a donc :

$$E_p = \int_0^x kx\partial x = k\int_0^x x\partial x = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

Soit, $\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$

On sait que pour $\overrightarrow{f_R}$, $\delta W = -kx\delta x$
Soit, $\delta W = -\frac{1}{2}k2x\delta x = -\frac{1}{2}k\,d(x^2) = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -dE_p$
Ainsi, $\boxed{\delta W = -dE_p}$
On a donc que le travail élémentaire de la force de rappel du ressort est égal à la diminution de son énergie potentielle.

Si sous l'action d'une force extérieure f, le solide S est déplacé au point M d'abscisse $x = a$ de sorte que le ressort soit en compression, son énergie potentielle est : $E_p = \frac{1}{2}ka^2$ avec $a < 0$

L'énergie est potentielle étant positive, on a que le système {masse-ressort} emmagasine de l'énergie qui sera libérée et ramènera la masse à sa position initiale lorsque la force cessera d'agir.

Tableau des énergies potentielles les plus couramment utilisées ainsi que des forces en dérivant :

Forces dérivant d'un potentiel	Energies potentielles
Force gravitationnelle : $\vec{F}_{A/B} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{A\to B}$	Energie potentielle gravitationnelle : $E_{pg} = -G\frac{m_A m_B}{r}$
Force de pesanteur : $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$	Energie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgz$
Force de Coulomb : $\vec{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\vec{u}_{A\to B}$	Energie potentielle électrostatique : $E_{pelec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r}$
Force de rappel d'un ressort : $\vec{F} = kx\overrightarrow{u_x}$	Energie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$

Force gravitationnelle

$\vec{F}_{A/B} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{A\to B}$

En coordonnées cylindriques, on a :

$\vec{F}_{A/B} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_r$

Or, $\vec{F}_{A/B} = -\vec{\nabla}E_{pg} = \frac{\partial E_{pg}}{\partial r}\overrightarrow{u_r}$ donc on a, $-G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{\partial E_{pg}}{\partial r}\overrightarrow{u_r}$ soit $\partial E_{pg} = G m_A m_B \frac{\partial r}{r^2}$

C'est-à-dire, $E_{pg} = G m_A m_B \int_0^r \frac{\partial r}{r^2} = G m_A m_B \left[\frac{\partial r}{r^2}\right]_0^r$

Ainsi, $\boxed{E_{pg} = -G\frac{m_A m_B}{r}}$

Force de pesanteur

$\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$

Or, $\vec{P} = -\vec{\nabla}E_{pp} = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$ donc on a, $-mg\overrightarrow{u_z} = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$ soit, $\partial E_{pp} = mg\partial z$

C'est-à-dire, $E_{pp} = mg\int_0^z 1\partial z = mg[z]_0^z$

Ainsi, $\boxed{E_{pp} = mgz}$

Force de Coulomb

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\vec{u}_{A\to B}$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\vec{u}_r$$

Or, $\vec{F}_{A/B} = -\vec{\nabla}E_{pelec} = \frac{\partial E_{pelec}}{\partial r}\overrightarrow{u_r}$ donc on a, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{\partial E_{pelec}}{\partial r}\overrightarrow{u_r}$ soit $\partial E_{pelec} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial r}{r^2}$

C'est-à-dire, $E_{pelec} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\int_0^r \frac{\partial r}{r^2} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\partial r}{r^2}\right]_0^r$

Ainsi, $\boxed{E_{pelec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r}}$

2.3. Conservation de l'énergie mécanique

Résultats expérimentaux																	
Temps t (s)		0,0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
Position x (m)	10^-1	7,4	6,9	5,3	2,9	-0,1	-2,9	-5,4	-6,9	-7,5	-6,8	-5,1	-2,7	0,2	3,1	5,5	7
Incertitude absolue δx (m)	10^-1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Vitesse v (m/s)	10^-1	0	-21	-40	-54	-58	-53	-40	-21	1,0	24	41	53	58	53	39	
Incertitude absolue δv (m/s)	10^-1		1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
Energie E_c (J)		0	0,88	3,2	5,8	6,7	5,6	3,2	0,88	0,00	1,2	3,4	5,6	6,7	5,6	3,0	
Incertitude absolue δE_c (J)			0,08	0,16	0,22	0,23	0,21	0,16	0,08	0,00	0,10	0,16	0,21	0,23	0,21	0,16	
Energie $E_{p,el}$ (J)		6,8	6,0	3,5	1,1	0,0	1,1	3,6	6,0	7,0	5,8	3,3	0,91	0,0	1,2	3,8	6,1
Incertitude absolue $\delta E_{p,el}$ (J)		0,19	0,17	0,13	0,07	0,00	0,07	0,14	0,17	0,19	0,17	0,13	0,07	0,01	0,08	0,14	0,18
Energie E_m (J)		6,8	6,8	6,7	6,9	6,7	6,7	6,8	6,8	7,0	6,9	6,6	6,5	6,7	6,8	6,8	

Calcul de la vitesse

Calcul de la vitesse à l'instant t_k : $\boxed{v_k = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}}$

Calcul de l'incertitude sur la vitesse

A l'instant t_k : $v_k = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}$

On y applique la fonction logarithme, donc on a :

$ln(v_k) = ln(x_{k+1} - x_{k-1}) - ln(t_{k+1} - t_{k-1})$

On différencie l'expression obtenue :

$\frac{dv_k}{v_k} = \frac{d(x_{k+1} - x_{k-1})}{x_{k+1} - x_{k-1}} - \frac{d(t_{k+1} - t_{k-1})}{t_{k+1} - t_{k-1}} = \frac{dx}{x_{k+1} - x_{k-1}} - \frac{dt}{t_{k+1} - t_{k-1}} = \frac{dx}{x_{k+1} - x_{k-1}}$ car on néglige l'incertitude sur le temps.

On passe aux incertitudes absolues :

$\frac{\delta v_k}{v_k} = \frac{\delta x}{x_{k+1} - x_{k-1}}$

Ainsi, on a $\boxed{\delta v_k = v_k \frac{\delta x}{x_{k+1} - x_{k-1}}}$

<u>Calcul de l'énergie cinétique</u>

Calcul de l'énergie cinétique de la masse à l'instant t_k : $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m {v_k}^2}$

<u>Calcul de l'incertitude sur l'énergie cinétique</u>

A l'instant t_k : $E_c = \frac{1}{2} m {v_k}^2$

On y applique la fonction logarithme, donc on a :

$ln(E_c) = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln(m) + 2ln(v_k)$

On différencie l'expression obtenue :

$\frac{dE_c}{E_c} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dv_k}{v_k} = 2\frac{dv_k}{v_k}$ car on néglige l'incertitude sur la masse

On passe aux incertitudes absolues :

$\frac{\delta E_c}{E_c} = 2\frac{\delta v_k}{v_k}$

Ainsi, on a $\boxed{\delta E_c = 2E_c \frac{\delta v_k}{v_k}}$

<u>Calcul de l'énergie potentielle élastique</u>

On calcule l'énergie potentielle élastique de la masse à l'instant t_k : $\boxed{E_{p,el} = \frac{1}{2} k {x_k}^2}$

<u>Calcul de l'incertitude sur l'énergie potentielle élastique</u>

A l'instant t_k : $E_{p,el} = \frac{1}{2} k {x_k}^2$

On y applique la fonction logarithme, donc on a :

$ln(E_{p,el}) = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln(k) + 2ln(x_k)$

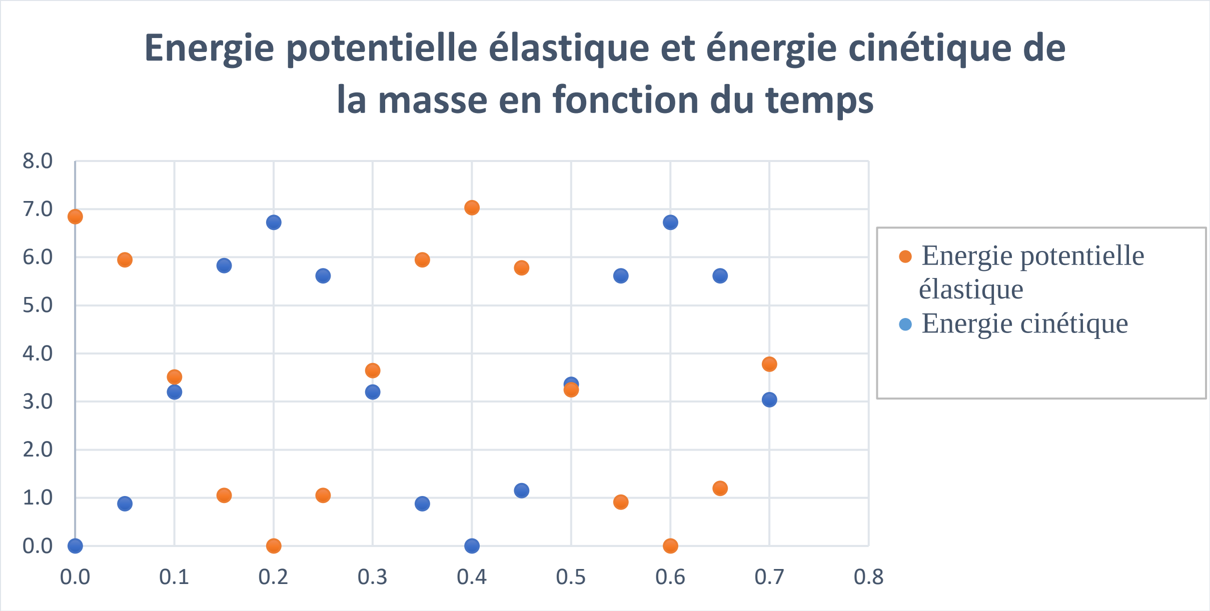
On différencie l'expression obtenue :

$\frac{dE_{p,el}}{E_{p,el}} = \frac{dk}{k} + 2\frac{dx_k}{x_k} = 2\frac{dx_k}{x_k}$

On passe aux incertitudes absolues :

$\frac{\delta E_{p,el}}{E_{p,el}} = 2\frac{\delta x_k}{x_k}$

Ainsi, on a $\boxed{\delta E_{p,el} = 2E_{p,el} \frac{\delta x_k}{x_k}}$



L'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique se compensent : lorsqu'une atteint sa valeur maximum l'autre est nulle.

<u>Calcul de l'énergie mécanique</u>

$E_m = E_c + E_{p,el}$
On observe que l'énergie mécanique est approximativement constante au cours du temps.
On peut donc conclure qu'il y a conservation de l'énergie mécanique au cours du temps.

3. Conclusion

On peut en conclure que :

- Plus l'allongement d'un ressort est grand plus la force de rappel de ce ressort sera grande proportionnellement à un coefficient k.
- Il y a conservation de l'énergie mécanique dans un système faisant appel à un ressort .