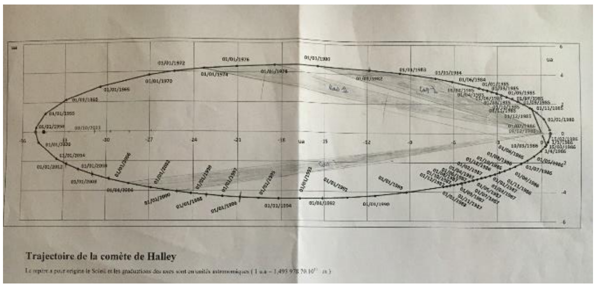
# Mini projet – La comète de Halley

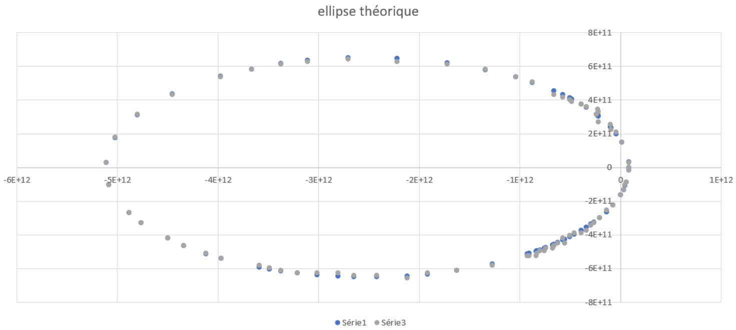
Ce mini projet a pour but d'étudier les caractéristiques mécaniques de la trajectoire de la comète de Halley à travers l'exploitation de données. L'étude sera dans un premier temps accès sur un aspect cinématique. On étudie en premier lieu la trajectoire en elle-même. Cela nous permet de voir les lois de Kepler. L'étude est ensuite axée sur le côté dynamique de l'ellipse. Ainsi nous verront la loi de gravitation universelle de Newton à travers la force qui s'applique entre deux masses.  On vérifiera également nos résultats à travers une étude énergétique.

Pour cela, nous disposons d'un fascicule regroupant des données sur la comète, l'histoire de la mécanique céleste et les planètes du système solaire, ainsi que d'une feuille format A3 retraçant le parcours de la comète au cours des 76 dernières années.

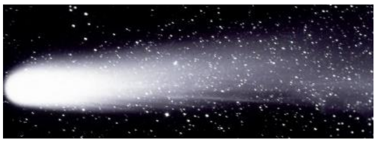
## Sommaire :

- Point historique
  - La comète de Halley
  - Les scientifiques à l'origine des théories
- Les lois de Kepler
  - Loi des orbites
  - Loi des aires
  - Loi des périodes
- Loi de la Gravitation Universelle
  - Vecteurs vitesse et accélération
  - Force de gravitation
  - Etude énergétique
- Conclusion




# Point Historique



## La comète de Halley

La comète de Halley (1P/Halley de sa désignation) est la plus connue des comètes. D'après les plus anciennes recherches, c'est en Chine que la première mention de son observation est relevée, en 611 avant J-C. D'autres observations seront relevées pendant l'Antiquité et le Moyen-Âge, à travers les périodes. Bien entendu sans savoir qu'il s'agissait d'un seul et unique objet. Au cours du XVIIIème siècle, l'astronome et ingénieur Edmond Halley va imaginer que les observations de 1531, 1607 et 1682 n'étaient qu'une seule comète. En s'appuyant sur la périodicité qu'il fixera à 76 ans, il va prévoir son retour pour l'an 1758. Elle repassera l'année suivante, en 1759, et sera alors nommée la comète de Halley. A son époque, Edmond Halley était un scientifique pluridisciplinaire et avait accès aux théories sur le référentiel héliocentrique, les lois des objets en orbite et même les lois de la gravitation. C'est grâce à toutes ces lois que Halley a pu déterminer le retour de la comète. Ces théories sur lesquelles il s'est appuyé ont été découvertes au fil des siècles par différents scientifiques.

## - Les scientifiques à l'origine des théories

Cette section du point historique a pour objectif de retracer l'histoire du modèle théorique de la gravitation que nous avons aujourd'hui à notre disposition à travers les scientifiques qui les ont développés. Car en effet, c'est à partir de toutes leurs lois et modèles que nous pouvons aujourd'hui étudier l'astrophysique dans de bonnes conditions.

### Nicolas Copernic

Né en 1473 et décédé en 1543, Nicolas Copernic est un chanoine, médecin et astronome polonais. Ayant vécu pendant la renaissance, il est aujourd'hui célèbre pour avoir développé la théorie de l'héliocentrisme. En effet, à l'époque, le modèle étant géocentriste : La Terre se trouvait au centre de l'univers et le Soleil, entre autre, orbitait autour. Ce modèle était intuitif et favorable aux religions, plaçant l'humanité au centre de tout ce qui existe. Copernic défendra son idée, mais malheureusement, il ne publiera ses thèses sur l'héliocentrisme qu'à sa mort. Elles ne seront redécouvertes et étudiées sérieusement que deux siècles plus tard.

### Tycho Brahe

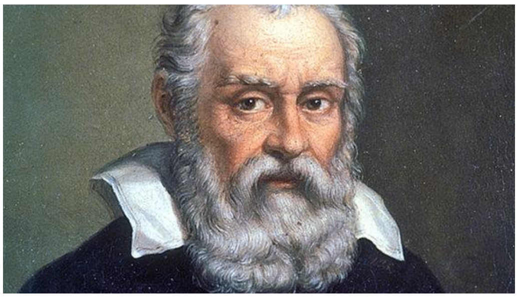
C'est 3 ans après la mort de Copernic que naît Tycho Brahe, en 1546. C'est un astronome danois originaire de Scanie danoise. Il écrit un répertoire précis des étoiles visibles et tente de créer un modèle d'univers combinant géocentrisme et héliocentrisme.

De l'an 1600 et jusqu'à sa mort l'année suivante en 1601, Tycho Brahe sera assisté par Johannes Kepler. Ce dernier se servira de ses données sur les étoiles dans le but de développer ses propres théories sur les trois lois du mouvement.

# Johannes Kepler

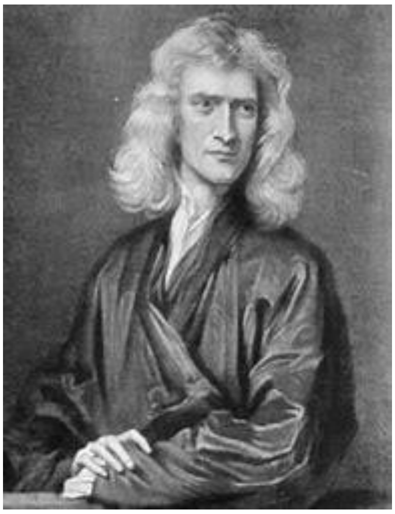
Né en 1571 et mort en 1630, Johannes Kepler est un célèbre astronome allemand. Il a étudié la thèse héliocentrique et a découvert que les planètes n'orbitent pas en cercle parfait autour du soleil, mais en forme d'ellipse. Il va ainsi développer les trois fameuses trois lois sur les orbites que nous connaissons aujourd'hui.

# Galileo Galilei



Contrairement à ce que suggère de nombreuses idées reçues, Galilée n'est pas l'inventeur du télescope. Né en 1564 et mort en 1642, Galilée est un mathématicien, physicien et astronome Italien. En parallèle des travaux de Kepler, il contribue à l'astronomie par des observations de la surface de la Lune, des tâches solaires et de la découverte des satellites de Jupiter.

# Isaac Newton



Né en 1643 et mort en 1727, Isaac Newton est un philosophe, mathématicien, physicien, astronome et théologien anglais. Il est connu pour ses travaux sur la mécanique classique, les lois de la gravitation universelle et sa rivalité avec Leibniz en mathématiques. Il développe avec lui le calcul infinitésimal, base du calcul intégral. Newton a montré que le mouvement des objets sur Terre et des corps célestes sont en réalité gouvernés par les mêmes lois physiques. C'est grâce aux travaux de Kepler que Newton va développer la loi universelle de la gravitation.

Nous avons donc vu une partie des plus grands scientifiques qui ont travaillé sur les modèles de gravitation que nous connaissons aujourd'hui. C'est grâce à eux que les progrès des siècles suivants ont pu être réalisés, comme l'envoie de sondes pour découvrir en profondeur la composition des planètes, l'envoie d'Hommes dans l'espace et plus généralement la découverte de notre univers.

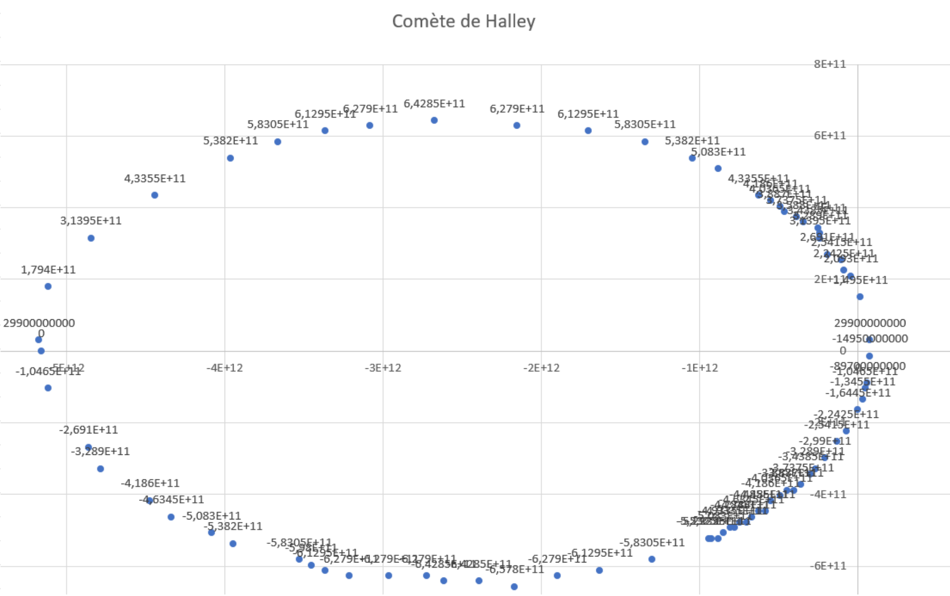
# Les Lois de Kepler

## 1ère loi de Kepler : Loi des orbites

Lors de la première séance du mini projet, nous avons relevé à la main l'intégralité des coordonnées cartésiennes (x;y) de la comète entre 1950 et 2020, mais n'avons pas relevé les dates. Elles se révèlent en effet très peu utiles à ce moment du projet. (Nous choisissons de multiplier chaque coordonnée par un facteur $1{,}495 * 10^{11}$ afin d'obtenir des valeurs en mètres et non en unité astronomiques).

Nous obtenons ce tableau ainsi qu'un nuage de point confirmant que les positions relevées sont à peu près juste :

| x(m) | y (m) | MF1 | MF2 | MF1+MF2 |
|---|---|---|---|---|
| 7,475E+10 | -1,495E+10 | 76230341728 | 5,18767E+12 | 5,2639E+12 |
| 5,98E+10 | -8,97E+10 | 1,07806E+11 | 5,17348E+12 | 5,2813E+12 |
| 4,485E+10 | -1,0465E+11 | 1,13856E+11 | 5,15881E+12 | 5,2727E+12 |
| 2,99E+10 | -1,3455E+11 | 1,37832E+11 | 5,14456E+12 | 5,2824E+12 |
| 0 | -1,6445E+11 | 1,6445E+11 | 5,11554E+12 | 5,28E+12 |
| -7,475E+10 | -2,2425E+11 | 2,3638E+11 | 5,04314E+12 | 5,2795E+12 |
| -1,3455E+11 | -2,5415E+11 | 2,87569E+11 | 4,98483E+12 | 5,2724E+12 |
| -2,093E+11 | -2,99E+11 | 3,64976E+11 | 4,91271E+12 | 5,2777E+12 |
| -2,691E+11 | -3,289E+11 | 4,24959E+11 | 4,85495E+12 | 5,2799E+12 |
| -2,99E+11 | -3,4385E+11 | 4,55669E+11 | 4,82616E+12 | 5,2818E+12 |
| -3,588E+11 | -3,7375E+11 | 5,18099E+11 | 4,76877E+12 | 5,2869E+12 |
| -4,0365E+11 | -3,887E+11 | 5,60376E+11 | 4,72526E+12 | 5,2856E+12 |
| -4,485E+11 | -3,887E+11 | 5,93498E+11 | 4,68057E+12 | 5,2741E+12 |
| -4,9335E+11 | -4,0365E+11 | 6,37438E+11 | 4,63715E+12 | 5,2746E+12 |
| -5,5315E+11 | -4,186E+11 | 6,93686E+11 | 4,57892E+12 | 5,2726E+12 |
| -5,8305E+11 | -4,485E+11 | 7,35595E+11 | 4,552E+12 | 5,2876E+12 |
| -6,279E+11 | -4,485E+11 | 7,71629E+11 | 4,50737E+12 | 5,279E+12 |
| -6,7275E+11 | -4,6345E+11 | 8,16932E+11 | 4,46427E+12 | 5,2812E+12 |
| -7,0265E+11 | -4,784E+11 | 8,50049E+11 | 4,43612E+12 | 5,2862E+12 |
| -7,475E+11 | -4,784E+11 | 8,87481E+11 | 4,39154E+12 | 5,279E+12 |
| -7,774E+11 | -4,9335E+11 | 9,20731E+11 | 4,36348E+12 | 5,2842E+12 |
| -8,073E+11 | -4,9335E+11 | 9,46112E+11 | 4,33377E+12 | 5,2799E+12 |
| -8,5215E+11 | -5,083E+11 | 9,92234E+11 | 4,29096E+12 | 5,2832E+12 |
| -8,8205E+11 | -5,2325E+11 | 1,02557E+12 | 4,26308E+12 | 5,2887E+12 |
| -9,269E+11 | -5,2325E+11 | 1,06439E+12 | 4,21858E+12 | 5,283E+12 |
| -9,4185E+11 | -5,2325E+11 | 1,07744E+12 | 4,20374E+12 | 5,2812E+12 |
| -1,3007E+12 | -5,8305E+11 | 1,42536E+12 | 3,85658E+12 | 5,2819E+12 |
| -1,6296E+12 | -6,1295E+11 | 1,74102E+12 | 3,53687E+12 | 5,2779E+12 |




On s'applique à calculer la distance entre la comète et les foyers afin d'obtenir les caractéristiques de l'ellipse comme son <u>*demi grand axe*</u>, son <u>*paramètre focal*</u> et son <u>*excentricité*</u>. On calcule également le rayon et l'angle polaire, ce qui nous permet d'avoir des coordonnées dans la base polaire (r,Θ).

A l'aide de l'outil SOLVER de Microsoft Excel, on obtient des valeurs pour le paramètre focal et l'excentricité.

Le demi grand axe a pour sa part été obtenu via la formule : MF1 + MF2 = 2*a ⇔ $\frac{1}{2}(\mathrm{MF1} + \mathrm{MF2}) = a$

On calcule a avec la moyenne de chaque distances pour avoir une valeur la plus précise possible.

- Le demi grand axe : a = $2{,}63 * 10^{12} mètres$
- L'excentricité : e = 0,97
- Le paramètre focal : p = 1,09

On a 0 < e <1. La trajectoire est donc elliptique, bien que très proche d'une hyperbole

Tous ces résultats sont dans le tableau qui suit :

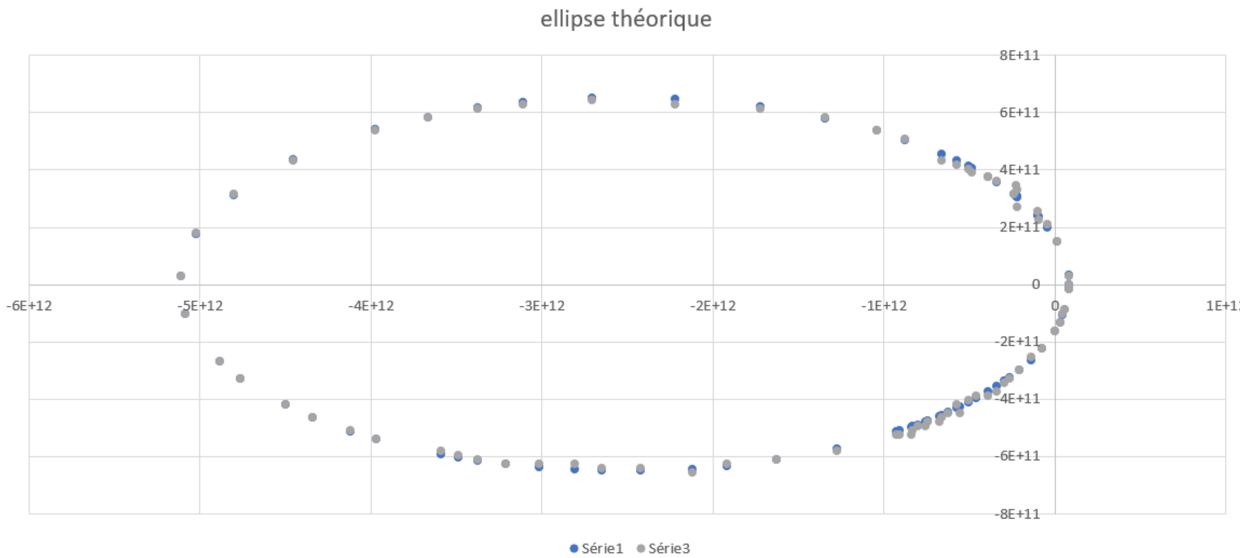
| a | exentricité e | paramètre focal p | r (m) | θ (rad) | e et p | r théo (m) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,6366E+12 | 0,9713137 | 1,49099E+11 | 76230341728 | -0,19739556 | 0,968105757 | 83694817798 |
| | | | 1,07806E+11 | -0,98279372 | 1,0912829 | 1,06146E+11 |
| | | | 1,13856E+11 | -1,16590454 | | 1,18106E+11 |
| | | | 1,37832E+11 | -1,35212738 | | 1,34831E+11 |
| | | | 1,6445E+11 | -1,57079633 | | 1,63147E+11 |
| | | | 2,3638E+11 | -1,89254688 | | 2,3513E+11 |
| | | | 2,87569E+11 | -2,05769556 | | 2,98238E+11 |
| | | | 3,64976E+11 | -2,18152229 | | 3,66764E+11 |
| | | | 4,24959E+11 | -2,25652584 | | 4,21613E+11 |
| | | | 4,55669E+11 | -2,28653992 | | 4,47284E+11 |
| | | | 5,18099E+11 | -2,33578916 | | 4,9505E+11 |
| | | | 5,60376E+11 | -2,37506018 | | 5,39054E+11 |
| | | | 5,93498E+11 | -2,42750195 | | 6,0782E+11 |
| | | | 6,37438E+11 | -2,45586314 | | 6,50694E+11 |
| | | | 6,93686E+11 | -2,49378123 | | 7,15474E+11 |
| | | | 7,35595E+11 | -2,48589703 | | 7,01236E+11 |
| | | | 7,71629E+11 | -2,52134317 | | 7,68763E+11 |
| | | | 8,16932E+11 | -2,5383628 | | 8,0464E+11 |
| | | | 8,50049E+11 | -2,54383426 | | 8,16696E+11 |
| | | | 8,87481E+11 | -2,57227946 | | 8,83823E+11 |
| | | | 9,20731E+11 | -2,57610877 | | 8,93466E+11 |
| | | | 9,46112E+11 | -2,59304325 | | 9,37987E+11 |
| | | | 9,92234E+11 | -2,60375713 | | 9,67817E+11 |
| | | | 1,02557E+12 | -2,60617311 | | 9,74731E+11 |
| | | | 1,06439E+12 | -2,62767297 | | 1,03948E+12 |
| | | | 1,07744E+12 | -2,63449415 | | 1,0613E+12 |
| | | | 1,42536E+12 | -2,72017345 | | 1,39927E+12 |
| | | | 1,74102E+12 | -2,78181696 | | 1,73789E+12 |

f) On vérifie que les paramètres e et p sont proches des valeurs théoriques calculées par le solver Excel grâce aux formules données (unité = mètre) :

| | |
|---|---|
| f1f2 | 5,382E+12 |
| e | 0,965447695 |
| p | 1,89288E+11 |

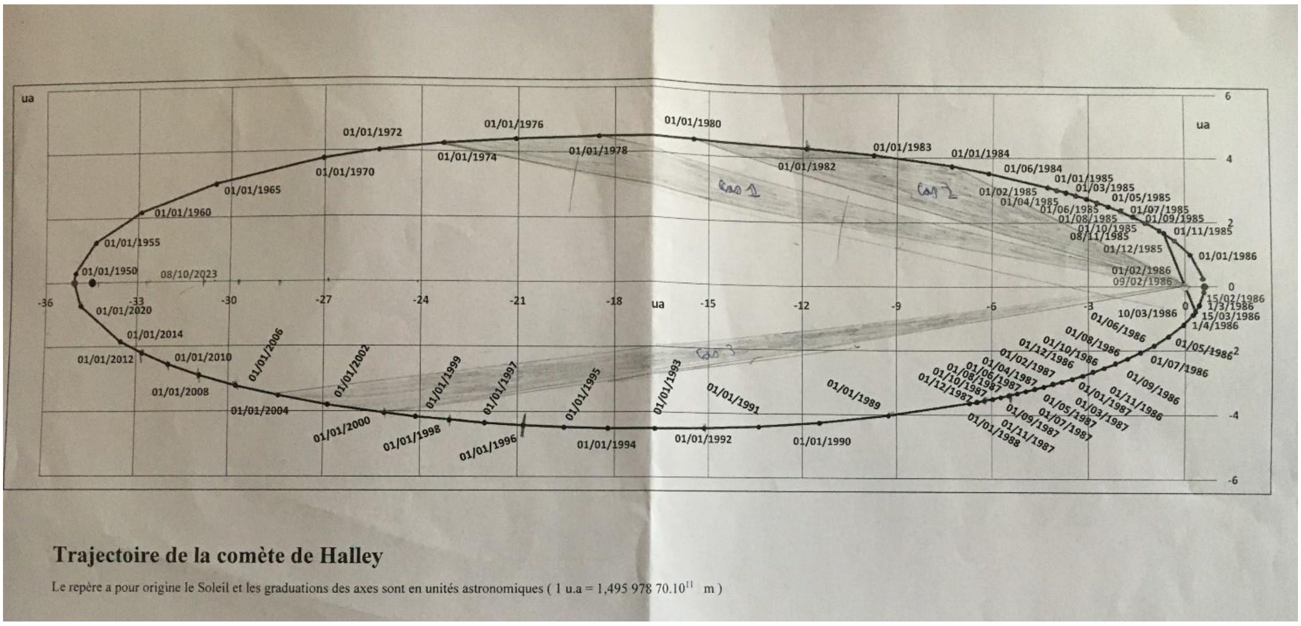
A l'aide de l'approximation non-linéaire par moindre carré, on peut déterminer le carré de notre taux d'erreur lors de la prise de mesures, qui bien entendu est absolument astronomique. D'abord et avant tout parce que les distances en mètres sont très grandes à l'échelle de l'espace, mais aussi parce que le résultat est élevé au carré, et a par conséquent un ordre de grandeur gigantesque.

En repassant les coordonnées polaires théoriques trouvées par le solveur, on peut tracer la courbe théorique. On a une ellipse plus proche de la véritable trajectoire de la comète de Halley. Cela s'explique notamment parce que le repère donné sur la feuille du MP est orthogonal et non orthonormé. Le relevé des coordonnées arrondi donc la forme.



# 2ème loi de Kepler : Loi des aires

L'objectif est ici de vérifier la 2ème loi de Kepler. Pour cela, on va représenter l'aire balayée par la comète pendant une durée déterminée. On effectue ces tracés sur la feuille A3 fournie et on obtient ceci :




Les aires étant quasiment des triangles, on peut calculer leur aire avec la formule : $base * \frac{hauteur}{2}$

On calcule ensuite la vitesse aréolaire, qui est le quotient de l'aire balayée par le temps écoulée.

On obtient alors ces résultats :

| cas | dates | base (m) | hauteur (m) | aire (m^2) | vitesse aréolaire (m^2/an) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 01/01/1974 - 01/01/1978 | 6,877E+11 | 7,47175E+11 | 2,56916E+23 | 6,4229E+22 |
| 2 | 01/01/1980 - 01/01/1984 | 1,196E+12 | 4,485E+11 | 2,68203E+23 | 6,70508E+22 |
| 3 | 01/01/2000 - 01/01/2004 | 4,9335E+11 | 1,06145E+12 | 2,61833E+23 | 6,54583E+22 |
| 4 | T = 4 ans | | | 5,12E+24 | |

A chaque fois, la période était de 4 ans. Et on constate que l'aire balayée est identique. Il en est de même pour la vitesse aréolaire. La loi des aires est vérifiée : « à des durées égales, les surfaces balayées sont identiques »

Grâce à la formule $S = \pi * a * b$, on obtient l'aire totale de l'ellipse.

Nous avons la vitesse aréolaire et la surface de totale. On peut donc en déduire la durée que va mettre la comète avant d'avoir balayée toute la surface, autrement dit, avant d'avoir réalisé une révolution complète :

$$S = v_{aréolaire} * t \quad <=> \quad t = \frac{S}{v_{aréolaire}}$$

Par application numérique :

$$t = \frac{5{,}1*10^{24}}{6{,}6*10^{22}} = \frac{5{,}1*10^{2}}{6{,}6} = \mathbf{77{,}2\ ans}$$

*(La véritable valeur est d'environ 76 ans)*

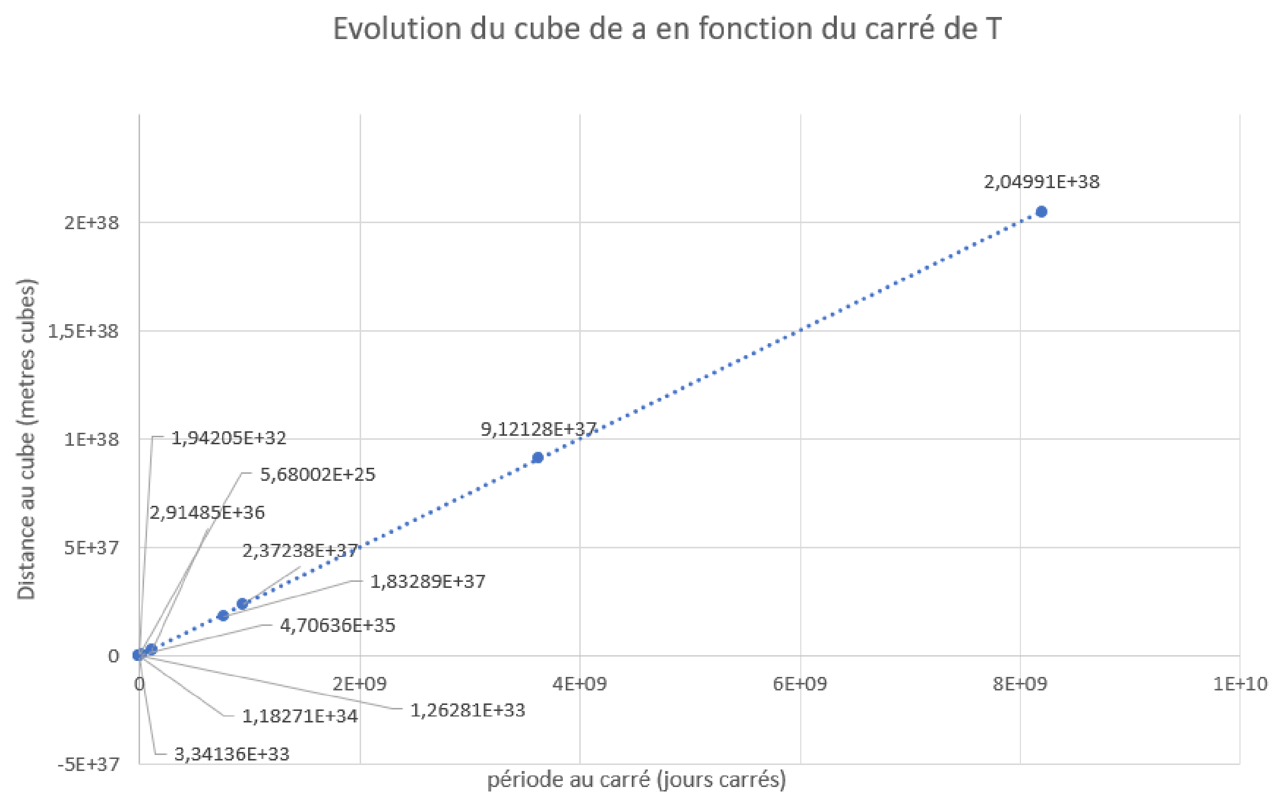
# $3^{ème}$ loi de Kepler : loi des périodes

1) On calcule le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ pour toutes les planètes du système solaire ainsi que pour la comète de Halley.

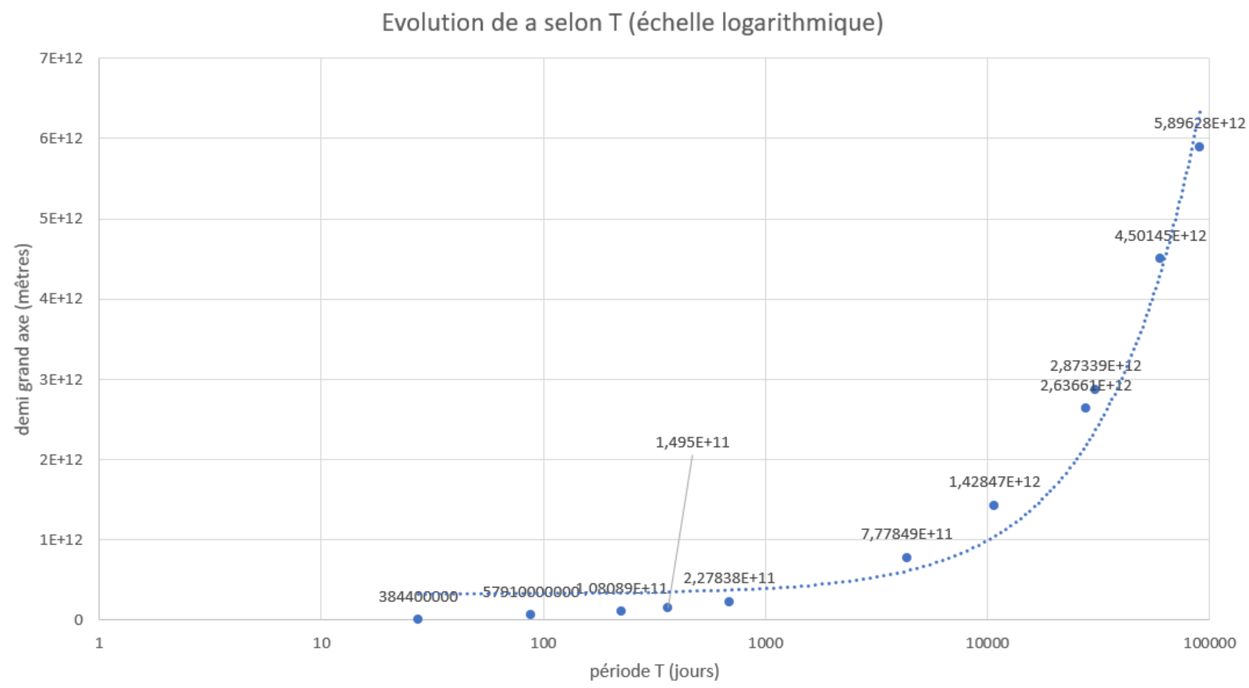
| Astres | t (jours) | t carré | a (m) | a cube | T (jours) | rapport a^3/T^2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sélénée | 27,32 | 746,3824 | 384400000 | 5,68002E+25 | 27,32 | 7,61007E+22 |
| Mercure | 87,97 | 7738,7209 | 57910000000 | 1,94205E+32 | 87,97 | 2,50952E+28 |
| Vénus | 224,7 | 50490,09 | 1,08089E+11 | 1,26281E+33 | 224,7 | 2,50111E+28 |
| Terre | 365,5 | 133590,25 | 1,495E+11 | 3,34136E+33 | 365,5 | 2,5012E+28 |
| Mars | 687,5 | 472656,25 | 2,27838E+11 | 1,18271E+34 | 687,5 | 2,50226E+28 |
| Jupiter | 4335,5 | 18796560,25 | 7,77849E+11 | 4,70636E+35 | 4335,5 | 2,50384E+28 |
| Saturne | 10766,5 | 115917522,3 | 1,42847E+12 | 2,91485E+36 | 10766,5 | 2,51459E+28 |
| Uranus | 30729 | 944271441 | 2,87339E+12 | 2,37238E+37 | 30729 | 2,51239E+28 |
| Neptune | 60222 | 3626689284 | 4,50145E+12 | 9,12128E+37 | 60222 | 2,51504E+28 |
| Pluton | 90528,5 | 8195409312 | 5,89628E+12 | 2,04991E+38 | 90528,5 | 2,50129E+28 |
| Comète de Halley | 27778 | 771617284 | 2,63661E+12 | 1,83289E+37 | 27778 | 2,37539E+28 |

La valeur est toujours autour de $2,5 * 10^{28}$. En effet la $3^{ème}$ loi de Kepler prévoit que ce rapport est toujours constant selon un système donné, d'après cette relation :

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{MG}$ , $G$ la constante de gravitation universelle et $M$ la masse de l'astre attracteur.

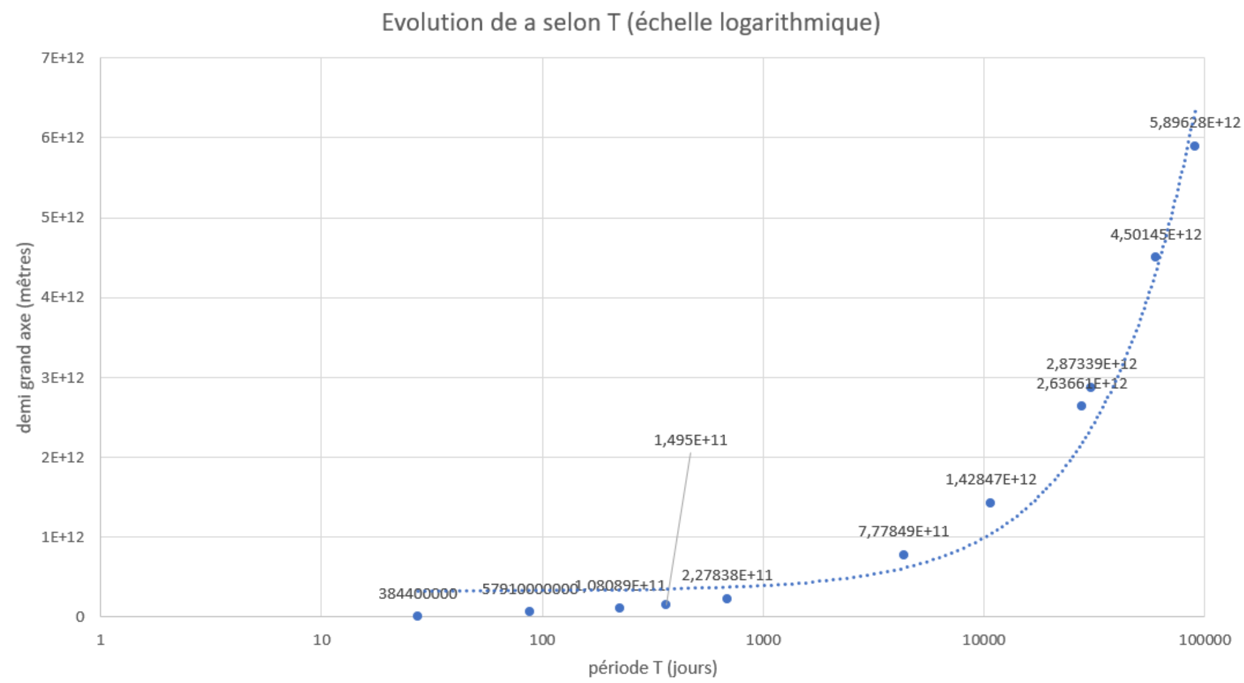



L'évolution du cube de a selon le carré de T est en effet linéaire. Il y'a donc bien un lien de proportionnalité entre les deux. On peut également représenter cette évolution de manière logarithmique




A noter qu'ici, tous les astres orbitent autour du soleil. C'est pourquoi nous avons également effectué le calcul pour la Lune terrestre, et on trouve en effet une valeur différente des autres. La Lune orbite en effet autour de la Terre de masse $10^6$ fois moins élevée que le soleil (Et on observe dans le tableau que le rapport est bien inférieur). On a donc effectué cette croissance pour un autre astre : Jupiter, qui a de nombreuses lunes.

Nous en avons étudié une partie d'entre elles et voici le graphique en base logarithmique :



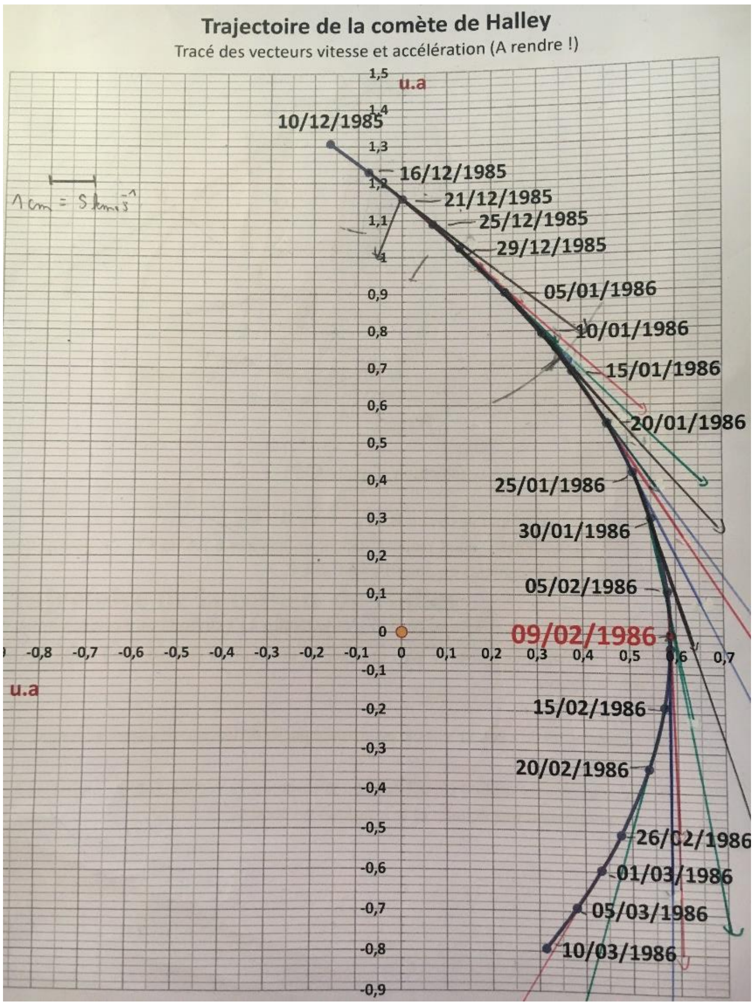

La 3ème loi de Kepler vérifie donc une proportionnalité du cube de la période avec le carré du demi grand axe. Cette proportionnalité est même constante pour un même astre attracteur :

Elle ne dépend pas de la masse de l'astre en orbite.

# Loi de la Gravitation Universelle

Les lois de Kepler permettent d'étudier les trajectoires des astres et de prédire leurs apparitions. Mais elles ne permettent pas de savoir quelle est la cause du mouvement. Cette étude est une branche de la mécanique qu'on nomme la dynamique. Elle fait intervenir la notion de force. C'est ce que nous verrons dans cette partie, qui concerne la gravitation universelle.

On commence par relever les coordonnées de la comète en coordonnées cartésiennes lorsqu'elle arrive à son périhélie. On calcule ensuite les vecteurs vitesse en tout point par la méthode de tracé géométrique, avec l'échelle $1cm = 5km/s$




Ces vitesses sont obtenues par mesures de la variation de la position selon la durée de temps. On a donc converti les données en centimètres/jours en kilomètres/secondes.

On reporte les valeurs dans le tableau Excel, ce qui permet d'avoir une colonne dédiée à la vitesse et de déterminer la variation de cette dernière (le tout dans le référentiel héliocentrique, il ne s'agit que de vitesse relative du point de vue de l'univers)

On calcule ainsi une vitesse au périhélie :

$$v_p = 52\ km.s^{-1}$$

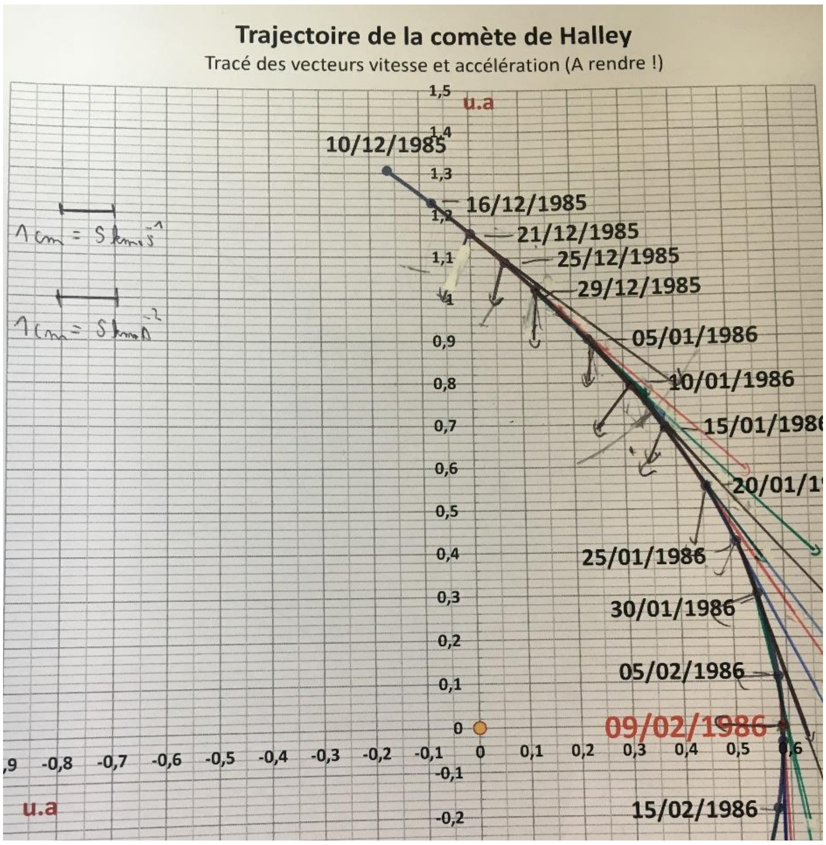
*(la véritable vitesse est d'environ* $54{,}1\ km.s^{-1}$*)*

(Voir tableau ci-dessous)

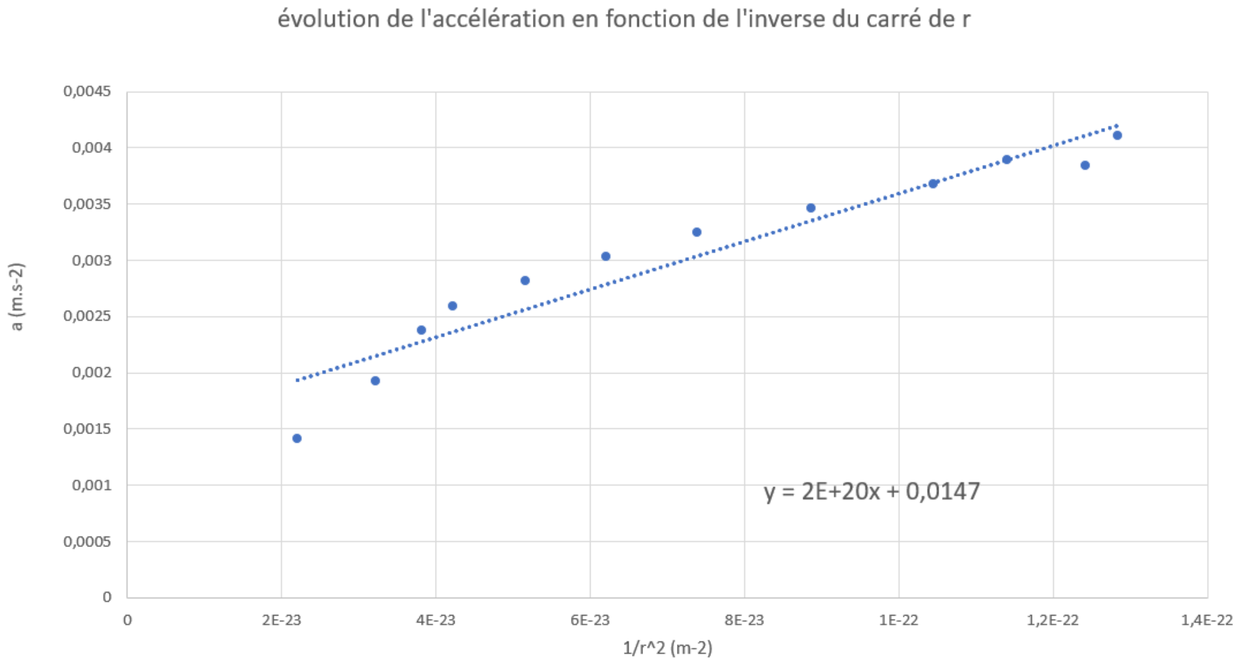
| date | x (m) | y (m) | v (m/s) | v (km/s) | Δv (km.s-1) |
|---|---|---|---|---|---|
| 10/12/1985 | -23920000000 | 1,95845E+11 | 28314,394 | 28,31439394 | |
| 16/12/1985 | -1,0465E+11 | 1,8538E+11 | 34606,481 | 34,60648148 | 6,29208754 |
| 21/12/1985 | 0 | 1,7641E+11 | 36769,387 | 36,76938657 | 2,16290509 |
| 25/12/1985 | 8970000000 | 1,6146E+11 | 37752,525 | 37,75252525 | 0,98313868 |
| 29/12/1985 | 20930000000 | 1,5249E+11 | 38932,292 | 38,93229167 | 1,17976641 |
| 05/01/1985 | 35880000000 | 1,3455E+11 | 41527,778 | 41,52777778 | 2,59548611 |
| 10/01/1986 | 46345000000 | 1,18105E+11 | 43258,102 | 43,25810185 | 1,73032407 |
| 15/01/1986 | 53820000000 | 1,03155E+11 | 44988,426 | 44,98842593 | 1,73032407 |
| 20/01/1986 | 67275000000 | 82225000000 | 46718,75 | 46,71875 | 1,73032407 |
| 25/01/1986 | 76245000000 | 61295000000 | 47190,657 | 47,19065657 | 0,47190657 |
| 30/01/1986 | 82225000000 | 44850000000 | 48449,074 | 48,44907407 | 1,25841751 |
| 05/02/1986 | 86710000000 | 16445000000 | 51909,722 | $\boxed{51,90972222}$ | 3,46064815 |

On procède ensuite au tracé des vecteurs accélération par construction géométrique. Comme on pouvait s'y attendre, l'accélération est d'autant plus élevée que la comète se rapproche de son astre attracteur. En effet, la vitesse s'élève de plus en plus vite, donc l'accélération est plus forte.

On observe aussi que l'accélération est dirigée vers l'astre attracteur. On dit que l'accélération est *centripète*, elle est orientée en direction du centre du Soleil.




(5) Dans l'expression d'une force $\vec{F} = m * \vec{a}$, la direction de la force est donnée par la direction de l'accélération. Ici, l'accélération est dirigée vers le Soleil. La force est donc centrale. Elle ne créer aucun moment avec son bras de levier (distance Soleil-Comète).




(6) On commence par calculer $\frac{1}{r^2}$. Pour ce faire, on calcule le module 'r' grâce aux coordonnées cartésiennes (x ;y) de la comète, puis on en prend le carré de l'inverse. On trace ensuite l'évolution de l'accélération (que l'on a converti en mètres par secondes). On obtient ce graphique

La courbe est une droite dont l'équation est affichée à l'écran. L'ordre de grandeur du coefficient directeur est de l'ordre de $10^{20}$. Il y'a bien proportionnalité entre l'accélération et l'inverse du carré de la distance.

(7) Une force s'exprime comme $\vec{F} = m * \vec{a}$. La force est une grandeur proportionnelle à l'accélération. On peut ainsi conclure que la force subie par la comète est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance.

(8) Comme énoncé précédemment, nous avons la relation $\vec{F} = m * \vec{a}$

L'énoncé du la fiche TD nous donne la relation : $\overrightarrow{F_{Grav}} = -G\frac{M_s m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$

On peut ainsi réécrire en module : $F = m * a = G\frac{M_s m}{r^2}$

Et ainsi : $a = G\frac{M_s m}{r^2} * \frac{1}{m} = G\frac{M_s}{r^2}$ avec G la constante gravitationnelle : G = $6{,}0 * 10^{-11}$

Plutôt que de remplacer à un point de rayon et d'accélération de la droite, on décide d'étudier l'évolution sur Excel avec la formule précédemment explicitée :

On observe que les valeurs oscillent entre $5{,}2 * 10^{29} kg \;\; et \; 1{,}1 * 10^{30} kg$

(La vraie valeur est un peu au dessus, de l'ordre de $1{,}9 * 10^{30} kg$)

| G | ar^2/G |
|---|---|
| 6E-11 | |
| | 1,06928E+30 |
| | 9,97195E+29 |
| | 1,03692E+30 |
| | 1,02484E+30 |
| | 9,08723E+29 |
| | 8,12362E+29 |
| | 7,32011E+29 |
| | 6,50998E+29 |
| | 5,86495E+29 |
| | 5,69221E+29 |
| | 5,33488E+29 |
| | 5,15642E+29 |

## Etude énergétique - Conservation du moment cinétique :

1) Le moment de force produit par la comète est le produit vectoriel de la distance entre le Soleil et l'astre (point H) par la force appliquée entre les deux, en précisant qu'ici le bras de levier prend son origine au soleil (point S). La position et la force se notent :

$$\overrightarrow{SH} = r\overrightarrow{u_r} \quad et \quad \overrightarrow{F_{Grav}} = -G\frac{M_s m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

On remarque que le moment de force est alors : $\overrightarrow{M_{F_{grav}/(s)}} = \overrightarrow{SH} \wedge \overrightarrow{F_{Grav}} = r\overrightarrow{u_r} \wedge -G\frac{M_s m}{r^2}\overrightarrow{u_r} = 0$

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul. Ici, les deux vecteurs directeurs des grandeurs sont identiques donc colinéaires. Le moment de force est nul, la force est centrale.

2) La dérivée du moment cinétique est égal à la somme des moments de force. Si le moment de force est nul, alors le moment cinétique est conservé.

3) On a r la distance Soleil-comète (ou r est le bras de levier) v la vitesse de la comète à l'instant t, et m la masse de la comète, supposée constante. On se place dans un référentiel en coordonnées polaires.
On peut écrire le moment cinétique $\overrightarrow{L_{Soleil}}$ de la comète par la relation :

$$\overrightarrow{L_{Soleil}} = r\overrightarrow{u_r} \wedge m * (\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

Pour obtenir l'expression de la vitesse aréolaire, on part de sa définition. A l'origine, il est question d'une surface dS balayée par une longueur dr. Il s'agit de la moitié de l'aire d'un parallélogramme. On peut donc écrire :

$$dS = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \overrightarrow{dr}\right|$$

Pour la vitesse, on dérive l'expression en fonction du temps t. On obtient :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left|r^2 * \frac{d\theta}{dt} * \overrightarrow{u_z}\right| = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

L'expression est proche du moment cinétique. On peut écrire :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\left\|\overrightarrow{L_{Soleil}}\right\|}{2 * m}$$

La constante des aires C est obtenue en posant $C = r^2\dot{\theta}$. Précédemment dans le MP, nous avons déterminés la vitesse aréolaire de la comète, donc l'expression littérale est en module : $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$. Il suffit donc simplement de la multiplier par deux afin d'obtenir la constante des aires C.

<u>AN</u> : 2 * 6,54583E+22 = 1,30917E+23 = C

Conservation de l’énergie mécanique

1) L’espace peut être considéré comme vide. La seule force qui s’applique sur la comète est la force gravitationnelle. L’énergie mécanique de la comète est le résultat du travail de cette seule force. Hors la force gravitationnelle est une force conservative. Par définition, l’énergie mécanique du système est conservée.

2) L’énergie est le travail d’une force, qui correspond à une force délivrée sur une distance. Il s’agit donc ici d’intégrer la force d’interaction gravitationnelle selon la variable distance ‘r’. On considère les masses constantes (on évite ainsi des dérivées partielles) :

$$\int G\frac{M_s m}{r^2}dr = -G\frac{M_s m}{r}$$

3) On va désormais calculer les énergies cinétiques et potentielles dans le tableau Excel par unité de masse. Nous n’avons pas accès à la masse de la comète, on divise donc chaque membre de l’équation Em = Ec + Ep par la masse m.
On obtient une équation de l’énergie mécanique totale par unité de masse :

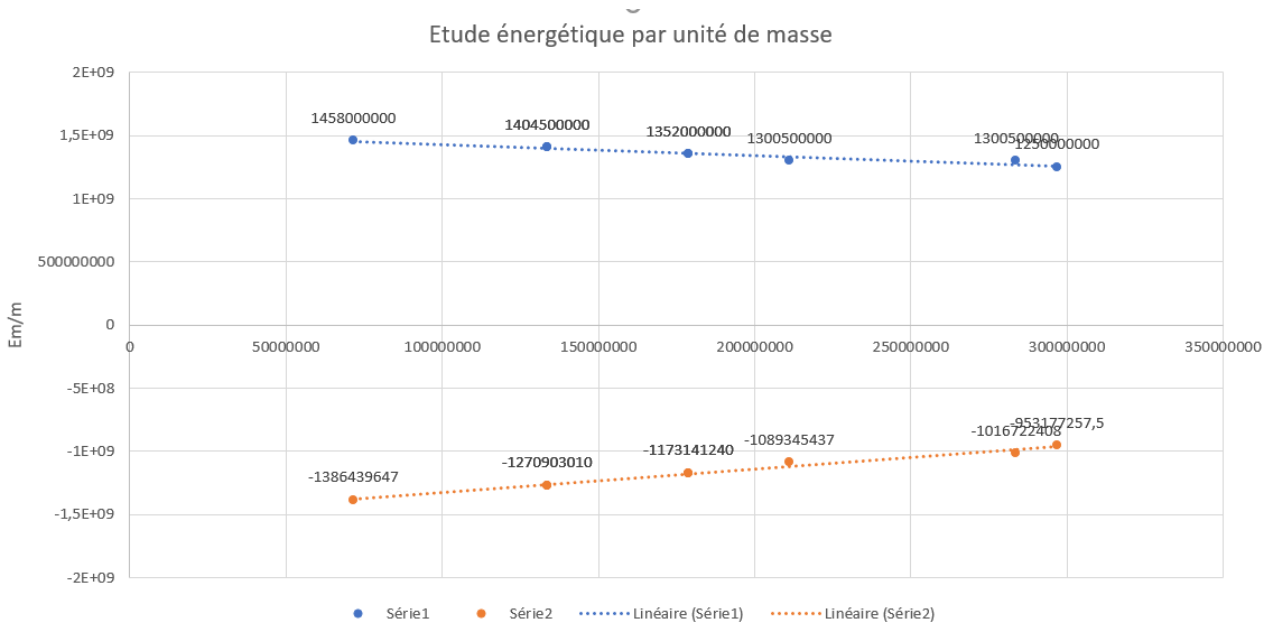
$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M_s}{r} = \frac{E_{mécanique}}{m},$$

$$M_s \text{ la masse du soleil et } G \text{ la constante de gravitation universelle}$$

La dimension de la grandeur s’en retrouve donc changée : $\left[\frac{E_m}{m}\right] = L^2.T^{-2}$ :

On choisit les quelques jours lors desquels la comète est visible de la Terre (proche de son périhélie).
On obtient les valeurs ci-contre pour l’énergie par unité de masse

| Ec/m | Ep/m | Em/m |
|---|---|---|
| 1200500000 | -1089345437 | 211154563 |
| 1250000000 | -1173141240 | 178858760 |
| 1300500000 | -1270903010 | 133596990 |
| 1352000000 | -1386439647 | 71560352,7 |
| 1404500000 | -1270903010 | 133596990 |
| 1458000000 | -1173141240 | 178858760 |
| 1404500000 | -1016722408 | 283777592 |
| 1352000000 | -953177258 | 296822742 |




On a ainsi ces deux droites pour l'évolution de l'énergie cinétique et potentielle. A noter que l'énergie mécanique totale est la somme des deux, donc une droite de coefficient directeur nul, donc constante. L'énergie totale est conservée.

# Conclusion :

Au cours de ce mini projet, nous avons appris sur quoi reposaient les lois visant à expliquer les trajectoires des astres dans l'univers. Nous avons confirmé cela grâce à l'étude de données concernant la trajectoire de la comète de Halley et celles des planètes de notre système solaire.

Cela nous a permis d'effectuer une approche moins théorique, plus proche de l'ordre de l'observation des phénomènes astrophysiques. De cette manière, nous comprenons mieux la réalité physique qui existe derrière ces lois de la mécanique céleste.

Auteurs du TP/compte rendu :

PEYRIDIEUX Bastien

MONCHARMONT Thomas (Aero 1U)

DECRENISSE Romain