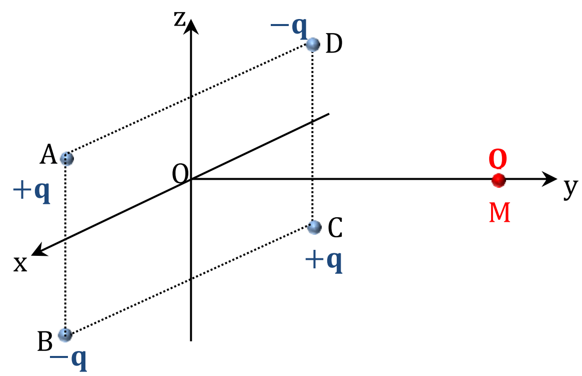
Devoir surveillé d'électromagnétisme (ph22)
Durée 1H.
Aucun document ni calculatrice autorisé.

Exercice n°1

Quatre charges électrique ponctuelles, de valeurs absolue q, sont placées aux sommets d'un carré ABCD de coté 2a, de centre O et appartenant au plan Oxz.

1. Rappeler l'expression de la force électrique exercée par une charge sur une autre.
2. Déterminer l'expression de la force subie par la charge électrique Q placée en un point M quelconque de l'axe Oy



Exercice n°2

Deux particules chargées, considérées comme ponctuelles et fixes dans un référentiel cartésien normé, sont caractérisées comme suit :

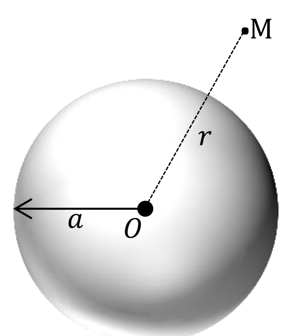
- Particule A de charge $Q_A = -4.10^{-6}\ C\ (= -4\ \mu C)$ est placée au point $A\ (3,1,3)$;
- Particule B de charge $Q_B = 5.10^{-6}\ C\ (=\ 5\ \mu C)$ est placée au point $B\ (1,4,-2)$;

1. Rappeler l'expression du potentiel et champ électrique crée par une charge ponctuelle.
2. Déterminer le potentiel électrique à $(1,0,1)$

Exercice n°3

On considère une sphère creuse de rayon a portant une charge électrique $Q > 0$.

1. Préciser le domaine de définition et la direction du champ $\vec{E}$
2. Rappeler l'énoncé du théorème de Gauss.
3. Déterminer, en appliquant le théorème de Gauss, l'expression du champ électrique et du potentiel à la distance r de l'axe. On considérera les deux cas $r < a$ et $r > a$. On prendra le potentiel nul à l'infini et continu partout.
4. Tracer la courbe visualisant les variations de V et E

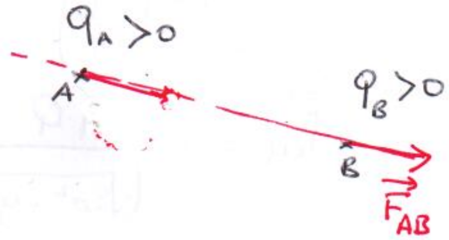


DS n° 1 - 2

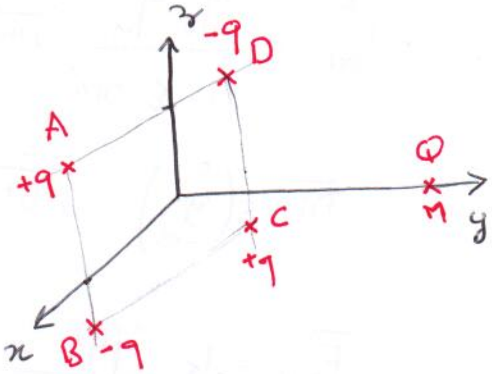
EX01

1. L'expression de la force électrique.

$$\vec{F}_{AB} = \frac{q_A\, q_B}{4\pi\varepsilon_0\, AB^3}\cdot \vec{AB}$$



2. L'expression de la force subie par la charge Q.



A : +q $(a \cdot 0 \cdot a)$

B : -q $(a, 0, -a)$

C : + q $(-a, 0, -a)$

D : -q $(-a, 0, a)$

M : Q $(0, y, 0)$

- $\vec{F}_{AM} = \dfrac{q_A\, q_M}{4\pi\varepsilon_0\, AM^3}\cdot \vec{AM}$, $q_A = +q$ et $q_M = Q$

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix}, \quad AM = \sqrt{a^2 + y^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + y^2}$$

$$\vec{F}_{AM} = k\frac{q\,Q}{\left(\sqrt{2a^2+y^2}\right)^3}\cdot\begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix}$$

- $\vec{F}_{BM} = \dfrac{q_B\, q_M}{4\pi\varepsilon_0\, BM^3}\cdot \vec{BM}$, $q_B = -q$ et $q_M = Q$

$$\vec{BM} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix}, \quad BM = \sqrt{a^2 + y^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + y^2}$$

$$\vec{F}_{BM} = -k\cdot\frac{q\cdot Q}{\left(\sqrt{2a^2+y^2}\right)^3}\cdot\begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix}.$$

$$\bullet\ \vec{F}_{CM} = \frac{q_C\, q_M}{4\pi\varepsilon_0\, CM^3}\cdot\overrightarrow{CM} \quad , q_C = +q \ \text{ et } q_M = Q$$

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix} \quad , \overline{CM} = \sqrt{a^2 + y^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + y^2}$$

$$\vec{F}_{CM} = k \cdot \frac{q \cdot Q}{\left(\sqrt{2a^2+y^2}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix}.$$

$$\bullet\ \vec{F}_{DM} = \frac{q_D\, q_M}{4\pi\varepsilon_0 . DM^3}\cdot\overrightarrow{DM} \quad , q_D = -q \quad , q_M = Q$$

$$\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix} \quad , \overline{DM} = \sqrt{a^2 + y^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + y^2}$$

$$\vec{F}_{DM} = -k \frac{qQ}{\left(\sqrt{2a^2+y^2}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix}.$$

- La force totale $\vec{F}$ subie par la charge Q s'écrit donc:

$$\vec{F} = \vec{F}_{AM} + \vec{F}_{BM} + \vec{F}_{CM} + \vec{F}_{DM}$$

$$= k \cdot \frac{qQ}{\left(\sqrt{2a^2+y^2}\right)^3} \left[\begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix} \right]$$

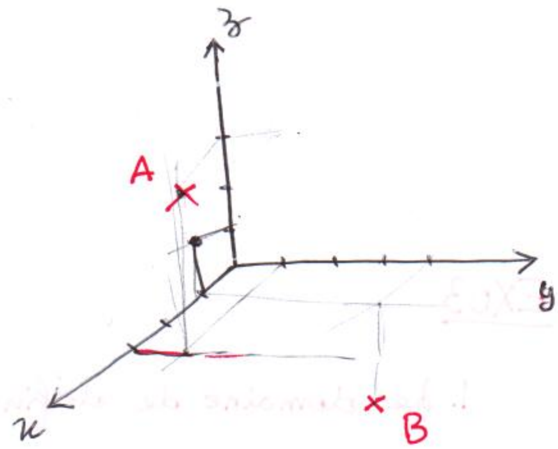
$$= k \frac{q \cdot Q}{\left(\sqrt{2a^2+y^2}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{0}}$$

EX02

$Q_A = -4\,\mu C \quad (3,1,3)$

$Q_B = 5\,\mu C \quad (1,4,-2)$



1- L'expression du potentiel électrique créé par une charge ponctuelle

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- L'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\vec{u}_r$$

2. Le potentiel électrique à (1, 0, 1)

- Le potentiel électrique créé par Q_A à (1, 0, 1)

$$V_A = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_A} \quad , \; Q_A = -4.10^{-6}\,C \; , \; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$$

$$\vec{r}_A = (3-1)\vec{u}_x + (1-0)\vec{u}_y + (3-1)\vec{u}_z = 2\vec{u}_x + 1\vec{u}_y + 2\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow r_A = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$V_A = 9.10^{9}\cdot\frac{(-4.10^{-6})}{3} = \boxed{-12.10^{3}\,V}$$

- Le potentiel électrique créé par Q_B à (1, 0, 1)

$$V_B = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_B} \quad , \; Q_B = 5.10^{-6}\,C \text{ et } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$$

$$\vec{r}_B = (1-1)\vec{u}_x + (4-0)\vec{u}_y + (-2-1)\vec{u}_z = 4\vec{u}_y - 3\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow r_B = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$V_B = 9.10^9 \cdot \frac{5.10^{-6}}{5} = \boxed{9.10^3\ V}$$

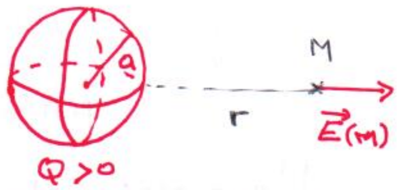
$$V = V_A + V_B = -12.10^3 + 9.10^3$$

$$\boxed{V = -3.10^3\ V}$$

EXO3

1. Le domaine de définition et la direction du $\vec{E}$

$$\vec{E}(M) = E.\vec{U_r}$$



2. L'enoncé du théorème de Gauss.

Le flux de champ électrique au travers une surface fermée est égal au quotient des charges internes et la permitivité du milieu ε_0

$$\oiint \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

3. L'expression du champ électrique.

* Si $r < a$

• Flux ϕ :

$$\phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = E \oiint dS$$

$$\phi = E.4\pi r^2$$

• Charges internes Q_{int} :

$$Q_{int} = 0$$

• Gauss : $\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$E.4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \vec{0}}$$

* Si $r > a$

- Flux ϕ :

$$\phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = E \oiint dS$$

$$\phi = E.4\pi r^2$$

- Charges internes Q_{int} :

$$Q_{int} = Q$$

- Gauss : $\oiint \vec{E}\vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{U}_r}$$

- L'expression du potentiel électrique

$$\vec{E} = -\vec{grad}V = -\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}.\frac{\partial V}{\partial \theta}^{0} \\ \frac{\partial V}{\partial z}^{0} \end{vmatrix} = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = -\int E.dr$$

- Si $r < a$

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \Rightarrow \boxed{V(r) = C_1}$$

- Si $r > a$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{U}_r \Rightarrow V = -\int E.dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.\int \frac{1}{r^2}.dr$$

$$\boxed{V(r) = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2}$$

- Pour déterminé les constantes C_1 et C_2, on utilise les conditions aux limites.

1/ Le potentiel est nul à l'infini

$$r \to \infty \Rightarrow V(r) = 0$$

- Si $r > a \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$

$$V(r\to\infty) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 . \infty} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \qquad \text{Si } r > a$$

2- Le potentiel est constant partout.

$$V(r=a) = C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}} \qquad \text{Si } r < a$$

4- Les courbes des variations de V et E