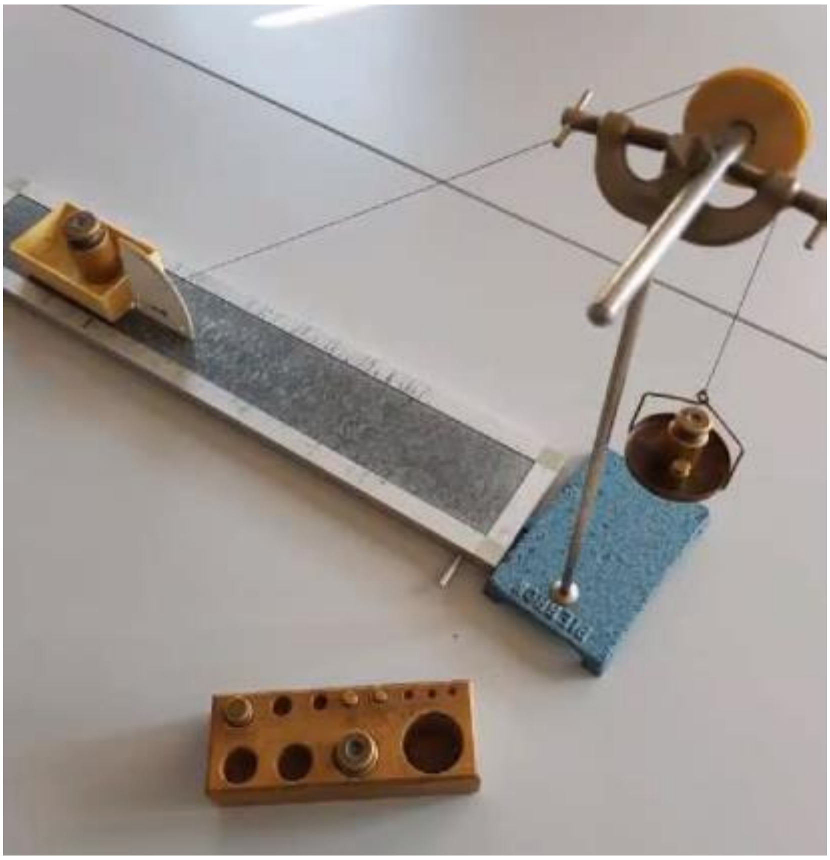
ÉCOLE
D'INGÉNIEURS
DE L'AIR ET DE L'ESPACE

TP 3
FROTTEMENT D'UN PAVE SUR UN PLAN

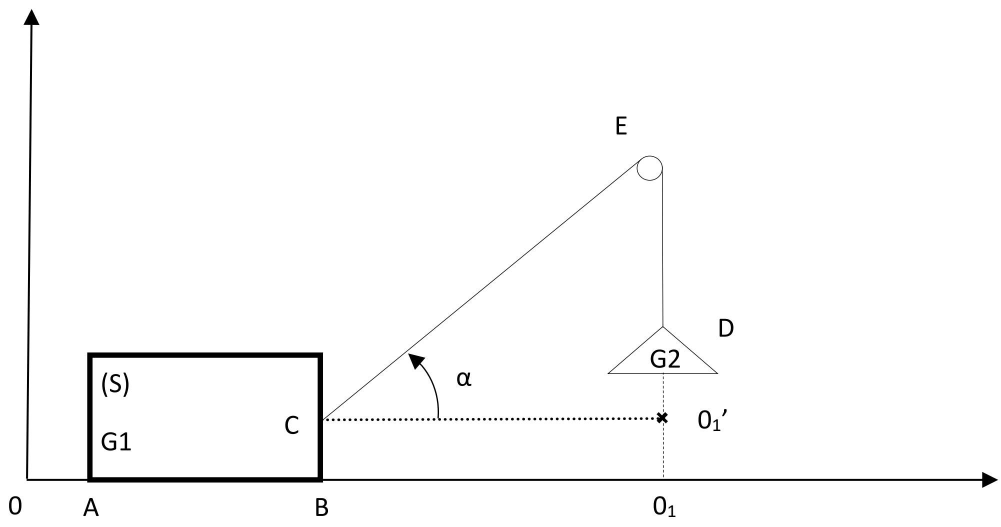


BEGIS Mathéo
CHAOUKI Zakaria
DOBRENEL Thomas

2020-2021

Table des matières

I) ETUDE PROPOSE



1° Indiquer les conditions que doivent respecter les différents paramètres pour que la relation soit possible.

Relation (6) : $\frac{m}{M} \geq \frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$

La relation (6) est définie si :

$$\mathrm{Cos}(\alpha - \varphi) \neq 0$$

Pour que la relation (6) soit possible il faut que :

$$\alpha - \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

2° Relever les valeurs de m nécessaires à mettre le corps (S) en mouvement pour différentes valeurs de α compatibles avec (1)

Pour M = 602 gr ; balance à vide = 10gr

α (°)	m (gr)
30	170
40	200
45	210
50	220
60	250
70	290

3° Calculer f de $f = \frac{m\cos(\alpha)}{M - m\sin(\alpha)}$ pour chaque série de mesure et donner la valeur moyenne de f : f_{moy}

Déterminer l'ordre de grandeur de l'incertitude sur la valeur de f.

En reprenant l'expression (7) repréciser dans la question 3) et grâce aux valeurs relevées dans le tableau question 2), on a :

- $1^{ère}$ $mesure$:

$$f = \frac{170\cos(30)}{602 - 170sin(30)} = 0{,}28$$

- $2^{ème}$ $mesure$:

$$f = \frac{200\cos(40)}{602 - 200sin(40)} = 0.32$$

- $3^{ème}$ $mesure$:

$$f = \frac{210\cos(45)}{602 - 210sin(45)} = 0.33$$

- $4^{ème}$ $mesure$:

$$f = \frac{220\cos(50)}{602 - 220sin(50)} = 0.33$$

- $5^{ème}$ $mesure$:

$$f = \frac{250\cos(60)}{602 - 250sin(60)} = 0.32$$

- $6^{ème}$ $mesure$:

$$f = \frac{290\cos(70)}{602 - 290sin(70)} = 0.30$$

- **Valeur moyenne de f :**

$$f_{moy} = 0.3145$$

- **Ordre de grandeur de l'incertitude sur la valeur de f :**

D'après (7) ; on a deux variables m et α.

Incertitude de f : $\frac{df}{f}$

- **Méthode 1 : Dérivées partielles**

$$\frac{df}{f} = \frac{df}{dm}.\Delta m + \frac{df}{d\alpha}.\Delta\alpha$$

Avec : $\Delta m = 0.1\ gr$; $\Delta\alpha = 0.1\ rad$

$$\frac{df}{dm} = \frac{\cos(\alpha)\left(M - msin(\alpha)\right) + mcos(\alpha)\sin(\alpha)}{\left(M - msin(\alpha)\right)^2} = \frac{Mcos(\alpha)}{\left(M - msin(\alpha)\right)^2}$$

$$\frac{df}{dm} = \frac{-\mathrm{msin}(\alpha)\left(M - msin(\alpha)\right) + m^2cos^2(\alpha)}{\left(M - msin(\alpha)\right)^2} = \frac{-Mmsin(\alpha) + m^2}{\left(M - msin(\alpha)\right)^2}$$

Finalement,

$$\frac{df}{f} = \frac{Mcos(\alpha).\ 0{,}1 + (-Mmsin(\alpha) + m^2).0{,}1}{\left(M - msin(\alpha)\right)^2}$$

On a :

α (°)	m (gr)
30	170
40	200
45	210
50	220
60	250
70	290
α(moy) (°)	m(moy) (gr)
49.16	223.33

En remplaçant $\alpha\ par\ \alpha(moy) et\ m\ par\ m(moy) et\ M\ par\ 602$

$$49.6\,° \approx 0.86\,rad$$

$$\frac{df}{f} = \frac{602\,.\,cos(0.86)\,.\ 0{,}1 + (-602\,.\,223{,}33\,.\,sin(0.86) + 223{,}33^2)\,.\ 0{,}1}{\left(602 - 223{,}33\,.\,sin(0.86)\right)^2}$$

$$\left|\frac{df}{f}\right| = 0.027$$

- **Méthode 2 : log**

$$\frac{df}{f} = [\ln(f)]' = \left[\ln\left(\frac{m\cos(\alpha)}{M - msin(\alpha)}\right)\right]'$$

$$\frac{df}{f} = [\ln(m)]' + [\ln(\cos(\alpha)]' - [\ln(\mathrm{M} - \mathrm{msin}(\alpha))]'$$

$$\frac{df}{f} = \frac{1}{m} + \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\delta}{\delta \mathrm{m}}(\ln\left(\mathrm{M} - \mathrm{msin}(\alpha)\right)).\Delta m - \frac{\delta}{\delta\alpha}(\ln\left(\mathrm{M} - \mathrm{msin}(\alpha)\right)).\Delta\alpha$$

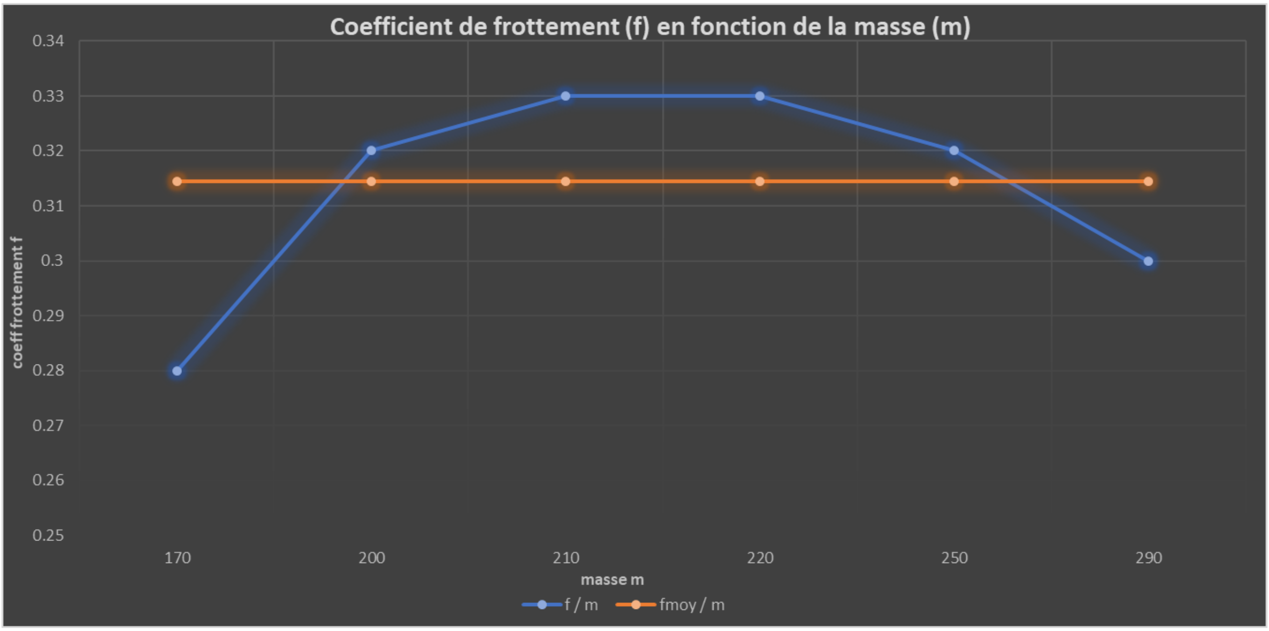
$$\frac{df}{f} = \frac{1}{m} + \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{-\sin(\alpha)}{\mathrm{M} - \mathrm{msin}(\alpha)}.\Delta m - \frac{-\mathrm{mcos}(\alpha)}{\mathrm{M} - \mathrm{msin}(\alpha)}\Delta\alpha$$

Avec $\Delta m = \Delta\alpha$:

$$\frac{df}{f} = \frac{1}{m} - \tan(\alpha) - \left(\frac{-\sin(\alpha) - \mathrm{mcos}(\alpha)}{\mathrm{M} - \mathrm{msin}(\alpha)}\right).\Delta m$$

4° Représenter graphiquement f en fonction de m. Placer également f_{moy}

α (°)	m (gr)	Coef (f)	fmoy
30	170	0.28	0.3145
40	200	0.32	0.3145
45	210	0.33	0.3145
50	220	0.33	0.3145
60	250	0.32	0.3145
70	290	0.3	0.3145
α(moy) (°)	m(moy) (gr)		
49.16	223.33		



5° Déterminer la valeur de f obtenue par la méthode des moindres carrés (relation 9)

D'après la relation (9) :

$$f = \frac{\sum_i cos^2(\alpha_i)}{\sum_i \frac{M}{m_i}\cos(\alpha_i) - \sum_i \sin(\alpha_i)\cos(\alpha_i)}$$

On a en remplaçant les α et m par la valeur des 6 mesures :

$$Calcul\ de\ f:$$

$$\frac{cos^2(30) + cos^2(40) + cos^2(45) + cos^2(50) + cos^2(60) + cos^2(70)}{602.\left(\frac{\cos(30)}{170} + \frac{\cos(40)}{200} + \frac{\cos(45)}{210} + \frac{\cos(50)}{220} + \frac{\cos(60)}{250} + \frac{\cos(70)}{290}\right) - (\sin(30)\cos(30) + \sin(40)\cos(40) + \sin(45)\cos(45) + \sin(50)\cos(50) + \sin(60)\cos(60) + \sin(70)\cos(70))}$$

Soit après calcul, une valeur de :

$$f = 0.3156$$

Interprétation : On a bien après calcul par la méthode des moindres carrées une valeur très proche de la valeur moyenne de f obtenue à la question 3) :

Incertitude relative :

$$\left|\frac{f - f_{moy}}{f}\right| = \frac{0.3156 - 0.3145}{0.3156} \approx 0.003 = 3\%$$