I.P.S.A
63, Bvd de Brandebourg
94200 Ivry Sur Seine

Date de l'épreuve :
Samedi 10 novembre 2018

AERO 2

Professeur responsable : PEREZ-RAMOS

Durée de l'épreuve : 1h

Sans : **Notes de cours**

Sans : **Calculatrice**

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE DES ONDES 1

Question:	1	2	Total
Points:	10	13	23
Note:			

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous paraît être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, vous le signalez clairement dans votre copie et vous poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le barème est donné à titre indicatif.

Rédigez directement sur la copie en dessous de chaque exercice.

Inscrivez vos : nom, prénom et classe. Justifiez vos affirmations si nécessaire. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

NUMERO :

CLASSE :

1. (10 points) **Oscillations transversales**

On dispose de deux ressorts de raideur identique k, de même longueur ℓ_0 à vide et d'une masse m ponctuelle reliée par une tige métallique aux deux ressorts placés verticalement de part et d'autre de la masse m. Le système mécanique se trouve sur un plan horizontal comme le montre la figure 1. La distance entre la tige et l'extrémité fixe de chaque ressort est de $a > \ell_0$. On déplace horizontalement la masse m jusqu'à une abscisse x. On suppose que $x \ll a$ et on néglige toutes sortes de frottements.

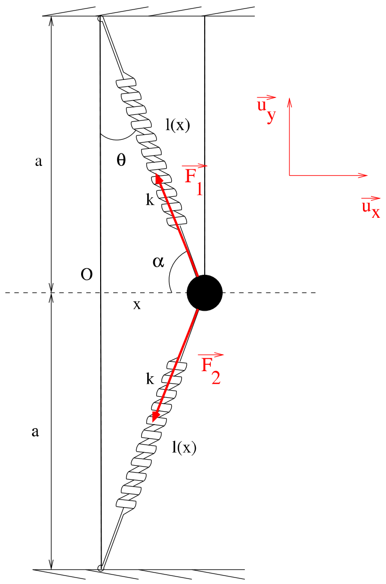

FIGURE 1 – Oscillations transversales d'une masse attachée à deux ressorts. Les angles θ et α sont tels que $\alpha + \theta = 90°$.

(a) **(2)** Faire le bilan des forces et les représenter sur la figure 1.

Solution: Voici l'ensemble des forces qui agissent sur la masse :

— la force de tension selon le ressort au dessus : $\vec{F}_1$ **(0.25)**,

— la force de tension selon le ressort au dessus : $\vec{F}_2$ **(0.25)**,

— la réaction du plan horizontal sur la masse : $\vec{R}$ **(0.25)**,

— et le poids de la masse $\vec{P}$ **(0.25)**.

On se contentera de représenter que les tensions sur la masse car $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$.

Pour les deux forces sur la figure **(0.5+0.5=1)**

(b) **(2)** Projeter les forces sur les vecteurs unitaires de la base cartésienne $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ en fonction de l'angle de votre choix (α ou θ).

Solution:
En fonction de θ :

$$\overrightarrow{F}_1 = -k(\ell(x)-\ell_0)\sin(\theta)\vec{u}_x + k(\ell(x)-\ell_0)\cos(\theta)\vec{u}_y, (\mathbf{0.5+0.5=1})$$

$$\overrightarrow{F}_2 = -k(\ell(x)-\ell_0)\sin(\theta)\vec{u}_x - k(\ell(x)-\ell_0)\cos(\theta)\vec{u}_y, (\mathbf{0.5+0.5=1})$$

ou en fonction de α :

$$\overrightarrow{F}_1 = -k(\ell(x)-\ell_0)\cos(\alpha)\vec{u}_x + k(\ell(x)-\ell_0)\sin(\alpha)\vec{u}_y,$$

$$\overrightarrow{F}_2 = -k(\ell(x)-\ell_0)\cos(\alpha)\vec{u}_x - k(\ell(x)-\ell_0)\sin(\alpha)\vec{u}_y.$$

(c) **(2)** Appliquer le principe fondamentale de la dynamique et en déduire l'équation différentielle du mouvement.

Solution:

$$\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = m\vec{a}, (\mathbf{0.5})$$

où l'on doit tenir compte des réponses données aux questions précédentes (pour θ) :

$$-2k(\ell(x)-\ell_0)\sin(\theta) = m\ddot{x}, (\mathbf{0.5}) \quad \sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{\ell(x)}, (\mathbf{0.5})$$

donc on peut réécrire :

$$m\ddot{x} + 2k\left(1 - \frac{\ell_0}{\ell(x)}\right)x = 0.(\mathbf{0.5})$$

On procède de la même manière par rapport à l'angle α :

$$-2k(\ell(x)-\ell_0)\cos(\alpha) = m\ddot{x}, \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{\ell(x)},$$

donc on peut réécrire :

$$m\ddot{x} + 2k\left(1 - \frac{\ell_0}{\ell(x)}\right)x = 0.$$

Dans les deux cas on obtient la même équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{\ell(x)}\right)x = 0.$$

(d) **(2)** L'équation différentielle obtenue, est-elle linéaire ? Le cas échéant, appliquer l'approximation qui permettrait de la linéariser.

Solution:
L'équation n'est pas linéaire (**0.5**). Il faut donc linéariser dans le cas présent :
$*$ la linéarité, étant brisée par le terme en $\ell_0/\ell(x)$, on fait un développement de Taylor au voisinafe de $x \approx 0$ pour de petites oscillations (approximation de l'oscillateur harmonique) et on pose :

$$\sqrt{a^2 + x^2} \approx a, (\mathbf{0.5})$$

d'où,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)x = 0.(\mathbf{1})$$

(e) Donner la solution générale de l'équation obtenue et la période du mouvement.

Solution: On pose :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)}(\mathbf{0.5})$$

et la solution générale :

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi).(\mathbf{0.5})$$

L'expression de la période est :

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)}}.(\mathbf{1})$$

2. (13 points) **Oscillations harmoniques couplées**

On considère deux points matériels de même masse m reliés à trois ressorts non déformés initialement de même longueur ℓ_0. La constante de raideur des deux ressorts attachés au support mécanique à gauche et à droite, est égale à k, et la constante de raideur du ressort de couplage est égale à $2k$ comme le montre la figure 2. On néglige les frottements, les dimensions des masses et on fixe la longueur du système selon l'axe Ox à $3\ell_0$.

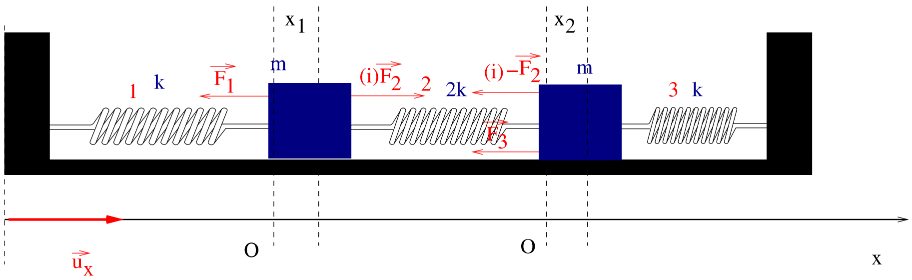

FIGURE 2 – Deux masses couplées par un ressort.

On écarte le système de sa position d'équilibre en déplaçant l'une ou les deux masses et en lâchant l'ensemble. Le système se met à osciller comme le montre la figure. On appellera x_1 et x_2 les abscisses des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre.

(a) **(1.5)** Donner les allongements des ressorts lorsque le système est en mouvement.

Solution:

D'après la figure ci-dessus (en mouvement) :

- Ressort à gauche : allongement = $\ell_0 + x_1$, **(0.5)**
- Ressort de couplage (au milieu) : allongement = $\ell_0 - x_1 + x_2$, **(0.5)**
- Ressort à droite : allongement = $\ell_0 - x_2$. **(0.5)**

(b) **(2.5)** Faire le bilan des forces, les représenter sur la figure et donner leurs expressions.

Solution:

1. L'action du ressort à gauche sur la masse à gauche est de sens opposé à l'axe Ox :
$$\overrightarrow{F_1} = -kx_1\vec{u}_x, \textbf{(0.5)}$$
2. Le ressort de couplage est étiré si (i) $x_2 > x_1$, comprimé si (ii) $x_2 < x_1$. Dans le cas (i) :
$$\overrightarrow{F_2} = 2k(x_2 - x_1)\vec{u}_x = -2k(x_1 - x_2)\vec{u}_x, \textbf{(0.5)}$$

la force est orienté selon l'axe Ox et dans le cas (ii) :

$$\overrightarrow{F_2} = -2k(x_1 - x_2)\vec{u}_x,$$

la force est de sens opposée. Cependant, quel que soit le cas, il s'agit de la même expression car $(x_1 - x_2)$ est une valeur algébrique. Ces expressions sont en effect valables quelle que soit la configuration choisie pour cette étude.

3. Finalement, le ressort à droite étant comprimé, la force est opposée à l'axe Ox donc :

$$\overrightarrow{F_3} = -kx_2\vec{u}_x.(\mathbf{0.5})$$

Pour les 4 forces sur la figure (**4x0.25=1**)

(c) (**2**) Écrire le système d'équations différentielles couplées.

Solution:
On applique le PFD pour la masse à droite sachant que $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} = \vec{0}$ (**0.5**) :

$$\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = m\vec{a}_1 \Rightarrow -kx_1 + 2k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1, (\mathbf{0.5})$$

d'où l'équation du mouvement de la masse à gauche :

$$m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 = 0.(\mathbf{0.25})$$

Pour la masse à droite, le système étant parfaitement symétrique par rapport au centre de la figure, il suffit d'échanger les indices 1 et 2 dans l'équation précédente, d'où

$$m\ddot{x}_2 + 3kx_2 - 2kx_1 = 0.(\mathbf{0.75})$$

Sinon, on peut aussi appliquer le PFD de la même manière en suivant la figure pour arriver au même résultat.

(d) (**1**) Le système mécanique donné, est-il symétrique ? Le changement de variable $X_1 = x_1 + x_2$ et $X_2 = x_1 - x_2$ est-il adapté ici ?

Solution:
Le système est bien symétrique (**0.5**). Le changement de variable proposé permet de diagonaliser le système et par conséquent, celui-ci permet de le découpler pour ainsi obtenir les modes propres du système. (**0.5**)

(e) (**2**) Découpler alors le système que l'on réécrira pour les variables X_1 et X_2 et en déduire les modes propres.

Solution: En additionnant d'abord les deux équations obtenues précédemment on obtient :

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0, \mathbf{(0.25)} \qquad X_1 = x_1 + x_2,$$

d'où

$$m\ddot{X}_1 + kX_1 = 0 \Rightarrow \ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 = 0, \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}.\mathbf{(0.25)}$$

En soustrayant les deux équation on a :

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 5k(x_1 - x_2) = 0, \mathbf{(0.25)} \qquad X_2 = x_1 - x_2,$$

d'où

$$m\ddot{X}_2 + 5kX_2 = 0 \Rightarrow \ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}}.\mathbf{(0.25)}$$

Les modes propres sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \mathbf{(0.5)} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}}.\mathbf{(0.5)}$$

(f) **(2)** Donner la solution générale du système original : $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Solution:
On donne la solution général du système découplé pour les variables X_1 et X_2 :

$$X_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \mathbf{(0.5)} \qquad X_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \mathbf{(0.5)}$$

et on doit inverser le système, soit :

$$x_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2), \mathbf{(0.25)} \qquad x_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2).\mathbf{(0.25)}$$

Par conséquent,

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \mathbf{(0.25)}$$

$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).\mathbf{(0.25)}$$

(g) (**Bonus sur 1 point**) On donne les conditions initiales suivantes : pour $t = 0$, $x_1 = 0$, $v_1 = 0$, $x_2 = a$, $v_2 = 0$. Quelle est alors la solution du système ? En déduire la période des battements.

Solution:
À partir des conditions initiales, on doit dériver x_1 et x_2 par rapport au temps pour ainsi obtenir le système :

$$
\begin{aligned}
0 &= A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2), && (1)\\
0 &= -A_1\omega_0 \sin(\varphi_1) - A_2\sqrt{3}\omega_0 \sin(\varphi_2), && (2)\\
a &= A_1 \cos(\varphi_1) - A_2 \cos(\varphi_2), && (3)\\
0 &= -A_1\omega_0 \sin(\varphi_1) + A_2\sqrt{3}\omega_0 \sin(\varphi_2), && (4)
\end{aligned}
$$

d'où

$$A_1 = A_2 = \frac{a}{2}$$

et

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

En effet, puisque A_1 et A_2 sont forcément non-nulles, les équations (2) et (4) forment un système homogène aux inconnues $\sin(\varphi_1)$ et $\sin(\varphi_2)$ dont la solution unique est la solution triviale $\sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Ensuite on remplace $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ dans (1) et (3), on arrive au système simplifié :

$$
\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= 0, && (5)\\
A_1 - A_2 &= a && (6)
\end{aligned}
$$

qui explique la suite. On obtient ainsi la solution du système associée aux conditions aux limites :

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{a}{2}\left[\cos(\omega_0 t) - \cos\left(\sqrt{5}\omega_0 t\right)\right] = a \sin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\omega_0 t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\omega_0 t\right), && (7)\\
x_2(t) &= \frac{a}{2}\left[\cos(\omega_0 t) + \cos\left(\sqrt{5}\omega_0 t\right)\right] = a \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\omega_0 t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\omega_0 t\right). && (8)
\end{aligned}
$$

La période de battements :

$$\tau = \frac{2\pi}{\left(\sqrt{5}-1\right)\omega_0}.$$

(Pour avoir le bonus, il suffira d'avoir posé le système à résoudre, ou d'avoir donné la bonne période de battements !)

(h) (**Bonus sur 1 point**) Donner l'allure de la loi du mouvement pour la masse à gauche.

Solution: Il suffit de donner l'allure comme le montre la figure, quel que soit l'allongement : x_1 ou x_2.

Rappel mathématique :

$$\begin{aligned}\cos(a)+\cos(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),\\ \cos(a)-\cos(b) &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right).\end{aligned}$$

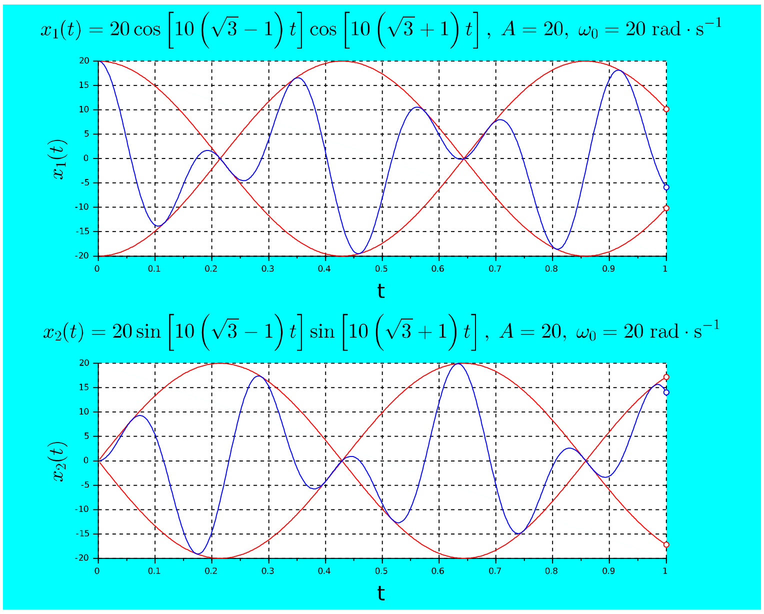

FIGURE 3 – Battements dans le cas $\omega_0 = 20\,\mathrm{rad}\cdot s^{-1}$.

(Pour avoir le bonus, il suffira de donner l'allure de la courbe au moins une fois, sans donner d'importance aux détails mathématiques !)