

必修一、必修二注意力测试

广州市中学生第二精神病院选拔测试

@PhantomBird

1. 本场测试中，自认为是天才的人坐在试室的左边，自认为是疯子的人坐在试室的右边。
自认为是天子的人，请坐在讲台上监考。
2. 本试卷共有 4 页，每页 1 题，满分 $+\infty$ 分，我们不搞应试教育的条条框框。
如果试卷少于 4 页，不要惊慌，那是出题人摸鱼没出完。
3. “必修一、必修二”仅用于标定试卷知识范围上限，本试卷不对思维难度作任何保证。
4. 题目全部做出来的，家里得请高人了。
5. 题目全部做出来的，必须无视所有请高人的建议，争做摒除封建迷信的新青年。
6. 题目全部做出来的，将获得“数学高人”荣誉称号，并且直接入院。

1. 已知四面体 $ABCD$ 中，与 A, B, C, D 相对的面分别为 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ，四面体内有一点 O ， A', B', C', D' 分别为 AO, BO, CO, DO 与 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的交点。分别连接 A', B', C', D' 与其所在的三角形的三个顶点，将每个三角形分割为三个小三角形。

(1) 求证：

$$\frac{S_{\triangle AC'D'}}{S_{\triangle ACD'}} = \frac{S_{\triangle BC'D'}}{S_{\triangle BCD'}}$$

(2) 现在，我们以如下规则在四面体表面上游走：在分割出的 12 个小三角形中，从一个三角形 Δ_1 开始，每次选择一个与 Δ_i 有公共边的 Δ_{i+1} ，直至游走向 Δ_1 。设在游走过程中共游走过 n 个小三角形，且 $\forall \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$ 不全共面。

当 $n > 2$ 时，求证： $S_{\Delta_1} S_{\Delta_3} \dots S_{\Delta_{n-1}} = S_{\Delta_2} S_{\Delta_4} \dots S_{\Delta_n}$ ；或者，如果你看得懂连乘符号：

$$\prod_{1 \leq i \leq n}^{2|i} S_{\Delta_i} = \prod_{1 \leq i \leq n}^{2 \nmid i} S_{\Delta_i}$$

2.

我跑过麦浪翻滚的清晨，
追赶那个慢半拍的自己。
他总在下一个街角转身，
衣摆扫起淡金色的烟尘。

距离是狡猾的叙事者——
当我借来季风的速度，
他的轮廓却薄成蝉翼，
袖口纽扣渐作流萤散去，
在更快的步履中溶解。

永远的三步之遥：
他始终是水面的银鳞，
我是垂钓月光的绳。

——DeepSeek 《光年外的倒影》

有单调递增的连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k > 1$, x_1, x_2 分别为方程 $m = f(x_1), m = kf(x_2)$ 的解, $g(m) = x_1 - x_2$ 单调递减.

(1) $g(m)$ 的定义域是否可以为 \mathbb{R} ? 给出判断并说明理由.

(2) 定义 $f(x) \gg g(x)$, 当且仅当存在 x_0 使得 $\forall x > x_0, f(x) > g(x)$.

① $f(x) \gg a^x$ 是否一定对所有 a 成立? 给出判断并说明理由.

(hack @qyc) 若 $\exists m_0$, $g(m)$ 在 $(m_0, +\infty)$ 都有定义呢?

② 若 $w \gg g(m)$ 对任意 $w > 0$ 成立, 求证: $f(x) \gg a^x$.

3. (文 / DeepSeek)

艾琳的呼吸在面罩里凝成白霜。

寒风撕扯着正辉城的能量穹顶，这座人类最后的正十二边形堡垒在冰原上孤独闪烁。

艾琳博士盯着中央控制台的全息投影——能量核心的赤红光点正不规则地漂移，警报器时不时爆发出刺耳的鸣响。

“功率波动不是随机的，”她突然低语，手指划过投影边缘的角度数据，“它和核心的位置有关。”

助手卢卡调出历史记录，瞳孔骤缩：“博士……这些峰值位置，和初代城主手稿里的标记完全重合！”

窗外，量子加热器的蓝光开始明灭不定。

地下档案库的氙气灯在艾琳头顶嗡嗡作响。

她颤抖着展开那张从初代城主棺木中发现的羊皮纸，泛黄的页角用拉丁文潦草写着：

“*能量即角度之和……当十二圣角……*”

纸面中央是一幅残缺的正多边形手绘图，线条间布满了用黑曜石粉末标注的角度符号。卢卡突然抽了口气：“这些符号……和今天核心的功率波动模式完全一致！”

窗外传来冰晶撞击穹顶的脆响。艾琳摸向颈间的吊坠——那是枚刻着 $\sum \angle PA_i A_{i+1}$ 的青铜徽章。

“原来祖先早就算出了答案。”她轻声道。

控制台的警报声割裂了空气。

第一块加热器面板在东北角爆炸，冰原的风啸声隐约可闻。

时间紧迫。你现在需要解决这个问题：

平面上有一个正 n 边形 $A_1 A_2 \dots A_n$ ，正 n 边形内部（含边界但不含顶点）有一点 P ，求

$$s = \sum_{i=1}^n \angle PA_i A_{i+1} \quad (A_{n+1} = A_1)$$

的取值范围.

4. 星和流萤（游戏角色）正在看星星和萤火虫.

星在翁法罗斯学了一些**魔术技巧**，于是打算表演个魔术.

秘密基地的天空是一个无限的平面. 平面上的每个整点（横纵坐标都为整数的点）都有一颗星星. 星的魔术是这样的：

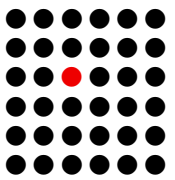





- (1) 选择一颗星星，将这颗星星变成「萤」；
- (2) 过一只「萤」作一条直线，并把直线上的星星全部变成「萤」. 与此同时，上一步产生的所有「萤」将变为萤火虫.

在这场魔术中，星会无限重复第 2 步，使得对于每一颗星星，总存在一个整数 N ，使得这颗星星在第 N 步变成萤火虫.

在筑梦边境，筑梦是需要消耗命途能量的. 星可以花费 1 点代价，为所有方向增加 1 点充能. 星每作一个方向的直线，都会消耗这个方向的 1 点充能.

求把所有星星都变成萤火虫的最小代价.

以下是一个示例（不保证代价最小）：

步数	1	2	3
平面局部			
各个方向 消耗的充能	/	$k=-1: 1$	$k=-1: 1$ 竖直: 1
步数	4	5	6
平面局部			
各个方向 消耗的充能	$k=-1: 1$ 竖直: 1 $k=2: 1$	$k=-1: 2$ 竖直: 1 $k=2: 1$	$k=-1: 2$ 竖直: 2 $k=-2: 1$

图例：

- 星星
- 萤
- 萤火虫

在示例中，由于各个方向最多消耗了 2 点充能，目前的代价为 2.