

CRYPTO-ACTIFS & MARCHÉS TRADITIONNELS

*Persistance de la Volatilité
et Analyse de Mémoire Longue*

Chahinez KEHAL
Najoua NOUIOURA
Jiayi WU

Parcours SIEF
Systèmes d'Information Économiques et Financiers
Année Universitaire 2025-2026

Université de Montpellier

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Méthodo 1 : La démarche Box-Jenkins	2
1.2	Méthodo 2 : ARCH/GARCH et Clustering	2
1.3	Encadré Méthodo 3 : Intuition et conditions de l'ARFIMA	3
2	Revue de littérature	3
2.1	Longue mémoire & ARFIMA sur crypto (Sosa et al., 2023)	3
2.2	Non-linéarité et propriétés fractales (Tong et al., 2022)	4
2.3	Régimes et facteurs macro-économiques (Shih et al., 2024)	4
2.4	Encadré Méthodo (B&T) : Du test au choix du modèle	4
3	Analyse des Données et Faits Stylisés	4
3.1	Prétraitement et Nettoyage des Séries	5
3.2	Analyse Descriptive	5
3.3	Dynamique de Prix et Corrélations	6
3.4	Proxys de Volatilité	9
4	Tests Économétriques : Stationnarité, Non-linéarité et Persistance	9
4.1	Diagnostics de Stationnarité (TAB 4)	10
4.2	Analyse de l'Autocorrélation	10
4.3	Test de Non-linéarité BDS (TAB 5)	11
4.4	Estimation de l'Exposant de Hurst (TAB 6, Figure 6)	12
4.4.1	Transition	12
5	Modélisation ARFIMA et Arbitrage de Risque	13
5.1	Spécification du Modèle Pivot BTC (TAB 7)	13
5.2	Diagnostic de Ljung-Box et Validité du Blanchiment	14
5.2.1	Interprétation et ouverture	15
5.3	Comparaison Multi-actifs du Paramètre d (TAB 8, FIG 13)	15
5.3.1	Transition	16
6	Robustesse et Dynamique des Régimes	16
6.1	Stabilité de d par Sous-périodes (TAB 9, FIG 14)	16
6.2	Discussion sur la "Spurious Long Memory"	17
6.3	Sensibilité au Paramètre de Troncation K (TAB 7_robustesse)	17
6.3.1	Transition	18
7	Conclusion Générale et Implications Pratiques	18
7.1	Synthèse des Résultats	18
7.2	Implications pour la Gestion du Risque de Queue	18
7.3	Limites et Perspectives	19
8	Annexes	19
8.1	Annexe A1 : Dictionnaire des données	19
8.2	Annexe A2 : Résultats complets des tests de stationnarité (TAB 4)	19
8.3	Annexe A3 : Métadonnées de pré-filtrage (Metadata_prefilter_TAB5)	19

1 Introduction

L'intégration des actifs numériques dans la sphère financière globale, amorcée par l'émergence du Bitcoin, a atteint une phase de maturité structurelle avec le déploiement massif des fonds indiciels cotés (ETF) "spot". Ce processus de "wall-streetisation" ne constitue pas seulement un changement d'échelle de liquidité, mais une mutation profonde de la morphologie statistique des séries temporelles. En reliant les écosystèmes décentralisés aux flux de capitaux institutionnels, les ETF modifient les mécanismes de découverte des prix et, par extension, la dynamique de dépendance temporelle des rendements. Pour l'économetre, l'enjeu consiste à déterminer si cette institutionnalisation lisse les propriétés fractales historiques de ces actifs ou si, au contraire, elle en cristallise la mémoire longue et la non-linéarité. L'arbitrage entre une modélisation par processus à mémoire courte (famille ARIMA) et à mémoire longue (famille ARFIMA) devient alors le pivot d'une gestion des risques rigoureuse.

Le tournant institutionnel observé entre 2024 et 2026 s'est cristallisé autour du succès sans précédent de l'ETF IBIT de BlackRock. En 2025, ce véhicule a enregistré la plus longue série d'entrées nettes de l'année, s'étendant sur une période continue de 19 à 31 jours (Cointelegraph, 2025 ; Farside, 2025). Cette phase d'accumulation a toutefois été ponctuée par une volatilité de flux extrême, illustrée par une sortie record de 430,8 millions de dollars en une seule journée à la fin du mois de mai 2025 (Cointelegraph, 2025 ; Farside, 2025). Malgré ces épisodes de reflux, l'IBIT s'est imposé comme un pilier du marché, se classant au 6 rang des ETF américains pour les entrées nettes annuelles avec environ 25,4 milliards de dollars collectés (Yahoo Finance, 2025 ; Bloomberg/CoinDesk, 2025). Au premier trimestre 2026, les encours sous gestion (AUM) du fonds oscillaient entre 67 et 70 milliards de dollars, témoignant d'une adoption structurelle (BlackRock, 2026 ; Yahoo Finance, 2026).

Le segment de l'Ethereum a connu une trajectoire analogue après le lancement des ETF spot en juillet 2024. Le mois de juillet 2025 a marqué un sommet historique pour cette classe d'actifs avec des entrées mensuelles cumulées de 5,4 milliards de dollars (Cointelegraph, 2025 ; ETF.com, 2025). Cette dynamique a été portée par des pics de souscription journaliers, notamment un record à 726,7 millions de dollars, sous l'impulsion du fonds ETHA de BlackRock dont les flux quotidiens ont fréquemment dépassé le seuil des 400 millions de dollars nets (The Block, 2025 ; SoSoValue, 2025).

Cette intégration s'accompagne d'une convergence macroéconomique inédite. En juillet 2025, la corrélation sur 90 jours entre l'indice de volatilité du Bitcoin (DVOL) et le VIX a atteint un niveau historique de 0,88 (CoinDesk, 2025 ; The Bitcoin Bulletin, 2025). Bien que la volatilité du Bitcoin tende à s'éroder, elle demeure structurellement supérieure à celle des actifs classiques : les analyses de marché la fixent à 3,6 fois celle de l'or et 5,1 fois celle des actions mondiales (iShares, 2025 ; BlackRock, 2025). Enfin, la relation au dollar (DXY) montre des signes de découplage, le Bitcoin faisant preuve d'une résilience singulière face à la force du billet vert en 2024-2025 (Cointelegraph, 2025 ; CryptoSlate, 2025).

Conformément à l'approche de Bourbonnais & Terraza (8e éd.), l'analyse des séries temporelles débute par l'étude de la stationnarité. Une série y_t est dite sta-

tionnaire, ou intégrée d'ordre zéro ($I(0)$), si ses moments d'ordre 1 et 2 sont invariants par translation temporelle. Dans la pratique financière, la plupart des séries de prix sont $I(1)$, nécessitant une différenciation entière pour devenir stationnaires.

La modélisation classique repose sur le processus ARMA(p,q) :

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$$

où L est l'opérateur de retard, $\phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i$ et $\theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j$. Si la série nécessite une différenciation entière d , on parle alors de modèle ARIMA(p,d,q). Cependant, ces modèles supposent une mémoire courte (décroissance exponentielle des autocorrélations).

Pour capturer la persistance observée sur les marchés crypto, le modèle ARFIMA (AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average) introduit un paramètre de différenciation fractionnaire d . Le processus s'écrit :

$$\phi(L)(1 - L)^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

L'opérateur $(1 - L)^d$ se définit par son expansion en série binomiale utilisant la fonction Gamma Γ :

$$(1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-d)} L^k$$

L'estimation de d requiert des méthodes spécifiques telles que l'estimateur semi-paramétrique de Geweke et Porter-Hudak (GPH) ou la méthode du maximum de vraisemblance exacte de Whittle.

1.1 Méthodo 1 : La démarche Box-Jenkins

La modélisation suit un cycle itératif rigoureux :

Identification : Analyse des fonctions d'autocorrélation (ACF/PACF) et tests de racines unitaires (ADF, Phillips-Perron, KPSS).

Estimation : Calibration des paramètres ϕ et θ par maximum de vraisemblance.

Diagnostic : Test de Ljung-Box sur les résidus pour vérifier l'absence d'autocovariance résiduelle. La sélection s'opère via les critères d'information AIC et BIC pour maximiser la parcimonie.

1.2 Méthodo 2 : ARCH/GARCH et Clustering

Les séries financières manifestent une hétéroscédasticité conditionnelle (volatilité par grappes). Le modèle GARCH(1,1) définit la variance ainsi :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Il capture la persistance de la variance (β) et la réaction aux chocs récents (α).

1.3 Encadré Méthodo 3 : Intuition et conditions de l'ARFIMA

Le paramètre d régit la mémoire du processus.

- Si $d \in (0, 0.5)$, le processus est stationnaire et possède une mémoire longue (décroissance hyperbolique des autocorrélations).

- Si $d \in (-0.5, 0)$, le processus est dit à "mémoire intermédiaire" ou anti-persistant. La stationnarité et l'inversibilité sont garanties pour $|d| < 0.5$. Sur les crypto-actifs, d est souvent proche de 0.4 sur les proxys de volatilité.

Cette étude s'appuie sur l'Hypothèse des Marchés Fractals (FMH), qui postule que les marchés financiers sont composés d'investisseurs ayant des horizons de temps différents, générant des structures d'autocorrélation persistantes. Trois hypothèses sont testées :

- **H1** : Les proxys de volatilité du Bitcoin et de l'Ethereum affichent une mémoire longue significative ($d > 0.3$), contrairement aux indices boursiers traditionnels (S&P 500).

- **H2** : Le rejet de l'hypothèse nulle du test BDS confirme une non-linéarité intrinsèque, rendant les modèles ARIMA insuffisants.

- **H3** : L'institutionnalisation via les ETF n'a pas éliminé le comportement fractal des actifs numériques, bien qu'elle en modifie les probabilités de régime.

La stratégie privilégie l'utilisation des rendements en valeur absolue $|r_t|$ plutôt que les carrés r_t^2 . En économétrie financière, $|r_t|$ est considéré comme un proxy de volatilité plus robuste, car moins sensible aux valeurs extrêmes (outliers) fréquentes dans les distributions à queues épaisses typiques des crypto-actifs.

Au regard de la convergence entre finance décentralisée et traditionnelle, la question centrale est la suivante : « Bitcoin et Ethereum présentent-ils davantage de non-linéarité et une mémoire plus longue que les actifs traditionnels, et quelles sont les implications critiques de la différenciation fractionnaire pour la gestion du risque de queue par rapport aux modèles ARIMA classiques ? » Une mauvaise spécification de la mémoire longue conduit inévitablement à une sous-estimation de la persistance des chocs de volatilité et à un mauvais calibrage de la Valeur à Risque (VaR).

2 Revue de littérature

La calibration d'un pipeline économétrique pour les actifs numériques impose de dépasser les modèles linéaires. La littérature récente s'accorde sur le rejet de l'efficience faible du marché, justifiant le recours aux outils de la dynamique non-linéaire.

2.1 Longue mémoire & ARFIMA sur crypto (Sosa et al., 2023)

Sosa, Ortiz & Cabello-Rosales (2023) étudient le Bitcoin et l'Ethereum (période 2014-2021) en utilisant des modèles ARFIMA couplés à des processus GARCH fractionnellement intégrés (FIGARCH et HYGARCH). Leurs travaux mettent en évidence que la mémoire longue n'est pas seulement présente dans les rendements, mais

surtout dans la volatilité. Ils identifient que le couplage optimal diffère selon l'actif : l'ARFIMA-HYGARCH est supérieur pour le Bitcoin, tandis que le FIGARCH capte mieux la dynamique de l'Ethereum. Cette étude légitime notre approche consistant à utiliser l'ARFIMA pour modéliser la persistance structurelle et à comparer les paramètres d entre les actifs pour évaluer leur degré respectif de maturité.

2.2 Non-linéarité et propriétés fractales (Tong et al., 2022)

Tong, Chen & Zhu (2022) explorent la nature chaotique du Bitcoin à travers une séquence robuste : pré-filtrage GARCH(1,1)-GED, puis application du test BDS (Brock, Dechert, Scheinkman) et calcul de l'exposant de Hurst (H). Leurs résultats rejettent catégoriquement l'hypothèse de marche aléatoire. La présence d'un exposant de Hurst supérieur à 0,5 confirme la persistance (mémoire longue), tandis que le test BDS significatif après filtrage indique que la dépendance temporelle n'est pas uniquement linéaire. Ce travail valide notre pipeline méthodologique : si les résidus d'un ARMA/GARCH échouent au test BDS, l'ARFIMA ou les modèles à régimes deviennent les seules alternatives viables.

2.3 Régimes et facteurs macro-économiques (Shih et al., 2024)

L'approche de Shih, Huang & Hsu (2024) via les modèles Markov Regime-Switching (MS) apporte une nuance fondamentale. Ils démontrent que le Bitcoin alterne entre des régimes de haute et basse volatilité, pilotés par des variables macroéconomiques comme le DXY et le VIX. Cette perspective est cruciale pour notre étude : elle suggère que la mémoire longue observée pourrait être, en partie, la manifestation de changements de régimes structurels non détectés (phénomène de "spurious long memory"). Bien que notre modèle pivot soit l'ARFIMA, la prise en compte des régimes de Shih et al. permet d'enrichir l'interprétation des résultats en Partie IV.

2.4 Encadré Méthodo (B&T) : Du test au choix du modèle

Le lien logique entre la théorie et la pratique s'établit selon la séquence :

Tests de stationnarité (ADF/PP/KPSS) : Détermination de l'ordre d'intégration.

Analyse de l'ACF : Si la décroissance est hyperbolique et que $Hurst > 0,5$, la mémoire longue est suspectée.

Test BDS sur résidus ARMA : Si significatif, la structure est non-linéaire.

Sélection ARFIMA : Arbitrage final par les critères AIC/BIC face au modèle ARIMA. Le modèle ayant le BIC le plus faible est privilégié pour sa parcimonie.

3 Analyse des Données et Faits Stylisés

La caractérisation statistique initiale constitue le fondement sine qua non de la sélection du pipeline économétrique. Une identification rigoureuse des moments d'ordre supérieur et des trajectoires de prix permet de valider ex-ante la pertinence

des modèles de mémoire longue. Pour cette étude, l'échantillon retenu s'étend du 10 novembre 2017 au premier trimestre 2026, garantissant des dates de trading communes pour une comparaison synchronique entre les marchés cryptographiques et traditionnels.

3.1 Prétraitement et Nettoyage des Séries

L'alignement temporel des séries a nécessité l'élimination des jours de fermeture des marchés financiers traditionnels. Contrairement aux crypto-actifs, les indices boursiers et les matières premières présentent des discontinuités structurelles durant les week-ends et jours fériés. Un traitement spécifique a été appliqué à l'Ethereum (ETH), dont la série initiale présentait 17,86 % de zéros, phénomène lié aux périodes d'absence de cotation ou d'immobilité des prix sur certains segments historiques. Ces zéros ont été traités comme des données manquantes pour ne pas biaiser les tests de stationnarité.

3.2 Analyse Descriptive

Dans cette section, nous caractérisons les rendements journaliers logarithmiques $r_t = \Delta \ln(P_t)$ des dix actifs afin d'établir les faits stylisés qui motivent la suite du protocole économétrique. Le tableau 3A montre d'abord que les moyennes de rendements sont très faibles (de l'ordre de 10^{-4}), ce qui suggère que l'enjeu principal n'est pas la dynamique de la moyenne mais celle de la dispersion et de la dépendance. En revanche, les écarts-types révèlent une hétérogénéité importante : les cryptomonnaies sont nettement plus volatiles que les indices actions (par exemple $\sigma_{BTC} = 0,0359$ et $\sigma_{ETH} = 0,0426$ contre $\sigma_{SPX} = 0,0095$), tandis que le VIX présente une variabilité encore plus élevée. Les moments d'ordre supérieur confirment enfin une forte non-normalité des distributions : l'asymétrie est souvent négative sur les actifs "retour" (BTC, ETH, SPX), et la kurtosis est massivement supérieure à la référence gaussienne, indiquant des queues épaisses (BTC $\approx 31,86$, ETH $\approx 42,23$, mais aussi US10Y $\approx 59,32$ et OIL $\approx 48,34$). Ces constats invalident l'hypothèse d'innovations normales homoscedastiques et justifient l'usage ultérieur de tests et modèles capables de rendre compte d'extrêmes fréquents et de dépendances non triviales.

Le tableau 3B complète cette lecture en considérant $v_t = |r_t|$, proxy simple et robuste de la volatilité réalisée, qui joue un rôle central dans notre problématique de mémoire longue. En moyenne, $|r_t|$ est nettement plus élevé pour les cryptos (BTC : 0,0230, ETH : 0,0253) que pour les indices actions (SPX : 0,0050, NDX : 0,0065), ce qui traduit une exposition au risque journalière plus forte. Toutefois, la comparaison multi-actifs montre que la crypto n'est pas seule à présenter des variations d'amplitude élevée : le VIX a un niveau moyen de $|r_t|$ supérieur ($\approx 0,0377$), et certains marchés traditionnels (US10Y, OIL) exhibent également des épisodes extrêmes. De plus, $|r_t|$ est par construction très asymétrique et fortement leptokurtique : les kurtosis atteignent des niveaux très élevés (BTC $\approx 70,71$, ETH $\approx 82,15$, US10Y $\approx 88,25$, OIL $\approx 75,67$), ce qui est cohérent avec une dynamique faite de nombreuses périodes calmes et de pics rares mais massifs. Cette structure est précisément celle qui, en économétrie financière, est susceptible de générer une autocorrélation persistante

sur les mesures de volatilité et d'appeler des outils dédiés à la persistance (ACF de $|r|$, Hurst, puis ARFIMA).

En synthèse, l'analyse descriptive met en évidence deux points directement liés à la problématique "BTC/ETH vs tous les autres actifs". D'une part, les rendements r_t sont globalement centrés mais présentent des queues épaisses et des asymétries fortes, ce qui rend peu crédible un cadre gaussien simple et justifie une démarche structurée de tests (stationnarité puis filtrage) avant d'évaluer la dépendance non-linéaire et la persistance. D'autre part, les statistiques sur $|r_t|$ montrent une hétérogénéité nette des niveaux de volatilité (cryptos vs indices), tout en rappelant que plusieurs actifs traditionnels (VIX, US10Y, OIL) peuvent exhiber des comportements extrêmes comparables, ce qui impose une comparaison exhaustive sur l'univers des dix actifs. Ces faits stylisés préparent donc la suite du protocole : valider les propriétés de stationnarité, tester la non-linéarité sur résidus filtrés, puis étudier la mémoire longue sur les proxies de volatilité et motiver le pivot ARFIMA sur $|r_{BTC}|$, avant de positionner BTC/ETH dans le classement multi-actifs via le paramètre d .

3.3 Dynamique de Prix et Corrélations

La figure des log-prix normalisés (base 0) met en évidence une dynamique de long terme très différente entre les crypto-actifs et la plupart des actifs traditionnels. BTC et ETH présentent des trajectoires à forte croissance cumulée, marquées par des phases d'expansion rapides suivies de corrections profondes (drawdowns) puis de reprises, ce qui illustre une structure cyclique plus prononcée que celle observée sur l'indice actions SPX et, plus généralement, sur les actifs traditionnels tracés en arrière-plan. La normalisation (base 0) rend la comparaison de trajectoires directement lisible : elle ne compare pas des niveaux de prix incomparables, mais des variations relatives. Empiriquement, cette représentation suggère que la crypto combine une tendance haussière de long terme avec une instabilité importante, ce qui justifie (i) de travailler ensuite en rendements pour viser la stationnarité, et surtout (ii) d'étudier la persistance sur les proxies de volatilité $|r_t|$, susceptibles de capturer les phases de "calme" et de "stress" implicites dans ces cycles.

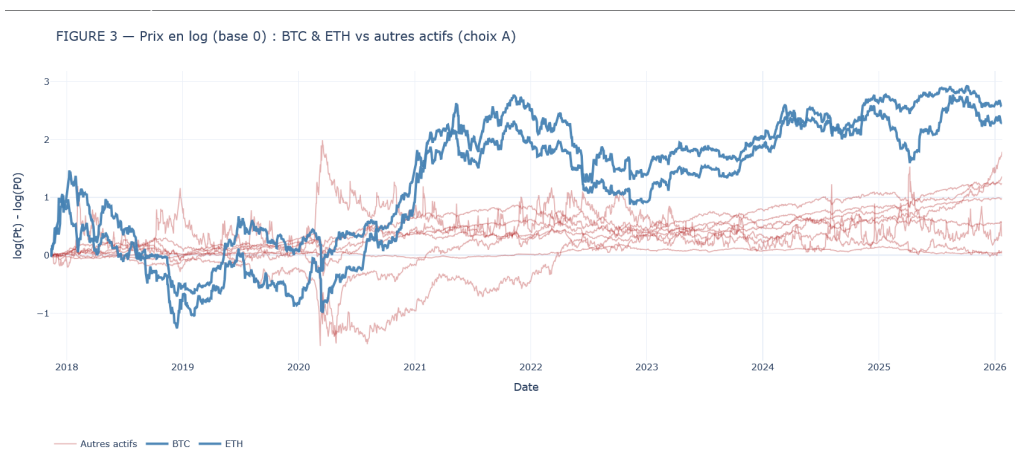


FIGURE 1 – Log-prix normalisés (base 0) des actifs étudiés

La figure 2 compare directement les rendements journaliers et met en évidence une hétérogénéité nette des amplitudes et des épisodes de stress. D’un côté, BTC et ETH affichent des variations journalières plus “étaillées” et des chocs extrêmes plus visibles, ce qui est cohérent avec les écarts-types et quantiles élevés observés dans la partie descriptive. De l’autre côté, les actifs traditionnels ne sont pas homogènes : le VIX présente des pics fréquents et des mouvements très amples (actif de stress), tandis que US10Y et OIL montrent des épisodes de volatilité concentrés (pics) typiques de phases macroéconomiques ou de chocs sur l’énergie. Ce contraste visuel est important pour la problématique “BTC/ETH vs tous” : il rappelle que la comparaison ne doit pas être limitée aux indices actions, car certains actifs macro/commodities rivalisent avec la crypto en termes de chocs et de variabilité. Sur le plan méthodologique, cette figure prépare la suite logique : la dépendance temporelle pertinente se situe moins dans r_t lui-même (souvent faiblement autocorrélé) que dans l’amplitude $|r_t|$, où l’on s’attend à trouver clustering et potentiellement mémoire longue.

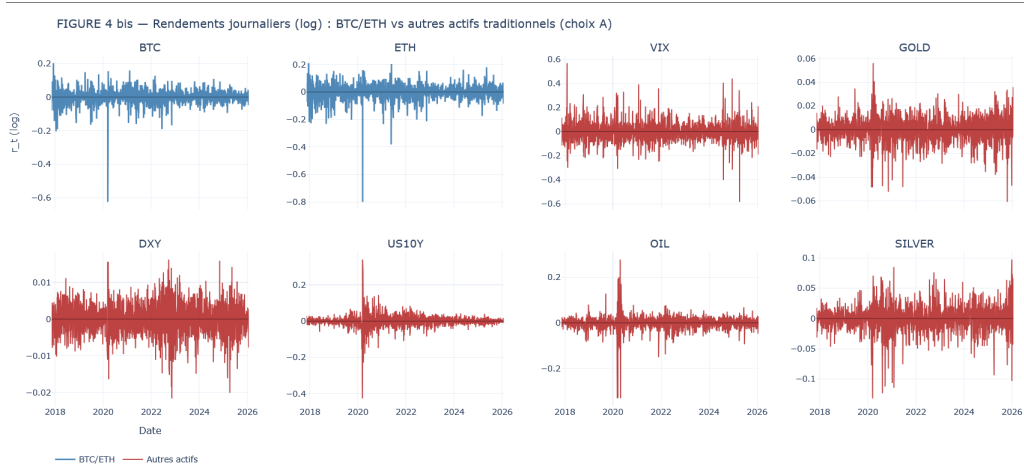


FIGURE 2 – Rendements journaliers des actifs étudiés

La matrice de corrélation synthétise la structure de co-mouvements entre classes d'actifs et permet de positionner BTC/ETH dans un univers complet. Trois résultats ressortent. Premièrement, BTC est modérément corrélé aux actions américaines (corrélation $\approx 0,31$ avec SPX et $\approx 0,33$ avec NDX), ce qui suggère un couplage partiel mais non négligeable avec le risque "actions". Deuxièmement, la corrélation BTC-ETH est très élevée ($\approx 0,83$), indiquant une dynamique crypto largement commune (facteur "crypto" partagé) et justifiant l'analyse conjointe "BTC/ETH vs reste du monde". Troisièmement, la heatmap met en évidence des blocs cohérents dans les actifs traditionnels (par exemple forte corrélation SPX-NDX et relations attendues avec le VIX), rappelant que les marchés traditionnels possèdent eux aussi une structure interne forte. En lien avec la problématique, cette figure montre que la crypto n'est ni totalement découplée, ni totalement assimilable aux actions : elle se situe dans une zone intermédiaire, ce qui renforce l'intérêt d'examiner non seulement les corrélations contemporaines, mais aussi la persistance des processus (via $|r_t|$, Hurst et ARFIMA) et la possibilité de régimes expliquant des variations de co-mouvements dans le temps.

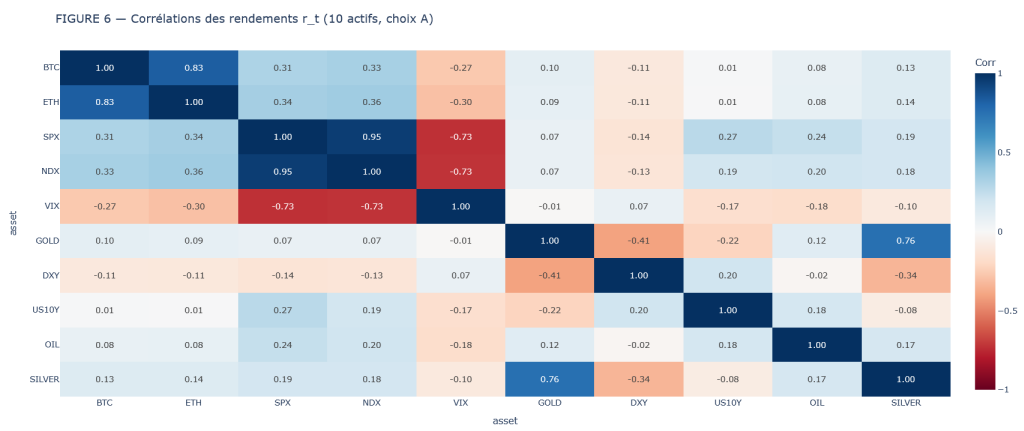


FIGURE 3 – Matrice de corrélation des rendements des actifs

3.4 Proxys de Volatilité

La volatilité est approchée par la valeur absolue des rendements journaliers, $|r_t|$, un proxy largement utilisé dans la littérature financière pour capter l'intensité des fluctuations de marché en l'absence de mesures intrajournalières. La Figure 5 présente l'évolution temporelle de ce proxy pour l'ensemble des actifs étudiés, en distinguant les cryptoactifs (BTC, ETH) des actifs traditionnels (actions, indices de volatilité, variables macro-financières et matières premières).

L'inspection visuelle met en évidence un phénomène marqué de volatility clustering, caractérisé par l'alternance de périodes de faible et de forte volatilité. Ce comportement est particulièrement prononcé pour le BTC et l'ETH, dont les amplitudes de $|r_t|$ dépassent largement celles observées sur les marchés traditionnels. À l'inverse, les actifs financiers classiques présentent des régimes de volatilité plus contenus, bien que ponctués de pics significatifs lors des épisodes de stress systémique, notamment autour de la crise sanitaire de 2020.

Ces premières observations suggèrent des dynamiques de volatilité hétérogènes selon les classes d'actifs, justifiant une analyse économétrique approfondie portant sur la stationnarité, la non-linéarité et la persistance de ces séries.

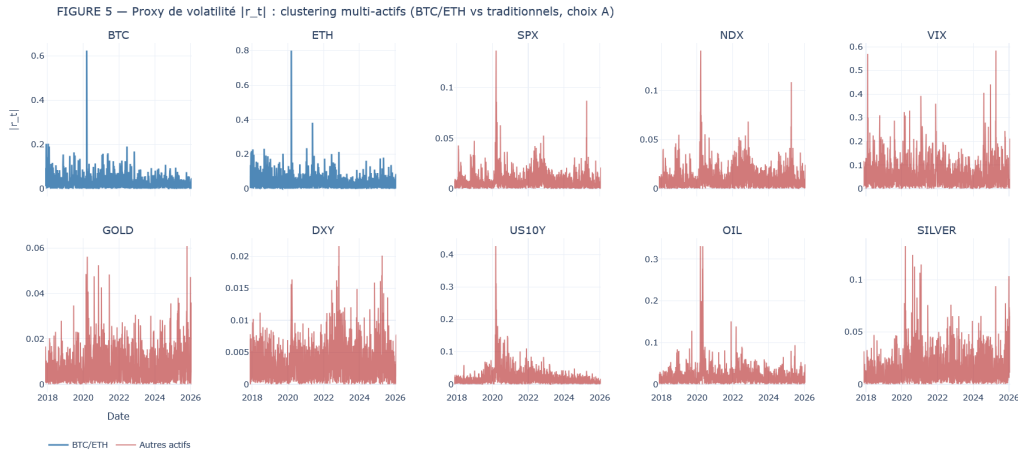


FIGURE 4 – Proxys de volatilité ($|r_t|$) pour l'ensemble des actifs

4 Tests Économétriques : Stationnarité, Non-linéarité et Persistance

Conformément à la démarche méthodologique de Box-Jenkins, une analyse préalable de l'ordre d'intégration des séries est indispensable avant toute spécification de modèles de type ARFIMA. Cette étape vise à prévenir les risques de régression fallacieuse et de sur-différenciation, susceptibles de biaiser l'inférence statistique et l'interprétation économique des résultats.

4.1 Diagnostics de Stationnarité (TAB 4)

Les tests de racine unitaire ADF (Augmented Dickey-Fuller) et Phillips-Perron (PP), complétés par le test de stationnarité KPSS, mettent en évidence une structure d'intégration contrastée selon la transformation considérée.

Pour l'ensemble des dix actifs du panel (cryptoactifs, actions, indicateurs macro-financiers et matières premières), les séries de log-prix ($\log P_t$) sont intégrées d'ordre un, $I(1)$. Les tests ADF et PP ne permettent pas de rejeter l'hypothèse de racine unitaire, tandis que le test KPSS rejette systématiquement l'hypothèse de stationnarité, confirmant la non-stationnarité des niveaux de prix.

En revanche, les rendements r_t et les proxys de volatilité $|r_t|$ apparaissent globalement stationnaires, c'est-à-dire intégrés d'ordre zéro, $I(0)$. Cette stationnarité est validée par les tests ADF et PP, bien que le test KPSS rejette ponctuellement l'hypothèse de stationnarité pour le BTC et l'ETH dans le cas de $|r_t|$. Ce rejet suggère la présence d'une persistance accrue, potentiellement assimilable à un comportement de mémoire longue, particulièrement marqué sur les marchés des cryptoactifs.

Ces résultats empiriques fournissent une justification économétrique solide à l'utilisation de modèles capables de capturer à la fois la dépendance de long terme et les dynamiques non linéaires de la volatilité.

4.2 Analyse de l'Autocorrélation

L'examen des fonctions d'autocorrélation (ACF) et d'autocorrélation partielle (PACF) permet d'affiner le diagnostic posé lors des tests de stationnarité. Les résultats mettent en évidence une distinction nette entre le comportement des rendements bruts r_t et celui des proxys de volatilité $|r_t|$.

Les rendements r_t présentent des coefficients d'autocorrélation faibles et non significatifs au-delà de quelques retards, ce qui est conforme à l'hypothèse d'efficience informationnelle des marchés financiers. En revanche, les séries de volatilité absolue $|r_t|$ affichent une autocorrélation persistante sur un grand nombre de lags, comme l'illustre la Figure 8 pour l'ensemble des dix actifs considérés.

La décroissance des coefficients ACF est lente et de nature quasi hyperbolique, en particulier pour le BTC, l'ETH et les actifs financiers sensibles aux conditions macroéconomiques (indices actions, taux longs et matières premières). Ce profil s'écarte nettement de la décroissance exponentielle rapide attendue dans le cadre de modèles ARMA standards et constitue une signature empirique bien documentée des processus à mémoire longue. La PACF ne révèle pas de coupure franche à un ordre fini, renforçant l'hypothèse d'une dépendance de long terme plutôt que d'une dynamique autorégressive de faible dimension.

Ces observations suggèrent que les modèles linéaires de court terme sont insuffisants pour capturer l'ensemble de la structure dynamique de la volatilité, et appellent à l'utilisation de spécifications plus flexibles, intégrant explicitement la persistance de long terme.

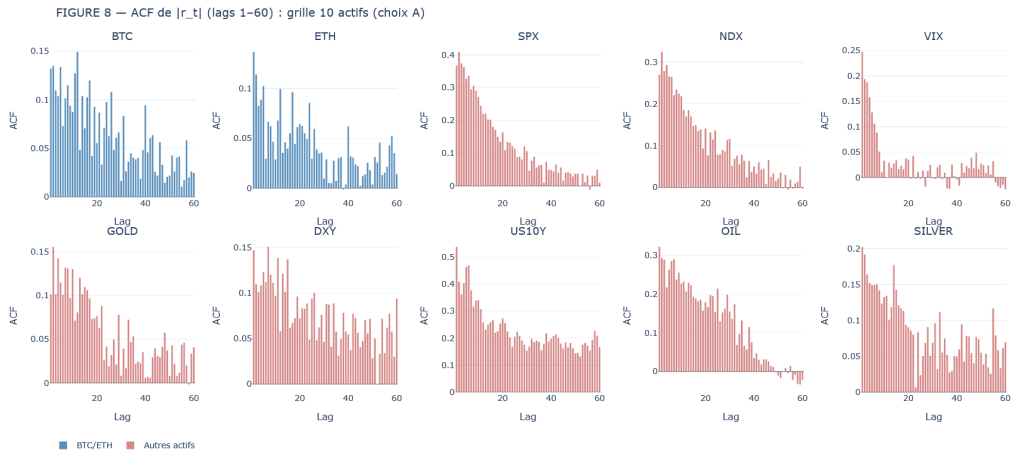


FIGURE 5 – Fonctions d'autocorrélation (ACF) des proxys de volatilité $|r_t|$

4.3 Test de Non-linéarité BDS (TAB 5)

Afin d'identifier la nature de la dépendance résiduelle observée dans les séries de volatilité, le test de non-linéarité de Brock-Dechert-Scheinkman (BDS) est appliqué aux résidus obtenus après filtrage par un modèle ARMA-GARCH. Cette procédure permet de neutraliser les effets linéaires et conditionnels de second ordre, isolant ainsi les structures de dépendance plus complexes.

Les résultats montrent un rejet systématique et robuste de l'hypothèse nulle d'indépendance pour le BTC et l'ETH, avec des p-values inférieures à 5 % pour l'ensemble des dimensions d'immersion considérées. Ce rejet indique que, même après correction des effets ARMA et GARCH, une dépendance non linéaire significative subsiste dans les séries de volatilité.

Ce constat implique que les modèles linéaires conditionnels classiques sont structurellement incapables d'épuiser l'information contenue dans la dynamique de volatilité des cryptoactifs. Il renforce la pertinence du recours à des modèles intégrant à la fois non-linéarité et mémoire longue, tels que les spécifications ARFIMA ou leurs extensions fractionnaires conditionnelles.

4.4 Estimation de l'Exposant de Hurst (TAB 6, Figure 6)

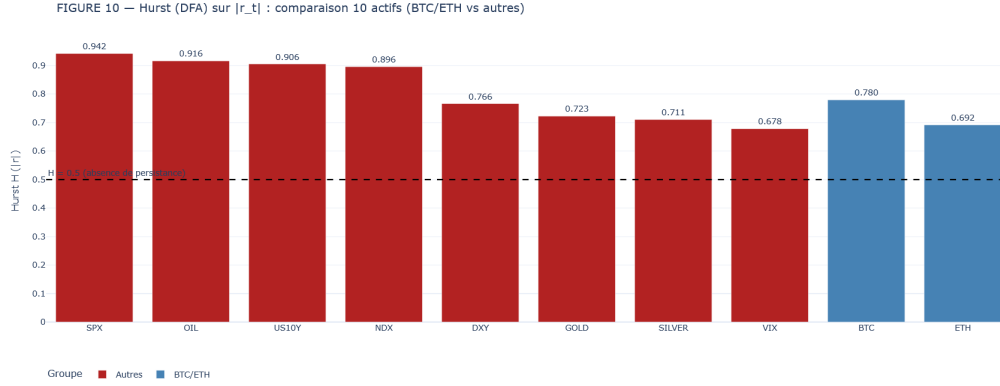


FIGURE 6 — Exposant de Hurst estimé par DFA pour les proxys de volatilité $|r_t|$

La persistance mise en évidence par l'analyse des fonctions d'autocorrélation est quantifiée de manière formelle à l'aide de la méthode de Detrended Fluctuation Analysis (DFA), particulièrement adaptée à l'étude des séries financières non stationnaires ou faiblement stationnaires. L'exposant de Hurst H fournit une mesure synthétique de la mémoire de long terme : une valeur $H = 0,5$ correspond à un processus sans persistance, tandis que $H > 0,5$ indique une dépendance positive de long horizon.

Les estimations reportées dans le Tableau 6 et illustrées en Figure 10 révèlent une persistance marquée et généralisée des proxys de volatilité $|r_t|$ pour l'ensemble des actifs considérés. Les indices actions et les variables macro-financières présentent des niveaux de mémoire particulièrement élevés, avec un exposant de Hurst atteignant 0,942 pour le SPX, 0,916 pour le pétrole et 0,906 pour le taux US à 10 ans. Ces valeurs traduisent une dynamique fortement persistante, cohérente avec l'existence de régimes prolongés de volatilité sur les marchés traditionnels.

Les cryptoactifs confirment également cette propriété de mémoire longue. Le Bitcoin affiche un exposant de Hurst de 0,780, tandis que l'Ethereum se situe à 0,692, des niveaux significativement supérieurs au seuil d'absence de persistance. Bien que légèrement inférieures à celles observées pour certains actifs traditionnels, ces valeurs demeurent économétriquement élevées et témoignent d'une structure fractale robuste de la volatilité des marchés crypto.

L'ensemble de ces résultats valide empiriquement l'hypothèse d'une dépendance de long terme incompatible avec les modèles à mémoire courte de type ARIMA. La persistance observée ne pouvant être correctement capturée par une différenciation entière, elle appelle à l'introduction d'une différenciation fractionnaire, seule à même de reproduire la dynamique fractale mise en évidence par l'analyse DFA.

4.4.1 Transition

La conjonction des résultats issus des tests de stationnarité, de l'analyse de l'autocorrélation, du test de non-linéarité BDS et de l'estimation de l'exposant de Hurst

justifie pleinement le passage d'une modélisation ARIMA standard vers une spécification ARFIMA, capable d'intégrer explicitement la mémoire longue caractérisant les séries de volatilité étudiées.

5 Modélisation ARFIMA et Arbitrage de Risque

L'enjeu central de cette section consiste à modéliser de manière parcimonieuse mais robuste la dépendance temporelle de long horizon mise en évidence dans les sections précédentes. Le paramètre de différenciation fractionnaire d constitue à cet égard le pivot économétrique de la capture de la mémoire longue, en conditionnant la vitesse de dissipation des chocs de volatilité et, par extension, la persistance du risque.

L'analyse est menée en priorité sur le Bitcoin, actif représentatif à la fois par son poids de marché et par l'intensité de ses propriétés fractales, afin de définir un modèle pivot servant de référence.

5.1 Spécification du Modèle Pivot BTC (TAB 7)

FIGURE 11 — Diagnostics du modèle pivot ARFIMA sur $|r_BTC|$ + robustesse K

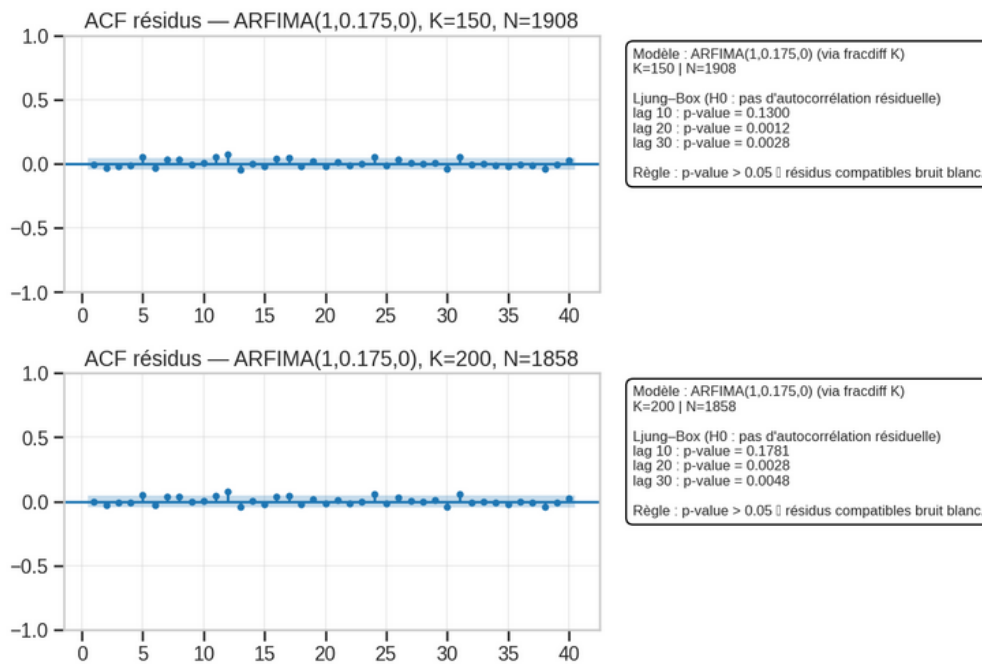


FIGURE 7 – Sélection du modèle ARFIMA pour le Bitcoin via le critère BIC

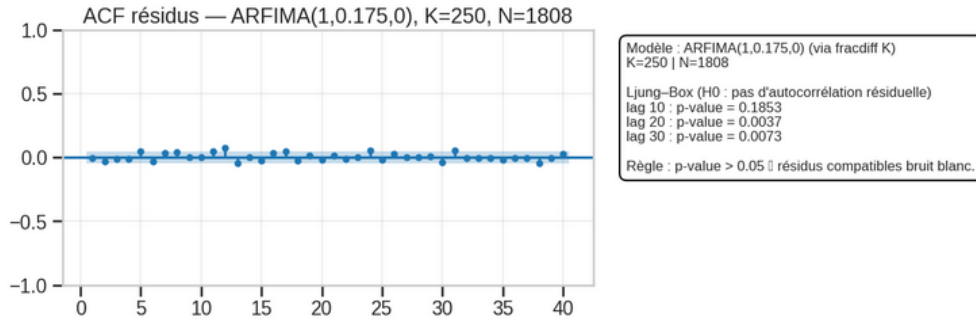


FIGURE 8 – Diagnostic du modèle ARFIMA pivot pour le Bitcoin

La sélection du modèle est réalisée à l'aide du critère d'information bayésien (BIC), appliqué à la série de volatilité absolue $|r_{BTC,t}|$. Ce critère, pénalisant fortement la complexité, permet d'identifier une structure optimale évitant toute sur-paramétrisation.

Les résultats conduisent à retenir une spécification de type ARFIMA(1, $d \approx 0,175$, 0), estimée par différenciation fractionnaire tronquée (fractional differencing with cutoff). Le modèle s'écrit formellement :

$$\phi(L) (1 - L)^{0,175} |r_{BTC,t}| = \varepsilon_t$$

où $\phi(L)$ désigne le polynôme autorégressif et $(1 - L)^d$ l'opérateur de différenciation fractionnaire.

La valeur estimée de d traduit une dissipation lente et progressive des chocs de volatilité, nettement plus persistante que dans un cadre ARMA standard (où $d = 0$). Cette dynamique implique que les chocs extrêmes affectant la volatilité du Bitcoin exercent une influence durable sur les périodes futures, ce qui constitue une caractéristique clé pour l'analyse du risque et les stratégies d'arbitrage intertemporel.

5.2 Diagnostic de Ljung-Box et Validité du Blanchiment

La validité du modèle pivot est évaluée à travers l'analyse des résidus, en combinant l'inspection visuelle des fonctions d'autocorrélation et les tests formels de Ljung-Box. La Figure 11 présente les diagnostics obtenus pour plusieurs valeurs du paramètre de troncature K , permettant d'apprécier la robustesse de la spécification.

Les résultats indiquent qu'au court horizon, le modèle satisfait les conditions de blanchiment : le test de Ljung-Box à 10 retards ne rejette pas l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation résiduelle (p-value comprise entre 0,13 et 0,18 selon K). Les résidus apparaissent donc compatibles avec un bruit blanc sur les horizons courts.

En revanche, le diagnostic se détériore lorsque l'horizon s'allonge. À 20 et 30 retards, les p-values deviennent systématiquement inférieures au seuil de 5 %, révélant la présence d'une dépendance résiduelle persistante à moyen horizon, malgré la prise en compte explicite de la mémoire longue par l'ARFIMA.

Ce résultat est économétriquement crucial. Il suggère que, si le modèle ARFIMA parvient à capturer efficacement la composante fractale globale de la volatilité, il demeure insuffisant pour absorber l'intégralité des structures de dépendance. Cette persistance résiduelle est compatible avec l'hypothèse de mémoire longue apparente

(spurious long memory), potentiellement induite par des changements de régimes, des ruptures structurelles ou une hétérogénéité temporelle non modélisée.

5.2.1 Interprétation et ouverture

Ces diagnostics soulignent que la mémoire longue observée dans la volatilité du Bitcoin ne saurait être interprétée comme un phénomène purement linéaire et stationnaire. L'ARFIMA constitue une première approximation pertinente, mais il doit être envisagé comme un socle de modélisation, appelant des extensions intégrant explicitement les non-linéarités, les effets de régimes ou les dynamiques conditionnelles du risque.

Cette limite ouvre naturellement la discussion vers des cadres plus flexibles, capables de concilier persistance de long terme et instabilité structurelle, condition essentielle à une modélisation réaliste de l'arbitrage de risque sur les marchés crypto.

5.3 Comparaison Multi-actifs du Paramètre d (TAB 8, FIG 13)

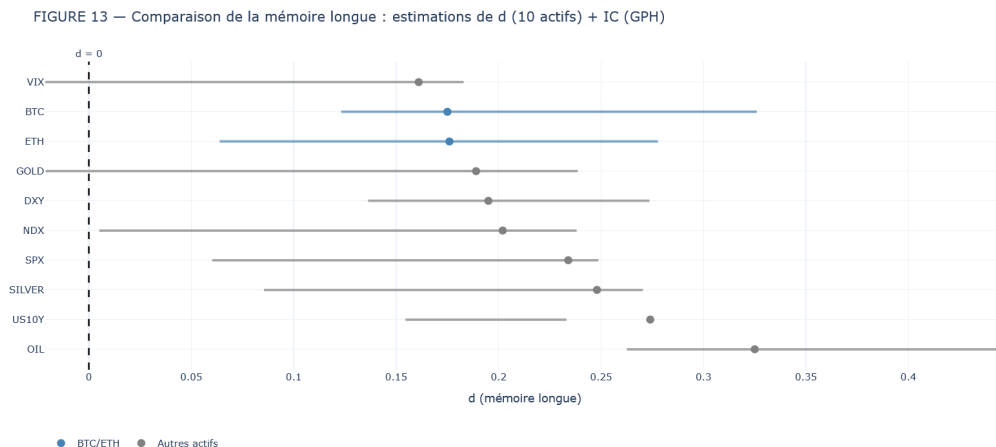


FIGURE 9 – Comparaison inter-actifs des estimations du paramètre de différenciation fractionnaire d

La Figure 13 présente une comparaison inter-actifs des estimations du paramètre de différenciation fractionnaire d , obtenues à partir des séries de volatilité absolue $|r_t|$, ainsi que leurs intervalles de confiance issus de la méthode semi-paramétrique de Geweke et Porter-Hudak (GPH). Ce cadre permet d'évaluer l'intensité relative de la mémoire longue au sein de différentes classes d'actifs.

Les résultats mettent en évidence une hétérogénéité marquée des dynamiques de persistance. Les marchés traditionnels, en particulier le pétrole (OIL) et les indices actions (SPX, NDX), affichent des valeurs de d globalement plus élevées que celles observées pour le Bitcoin et l'Ethereum. Ces estimations suggèrent une dissipation plus lente des chocs de volatilité sur les marchés traditionnels, traduisant des régimes de risque plus persistants dans le temps.

À l'inverse, bien que les crypto-actifs présentent indéniablement une mémoire longue statistiquement significative ($d > 0$), leurs valeurs de d sont en moyenne plus modérées. Cette configuration indique une volatilité caractérisée par des chocs plus abrupts, mais dont la composante persistante tend à se résorber plus rapidement. Ce contraste souligne une différence structurelle entre marchés matures et marchés émergents, tant du point de vue de la formation des prix que de la diffusion de l'information.

Ces disparités inter-marchés invitent à s'interroger sur la stabilité temporelle de la mémoire fractale, notamment face aux évolutions institutionnelles, réglementaires et technologiques propres à chaque classe d'actifs. Elles ouvrent naturellement la voie à une analyse plus fine de la dynamique du paramètre d dans le temps, condition nécessaire pour distinguer une mémoire longue structurelle d'une persistance induite par des changements de régimes ou des ruptures exogènes.

5.3.1 Transition

L'hétérogénéité observée dans les estimations de d pose ainsi la question de la robustesse et de la constance de la mémoire longue au cours du temps, et motive l'exploration de cadres permettant d'évaluer son évolution dynamique face aux transformations des marchés financiers.

6 Robustesse et Dynamique des Régimes

L'objectif de cette section est d'évaluer la robustesse temporelle des résultats précédents et de déterminer si la mémoire longue identifiée constitue une propriété structurelle des séries de volatilité, ou si elle pourrait résulter, au moins partiellement, de ruptures structurelles ou de changements de régimes non explicitement modélisés.

6.1 Stabilité de d par Sous-périodes (TAB 9, FIG 14)

La Figure 14 présente l'évolution du paramètre de différenciation fractionnaire d^* , sélectionné par le critère BIC, sur différentes sous-périodes couvrant l'intervalle 2017–2026. L'analyse est menée pour deux proxys de volatilité, $|r_t|$ et r_t^2 , afin de tester la robustesse des estimations au choix de la transformation.

Les résultats mettent en évidence des dynamiques contrastées selon les classes d'actifs. Pour le Bitcoin, le paramètre d affiche des variations sensibles d'une sous-période à l'autre, avec une tendance à la baisse sur la période la plus récente. Cette instabilité suggère que la mémoire longue des crypto-actifs ne constitue pas une caractéristique fixe, mais une propriété évolutive, susceptible d'être influencée par la maturation progressive du marché, l'évolution de sa liquidité et les transformations de sa microstructure.

À l'inverse, les marchés actions traditionnels, en particulier le SPX, présentent une stabilité relative du paramètre d sur l'ensemble des sous-périodes considérées. Cette constance est cohérente avec l'hypothèse d'une dynamique de volatilité plus

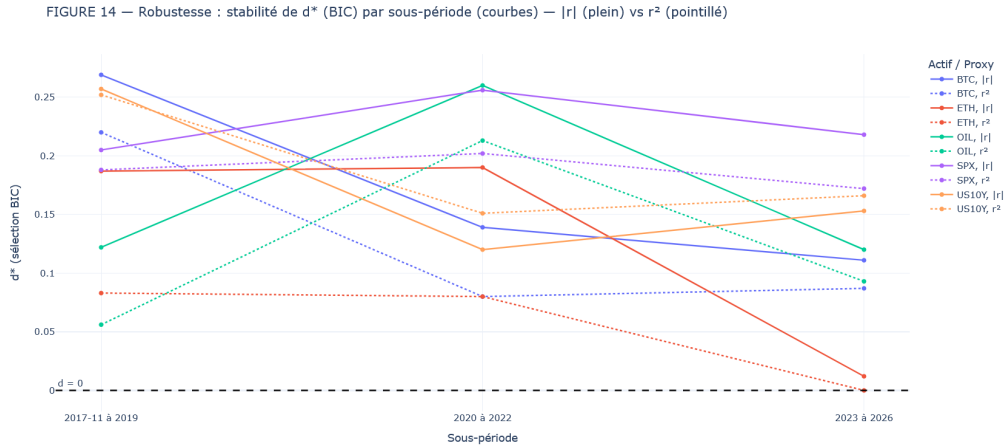


FIGURE 10 — Évolution du paramètre de différenciation fractionnaire d par sous-périodes

institutionnalisée, où les mécanismes de formation des prix et de transmission du risque sont plus stables dans le temps.

6.2 Discussion sur la "Spurious Long Memory"

L'instabilité observée pour certains actifs, notamment les crypto-actifs, invite à s'interroger sur la nature exacte de la persistance mesurée. Une partie de la mémoire longue détectée pourrait relever d'un phénomène de mémoire longue apparente (spurious long memory), résultant non pas d'une dynamique fractale intrinsèque, mais de la superposition de régimes distincts ou de flux persistants exogènes.

Dans le cas des crypto-actifs, le processus d'institutionnalisation récent constitue un facteur explicatif plausible. L'apparition de flux d'investissement massifs et concentrés dans le temps — illustrée par les séries de flux nets positifs observés sur l'ETF IBIT de BlackRock sur des séquences prolongées — peut générer des régimes de volatilité durablement élevés. Ces épisodes de pression acheteuse ou vendeuse persistante produisent des structures temporelles qui miment une mémoire longue, bien qu'elles ne soient pas nécessairement fractales au sens strict.

Ainsi, le paramètre d capte potentiellement un mélange de dépendance de long terme et de changements de régimes, ce qui appelle à une interprétation prudente des estimations obtenues.

6.3 Sensibilité au Paramètre de Troncation K (TAB 7_robustesse)

Afin de vérifier que les résultats ne sont pas dictés par des choix techniques arbitraires, la robustesse de l'estimation de d a été testée pour différentes valeurs du paramètre de troncation $K \in \{150, 200, 250\}$. Les résultats reportés dans le tableau de robustesse indiquent une convergence stable des estimations, avec une valeur de d^* demeurant proche de 0,175 pour le Bitcoin.

Cette stabilité vis-à-vis du choix de K renforce la crédibilité technique de l'estimation et suggère que les résultats ne sont pas le produit d'un artefact numérique. Elle ne remet toutefois pas en cause les limites diagnostiques observées à moyen et long horizons, qui relèvent davantage de la structure économique des données que de la procédure d'estimation elle-même.

6.3.1 Transition

L'ensemble de ces analyses de robustesse met en évidence que la mémoire longue observée dans la volatilité constitue un phénomène réel mais potentiellement instable et dépendant des régimes de marché. Cette ambivalence justifie une discussion approfondie de ses implications pratiques, notamment en matière de gestion du risque, de prévision de la volatilité et d'arbitrage intertemporel, qui fera l'objet de la section suivante.

7 Conclusion Générale et Implications Pratiques

7.1 Synthèse des Résultats

Cette étude met en évidence l'existence d'une mémoire longue statistiquement significative dans la dynamique de volatilité des crypto-actifs, confirmée de manière convergente par l'estimation de l'exposant de Hurst, les diagnostics d'autocorrélation et les modèles ARFIMA. Les paramètres estimés indiquent que les chocs de volatilité ne se dissipent pas rapidement, mais exercent une influence persistante sur l'évolution future du risque.

Si le processus d'institutionnalisation des marchés crypto parfois qualifié de « wall-streetisation » a contribué à rapprocher certaines propriétés agrégées des crypto-actifs de celles des marchés traditionnels, notamment via une convergence partielle des indicateurs de volatilité implicite, il n'a pas pour autant effacé leur signature dynamique propre. La volatilité des crypto-actifs demeure caractérisée par une asymétrie marquée, une kurtosis élevée et des épisodes de stress extrême, traduisant une structure fractale plus brutale que celle observée sur les marchés actions matures.

Ces résultats suggèrent que, malgré une intégration croissante dans le système financier global, les crypto-actifs conservent des propriétés statistiques distinctes qui appellent des outils de modélisation spécifiques.

7.2 Implications pour la Gestion du Risque de Queue

D'un point de vue opérationnel, les résultats soulignent les limites des approches standards fondées sur des modèles à mémoire courte. Ignorer la différenciation fractionnaire au profit de spécifications ARIMA ou GARCH classiques conduit à une sous-estimation systématique de la persistance des phases de stress, et donc du risque de queue associé aux marchés crypto.

Pour un gestionnaire de risques, l'intégration d'un cadre ARFIMA permet une calibration plus prudente des mesures de risque, telles que la Value at Risk (VaR)

ou l'Expected Shortfall. En particulier, la reconnaissance d'une décroissance hyperbolique, et non exponentielle, de la volatilité post-choc implique que les périodes de turbulence ont un impact durable, susceptible de biaiser les prévisions de risque à moyen horizon si cette propriété n'est pas correctement modélisée.

Ainsi, la mémoire longue constitue un élément clé pour l'évaluation du risque systémique et la gestion dynamique des expositions sur les marchés crypto-financiers.

7.3 Limites et Perspectives

Malgré ses apports, cette étude met également en lumière plusieurs limites. Le rejet du test de Ljung-Box à des horizons intermédiaires indique que les modèles ARFIMA linéaires, bien qu'efficaces pour capter la dépendance de long terme moyenne, demeurent insuffisants pour absorber l'ensemble des structures dynamiques présentes dans les données. Cette limite suggère que la mémoire longue estimée pourrait, en partie, refléter des changements de régimes non modélisés ou une hétérogénéité temporelle de la dynamique de volatilité.

Les perspectives de recherche s'orientent naturellement vers le développement de modèles plus flexibles, capables de combiner persistance de long terme et instabilité structurelle. Des cadres hybrides, tels que les modèles ARFIMA à changements de régimes markoviens (ARFIMA-MS) ou les modèles FIGARCH, constituent des extensions prometteuses pour mieux appréhender la dynamique du risque sur des marchés en mutation rapide.

Ces pistes ouvrent la voie à une modélisation plus réaliste des crypto-actifs, conciliant leur intégration progressive dans la finance traditionnelle avec la persistance de comportements extrêmes et non linéaires qui continuent de les distinguer.

8 Annexes

8.1 Annexe A1 : Dictionnaire des données

- **Actifs** : BTC, ETH (Crypto), SPX, NDX (Actions), VIX, DXY, US10Y (Macro), GOLD, OIL, SILVER (Commodities).
- **Sources** : Yahoo Finance, BlackRock, Cointelegraph, Bloomberg.
- **Transformations** : $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$ et $|r_t|$.

8.2 Annexe A2 : Résultats complets des tests de stationnarité (TAB 4)

Présentation exhaustive des statistiques ADF, Phillips-Perron et KPSS pour les 10 actifs en log-prix et rendements.

8.3 Annexe A3 : Métadonnées de pré-filtrage (Metadata__prefilter__TAB5

Spécifications ARMA-GARCH utilisées pour le blanchiment avant le test BDS (références aux critères BIC).

Note : Les graphiques interactifs HTML mentionnés dans ce rapport sont disponibles sur demande.