2020 年中科院量子力学甲 811

QQ:xxxxxxxx

一、考虑一维束博态

1. 证明 $\langle\psi(x,t)\mid\psi(x,t)\rangle$ 不随时间变化，此时的 ψ 不必是定态;
2. 证明对于定态，动量期望值为 0;
3. 如果粒子在 $t=0$ 时刻处于定态，则 t 以咸时刻永远处于定态.

【解析】：本题考察了波函数的演化以及幺正算符的性质以及定态的概念与性质。

1. 由薛定谔方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=\hat{H}|\psi\rangle$ 可得

   $$\frac{d}{dt}\langle\psi\mid\psi\rangle=\left(\frac{d}{dt}\langle\psi|\right)|\psi\rangle+\left\langle\psi\left|\frac{d}{dt}\right|\psi\right\rangle=-\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle+\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle=0$$

2. 注意到对于定态

   $$\frac{d\langle x\rangle}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{x},\hat{H}]\rangle=0$$

   因此

   $$\langle\hat{p}\rangle=\frac{m}{i\hbar}\langle[\hat{x},\hat{H}]\rangle=0$$

3. 对于定态

   $$|\psi(t)\rangle=e^{-iEt/\hbar}|\varphi(0)\rangle$$

   则任意力学量 F 期望值对时间的导数为

   $$\begin{aligned}\frac{d\langle F\rangle}{dt}&=\frac{1}{i\hbar}\langle[F,H]\rangle=\frac{1}{i\hbar}[\langle\psi(t)|FH|\psi(t)\rangle-\langle\psi(t)|HF|\psi(t)\rangle]\\&=\frac{1}{i\hbar}\left[\left\langle\varphi(0)\left|e^{iEt/\hbar}FHe^{-iEt/\hbar}\right|\varphi(0)\right\rangle-\left\langle\varphi(0)\left|e^{iEt/\hbar}HFe^{-iEt/\hbar}\right|\varphi(0)\right\rangle\right]\\&=\frac{1}{i\hbar}\left[E\left\langle\varphi(0)\left|e^{iEt/\hbar}Fe^{-iEt/\hbar}\right|\varphi(0)\right\rangle-E\left\langle\varphi(0)\left|e^{iEt/\hbar}Fe^{-iEt/\hbar}\right|\varphi(0)\right\rangle\right]=0\end{aligned}$$

   即 t 时刻仍为本征态。

【例题一】:

1. 证明若对于 t 时刻的态 $\psi(\vec{r},t)\rangle\ U(t)\psi(\vec{r},0)\rangle$ 的演化满足波函数的模 $\langle\psi(\vec{r},t)\mid\psi(\vec{r},t)\rangle$ 不随时间变化，则 U 必为幺正算符。
2. 证明对于在定态上，测量任意力学量 A 时，其得到的各个测量值的概率不随时间变化。
3. 证明对于一维问题，势能无奇点，束缚态一定是非简并的。

【例题解析】:

1. 对于 t 时刻的态 $\psi(\vec{r},t)\rangle=U\psi(\vec{r},0)\rangle$，由于演化保内积，即

$$\langle\psi(\vec{r},t)|\psi(\vec{r},t)\rangle=\langle\psi(\vec{r},0)|U^\dagger U|\psi(\vec{r},0)\rangle=\langle\psi(\vec{r},0)|\psi(\vec{r},0)\rangle$$

因此 $U^\dagger U=1$，即 U 幺正。

2. 设力学量 A 的本征方程为

$$A|a\rangle=a|a\rangle$$

t 时刻定态

$$|\psi(t)\rangle=e^{\frac{-iHt}{\hbar}}|\psi(0)\rangle=\sum_a c_a(t)|a\rangle$$

则 t 时刻测得 a 的概率 $P(t)=|c_a(t)|^2=|\langle a|\psi(t)\rangle|^2=|\langle a|\psi(0)\rangle|^2$

3. 对于一维问题，假设存在两个束缚态 $|\psi_1\rangle,|\psi_2\rangle$，则

$$\begin{aligned}\psi_1''+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(x)]\psi_1=0\\ \psi_2''+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(x)]\psi_2=0\end{aligned}\tag{1}$$

因此有

$$\psi_1\psi_2''-\psi_2\psi_1''=0$$

即

$$(\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1')'=0$$

即

$$\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1'=\lim_{x\to\infty}\psi_1(x)\psi_2'(x)-\psi_2(x)\psi_1'(x)=0$$

即 $\psi_1(x),|\psi_2(x)$ 的朗斯基行列式为 0，二者线性相关，即 $\psi_1(x)=c|\psi_2(x)$，二者对应于同一个物理态。

二、设波函数 $\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ip(x+\beta)/\hbar}$, 而 $\hat{x},\hat{p}$ 分别为 x 方向的坐标和动量算符, 其中 β 为实常数。

1. 证明 $\psi(x)$ 是否为 $\hat{p}$ 的归一化本征态;
2. 化简算符 $e^{i\alpha p/\hbar}\hat{x}e^{-i\alpha p/\hbar}$;
3. 化簡算符 $e^{i\alpha p/\hbar}\hat{x}^2e^{-i\alpha p/\hbar}$.

【解析】: 本题考察了算符的运算，背景是平移算符。

1.
$$\hat{p}\psi(x)=-i\hbar\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}e^{ip(x+\beta)/\hbar}=p\psi(x)$$
因此为动量本征态

2. 第二问我们采取三种做法，各有优劣。

法一： 这种做法是个人最早接触的一种方法，反映了对称性与无穷小对称性之间的关系（差一个指数映射）。

考虑无穷小平移
$$|x-\varepsilon\rangle=1-\varepsilon\frac{d}{dx}|x\rangle=1+i\alpha\frac{p}{\hbar}|x\rangle$$
因此对于有限大平移 α，设 $\alpha=N\varepsilon,N\to\infty$，则
$$|x-\alpha\rangle=\lim_{N\to\infty}\left(1+i\varepsilon p/\hbar\right)^N|x\rangle=e^{\frac{i\alpha p}{\hbar}}|x\rangle$$

法二： 这种做法利用泰勒展开，可以说是写字最少的一种证法。
$$|x-\alpha\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}|x\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{i\alpha p}{\hbar}\right)^n}{n!}|x\rangle=e^{\frac{i\alpha p}{\hbar}}|x\rangle$$

法三： 法三基本是在没有任何物理背景知识的前提下写出来的方法，也应该是量子力学考研中标准答案的方法，只用到基本的完备性关系以及动量本征态的坐标表象波函数。
$$\begin{aligned}LHS&=\int \mathrm{dp}'e^{i\alpha p/\hbar}|p'\rangle\langle p'|x\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \mathrm{dp}'e^{-i(x-\alpha)p'/\hbar}|p'\rangle\\&=\int \mathrm{dp}'|p'\rangle\langle p'|x-\alpha\rangle\\&=|x-\alpha\rangle\end{aligned}$$

3. 第三问和第四问是一定在算之前就要知道答案的。从物理上讲（类似于薛定谔绘景与海森堡绘景的关系），第二问相当于在空间坐标平移算符作用下态的变化，第三四问则相当于是看相应的算符的变化。具体而言，对于第三问，该算符作用于任意坐标本征态 $|x\rangle$ 上，一定是先向右平移 α，再被算符 x 作用（得到 $x+\alpha$），再被平移回去。第四问同理。两问均有两种方法。

法一： 我们证明 $e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}\hat{x}e^{-i\alpha\hat{p}/\hbar}=\hat{x}+\alpha$

注意到上式是一个算符等式，因此我们只需要证明左右两边作用于任意一个态的结果相同。又因坐标本征态的完备性，我们只需要验证左右两边作用于任意坐标本征态 $|x\rangle$ 的结果相同。首先

$$RHS|x\rangle=(x+\alpha)|x\rangle$$

左边

$$LHS|x\rangle=e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}\hat{x}|x+\alpha\rangle=(x+\alpha)e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}|x+\alpha\rangle=(x+\alpha)|x\rangle$$

【例题】:

- 利用 xy 方向平移可对易，证明 xy 方向动量可对易。
- 倍乘算符

三、一个无自旋粒子的波函数为 $\psi=k(x+iy+2z)e^{-\alpha r}$, 此处 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 其中 k,α 为实常数。

$\left(\text{球谐函数:}Y_0^0=\sqrt{\frac{1}{4\pi}},\quad Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\quad Y_1^{\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}\right)$

1. 求粒子的总角动量;
2. 求角动量 $\hat{L}_z$ 的期望估及测得 $L_z=\hbar$ 的概率;
3. 求发现粒子在 (θ,φ) 方问上 $d\Omega$ 立体角内的概率.

四、

1. 一个电子在 $t=0$ 时刻处于自旋 $\chi=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-21\\2\end{pmatrix}$ 在 $t\rangle0$ 时刻, 外加一个微场 $\bar{B}=B_0\left(\sin\theta\hat{e}_x+\cos\theta\hat{e}_y\right)$. 此时电子的哈密顿量为 $\hat{H}=-2\mu_B\vec{s}\cdot\vec{B}$, 其中 $\vec{s}$ 为自旋算符 μ_B 为玻尔磁子，求粒子在任意时刻 t 的波函数;

2. 考虑两个自旋为 1/2 的粒子处于磁场中，此时系统哈密顿量为 $H = a\hat{\sigma}_{1:} + b\hat{\sigma}_{2z} + c_0\hat{\hat{\sigma}}_1 \cdot \hat{\hat{\sigma}}_2$, 其中 a, b, c_0 为常数, $\hat{\sigma}_i$ 为泡利算符, 前两项为粒子处于磁场中的势能。最后一项为两粒子自旋-自旋相互作用能。求系统能级.

五、考虑一维谐振子的哈密顿量为 $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2$

1. 用不确定关系计算体系能量下限;
2. 取几台试探波函数 $\psi(x, \beta) = Ae^{\beta x^2}$, 用变分法求斯态能量和 β;
3. 利用升降算符和基态波村数肖述第一激為态;
4. 对于三维谐振子，第一激发态三重简并，此时受微扰 $H' = b\hat{x}\hat{y}$，写出能级分裂.