Problema do Fluxo Máximo (Pesquisa Operacional)

Alunos:
André Hugo Ramalho Lopes
Eduardo Luiz Araujo dos Santos
Luis Phellipe Palitot Moreno

Centro de Informática
UFPB

João Pessoa, 2020

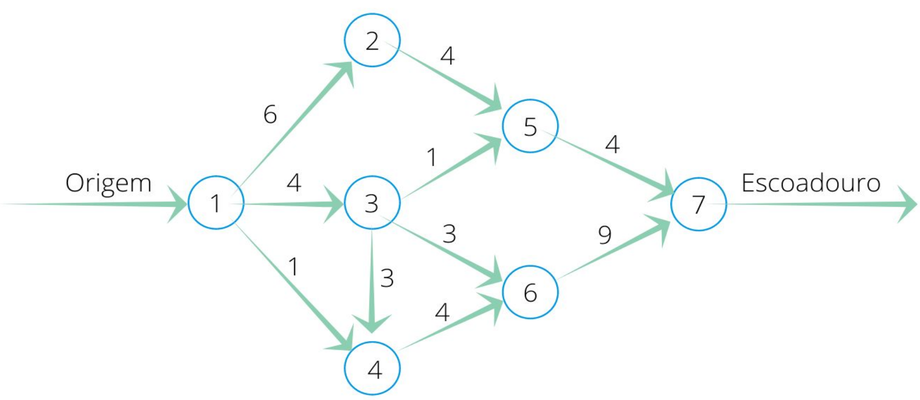
Introdução

O problema de fluxo máximo é um subproblema de fluxo de custo mínimo, onde busca encontrar uma maneira mais barata e eficiente de enviar uma determinada informação através de uma rede de fluxo. Métodos utilizados para a resolução do problema são bastantes populares, como o método Simplex criado por George Dantzig que busca resolver problemas lineares. Com isso, é possível modelar problemas reais de logísticas de empresas, em busca de minimizar os custos e maximizar a eficiência do transporte.

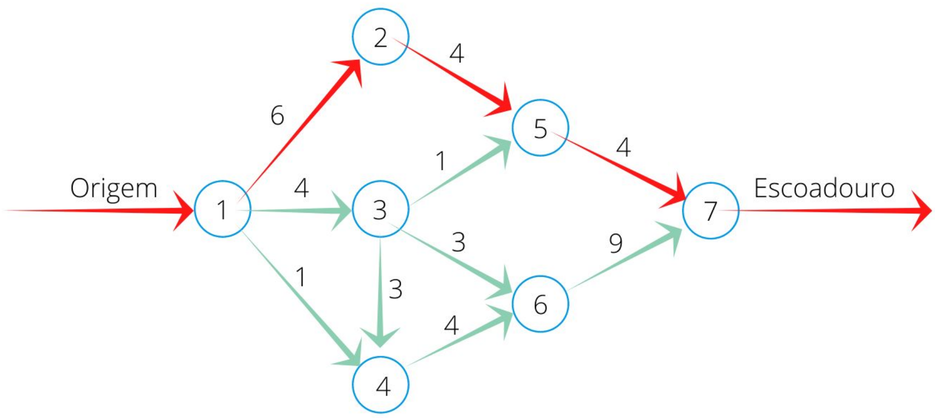
Definição do problema

Considere uma rede direcionada conectada, com 2 nós diferenciados, origem e escoadouro, e todos os outros definidos como nó de transbordo. Além disso, associado a cada arco, um determinado fluxo máximo permitido (que vai de acordo com a abstração do problema). No problema do fluxo máximo, o objetivo é encontrar o fluxo máximo na rede, buscando respeitar o limite de fluxo em cada arco.

Exemplo de uma rede qualquer como PFM



Observando o problema anterior, uma solução para o problema poderia ser o caminho 1-2-5-7, passando no máximo 4 de fluxo:



Podemos notar que a imagem anterior representa uma solução viável, porém não é, necessariamente, a solução ótima.

Modelagem

O Problema de fluxo máximo (PFM) é um caso específico do Problema de fluxo de custo mínimo (PFCM), o que permite modificar um problema de PFM para um de PFCM. Para isso, é necessário relembrar alguns detalhes da modelagem do PFCM.

Definindo o PFCM

No PFCM, o objetivo é minimizar o custo de fluxo que irá passar por cada arco, sabendo que cada nó possui uma demanda a ser atendida, e todos os arcos possuem um custo de transporte. Portanto, é necessário especificar esses dados ao transformar o problema.

Dados:

- Um grafo orientado G = (V, A);
- Uma demanda $b_i \in \Re$ para cada vértice $i \in V$. Assume-se que

$\sum_{i \in V} b_i = 0$;

• Para cada arco $a \in A$, um custo $c_a \in \Re$ e limites inferior $l_a \in \Re_+$ e superior $u_a \in \Re_+$ para o valor de seu fluxo.

Variáveis:

• x_a - representando o fluxo que passa em cada arco $a \in A$.

E o problema em si pode ser descrito como:

1. $min \sum_{a \varepsilon A} c_a x_a$

   sujeito a:

2. $\sum_{a \in \delta^-(i)} x_a - \sum_{a \in \delta^+(i)} x_a = b_i, \ \forall i \in V$
3. $l_a \leq x_a \leq u_a, \ \forall \ a \in A$

sendo $\delta^-(i) \subseteq A$ e $\delta^+(i) \subseteq A$, respectivamente, os conjuntos dos arcos que entram e saem do vértice $i \in V$.

● Transformando o PFM em PFCM

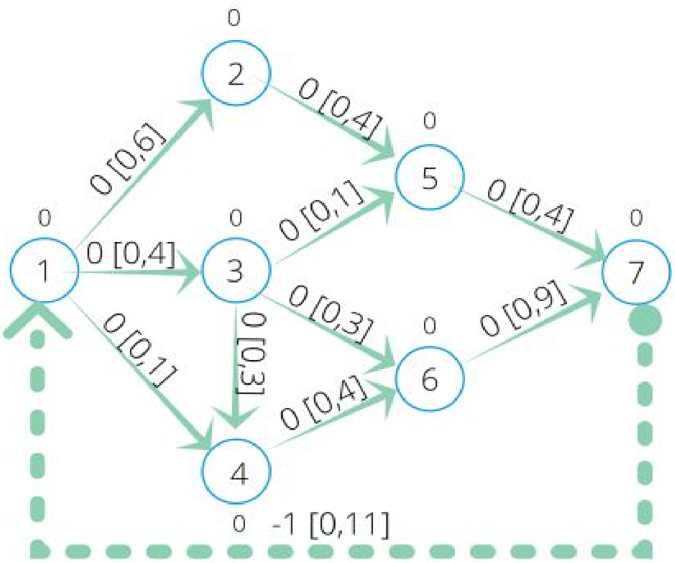
Pela definição do PFM, o fluxo mínimo dos arcos não é relevante no problema, portanto, determina-se os limites mínimos com valor 0 e os limites máximos não se alteram.

Ademais, a demanda de todos os nós será igual a 0, permitindo que todo o fluxo que entre no nó seja igual ao que saia. Consequentemente, as restrições de demanda, que incluem nós que apenas recebem fluxo ou que apenas saem fluxo, impedirá a solução correta do problema.

Para resolver isso, adicionamos um arco direcionado extra, que vai do nó escoadouro para o nó origem, com fluxo máximo igual a soma dos fluxos máximos que saem da origem, ou que chegam no destino, caso a soma seja menor. Dessa forma, todas as restrições com demanda 0 serão atendidas, garantindo a solução do problema. Ao final do problema, o fluxo que passa pelo arco acrescentado representa o máximo de fluxo obtido.

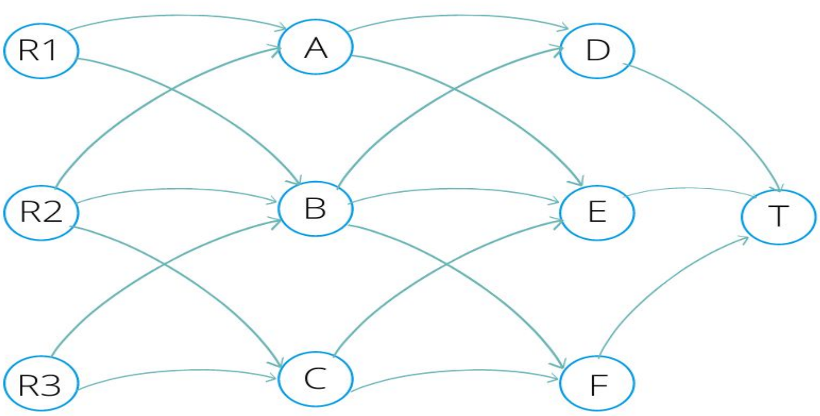
Além disso, sabe-se que o custo de transporte não é considerado na modelagem do PFM, então, será definido cada custo como sendo igual a 0, tornando-o sem peso no cálculo da função objetivo (FO), tirando o custo do arco extra, que será definido como -1, forçando o problema a buscar o máximo de fluxo mesmo com uma função objetivo de minimização.

- **Visualizando a rede anterior como PFCM:**



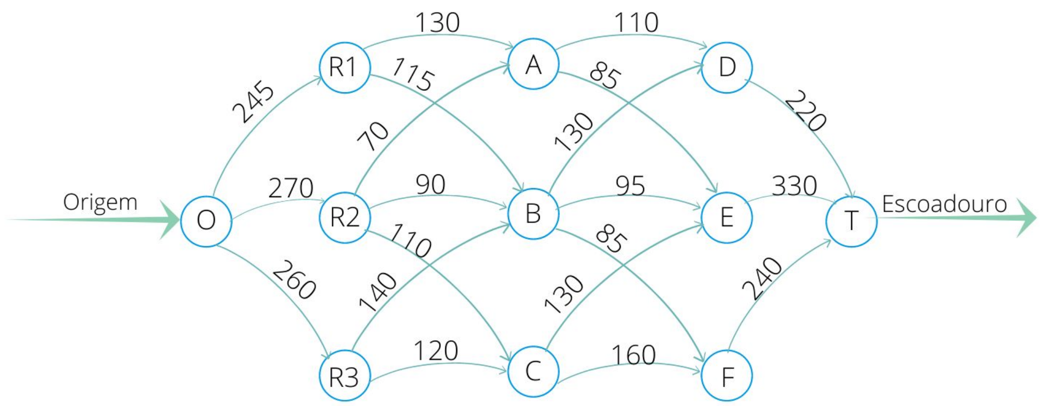
- # Exercício

Exercício do livro Introdução à Pesquisa Operacional, HILLIER e RIEBERMAN 9ª edição pertencente ao capítulo 9 seção 4, exercício 3.

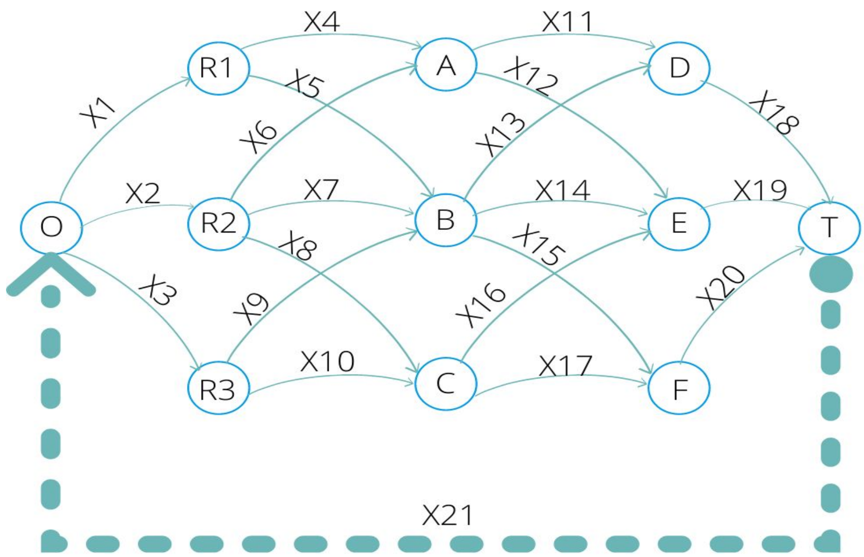


Para formulamos o problema 9.4-3, apresentado na imagem acima, como um problema de fluxo máximo, é adicionado um nó extra como origem (O), que permite caminho para R1, R2 e R3, o nó T se torna o nó escoadouro, e todos os outros nós serão nós de transbordo. Em relação aos novos arcos formados com a criação da origem (O-R1, O-R2, e O-R3), definimos que o fluxo máximo permitido em cada arco é a soma do fluxo que pode sair dos nós R1, R2 e R3, respectivamente.

Dessa forma, modelando e aplicando o que foi descrito:



- **Visualização e modelagem do problema 9.4-3 como PFCM:**



- Função Objetivo:

Minimizar: - X21

- Restrições:

O: - X1 - X2 - X3 + X21 = 0
R1: X1 - X4 - X5 = 0
R2: X2 - X6 - X7 - X8 = 0
R3: X3 - X9 - X10 = 0
A: X4 + X6 - X11 - X12 = 0
B: X5 + X7 + X9 - X13 - X14 - X15
= 0
C: X8 + X10 - X16 - X17 = 0
D: X11 + X13 - X18 = 0
E: X12 + X14 + X16 - X19 = 0
F: X15 + X17 - X20 = 0
T: X18 + X19 + X20 - X21 = 0

- Fluxos Máximos e Mínimos:

  - $0 \leq X1 \leq 245$
  - $0 \leq X2 \leq 270$
  - $0 \leq X3 \leq 260$
  - $0 \leq X4 \leq 130$
  - $0 \leq X5 \leq 115$
  - $0 \leq X6 \leq 70$
  - $0 \leq X7 \leq 90$
  - $0 \leq X8 \leq 110$
  - $0 \leq X9 \leq 140$
  - $0 \leq X10 \leq 120$
  - $0 \leq X11 \leq 110$
  - $0 \leq X12 \leq 85$
  - $0 \leq X13 \leq 130$
  - $0 \leq X14 \leq 95$
  - $0 \leq X15 \leq 85$
  - $0 \leq X16 \leq 130$
  - $0 \leq X17 \leq 160$
  - $0 \leq X18 \leq 220$
  - $0 \leq X19 \leq 330$
  - $0 \leq X20 \leq 240$
  - $0 \leq X21 \leq 775$ (245 + 270 + 260