1987~2012 年 26 年来全国硕士研究生入学考试有关概率统计部分的全部真题和答案

（包括数学一、数学三以及 1987~2008 年的数学四和 2008~2012 年的农学门类联考数学题）

一、 填空题

【例】（871）设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为_________；而事件 A 至多发生一次的概率为_____.

$1-(1-p)^n$；$(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$

【例】（871）有两个箱子，第 1 个箱子有 3 个白球，2 个红球，第 2 个箱子有 4 个白球，4 个红球，现从第 1 个箱子中随机地取 1 个球放到第 2 个箱子里，再从第 2 个箱子中取出一个球，此球是白球的概率为________. 已知上述从第 2 个箱子中取出的球是白球，则从第 1 个箱子中取出的球是白球的概率为__________.$\frac{23}{45}$；$\frac{15}{23}$

【例】（871）已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 X 的数学期望为______. X 的方差为_________.1；$\frac{1}{2}$

【例】（8734）判断题：连续型随机变量取任何给定值的概率均为零.（√）

【例】（881）设在三次独立实验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率是___$\frac{1}{3}$________.

【例】（881）若在区间 $(0,1)$ 内任取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的概率为___$\frac{17}{25}$_.

【例】（881）设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布，已知 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$，$\Phi(2.5)=0.9938$，则 X 落在区间 $(9.95,10.05)$ 内的概率为 0.9876______。

【例】（8834）判断题：若事件 A、B、C 满足等式 $A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$（×）

【例】（8834）设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，若事件 A 与 B 互斥，则 $P(B)=$____0.3，若事件 A 与 B 独立，则 $P(B)=$ 0.5________。

【例】（891）已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件

概率 $P(B\mid A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$ ___0.7___.

【例】(891) 甲乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为___0.75___.

【例】(891) 若随机变量 ξ 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是___0.8___.

【例】(8934) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ A\sin x & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 1 & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$，则 $P(|X|<\frac{\pi}{6})=$ ___$\frac{1}{2}$___.

【例】(893) 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫 (Chebyshev) 不等式，有 $P(|X-\mu|\ge 3\sigma)\le$ ___$\frac{1}{9}$___.

【例】(894) 设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中 X_1 在 $[0,6]$ 上服从均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$，X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布，记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，则 $D(Y)=$ ___46___.

【例】(901) 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，则 X 的概率分布函数 $F(x)=$ ___$\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$___.

【例】(901) 设随机事件 A、B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别为 0.4、0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$ ___0.3___.

【例】(901) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松 (Poisson) 分布，即 $P(X=k)=\frac{2^k e^{-2}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)=$ ___4___.

【例】(903) 一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手的命中率为___$\frac{2}{3}$___.

【例】(904) 已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，且 X、Y 相互独立，设随机变量

$Z = X - 2Y + 7$，则 $Z \sim$ ___$\underline{N(0,5)}$_______.

【例】(911) 若随机变量 X 服从均值为 2、方差为 σ^2 的正态分布，且 $P(2 < X < 4) = 0.3$，则 $P(X < 0) =$ _____$\underline{0.2}$______.

【例】(911) 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ （a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为 $\underline{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}}$________.

【例】(913) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & 若 x < -1 \\ 0.4 & 若 -1 \le x < 1 \\ 0.8 & 若 1 \le x < 3 \\ 1 & 若 x \ge 3 \end{cases}$，则 X 的概率分布为___$\underline{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}}$___.

【例】(914) 设 A、B 为随机事件，$P(A) = 0.7$，$P(A - B) = 0.3$ 则 $P(\overline{AB}) =$ __$\underline{0.6}$__.

【例】(921) 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$，$P(AB) = 0$，$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{6}$，则事件 A、B、C 全不发生的概率为____$\underline{\frac{7}{12}}$______.

【例】(921) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则数学期望 $E(X + e^{-2X}) =$ ___$\underline{\frac{4}{3}}$___.

【例】(923) 将 C、C、E、E、I、N、S 等七个字母随机地排成一行，那么，恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为_______.$\frac{1}{1260} = 0.00079$

【例】(924) 设对于事件 A、B、C，有 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$，$P(AB) = P(BC) = 0$，$P(AC) = \frac{1}{8}$，则 A、B、C 三个事件中至少出现一个的概率为____$\underline{\frac{5}{8}}$______.

【例】(931) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为___$\underline{\frac{1}{6}}$_______.

【例】(931) 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布，则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概

率分布密度 $f_Y(y)=$____$\underline{\dfrac{1}{4\sqrt{y}}}$________.

【例】(933)设总体 X 的方差为 1，根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本，测得样本均值为 5，则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为_$\underline{[4.804,5.196]}$_____.

【例】(934)设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为___$\underline{\dfrac{1}{5}}$______.

【例】(941)已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$ $\underline{1-p}$____.

【例】(941)设相互独立的两个随机变量 X，Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为____$\underline{\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}}$_______.

【例】(943)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X\le\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$___$\underline{\dfrac{9}{64}}$_____.

【例】(944)假设一批产品中一、二、三等品各占 60%、30%、10%从中任意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为__$\underline{\dfrac{2}{3}}$_______.

【例】(951)设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$___$\underline{18.4}$______.

【例】(951)设 X 和 Y 为两个随机变量，且 $P\{X\ge0,Y\ge0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X\ge0)=P(Y\ge0\}=\dfrac{4}{7}$，则 $P\{\max(X,Y)\ge0\}=$___$\underline{\dfrac{5}{7}}$________.

【例】(953)设 X_1，X_2，$\cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中参数 μ 和 σ^2 未知，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 T 检验使用统计

量$T=$__________.$\frac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$

【例】(954) 设X是一个随机变量，其概率密度为$f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则方差$D(X)=$______.$\frac{1}{6}$

【例】(961) 设某工厂 A 和 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该产品属 A 生产的概率是_____.$\frac{3}{7}$

【例】(961) 设ξ，η是两个相互独立且均服从正态分布$N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$的随机变量，则随机变量$|\xi-\eta|$的数学期望$E(|\xi-\eta|)=$________. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

【例】(963) 设由来自正态总体$X\sim N(\mu,0.9^2)$容量为 9 的简单随机样本，得样本均值$\overline{X}=5$，则未知参数μ的置信度为 0.95 的置信区间是_______. $(4.412,5.558)$

【例】(964) 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第i个零件是不合格品的概率$p_i=\frac{1}{i+1}$ $(i=1,2,3)$，以X表示 3 个零件中合格品的个数，则$P(X=2)=$______.

$\frac{11}{24}$

【例】(971) 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取到黄球的概率是__________. $\frac{2}{5}$

【例】(973) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布$N(0,3^2)$，而$X_1,X_2,\cdots X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots Y_9$分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$服从分布（2 分），参数为_______（1 分）.$t(9)$

【例】(974) 设 A、B 是任意两个随机事件，则$P[(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A})+\overline{B})(A+\overline{B})]=$_____， 0

【例】(974) 设随机变量 X 服从参数为$(2,p)$的二项分布，随机变量 Y 服从参数为$(3,p)$的

二项分布，若 $P(X\ge 1)=\frac{5}{9}$，则 $P(Y\ge 1)=$__________. $\frac{19}{27}$

【例】（981）设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0$，$x=1$，$x=e^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为__________. $\frac{1}{4}$

【例】（983）设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$。则当 $a=$_____，$b=$_____时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为_________ $a=\frac{1}{20}$，$b=\frac{1}{100}$，2

【例】（984）设一次试验成功的概率为 p，进行 100 次独立重复试验，当 $p=$___时，成功次数的标准差的值最大，其最大值为_______. $p=\frac{1}{2}$，5

【例】（991）设两两相互独立的三事件 A，B 和 C 满足条件：$ABC=\Phi$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$_______. $\frac{1}{4}$

【例】（993）在天平上重复称量一重为 a 的物品，假设各次称量结果相互独立且服从正态分布 $N(0,0.2^2)$.若以 $\overline{X_n}$ 表示 n 次称量结果的平均值，则为使

$$P\{|\overline{X_n}-a|<0.1\}\ge 0.95$$

n 的最小值应不小于自然数__________ $\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 1.96$，$n=16$

【例】（993）设随机变量 X_{ij}（$i,j=1,2,\cdots n;n\ge 2$）独立同分布，$EX_{ij}=2$，则行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $EY=$__________ $EY=0$

【例】（994）设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松(Poisson)分布，且已知 $E(X-2)(X-1)=1$，则 $\lambda=$ 1__

【例】（001）设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率相等，则 $P(A)=$_________. $\frac{2}{3}$

【例】(003) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x\in[0,1]\\ \frac{2}{9} & x\in[3,6]\\ 0 & 其他\end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}$，则 k 的取值范围是____________. $[1,3]$

【例】(0034) 设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布；随机变量

$$Y=\begin{cases}1 & X>0\\ 0 & X=0\\ -1 & X<0\end{cases}$$

则方差 $D(Y)=$_________. $\frac{8}{9}$

【例】(011) 设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\ge 2\}\le\frac{1}{2}$

【例】(013) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\ge 6\}\le\frac{1}{12}$

【例】(014) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X-Y|\ge 6\}\le\frac{1}{12}$

【例】(013) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,2^2)$，而 $X_1,X_2,\cdots X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量 $Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2}$ 服从 $\underline{F}$ 分布，参数为 $\underline{(10,5)}$

【例】(021) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ($\sigma>0$)，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=\underline{4}$

【例】(023) 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

概率 Y / X	-1	0	1
	0.07	0.18	0.15
	0.08	0.32	0.20

则 X^2 和 Y^2 的协方差 $\text{cov}(X^2,Y^2)=\underline{-0.02}$

【例】（024）设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ 概率 \ Y	-1	0	1
	0.07	0.18	0.15
	0.08	0.32	0.20

则 X 和 Y 的相关系数 $\rho=$ <u>0</u>

【例】（023）设总体 X 的概率函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$，而 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则未知参数 θ 的矩法估计量为 $\underline{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1}$

【例】（031）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 6x, 0\le x\le y\le 1, \\ 0, \quad 其他, \end{cases}$

则 $P\{X+Y\le 1\}=\underline{\dfrac{1}{4}}$.

【例】（031）已知一批零件的长度 X (单位：cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40 (cm)，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 <u>(39.51,40.49)</u> .(注：标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$.)

【例】（033）设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9, 若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为<u>   0.9   </u> .

【例】（033）设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\underline{\dfrac{1}{2}}$.

【例】（034）设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5, EX=EY=0, $EX^2=EY^2=2$，则 $E(X+Y)^2=$<u>   6   </u> .

【例】（04134）设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\left\{X>\sqrt{DX}\right\}=\underline{\dfrac{1}{e}}$.

【例】（043）设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，总体 Y 从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\underline{\quad\sigma^2\quad}.$$

【例】（05134）从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从$1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则

$P\{Y=2\}=$ $\underline{\dfrac{13}{48}}$.

【例】（053）设二维随机变量(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则 a= __0.4__ , b=__0.1__ .

【例】（06134）设随机变量 X与Y 相互独立，且均服从区间$[0,3]$上的均匀分布，则 $P\left\{\max\left\{X,Y\right\}\le 1\right\}=$ $\underline{\dfrac{1}{9}}$.

【例】（063）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty),X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，则 $ES^2=\underline{2}$.

【例】(07134) 在区间(0, 1)中随机地取两个数，则两数之差的绝对值小于$\dfrac{1}{2}$的概率为 __________. $\dfrac{3}{4}$

【例】(08134) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X=EX^2\right\}=$ __________ $\dfrac{1}{2}e^{-1}$

【例】(08 农)设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(2,4)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为其样本均值，则 $E(\overline{X})^2=$___5_____.

【例】（091）设 $X_1,X_2,\cdots X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，若$\overline{X}+kS^2$为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$______. -1

【例】（093）设 $X_1,X_2,\cdots X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T=\overline{X}-S^2$，则 $ET=$______. np^2

【例】(09 农) 设总体 X 的概率密度 $f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，$-\infty<x<+\infty$，其中参数 $\sigma(\sigma>0)$ 未知，若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\hat{\sigma}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 是 σ 的估计量，则 $E\left(\hat{\sigma}\right)=$ ______ $\frac{n}{n-1}\sigma$ ______.

【例】(101) 设随机变量 X 的分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!}$， $k=0,1,\cdots$，则 $EX^2=$ ____2____.

【例】(103) 设 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，则 $E(T)=$ ___ $\sigma^2+\mu^2$ ______.

【例】(10 农) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\theta(1-\theta)^{k-1},k=1,2,\cdots$，其中 $0<\theta<1$，若 $P\{X\le 2\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{X=3\}=$ $\frac{4}{27}$

【例】(1113 农) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则 $E(XY^2)=\mu(\sigma^2+\mu^2)$

【例】(121) 设 A，B，C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$ _____ $\frac{3}{4}$

【例】(123) 设 A，B，C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|C)=$ _____0

【例】(12 农) 设 A，B 是两个互不相容的随机事件，设 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，则 $P(A|\overline{B})=$ $\frac{3}{4}$

二、 选择题

【例】（873）设 A,B 为两事件，且 $P(AB)=0$，则

A） A 与 B 互斥； B） $A\ B$ 是不可能事件；

C） $A\ B$ 未必是不可能事件； D） $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$. 〔C〕

【例】（874）设 A、B 为两事件，则 $P(A-B)=$

A） $P(A)-P(B)$； B） $P(A)-P(B)+P(AB)$；

C） $P(A)-P(AB)$； D） $P(A)+P(B)+P(AB)$. 〔C〕

【例】（8934）以 A 表示事件“ 甲种产品畅销，乙种产品滞销 ”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为

A)“ 甲种产品滞销，乙种产品畅销 ” ；B)“ 甲乙两种产品均畅销 ” ；

C)“ 甲种产品滞销 ” ； D)“ 甲种产品滞销或乙种产品畅销 ” . 〔D〕

【例】（903）设 A、B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是 A)

A） $P(A\cup B)=P(A)$； B） $P(AB)=P(A)$；

C） $P(B|A)=P(B)$； D） $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

【例】（903）设随机变量 X 和 Y 相互独立且同分布，X 概率分布为 C)

m	-1	1
$P(X=m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是

A） $X=Y$； B） $P(X=Y)=0$；

C） $P(X=Y)=\frac{1}{2}$； D） $P(X=Y)=1$.

【例】（904）已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，二项分布的参数 n,p 的值为 B)

A） $n=4, p=0.6$； B） $n=6, p=0.4$；

C） $n=8, p=0.3$； D） $n=24, p=0.1$.

【例】（9134）设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是：D)

A） $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容； B） $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容；

C） $P(AB)=P(A)P(B)$； D） $P(A-B)=P(A)$.

【例】（913）对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则 B)

A） $D(XY)=D(X)D(Y)$； B） $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$；

C） X 与 Y 独立； D） X 与 Y 不独立.

【例】（9234）设当事件 A 与 B 同时发生时 C 也发生，则　D)

A） $P(C)=P(AB)$ ；　　B） $P(C)=P(A\cup B)$ ；

C） $P(C)\le P(A)+P(B)-1$ ；　D） $P(C)\ge P(A)+P(B)-1$.

【例】(923) 设 n 个随机变量 X_1，X_2，⋯，X_n 独立同分布，$D(X_1)=\sigma^2$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则　A)

A） S 是 σ 的无偏估计量；　　B） S 是 σ 的最大似然估计量；

C） S 是 σ 的相合估计量（即一致估计量）；　D） S 与 $\overline{X}$ 相互独立.

【例】（933）假设事件 A 和 B 满足 $P(B\mid A)=1$，则　D)

A） A 是必然事件；　　B） $P(B\mid \overline{A})=0$ ；

C） $A\supset B$ ；　　D） $A\subset B$.

【例】（933）设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$，且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有　B)

A） $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)dx$ ；　　B） $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)dx$ ；

C） $F(-a)=F(a)$ ；　　D） $F(-a)=2F(a)-1$.

【例】（934）设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$ ；记 $p_1=P\{X\le\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$，则　A)

A）对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$ ；　　B）对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$ ；

C）只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$ ；　D）对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$.

【例】（9434）设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，则　D)

A）事件 A 和 B 互不相容；　　B）事件 A 和 B 互相对立；

C）事件 A 和 B 互不独立；　　D）事件 A 和 B 相互独立.

【例】（943）设 X_1，X_2，⋯ X_n 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，$S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是　B)

A) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$ ；　　B) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$ ；

C) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$ ；　　D) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.

【例】（953）设随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 $U=X+Y$，$V=X-Y$，则随机变量 U 和 V 必然

A）不独立；　B）独立；　C）相关系数不为零；　D）相关系数为零.　　D)

【例】（9534）设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$

A）单调增大；　B）单调减少；　C）保持不变；　D）增减不定.　C)

【例】（963）已知 $0<P(B)<1$ 且 $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是 B

（A）$P[(A_1+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

（B）$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

（C）$P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

（D）$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

【例】（964）设 A，B 为任意两个事件且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则下列选项必然成立的是　B

（A）$P(A)<P(A|B)$；　　（B）$P(A)\le P(A|B)$

（C）$P(A)>P(A|B)$；　　（D）$P(A)\ge P(A|B)$

【例】（971）设有两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是 D

（A）8；（B）16；（C）28；（D）44

【例】（973）设两个随机变量 X 和 Y 相互独立且同分布：$P(X=-1)=P(Y=-1)=\dfrac{1}{2}$，$P(X=1)=P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$，则下列格式成立的是 A

（A）$P(X=Y)=\dfrac{1}{2}$；　　（B）$P(X=Y)=1$

（C）$P(X+Y=0)=\dfrac{1}{4}$；　　（D）$P(XY=1)=\dfrac{1}{4}$

【例】（974）设 X 是一随机变量，$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$（$\mu,\sigma>0$ 常数），则对任意常数 c，必有　D

（A）$E(X-c)^2=EX^2-c^2$；　（B）$E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$；

（C） $E(X-c)^2 < E(X-\mu)^2$ ； （D） $E(X-c)^2 \ge E(X-\mu)^2$.

【例】（981）设 A、B 是两个随机事件，且 $0 < P(A) < 1$，$P(B) > 0$，$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$，则必有 C

（A） $P(A \mid B) = P(\overline{A} \mid B)$ ； （B） $P(A \mid B) \ne P(\overline{A} \mid B)$ ；

（C） $P(AB) = P(A)P(B)$ ； （D） $P(AB) \ne P(A)P(B)$.

【例】（9834）设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数，为使 $F(x) = aF_1(x) + bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取 A

（A） $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$ ； （B） $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$ ；

（C） $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ ； （D） $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

【例】（984）设 A、B、C 是三个相互独立的随机事件，且 $0 < P(C) < 1$，则在下列给定的四对事件中不相互独立的是 B

（A） $\overline{A+B}$ 与 C ； （B） $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ ；

（C） $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$ ； （D） $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$.

【例】（991）设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则 B

（A） $P\{X+Y \le 0\} = \frac{1}{2}$ ； （B） $P\{X+Y \le 1\} = \frac{1}{2}$ ；

（C） $P\{X-Y \le 0\} = \frac{1}{2}$ ； （D） $P\{X-Y \le 1\} = \frac{1}{2}$.

【例】（993）设随机变量 $X_i \sim \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$ （$i = 1,2$），且满足 $P\{X_1 X_1 = 0\} = 1$，则

$P\{X_1 = X_1\} =$ A

（A） 0 （B） $\frac{1}{4}$ ； （C） $\frac{1}{2}$ ； （D） 1

【例】（994）设随机变量 X 和 Y 的方差存在且不等于 0，则 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ 是 X 和 Y C

（A）不相关的充分条件，但不是必要条件；

（B）独立的必要条件，但不是充分条件

（C）不相关的充分必要条件

（D）独立的充分必要条件

【例】（994）假设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数 D

（A）是连续函数；　（B）至少有两个间断点

（C）是阶梯函数；　（D）恰好有一个间断点

【例】（001）设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi = X+Y$ 与 $\eta = X-Y$ 不相关的充分必要条件为 B

（A） $E(X)=E(Y)$ ；　（B） $E(X^2)-[E(X)]^2 = E(Y^2)-[E(Y)]^2$

（C） $E(X^2)=E(Y^2)$ ；　（D） $E(X^2)+[E(X)]^2 = E(Y^2)+[E(Y)]^2$

【例】（0034）在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，以 E 表示事件“ 电炉断电 ”，设 $T_{(1)} \le T_{(2)} \le T_{(3)} \le T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于事件 C

（A） $\{T_{(1)} \ge t_0\}$ ；　（B） $\{T_{(2)} \ge t_0\}$ ；（C） $\{T_{(3)} \ge t_0\}$ ；　（D） $\{T_{(4)} \ge t_0\}$.

【例】（004）设 A、B、C 是三个事件两两独立，则 A、B、C 是相互独立的充分必要条件是 A

（A） A 与 BC 独立；　（B） AB 与 $A\cup C$ 独立；

（C） AB 与 AC 独立；　（D） $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

【例】（014）对于任意二事件 A 和 B，与 $A\cup B = B$ 不等价的是

A） $A\subset B$ ；B） $\overline{B}\subset\overline{A}$ ；C） $A\overline{B}=\varphi$ ；D） $\overline{A}B=\varphi$.　〔D〕

【例】（0113）将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于

A） -1 ；B） 0 ；C） $\frac{1}{2}$ ；D） 1.　〔A〕

【例】（0214）设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则

A） $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

B） $f_1(x)\ f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

C） $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数；

D） $F_1(x)\ F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.　〔D〕

【例】（023）设随机变量 X 和 Y 都服从标准的正态分布，则

A）X+Y 服从正态分布；B） X^2+Y^2 服从 χ^2 分布；

C） X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布；D） X^2/Y^2 服从 F 分布.　[C]

【例】（024）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立， $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则根据列维

一林德伯格（Levy-Lindberg）中心极限定理，当 n 充分大时，近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

A）有相同的数学期望；B）有相同的方差；

C）服从同一指数分布；D）服从同一离散型分布 [C]

【例】（034）对于任意二事件 A 和 B

(A) 若 $AB \neq \phi$，则 A,B 一定独立. (B) 若 $AB \neq \phi$，则 A,B 有可能独立.

(C) 若 $AB = \phi$，则 A,B 一定独立. (D) 若 $AB = \phi$，则 A,B 一定不独立. [B]

【例】（034）设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且它们不相关，则

(A) X 与 Y 一定独立. (B) (X,Y)服从二维正态分布.

(C) X 与 Y 未必独立. (D) X+Y 服从一维正态分布. [C]

【例】（033）将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：A_1={掷第一次出现正面}，A_2={掷第二次出现正面}，A_3={正、反面各出现一次}，A_4={正面出现两次}，则事件

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立. (B) A_2, A_3, A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立. (D) A_2, A_3, A_4 两两独立. [C]

【例】（031）设随机变量 $X \sim t(n)(n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$，则

(A) $Y \sim \chi^2(n)$. (B) $Y \sim \chi^2(n-1)$.

(C) $Y \sim F(n,1)$. (D) $Y \sim F(1,n)$. [C]

【例】（04134）设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_a 满足 $P\left\{X>u_a\right\}=\alpha$. 若 $P\left\{|X|<x\right\}=\alpha$，则 x 等于

（A）$u_{\frac{a}{2}}$. （B）$u_{1-\frac{a}{2}}$. （C）$u_{\frac{1-a}{2}}$. （D）u_{1-a}. 【 C 】

【例】（0414）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n(n>1)$ 独立分布，且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则

（A）$Cov(X_1, Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$. （B）$Cov(X_1, Y)=\sigma^2$.

（C）$D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$. （D）$D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$. 【 A 】

【例】（0514）设二维随机变量(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则

(A) a=0.2, b=0.3　　(B) a=0.4, b=0.1

(C) a=0.3, b=0.2　　(D) a=0.1, b=0.4　　[B]

【例】（051）设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq 2)$为来自总体 N(0,1)的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，$S^2$为样本方差，则

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$.

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.　　[D]

【例】（053）设一批零件的长度服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值$\bar{x}=20(cm)$，样本标准差$s=1(cm)$，则μ的置信度为 0.90 的置信区间是

(A) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.　　(B) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

(C) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.　(D) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.　[C]

【例】（054）设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为$\lambda(\lambda>1)$的指数分布，记$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leq x\}=\Phi(x)$.　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leq x\}=\Phi(x)$.　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leq x\}=\Phi(x)$.　[C]

【例】（061）设A,B为随机事件，且$P(B)>0,P(A|B)=1$，则必有

(B) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$　　[B]

【例】（06134）设随机变量X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$$

则必有

(B) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$　　[D]

【例】 (0713) 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$, 则此人

第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$． (B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$． (D) $6p^2(1-p)^2$． 【 C 】

【例】(0713) 设随机变量(X, Y)服从二维正态分布，且 X与 Y不相关，$f_X(x) f_Y(y)$ 分别表示 X，Y的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X的密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

(A) $f_X(x)$． (B) $f_Y(y)$． (C) $f_X(x)f_Y(y)$. (D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$． 【 A 】

【例】(08134) 设随机变量 X,Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为（ (A) ）

(A) $F^2(x)$. (B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-\left[1-F(x)\right]^2$. (D) $\left[1-F(x)\right]\left[1-F(y)\right]$.

【例】(08134) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（D ）

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$. (B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$. (D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

【例】(08 农)设 A_1，A_2，A_3 为 3 个随机事件，下列结论正确的是 A

（A）若 A_1，A_2，A_3 相互独立，则 A_1，A_2，A_3 两两独立；

（B）若 A_1，A_2，A_3 两两独立，则 A_1，A_2，A_3 相互独立；

（C）若 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，则 A_2，A_3 相互独立；

（D）若 A_1 与 A_2 独立，A_2 与 A_3 独立，则 A_1 与 A_3 独立.

【例】(08 农)设随机变量 X 服从参数为 n，p 的二项分布，则 D

（A） $E(2X-1)=2np$；（B） $E(2X+1)=4np$ ；

（C） $D(2X-1)=2np(1-p)$；（D） $D(2X+1)=4np(1-p)$.

【例】(091 农)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\phi(x)+0.7\phi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$（ C ）

(A) 0 ； (B) 0.3 ； (C) 0.7 ； (D) 1

【例】(0913)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间

断点个数为　B

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3

【例】(093 农)设事件 A 与事件 B 互不相容，则（　D）

（A） $P(\overline{A}\overline{B})=0$；(B） $P(AB)=P(A)P(B)$；

（C） $P(A)=1-P(B)$；(D） $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【例】(1013)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\le x<1\\ 1-e^{-x} & x\ge 1\end{cases}$，则 $P(X=1)$ 等于　C)

A） 0；　B) $\frac{1}{2}$；　C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$；　D) $1-e^{-1}$

【例】(1013)设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数， $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度函数，若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\le 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}$ （$a>0$，$b>0$）为概率密度，则 a，b 满足　A)

A） $2a+3b=4$； B) $3a+2b=4$； C) $a+b=1$； D) $a+b=2$

【例】(10 农)设随机变量 X 服从 $(-1,1)$ 上的均匀分布，事件 $A=\{0<X<1\}, B=\{|X|<\frac{1}{4}\}$，则（D）

A. $P(AB)=0$　　B. $P(AB)=P(A)$

C. $P(A)+P(B)=1$　　D. $P(AB)=P(A)P(B)$

【例】(10 农)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $ET=$（ C）

A. σ^2　B. μ^2　C. $\sigma^2+\mu^2$　D. $\sigma^2-\mu^2$

【例】(1113)设 $F_1(x)$， $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的密度函数 $f_1(x)$， $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（　D　）

（A） $f_1(x)\ f_2(x)$；(B) $2\ f_2(x)\ F_1(x)$；(C) $f_1(x)\ F_2(x)$；(D) $f_1(x)\ F_2(x)+\ f_2(x)\ F_1(x)$

【例】(111)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 $E(UV)=$（　B　）

（A） $EU\bullet EV$；(B） $EX\bullet EY$；(C） $EU\bullet EY$；(D） $EX\bullet EV$

【例】(113 农)设总体 X 服从参数为 λ（$\lambda>0$）的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots X_n$（$n\ge 2$）为来自总体的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$（ D ）

（A）$ET_1>ET_2$，$DT_1>DT_2$；　　（B）$ET_1>ET_2$，$DT_1<DT_2$；

（C）$ET_1<ET_2$，$DT_1>DT_2$；　　（D）$ET_1<ET_2$，$DT_1<DT_2$

【例】(11 农)设随机事件 A，B 满足 $A\subset B$ 且 $0<P(A)<1$，则必有（ B ）

（A）$P(A)\ge P(A|A\cup B)$；　　（B）$P(A)\le P(A|A\cup B)$；

（C）$P(B)\ge P(B|A)$；　　（D）$P(B)\le P(B|\overline{A})$

【例】(121) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$（ A ）

（A）$\frac{1}{5}$；　（B）$\frac{1}{3}$；　（C）$\frac{2}{5}$；　（D）$\frac{4}{5}$

【例】(121) 将长度为 l m 的木棒随机地分成两段，则两段长度的相关系数为　（D）

（A）1；　（B）$\frac{1}{2}$；　（C）$-\frac{1}{2}$；　（D）-1

【例】(123 农) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $P\{X^2+Y^2\le 1\}=$　（D）

（A）$\frac{1}{4}$；　（B）$\frac{1}{2}$；　（C）$\frac{\pi}{8}$；　（D）$\frac{\pi}{4}$

【例】(123) 设 X_1，X_2，X_3，X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)$（$\sigma>0$）的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为（B）

（A）$N(0,1)$；　（B）$t(1)$；　（C）$\chi^2(1)$；　（D）$F(1,1)$

【例】(12 农) 设 X_1，X_2，X_3，X_4 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$（$\sigma>0$）的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2}}}$ 的分布为（B）

（A）$N(0,2)$；　（B）$t(2)$；　（C）$\chi^2(2)$；　（D）$F(2,2)$

三、 解答题

【例】(871) 设随机变量 X,Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数. $f_Z(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-z} & 0<z\le 2\\ \frac{1}{2}e^{2-z}-\frac{1}{2}e^{-z} & z>2\end{cases}$

【例】(8734) 设两箱内装有同种零件，第一箱装 50 件，有 10 件一等品，第二箱装 30 件，有 18 件一等品，先从两箱中任挑一箱，再从此箱中前、后不放回地任取两个零件，求：(1) 先取出的零件是一等品的概率 p ；(2) 在先取出的是一等品的条件下，后取的仍是一等品的条件概率 q 。 $p=\frac{2}{5}$， $q=(\frac{10}{50}\cdot\frac{9}{49}+\frac{18}{30}\cdot\frac{17}{29})\frac{5}{4}$

【例】(873) 设随机变量 X 概率分布为 $P(X=1)=0.2$，$P(X=2)=0.3$，$P(X=3)=0.5$

(1) 写出其分布函数；$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.2 & 1\le x<2\\ 0.5 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$

(2) (874) 求 X 的期望和方差。2.3；0.61

【例】(873) 设 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求随机变量 $Y=\frac{1}{X}$ 的期望 $E(Y)$ $\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$

【例】(881) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$ $\frac{3(1-y)^2}{\pi\left[1+(1-y)^6\right]}$，$-\infty<y<+\infty$

【例】(8834) 设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1，一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客随机查看 4 只，若无残次品，则买此箱玻璃杯，否则不买，求：(1) 顾客买此箱玻璃杯的概率 α ；(2) 在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没残次品的概率 β .

$\alpha=0.8+\frac{34\times 8}{1900}$， $\beta=\frac{0.8}{\alpha}$

【例】（8834）设随机变量 X 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布，求 $Y=e^{2X}$ 的概率密度

$$f(y).=\begin{cases}\frac{1}{2y}e^2\le y\le e^4\\ 0 \quad 其他\end{cases}$$

【例】（883）某保险公司经多年的资料统计表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，在随意抽查的 100 家索赔户中被盗的索赔户数为随机变量 X，（1）写出 X 的概率分布；（2）利用棣莫佛——拉普拉斯定理，求被盗的索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值. $X\sim B(100,0.2)$；0.927

附表：

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.5	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

【例】（884）设十只同种电器元件中有两只废品，装配仪器时，从这批元件中任取一只，若是废品，则扔掉重新取一只，若仍是废品，则再扔掉还取一只，求：在取到正品之前，已取出的废品数 X 的概率分布，数学期望及方差.

$$\begin{array}{cccc} X & 0 & 1 & 2 \\ P & \frac{4}{5} & \frac{8}{45} & \frac{1}{45}\end{array}；\frac{2}{9}；\frac{88}{405}$$

【例】（891）设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1，标准差（均方差）为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布，试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数. $N(5,9)$

【例】（893）已知随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & 0<x<+\infty,\ 0<y<+\infty\\ 0 & 其它\end{cases}$$

试求：（1） $P(X<Y)$；$\frac{1}{2}$ （2） $E(XY)$.1

【例】（893）设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布，现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率. $\frac{20}{27}$

【例】（894）已知随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$P(X=x,Y=y)$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

试求（1） X 的概率分布；（2） $X+Y$ 的概率分布；（3） $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望. $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.25 & 0.45 & 0.3\end{pmatrix}$；$X+Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.1 & 0.4 & 0.35 & 0.15\end{pmatrix}$；0.25

【例】（894）某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命（单位：小时）都服从同一指数分布，分布密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，试求：在仪器使用的最初 200 小时内，至少有一只电子元件损坏的概率 α . $1-\dfrac{1}{e}$

【例】（901）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$. $\begin{cases}2x\ 0<x<1\\ 0\quad 其他\end{cases}$，$\dfrac{2}{9}$

【例】（904）从 0，1，2，…，9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；$A_2=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$ $\dfrac{7}{15}$；$\dfrac{7}{30}$

【例】（904）甲、乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的命中率为 0.5，以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数，试求 X 和 Y 的联合概率分布.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.16	0.32	0.16
1	0.08	0.16	0.08
2	0.01	0.02	0.01

【例】（904）某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率. 0.682

附表：

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

【例】（911）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数. $\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

【例】（913）一汽车沿一街道行驶，需要通过三个设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红

或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求

（1） X 的概率分布. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.125 \end{pmatrix}$

（2）（914） $E(\frac{1}{1+X})$　$0.125\times\frac{67}{12}$

【例】（913）假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2+y^2\le r^2$ 上服从联合均匀分布.

（1）求 X 和 Y 的相关系数 ρ ；（2）问 X 和 Y 是否独立？ 0；不独立

【例】（913）设总体 X 的概率函数为 $p(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}e^{-\lambda x^a} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$a>0$ 是已知常数，试根据来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$，求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$. $\frac{n}{x_1^a+x_2^a+\cdots+x_n^a}$

【例】（914）在电源电压不超过 200 伏、在 200~240 伏和超过 240 伏三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2，假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$，试求：(1）该电子元件损坏的概率 α ；(2）该电子元件损坏时，电源电压在 200~240 伏的概率 β。$\alpha=0.06936$，$\beta=0.083$

附表：

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

[注]表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

【例】（921）设随机变量 X 与 Y 独立，X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布，试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度（计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示，其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$） $\frac{1}{2\pi}\left[\Phi(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma})\right]$

【例】（9234）假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，试求 100 次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α （已知 $\Phi(1.96)=0.975$），并利用泊松分布求出 α 的近似值（要求小数点后取两位有效数字）.

[附表]

λ	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	$\cdots$

$\alpha=1-0.95^{100}-5\times0.95^{99}-49.5\times0.05^2\times0.95^{98}=1-e^{-5}\times18.5=0.87$

【例】(9234) 一台设备由三大部件组成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10，0.20 和 0.30。假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$. 0.6，0.46

【例】(923) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & 其他 \end{cases}$

(1) 求随机变量 X 的密度 $f_X(x)$；$\begin{cases} e^{-x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

(2) 求概率 $P(X+Y\le 1)$ $1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$

【例】(931) 设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$. 0，2

(2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差，并问 X 与 $|X|$ 是否不相关？0，不相关

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立？为什么？不独立.

【例】(933) 设随机变量 X 和 Y 同分布，X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & 0<x<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

(1) 已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 独立，且 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$，求常数 a；$\sqrt[3]{4}$

(2) 求 $\dfrac{1}{X^2}$ 的数学期望. 6

【例】(9334) 假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，

(1) 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；$f(t)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$

(2) 求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率 Q. $e^{-8\lambda}$

【例】(934) 设随机变量 X 和 Y 独立，都在区间 $[1,3]$ 上服从均匀分布，引进事件 $A=\{X\le a\}$，$B=\{Y>a\}$

(1) 已知 $P(A\cup B)=\dfrac{7}{9}$，求常数 a；$3-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

(2) 求 $\dfrac{1}{X}$ 的数学期望. $\dfrac{1}{2}\ln 3$

【例】(941) 已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，且 X 与 Y 的相

关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，

（1） 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$；$\dfrac{1}{3}$，3

（2） 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；0

（3） 问 X 与 Z 是否相互独立？为什么？无法判断

【例】（943）假设随机变量 X_1，X_2，X_3，X_4 相互独立，且同分布

$$P(X_i=0)=0.6，P(X_i=1)=0.4\ （i=1,2,3,4）$$

求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2204 & 0.5592 & 0.2204 \end{pmatrix}$

【例】（9434）假设由自动线加工的某种零件的内径 X（毫米）服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径小于 10 或大于 12 的为不合格品，其余为合格品，销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损，已知销售利润 T（单位：元）与销售零件的内径 X 有如下关系：$T=\begin{cases} -1 & X<10 \\ 20 & 10\le X\le 12 \\ -5 & X>12 \end{cases}$，问平均内径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

$11-\dfrac{1}{2}(\ln 25-\ln 21)$

【例】（944）假设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，现在对 X 进行 n 次独立重复观察，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布.

$V_n \sim B(n,0.01)$

【例】（951）设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$，求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$. $\begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & y\ge 1 \\ 0 & y<1 \end{cases}$

【例】（9534）假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需进一步调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格不能出厂。现该厂新生产了 n（$n\ge 2$）台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立），求

（1） 全部能出厂的的概率 α；0.94^n

（2） 其中恰好有两件不能出厂的概率 β；$C_n^2\cdot 0.94^{n-2}\cdot 0.06^2$

（3） 其中至少有两件不能出厂的概率 θ.$1-n\times 0.94^{n-1}\times 0.06-0.94^n$

【例】（953）已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x,y)$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0\text{或}y<0\\ x^2y^2 & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ x^2 & 0\le x\le 1,\ y>1\\ y^2 & x>1,\ 0\le y\le 1\\ 1 & x>1,\ y>1\end{cases}$$

【例】(954) 假设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明：$Y=1-e^{-2X}$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.　$G(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ y & 0<y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$

【例】（961）设 ξ、η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知 ξ 的分布律为 $P(\xi=i)=\dfrac{1}{3}$，$i=1,2,3$，又设 $X=\max(\xi,\eta)$，$Y=\min(\xi,\eta)$，

（1）写出二维随机变量 (X,Y) 的分布律：

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

（2）求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$　$\dfrac{22}{9}$

【例】(9634) 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生二次故障所获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内期望利润是多少？(5.216 万元)

【例】（963）考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B、C 分别是将一枚色子（骰子）接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.（$p=\dfrac{19}{36}$，

$q=\frac{1}{18}$)

【例】（963）假设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本；已知 $EX^k=\alpha_k$（$k=1,2,3,4$），证明当 n 充分大时，随机变量 $Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参数。$N(\alpha_2,\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n})$

【例】（964）假设一电路装有三个同种电气原件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不能正常工作，试求电路正常工作的时间 T 的概率分布. $f_T(t)=\begin{cases}3\lambda e^{-3\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$

【例】（971）从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{2}{5}$。设 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望。

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$\frac{6}{5}$

【例】（971）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 是未知参数。$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量

$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

【例】（974）假设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P(X=-1)=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=\frac{1}{4}$；在事件 $(-1<X<1)$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，试求

（1）（973）X 的分布函数 $F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \dfrac{5x+7}{16} & -1\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

（2）X 取负值的概率 $p.\dfrac{7}{16}$

【例】（973）乘客乘电梯从到电视塔顶层观光；电梯每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行。假设一游客在早八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在[0,60]上均匀分布，求该游客等候时间的数学期望。 11.67

【例】（973）两台同样自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布；首先开动一台，当其发生故障时停用而另一台自行开动。试求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$、数学期望和方差。 $f(t)=\begin{cases}25te^{-5t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$，$E(T)=\dfrac{2}{5}$，$D(T)=\dfrac{2}{25}$

【例】（974）假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量 $X_k=\begin{cases}0 & 若Y\le k\\ 1 & 若Y>k\end{cases}$ （$k=1,2$）

（1）求 X_1 和 X_2 的联合概率分布；

X_2 \ X_1	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

（2）求 $E(X_1+X_2).e^{-1}+e^{-2}$

【例】（981）设两个随机变量 X，Y 相互独立，且都服从均值为 0、方差为 $\dfrac{1}{2}$ 的正态分布，求随机变量 $|X-Y|$ 的方差. $1-\dfrac{2}{\pi}$

【例】（981）从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间 (1.4, 5.4) 内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大？35

附表：标准正态分布表

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

x	1.28	1.645	1.96	2.33

$\Phi(x)$	0.900	0.950	0.975	0.990

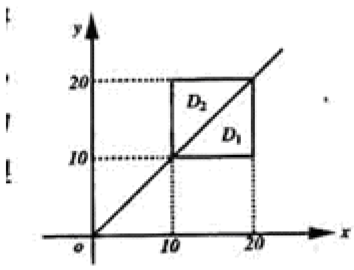
【例】(981) 设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中抽取 36 位考生的成绩，算的平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体学生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

附表：t 分布表

$$P[t(n) \le t_p(n)] = p$$

$t_p(n)$ \ p , n	**0.95**	**0.975**
35	**1.6896**	**2.03.1**
36	**1.6883**	**2.0281**

【例】(983) 一商店经销某种商品，每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从[10,20]上的均匀分布，商店每售出一单位商品可得利润 1000 元；若需求量超过了进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元。试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值。14166.67



【例】(983) 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名的考生的报名表，其中女生的报名表为 3 份、7 份和 5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后抽取两份。

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p ； $\dfrac{29}{90}$

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的的概率 q $\dfrac{20}{61}$

【例】(984) 某种商品每周的需求量 X 是服从[10,30]上的均匀分布的随机变量，而经销商店进货数量为区间[10,30]中的某一整数，商店每售出一单位商品可得利润 500 元，若供大于求则削价处理，每处理一件商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每 1 单位商品仅获利 300 元，为使商店所获利润期望值不少于 9280 元，试确定最小进货量. 21 单位

【例】(984) 某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{若抽到}i\text{等品} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (i = 1,2,3)$$

试求：(1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布；

X_1 / X_2	0	1
0	0.1	0.8
1	0.1	0

（2）随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数 ρ. $-\dfrac{2}{3}$

【例】(991) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中的空白处

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y=y_j)=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

【例】(991) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

（1） 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$； $\hat{\theta}=2\overline{X}$

（2） 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$. $D(\hat{\theta})=\dfrac{\theta^2}{5n}$

【例】(993) 假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0 & X\le Y \\ 1 & X>Y\end{cases},\quad V=\begin{cases}0 & X\le 2Y \\ 1 & X>2Y\end{cases}$$

（1） 求 U 和 V 的联合分布；$\begin{bmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

（2） 求 U 和 V 的相关系数 r. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

【例】（993）设 $X_1, X_2, \cdots X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本；$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \cdots + X_6)$，

$Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$，$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$，$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$，证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

【例】（994）设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$ 上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$. $f(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln s) & 0 < s < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

【例】（994）已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布

$$X_1 \sim \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

而且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$.

（1） 求 X_1 和 X_2 的联合分布；

X_2 \ X_1	-1	0	1	$\sum$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\sum$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

（2） 问 X_1 和 X_2 的是否独立？为什么？不独立

【例】（001）某流水生产线上每个产品不合格的概率为 p（$0 < p < 1$），各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修。设开机后第一次停机时已生产的产个数为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$. $E(X) = \frac{1}{p}$，$D(X) = \frac{1-p}{p^2}$

【例】（001）设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & x \le \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数，又设 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值. $\hat{\theta} = \min\{x_1, x_2 \cdots, x_n\}$

【例】（003）假设 0.50、1.25、0.80、2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值，已知$Y=\ln X$服从正态分布$N(\mu,1)$.

（1） 求 X 的数学期望EX （记EX 为b）；$e^{\mu+\frac{1}{2}}$

（2） 求μ的置信度为 0.95 的置信区间；$(-0.98,0.98)$

（3） 利用上述结果求b的置信度为 0.95 的置信区间. $(e^{-0.48},e^{1.48})$

【例】（0034）设 A、B 是二随机事件；随机变量

$$X=\begin{cases}1 & 若A出现\\ -1 & 若A不出现\end{cases}，Y=\begin{cases}1 & 若B出现\\ -1 & 若B不出现\end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立.

【例】（004）设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$$

其中$\varphi_1(x,y)$和$\varphi_2(x,y)$都是二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为$\frac{1}{3}$和$-\frac{1}{3}$，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是 0，方差都是 1.

（1） 求随机变量 X 和 Y 的密度函数$f_1(x)$和$f_2(y)$，及 X 和 Y 的相关系数ρ（可以直接利用二维正态密度的性质）. $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，$\rho=0$

（2） 问 X 和 Y 是否独立？为什么？不独立

【例】（014）设随机变量 X 与 Y 的联合分布在以点$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量$U=X+Y$的方差.（$\frac{1}{18}$）

【例】（0134）一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克，若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977。（$\Phi(2)=0.977$） $n<98.0199$

【例】（013）设随机变量 X 与 Y 的联合分布是正方形$G=\{(x,y):1\le x\le 3,1\le y\le 3\}$上的均匀分布，试求随机变量$U=|X-Y|$的概率密度$p(u)$. $p(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-u) & 0<u<2\\ 0 & 其它\end{cases}$

【例】（011）设某班车起点站上客人数X服从参数λ（$\lambda>0$）的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为p（$0<p<1$），且中途下车与否相互独立。以Y表示在中途下车的人

数，求：1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；2）二维随即变量 (X,Y) 的概率分布. $C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ ；$C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\cdot\dfrac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$

【例】（011）设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma>0$），从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots X_{2n}$（$n\ge 2$），其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.（$2(n-1)\sigma^2$）

【例】（024）设 A，B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明：$P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

【例】（021）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2} & 0\le x\le\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$，对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.（5）

【例】（021）设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ（$0<\theta<\dfrac{1}{2}$）是未知参数，利用总体 X 的如下样本值：3，1，3，0，1，2，3，求 θ 的矩法估计值和最大似然估计值. $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$ ；$\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$

【例】（023）假设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$X=\begin{cases}-1 & U\le -1\\ 1 & U>-1\end{cases}$；$X=\begin{cases}-1 & U\le 1\\ 1 & U>1\end{cases}$，试求 1）$X$ 和 Y 的联合概率分布；2）$D(X+Y)$

$$\begin{pmatrix}(-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1)\\ \dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4}\end{pmatrix} = 2$$

【例】（0234）假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作时间（EX）为 5 小时。设备定时开机，出故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机，试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

$$F(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ 1-e^{-\frac{x}{5}} & 0\le y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}$$

【例】（034）对于任意二事件 A 和 B，$0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$$ 称做事件 A 和 B 的相关系数.

(1) 证明事件 A 和 B 独立的充分必要条件是其相关系数等于零；

(2) 利用随机变量相关系数的基本性质，证明$|\rho|\le 1$.

【例】（031）已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数的数学期望；$\frac{3}{2}$.

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率. $\frac{1}{4}$.

【例】（031）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta,\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 F(x); $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta.\end{cases}$

(2) 求统计量$\hat{\theta}$的分布函数$F_{\hat{\theta}}(x)$；$\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta.\end{cases}$

(3) 如果用$\hat{\theta}$作为θ的估计量，讨论它是否具有无偏性. $\theta+\frac{1}{2n}\ne\theta$

【例】（0334）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, 若x\in[1,8],\\ 0, \quad 其他;\end{cases}$

F(x)是 X 的分布函数. 求随机变量 Y=F(X)的分布函数.$G(y)=\begin{cases}0, \quad 若y<0,\\ y, 若0\le y<1,\\ 1, \quad 若y\ge 1.\end{cases}$

【例】（033）设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，而 Y 的概

率密度为 f(y)，求随机变量 U=X+Y 的概率密度 g(u).　　$0.3f(u-1)+0.7f(u-2)$.

【例】(0434) 设 A、B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求：(041)（I）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

（II）(041) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}. $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$

（III）$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

.

【例】(043) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha;\beta)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$, 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（I）(041) 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

（II）(041) 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量；　$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

（III）当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量.　$\hat{\alpha}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

【例】(044) 设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，求：

（I）随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}, 0<y<x<1\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$

（II）Y 的概率密度； $f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

（III）概率 $P|X+Y>1|.=1-\ln 2.$

【例】（0534）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

求：(I)（051） (X,Y)的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ ；$\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$ $\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, 0<y<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

（II）（051） $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$. $f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}z, 0<z<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

(III) $P\{Y\le\frac{1}{2}\Big|X\le\frac{1}{2}\}$. $P\{Y\le\frac{1}{2}\Big|X\le\frac{1}{2}\}=\dfrac{P\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\}}{P\{X\le\frac{1}{2}\}}=\dfrac{3/16}{1/4}=\dfrac{3}{4}.$

【例】设 $X_1, X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 N(0, σ^2)的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X}, i=1,2,\cdots,n.$

求：(I)（05134）Y_i 的方差 $DY_i, i=1,2,\cdots,n$ ；$\dfrac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\dfrac{1}{n^2}\cdot(n-1)\sigma^2=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2.$

（II）（05134） Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$. $-\dfrac{2}{n}\sigma^2+\dfrac{1}{n}\sigma^2=-\dfrac{1}{n}\sigma^2.$

（III）（053）若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c. $c=\dfrac{n}{2(n-2)}.$

（Ⅳ）（054） $P\{Y_1+Y_n\le 0\}$. $\dfrac{1}{2}.$

【例】（06）设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, -1<x<0\\ \dfrac{1}{4}, 0\le x<2\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ ，

令 $Y=X^2, F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.

(Ⅰ) （06134）求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}},0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}},1\le y\le 4\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

(Ⅱ) （0634）$\mathrm{Cov}(X,Y)$；$\mathrm{Cov}(X,Y)=\dfrac{7}{8}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{2}{3}$

(Ⅲ) （06134）$F\left(-\dfrac{1}{2},4\right).=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$

【例】设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

其中θ是未知参数$(0<\theta<1)$，$X_1,X_2...,X_{\mathrm{n}}$为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2...,x_n$ 中小于 1 的个数，

（Ⅰ）（063）求θ的矩估计；$\widehat{\theta}=\dfrac{3}{2}-\overline{X}$

（Ⅱ）（0613）求θ的最大似然估计$\widehat{\theta}=\dfrac{N}{n}$

【例】（064）设二维随机变量（X,Y）的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中a,b,c为常数，且 X 的数学期望 $EX=-0.2$，$P\{Y\le 0\,|\,X\le 0\}=0.5$，记$Z=X+Y$，求

(Ⅰ) a,b,c的值；$a=0.2,b=0.1,c=0.1$.

(Ⅱ) Z 的概率分布；

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(Ⅲ) $P\{X=Z\}$. $P\{X=Z\}=P\{X=X+Y\}=P\{Y=0\}=0+0.1+0.1=0.2$

【例】(07134) 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(I) 求 $P\{X>2Y\}$；$\dfrac{7}{24}$

(II) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$. $f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1,\\ (2-z)^2, & 1\le z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【例】(07134) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中参数 θ(0<θ<1)未知，$X_1, X_2\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；$\hat{\theta}=2\overline{X}-\dfrac{1}{2}$.

(II) 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.

$$E(4\overline{X}^2)=\frac{3n+1}{3n}\theta^2+\frac{3n-1}{n}\theta+\frac{3n+5}{12n}\neq\theta^2$$

【例】(074) 设随机变量 X 与 Y 独立分布，且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

记 $U=\max\{X,Y\}, V=\min\{X,Y\}$.

(I) 求(U, V)的概率分布;

U \ V	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(II) 求(U, V)的协方差 Cov(U, V). $Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\dfrac{16}{9}-\dfrac{14}{9}\times\dfrac{10}{9}=\dfrac{4}{81}$

【例】(08134) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$

的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，记 $Z=X+Y$

（1）求 $P\left\{Z\le \frac{1}{2}\middle| X=0\right\}$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$

（2）求 Z 的概率密度． $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

【例】(0813) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.记 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，$T=\overline{x}^2-\frac{1}{n}S^2$

（1）证 T 是 μ^2 的无偏估计量.

（2）当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT . $\frac{2}{n(n-1)}$

【例】(084) 设某企业生产线上产品的合格率为 0.96，不合格产品中只有 $\frac{3}{4}$ 的产品可进行再加工，且再加工的合格率为 0.8，其余均为废品。已知每件合格品可获利 80 元，每件废品亏损 20 元，为保证该企业每天平均利润不低于 2 万元，问该企业每天至少生产多少产品？256

【例】(08 农)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}ax & 0<x\le 1\\ b & 1<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$，且 X 的数学期望 $EX=\frac{13}{12}$，(Ⅰ)求常数 a,b $a=1,b=\frac{1}{2}$；

(Ⅱ)求 X 的分布函数。$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x^2}{2} & 0<x\le 1\\ \frac{x}{2} & 1<x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$

【例】(08 农)设二维随机变量（X，Y）的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0
2	0.3	0.1	0.3

(I) 分别求 (X,Y) 关于 X,Y 的边缘分布；$\begin{pmatrix}X & 0 & 2\\ P & 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}Y & -1 & 0 & 1\\ P & 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$

(II)　　求 $P\{X+Y\le 2\}$；0.7

(III)　　求 $P\{Y=0\,|\,X=0\}$ $\dfrac{2}{3}$

【例】(0913) 袋中有 1 个红色球，2 个黑色球与 3 个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一球，以 X，Y，Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数。

(Ⅰ)求 $P(X=1\,|\,Z=0)$ 　$\dfrac{4}{9}$；(Ⅱ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布。

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

【例】(093)设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x} & 0<y<x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

①求条件概率密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$；②求条件概率 $P(X\le 1\,|\,Y\le 1)$

① $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<y<x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，② $\dfrac{e-2}{e-1}$

【例】(091)设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，其中 λ（$\lambda>0$）未知，

$X_1, X_2 \cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本

(Ⅰ)求参数 λ 的矩估计量；(Ⅱ) 求参数 λ 的最大似然估计量. $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$

【例】(09 农)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x & a<x<b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，且 $E(X^2)=1$。

(I) 求 a,b 的值；$\begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(II) 求 $P(|x|<1)$。$\dfrac{1}{2}$

【例】(09 农)已知随机变量 X 与 Y 的概率分布为

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

且 $P(X=Y)=\frac{1}{4}$

求（I）二维随机变量（X，Y）的概率分布；

Y \ X	-1	1	p_i
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
p_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

（II） X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}。 $=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【例】(1013)设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}，-\infty<x<+\infty，-\infty<y<+\infty$$

求 A 及 $f_{Y|X}(y|x)$.　$A=\frac{1}{\pi}$；$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$

【例】(101)设总体 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1-\theta & \theta-\theta^2 & \theta^2\end{pmatrix}$，其中 $\theta\in(0,1)$ 为未知参数，以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n）中等于 i（$i=1,2,3$）的个数，求常数 a_1，a_2，a_3，使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，并求 T 的方差.

$a_1=0$，$a_2=\frac{1}{n}$，$a_3=\frac{1}{n}$，$\frac{\theta(1-\theta)}{n}$

【例】（103）箱内有 6 个球，其中红、白、黑的个数分别为 1，2，3 个，现从中随机地取出 2 个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数.

(I) 求随机变量(X,Y)的概率分布；(II) 求$\text{cov}(X,Y)-\dfrac{4}{45}$

Y / X	0	1	2	
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

【例】(10 农)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	$\frac{1}{3}$	0	a
1	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{12}$

且$P\{X+Y=1\mid X=0\}=\dfrac{1}{3}$。求

（Ⅰ）常数a，b $a=\dfrac{1}{6}$，$b=\dfrac{1}{6}$

（Ⅱ）求$Cov(X,Y)$. 0

【例】(10 农)设随机变量 X 的概率密度为

$f(x)=\begin{cases}|x|,-1<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，令$Y=X^2+1$，求

（Ⅰ）Y 的概率密度 $f_Y(y)$；$f_Y(y)=\begin{cases}1,1\le y<2\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

（Ⅱ）$P\{-1<Y<\dfrac{3}{2}\}$. $\dfrac{1}{2}$

【例】设随机变量X 与Y 的概率分布为

X	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且$P(X^2=Y^2)=1$.

(I) (1113 农)求二维随机变量(X,Y)的概率分布；

Y \ X	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(II)(1113)求 $Z=XY$ 的概率分布；$\begin{pmatrix} Z & -1 & 0 & 1 \\ P & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(III)(1113)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}. $\rho_{XY}=0$

(II)(11 农)求 $EX=\frac{2}{3}$，$EY=0$ 及 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}. $\rho_{XY}=0$

【例】(111)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知，$\bar{x}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ ；

(II) $E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)=\frac{2o^4}{n}$

【例】(X,Y) 在 G 上服从均匀分布，G 由 $x-y=0$，$x+y=2$ 与 $y=0$ 围成

.①(113 农)求 X 的边缘密度 $f_X(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ；

②(113)求 $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} \frac{1}{2-2y} & 0\le y<1, y\le x\le 2-y \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ；

②(11 农)求 $P(X-Y\le 1)$. $=\frac{3}{4}$

【例】(121 农) 设二维离散型随机变量 X 、Y 的概率分布为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0

2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X=2Y\}$; $\frac{1}{4}$

(II) 求 $\text{cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}；$\frac{2}{3}$，0

【例】（121）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$，设 $Z=X-Y$

（1）求 Z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$；$\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{z}{10\sigma^2}}$，（$-\infty<z<\infty$）

（2）设 z_1，z_2，……，z_n 为来自总体 z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

$$\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$$

（3）证明 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量。

【例】（123）已知随机变量 X、Y 以及 XY 的分布律如下表所示

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

(III) 求 $P\{X=2Y\}$; $\frac{1}{4}$

(IV) 求 $\text{cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}；$\frac{2}{3}$，0

【例】（123）设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从参数为 1 的指数分布，$V=\min(X,Y)$，$U=\max(X,Y)$，求（1）随机变量 V 的概率密度；$f_V(v)=\begin{cases}2e^{-2v} & v>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（2） $E(U+V)$ ；2

【例】（12 农）设随机变量 X 服从参数为 λ （$\lambda>0$）的指数分布，且 $P\{X\leq 1\}=\dfrac{1}{2}$

（I）求参数 λ ；$\ln 2$

（II）求 $P\{X>2\mid X>1\}$ ；$\dfrac{1}{2}$