8(本题 10 分)、设随机向量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$.

(1) 求$P\{X+Y\le 1\}$；

(2) 求X,Y的边缘密度，并判断X与Y的独立性.

解：

(1) $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x xdy=\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}$；

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^2 xdy=2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases},$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^1 xdx=\frac{1}{2}, & 0\le y\le 2 \\ 0, & 其它 \end{cases},$$

由$f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$知随机变量X,Y相互独立.

15(本题5分)．如果X与Y相互独立，不求出(XY)的分布，能否直接利用X和Y的分布计算出$D(XY)$，怎样计算？

解：因为 X 与 Y 相互独立，故 $D(XY)=E(XY)^2-[E(XY)]^2=E(X^2Y^2)-(EXEY)^2$

$=EX^2EY^2)-(EX)^2(EY)^2$。

15(本题5分)．一台仪器有10个独立工作的元件组成，每一个元件发生故障的概率均为0.1。试求发生故障的元件数的方差。

解：引入随机变量 $X_i=\begin{cases} 0, & 在第i个元件不发生故障, \\ 1, & 在第i个元件发生故障. \end{cases}$

易知，$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$，$DX_i=0.1\cdot(1-0.1)=0.09$，故

$$DX=D(X_1+X_2+\cdots+X_{10})=DX_1+DX_2+\cdots+DX_{10}=10\times 0.09=0.9。$$

6(本题 5 分). . 设 X_1，X_2，…，X_{10} 相互独立，且 $X_i \sim N(0，0.3^2)(i=1，2，…，10)$。试求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\}$。

解：依题意 $\frac{X_i - 0}{0.3} = \frac{X_i}{0.3} \sim N(0,1),\ i = 1,2,\cdots,10$，由 χ^2 的分布定义知：$\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.3}\right)^2 \sim \chi^2(10)$，故

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\} = P\left\{\frac{1}{0.3^2}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > \frac{1.44}{0.09}\right\} = P\{\chi^2(10) > 16\}=0.1$$

12(本题 5 分). 设某零件的重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现从中抽得容量为 16 的样本，观察到的重量(单位：kg)如下：

4.8，4.7，5.0，5.2，4.7，4.9，5.0，5.0，4.6，4.7，5.0，5.1，4.7，4.5，4.9，4.9。

试求平均重量 μ 的区间估计，置信度为 0.95。

解：由题意，此题属 σ^2 已知，估计参数μ，故置信区间上下限为 $\overline{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$。

又 $\overline{x} = 4.856$， $n = 16$， $s = 0.1931$，α=0.05

查标准正态分布表知 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(15) = 2.1315$，代入计算得所求置信区间为：(4.753，4.959)。

3.（本题 12 分） 设温度计制造厂商的温度计读数近似服从正态分布 $N(u,\sigma^2),\sigma^2,u$ 未知，现他声称他的温度计读数的标准差为不超过 0.5, 现检验了一组 16 只温度计,得标准 0。7 度，试检验制造商的言是否正确（取 $\alpha = 0.05$），此题中 $\chi^2_{0.05}(15) = 24.996$。解: 按题意温度计读数 $X \sim N(u,\sigma^2),u,\sigma^2$ 未知,现取 $\alpha = 0.05$ 检验假设:

$H_0: \sigma \le 0.5,\qquad H_1:\ \sigma > 0.5$ 1’

用 χ^2 检验,现有 $n = 5$，$\alpha = 0.05, t_{0.025}(4) = 2.7764$,拒绝域为:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{0.5^2} > \chi^2_{0.05}(15) = 24.996$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{0.5^2} = \frac{15 \times 0.7^2}{0.5^2} = 29.4 > 24.996 \qquad 2’$$

在拒绝域内,故拒绝 H_0,认为温度计读数的标准差为显著超过 0.5. 1