Steven Müller 581583
Lucas Petersen 581277

Aufgabe 11

a) Es lässt sich leicht zeigen falls wir $(\ell \vee \ell')$ nach $(\overline{\ell} \rightarrow \ell')$ und wegen der Kommutativität von oder $(\overline{\ell'} \rightarrow \ell)$. Diese beide Implikationen sind die Kanten in unsere Graphen wie man es sehen kann.

1. Richtung, wenn die Formel erfüllbar ist gibt es keinem Zyklus mit x und $\overline{x}$:

Es gibt einem Zyklus in den Graph mit den Knoten x und $\overline{x}$, da die Kanten Implikationen symbolisieren bedeutet es gibt Literale $\ell_1, ..., \ell_n, ..., \ell_k$ mit $\ell_1 = \ell_k = x$ und $\ell_n = \overline{x}$ wobei eine Kante aus (ℓ_i, ℓ_{i+1}) mit $0 < i < k; i \in \mathbb{N}$ im Graph existiert.

Da die Kanten Implikation repräsentieren (wie vorhin gezeigt) bedeutet dies auch dass $(\ell_i \rightarrow \ell_{i+1})$ gilt. Somit gibt folgende Ketten von Implikationen:

$$(\ell_1 \rightarrow ... \rightarrow \ell_n) \wedge (\ell_n \rightarrow ... \rightarrow \ell_k)$$

Und da Implikationen transitiv sind:

$$(\ell_1 \rightarrow \ell_n) \wedge (\ell_n \rightarrow \ell_k)$$

$$(x \rightarrow \overline{x}) \wedge (\overline{x} \rightarrow x)$$

$$(x \leftrightarrow \overline{x})$$

Da x immer nicht äquivalent ist zu $\overline{x}$ kann die Formel nicht erfüllt werden.

2. Richtung, wenn es keinem Zyklus mit x und $\overline{x}$ gibt ist die Formel erfüllbar:

Annahme: Wir haben nur starke Zusammenhangskomponente welche nicht sowohl x als auch $\overline{x}$ beinhalten für $\forall x \in Variablen(\phi)$.

Wir wählen einfach ein beliebiges x setzen wir es und dann setzen wir alle Werte die damit impliziert sind. Dies geht weite bis alle Knoten in dem gleichen starken Zusammenhangskomponent gesetzt sind. Falls nicht alle Variablen damit gesetzt wurden suchen wir eine beliebige ungesetzte Variable und beginnen mit den Prozess erneut.

Somit werden Werte zugewiesen die Alle Implikationen erfüllen, und da diese Implikationen Äquivalent zur Klauseln der 2-KNF (siehe oben) erfüllen diese Werte die 2-KNF.

Da wir wissen, dass es keine Implikation(oder Folgeimplikation) derart $(x \rightarrow \overline{x})$ zusammen mit $(\overline{x} \rightarrow x)$ wissen wir, dass es keine Widerspruch bei der Zuweisung geben wird.