Steven Müller 581583
Lucas Petersen 581277

Aufgabe 3

a) z.z. $count(p) \geq count(u)$. wobei u ein Kind von p ist.

Zwei Fälle:
1. u ist ein Blatt:

$$count(p) \geq 1$$

Da u ein Kind von p mindestens eine Instanz von p muss es existieren, somit es gilt.

2. u ist ein innere Knoten:

$$\lceil \frac{\sum_{i=1}^{l} size(v_i)}{r(p) - m(p)} \rceil \geq \lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j)}{r(u) - m(u)} \rceil$$

Wir minimieren $\sum_{i=1}^{l} size(v_i)$ indem wir sagen, dass u das einzige Kind von p ist.

$$\lceil \frac{size(u)}{r(p) - m(p)} \rceil \geq \lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j)}{r(u) - m(u)} \rceil$$

$$\lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j) + m(u) \cdot count(u)}{r(p) - m(p)} \rceil \geq \lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j)}{r(u) - m(u)} \rceil$$

$$\lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j) + m(u) \cdot count(u)}{M - \sum_{p' \in anc(p)} m(p') - m(p)} \rceil \geq \lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j)}{M - \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u)} \rceil$$

Gilt wenn:

$$(1) \sum_{j=1}^{k} size(u_j) + m(u) \cdot count(u) \geq \sum_{j=1}^{k} size(u_j)$$

und (aus (1)):

$$(2) M - \sum_{v' \in anc(p)} m(p') - m(p) \leq M - \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u) + m(u) \cdot count(u)$$

Zu (1):

$$\sum_{j=1}^{k} size(u_j) + m(u) \cdot count(u) \geq \sum_{j=1}^{k} size(u_j)$$

Gilt, da $count(u) \geq 1$ und $m(u) \geq 0$.

Zu (2):

$$M - \sum_{p' \in anc(p)} m(p') - m(p) \leq M - \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u) + m(u) \cdot count(u)$$

$$- \sum_{p' \in anc(p)} m(p') - m(p) \leq - \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u) + m(u) \cdot count(u)$$

$$\sum_{p' \in anc(p)} m(p') + m(p) \geq \sum_{u' \in anc(u)} m(u') + m(u) - m(u) \cdot count(u)$$

Da u das einzige Kind von p ist haben sie die gleiche Blätter somit $m(u) = m(p)$ und:

$$\sum_{p' \in anc(p)} m(p') + m(p) \geq \sum_{u' \in anc(u)} m(u') + m(p) - m(u) \cdot count(u)$$

$$\sum_{p' \in anc(p)} m(p') \geq \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u) \cdot count(u)$$

Da $anc(p) \cup p = anc(u)$ und $m(u) = m(p)$:

$$\sum_{p' \in anc(p)} m(p') \geq \sum_{u' \in anc(p)} m(p') + m(u) - m(u) \cdot count(u)$$

$$0 \geq m(u) - m(u) \cdot count(u)$$

$$m(u) \cdot count(u) \geq m(u)$$

$$count(u) \geq 0$$

Gilt. Somit ist bewiesen dass $count(p) \geq count(u)$.

b)