Steven Müller 581583
Lucas Petersen 581277

Aufgabe 3

a) z.z. $count(p) \geq count(u)$. wobei u ein Kind von p ist.

Zwei Fälle:
1. u ist ein Blatt:

$$count(p) \geq 1$$

Da u ein Kind von p mindestens eine Instanz von p muss es existieren, somit es gilt.

2. u ist ein innere Knoten:

$$\lceil \frac{\sum_{i=1}^{l} size(p_i)}{r(p) - m(p)} \rceil \geq \lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j)}{r(u) - m(u)} \rceil$$

Wir minimieren $\sum_{i=1}^{l} size(v_i)$ indem wir sagen, dass u das einzige Kind von p ist.

$$\lceil \frac{size(u)}{r(p) - m(p)} \rceil \geq \lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j)}{r(u) - m(u)} \rceil$$

$$\lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j) + m(u) \cdot count(u)}{r(p) - m(p)} \rceil \geq \lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j)}{r(u) - m(u)} \rceil$$

$$\lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j) + m(u) \cdot count(u)}{M - \sum_{p' \in anc(p)} m(p') - m(p)} \rceil \geq \lceil \frac{\sum_{j=1}^{k} size(u_j)}{M - \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u)} \rceil$$

Gilt wenn:

$$(1) \sum_{j=1}^{k} size(u_j) + m(u) \cdot count(u) \geq \sum_{j=1}^{k} size(u_j)$$

und (aus (1)):

$$(2) M - \sum_{v' \in anc(p)} m(p') - m(p) \leq M - \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u) + m(u) \cdot count(u)$$

Zu (1):

$$\sum_{j=1}^{k} size(u_j) + m(u) \cdot count(u) \geq \sum_{j=1}^{k} size(u_j)$$

Gilt, da $count(u) \geq 1$ und $m(u) \geq 0$.

Zu (2):

$$M - \sum_{p' \in anc(p)} m(p') - m(p) \leq M - \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u) + m(u) \cdot count(u)$$

$$- \sum_{p' \in anc(p)} m(p') - m(p) \leq - \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u) + m(u) \cdot count(u)$$

$$\sum_{p' \in anc(p)} m(p') + m(p) \geq \sum_{u' \in anc(u)} m(u') + m(u) - m(u) \cdot count(u)$$

Da u das einzige Kind von p ist haben sie die gleiche Blätter somit $m(u) = m(p)$ und:

$$\sum_{p' \in anc(p)} m(p') + m(p) \geq \sum_{u' \in anc(u)} m(u') + m(p) - m(u) \cdot count(u)$$

$$\sum_{p' \in anc(p)} m(p') \geq \sum_{u' \in anc(u)} m(u') - m(u) \cdot count(u)$$

Da $anc(p) \cup p = anc(u)$ und $m(u) = m(p)$:

$$\sum_{p' \in anc(p)} m(p') \geq \sum_{u' \in anc(p)} m(p') + m(u) - m(u) \cdot count(u)$$

$$0 \geq m(u) - m(u) \cdot count(u)$$

$$m(u) \cdot count(u) \geq m(u)$$

$$count(u) \geq 1$$

Gilt. Somit ist bewiesen dass $count(p) \geq count(u)$.
b)
Erstens für count(v) ist eine untere Schranke für die Anzahl von Instanzen:
Zwei Fälle:

1. v ist ein Blatt:

$$count(v) = 1$$

Gilt: da wir nicht weniger als 1 Kopie haben können.
2. v ist kein Blatt:

$$count(v) = \lceil \frac{\sum_{i=1}^{l} size(v_i)}{r(v) - m(v)} \rceil$$

Unter der Annahme, dass size(v) gibt eine untere Schranke für der Speicherverbrauch von v(siehe unten). Es müssen mindestens so viele Kopien von v da sein, sodass alle Kinder von v gespeichert werden können bei der verbleibende Restkapazität. Keine weitere Blätter sind in den Rechner außer die Kinder von v brauchen $count(v) = \lceil \frac{\sum_{i=1}^{l} size(v_i)}{r(v)-m(v)} \rceil$ viele Kopien von v somit ist $count(v)$ eine untere Schranke für die Anzahl von benötige Kopien von v.

Für size(v) als untere Schranke für den Speicherverbrauch:
1. v ist ein Blatt:

$$size(v) = m(v)$$

Gilt da den Speicherverbrauch selbst eine untere Schranke für den Speicherverbrauch ist.
2. v ist kein Blatt:

$$size(v) = \sum_{i=1}^{l} size(v_i) + m(v) \cdot count(v)$$

Alle Kinder von v müssen gespeichert werden und so werden wir mindestens $\sum_{i=1}^{l} size(v_i)$ Platz brauchen. Wir müssen auch der Knoten v selbst speicher und das so oft wie es Kopien davon gibt, somit brauchen wir $\sum_{i=1}^{l} size(v_i) + m(v) \cdot count(v)$.