Oxford

Auswerteheft Gruppe 3

Dominik Müller, Paula Schwanitz,

Anna-Maria Pleyer

VERSUCH:

Gekoppelte Pendel

28

Oxford 16 BLATT

INHALT

Versuch Gekoppelte Pendel

1 Allgemeines

Teilnehmer:

- Protokollperson: Dominik Müller
- Messperson: Paul Schwanitz
- Auswerteperson: Anna-Maria Pleyer

Ort:

Universität Bayreuth, NW II

Raum:

2.3.02.706

Datum des Versuchstag:

Mittwoch, 08. Juli 2020

Gruppennummer: 3

Versuchsplatz ist dem Messprotokoll zu enthnehmen.

gut!

2. Einleitung

Im Physikstudium spielen Schwingungen und Pendelbewegungen eine große Rolle. Deshalb dreht sich auch dieser Versuch um einzelne und gekoppelte Pendelschwingungen.
Es gibt verschiedene Wege Schwingungen zu beschreiben, zum einen ~~als~~ mithilfe des mathematischen Pendels, welches jedoch eine Idealisierung darstellt, und zum anderen mit dem physikalischen Pendel, welches die Schwingung eines beliebigen realen Körpers (starr) beschreibt.
So kann beispielsweise die Erdbeschleunigung gemessen werden und ~~b~~ mit bekannten Werten verglichen werden. Zudem kann das Wissen über Trägheitsmomente und den Satz von Steiner, mithilfe diesen Versuches, vertieft werden.
In ~~UA~~ dem Versuch gekoppelte Pendel soll ein einfaches mechanisches System aus zwei gekoppelten Pendeln beobachtet, gemessen und untersucht werden.
Des Weiteren werden die Fundamentalschwingungen, Schwebungsdauer und Schwingungsdauer für verschiedene Kopplungslängen gemessen.

3 Die Fragen zur Vorbereitung

3.1 Frage 1: mathematisches und physikalisches Pendel

Das mathematische Pendel ist eine Idealisierung eines Fadenpendels. Hierbei wird ein Massenpunkt an einer masselosen Pendelstange aufgehängt und bewegt sich vertikal in der Ebene hin und her, wobei die Reibungseffekte, wie beispielsweise der Luftwiderstand, vernachlässigt werden. Für sehr kleine Schwingungen schwingt das Pendel harmonisch. Die Schwingungsdauer T der Schwingungen ist von der Länge des Pendelfadens l und der Erdbeschleunigung g abhängig:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Das physikalische Pendel ist ein theoretisches Modell zur Beschreibung der Schwingung eines beliebigen realen starren Körpers. Im Gegensatz zum mathematischen Pendels wird bei dem physikalischen die Größe und Form des Körpers mitberücksichtigt. Dieses Pendel ist ebenfalls abhängig von der Erdbeschleunigung g, aber zusätzlich noch vom Abstand r_s (Abstand vom Massenmittelpunkt zum Aufhängepunkt), des Trägheitsmomentes J und der Masse m.

Das physikalische Pendel kann genutzt werden, um das Trägheitsmoment von Körpern zu bestimmen.
Für kleine Amplituden ergibt sich die Formel:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr}}$$

Man kann das physikalische Pendel auf das mathematische Pendel zurückführen. Hierzu muss man ein möglichst langen Stab und einen kleinen, aber gleichzeitig schweren Köper benutzen. Diese Proportionen können das physikalische Pendel an die Idealisierung des mathematischen Pendel annähren. ✓

<u>3.2 Frage 2</u>

i) Lösung zu $J\ddot{\varphi} + D\varphi = 0$

Ansatz: $\varphi(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$\Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t)$

Einsetzen: $-J\omega^2(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) + D(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) = 0$

$\Leftrightarrow A\sin(\omega t)(D - J\omega^2) + B\cos(\omega t)\cdot(D - J\omega^2) = 0 \quad (*)$

ii) <u>Bestimmung von D</u>

Aus $(*)$ folgt: $D = J\omega^2$

iii) Bestimmung der Frequenz ω

Der Rückstoß des Pendels wird mit der Kraft $F = mg\sin(\varphi)$ beschrieben.

Daraus folgt das Drehmoment: $D = rmg\sin(\varphi)$

$$J\ddot{\varphi} + rmg\sin(\varphi) = 0$$

Mit der Kleinwinkelnährung folgt ($\varphi \approx \sin\varphi$)

$$J\ddot{\varphi} + \underbrace{rmg}_{=:D \text{ (Direktionsmoment)}}\varphi = 0 \Rightarrow D = rmg$$

$$\Rightarrow rmg = J\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{rmg}{J}} \quad (**)$$

iv) Berechnung von g aus der Schwingungsdauer T

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

in $(**)$ einsetzen: $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{rmg}{J}$

nach g auflösen: $g = \frac{4\pi^2 J}{mrT^2}$

wobei r den Abstand zwischen dem Aufhängepunkt und Schwerpunkt beschreibt.

$$\Rightarrow D^* = \frac{D}{g} = rm$$

v) Bestimmung der Konstanten

$$\varphi_0 = \varphi(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = B$$

$$\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0) = A\omega - B\omega \cdot 0 = A\omega$$

$$\Rightarrow A = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}$$

Speziellelösung der DGL:

$$\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}\sin(\omega t) + \varphi_0\cos(\omega t)$$

vi) Zusatz

Die Schwingungsdauer hängt, für kleine Schwingungen, nicht von der Amplitude ab. Also kann man $\sin\alpha$ durch α ersetzen: $l\ddot{\alpha} = -g\sin\alpha \approx -g\alpha$

aber hier keine kleinen Winkel

Dies muss man zweimal integrieren.

Mit dem Energieerhaltungssatz:

$E_{kin} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2$

$E_{pot} = mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$

folgt:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

d.h.

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\, t$$

Zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = \alpha_0$ liegt eine Viertelperiode:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}$$

Zweite Integration:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{n}^2 k^{2n} = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha_0}{2} + \dots\right)$$

mit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ und $k = \sin\frac{\alpha_0}{2}$

Quelle: Gerthsen Physik Kapitel 5, D. Meschede, 22. Auflage

3.3. Frage 3: Lösung zu (3) und (4)

$$(3): \quad J\ddot{\varphi}_1 + D\varphi_1 + D_k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$
$$(4): \quad J\ddot{\varphi}_2 + D\varphi_2 + D_k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$(3)+(4): \quad J(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + D(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$$
$$(3)-(4): \quad J(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + D(\varphi_1 - \varphi_2) + 2D_k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Entkopple das System in dem man sich $\varphi_a = \varphi_1 + \varphi_2$ und $\varphi_b = \varphi_1 - \varphi_2$ definiert.

$$(3)^*: \quad J\ddot{\varphi}_a + \varphi_a = 0$$
$$(4)^*: \quad J\ddot{\varphi}_b + (D + 2D_k)\varphi_b = 0$$

Ansatz: $\varphi_a = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

in $(3)^*$: $-J\omega_a^2\varphi_a + D\varphi_a = 0$

$\Rightarrow \varphi_a(D - J\omega_a^2) = 0$

Ansatz: $\varphi_b = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$

in $(4)^*$: $\varphi_b(-J\omega_b^2 + D + 2D_k) = 0$

Berechnung von ω (Eigenfrequenzen)

$$\omega_a = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad \text{und} \quad \omega_b = \sqrt{\frac{D + 2D_k}{J}}$$

Lösung für das gekoppelte System

$\varphi_a = C_1\cos(\omega_a t) + C_2\sin(\omega_a t)$

$\varphi_b = K_1\cos(\omega_b t) + K_2\sin(\omega_b t)$

Mit der Annahme, dass beim Zeitpunkt $t_0 = 0$ das Pendel in Ruhe ist folgt:

$$\dot{\varphi}_a = -\omega_a C_1\sin(\omega_a t) + \omega_a C_2\cos(\omega_a t) = 0$$

Daraus ist ersichtlich, das der Sinus-Term bei $t=0$ gleich null ist und somit die Gleichung erfüllt.
Der Cosinus-Term ist bei $t=0$ ungleich null, daraus folgt C_2 muss gleich null sein.

$$\varphi_a = C_1 \cos(\omega_a t)$$

$$\varphi_b = K_1 \cos(\omega_b t) \quad \text{(Analog zu } \varphi_a\text{)}$$

Zudem gilt:

$$\varphi_a = C_1 \cos(\omega_a t) = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_b = K_1 \cos(\omega_b t) = \varphi_1 - \varphi_2$$

Durch Addition und Subtraktion folgt:

$$\varphi_a = \tfrac{1}{2}\left[C_1 \cos(\omega_a t) + K_1 \cos(\omega_b t)\right]$$

$$\varphi_b = \tfrac{1}{2}\left[C_1 \cos(\omega_a t) - K_1 \cos(\omega_b t)\right]$$

Die Schwingungsdauer T kann aus den berechneten ω bestimmt werden:

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \checkmark$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D + 2D_K}} \checkmark$$

3.4. Frage 4

Als Schwebung versteht man in der Schwingungslehre, die Schwankung der Amplitude, die durch Überlagerung von harmonischen Schwingungen (bzw. zweier gleichartiges) mit nur geringen Frequenzunterschied entsteht. Wobei die aus Überlagerung resultierende Schwingung periodisch schwankt.

mit der Annahme, dass die Amplitude 1 beträgt folgt:

$$\cos(\omega_a t) + \cos(\omega_b t + \varphi) =$$

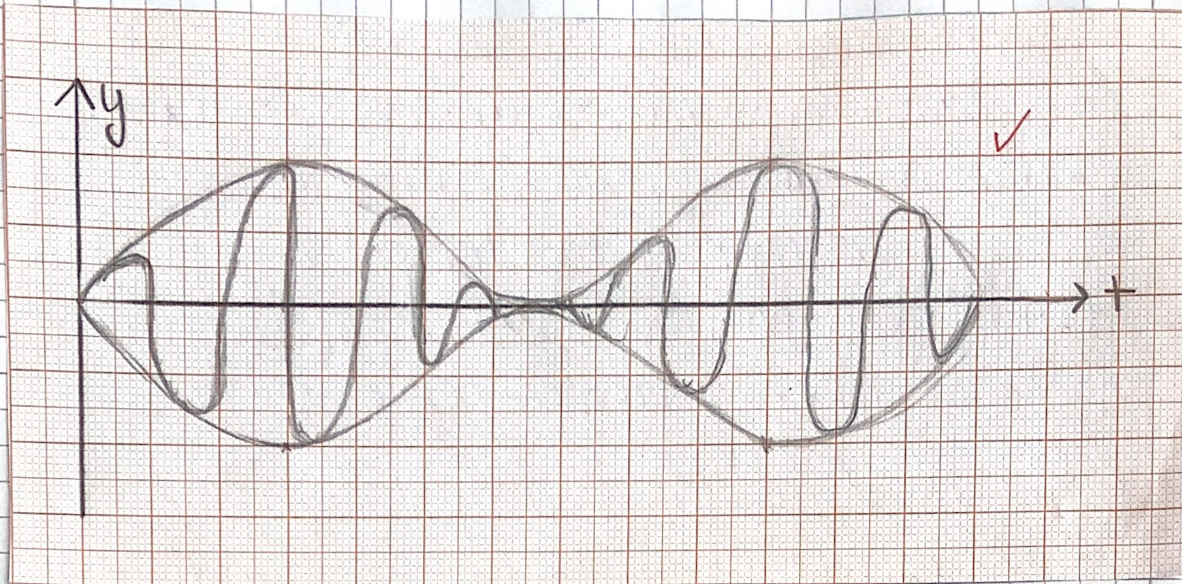
$$= 2 \cdot \cos\left(\frac{\omega_b - \omega_a}{2} t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2} t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\omega_-}{2} t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega_+ t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

mit $\omega_- = \omega_b - \omega_a$ und $\omega_+ = \frac{\omega_a + \omega_b}{2}$

Daraus folgt: $\frac{2\pi}{T_s} = \omega_+$

$\Rightarrow T_s = 2 \frac{T_a T_b}{T_a + T_b}$ ist die Schwingungsdauer.



Bei gleich großen überlagernden Schwingungen der Amplituden schwankt diese zwischen null und dem Maximalwert, andernfalls ist ~~sie~~ der Minimalwert größer null.
Das System schwingt mit der Kreisfrequenz ω_+ und die Amplitude mit der Kreisfrequenz $\frac{1}{2}\omega_-$.

Für den Schwebungsfall gilt $\omega_a \approx \omega_b$, d.h. die Pendel sind schwach gekoppelt.

Die Schwebungsdauer τ ist als

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\pi}$$ definiert.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\pi} = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b} = \frac{T_b - T_a}{T_b \cdot T_a}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{T_a T_b}{T_b - T_a}$$

Quellen: EKS, S. 56f

3.5 Frage 5: Satz von Steiner

Das Trägheitsmoment ist keine feststehende Eigenschaft eines Körpers, sondern hängt von der Drehachse ab. Ist das Trägheitsmoment einer Drehachse durch den Massenmittelpunkt bekannt, so kann man mit dem Satz von Steiner das Trägheitsmoment für alle Drehachsen, die parallel zu dieser sind, berechnen.

Der Satz von Steiner ist definiert als:

$$\boxed{J_2 = J_1 + ml^2}$$

- J_1: Trägheitsmoment des Körpers auf der Schwerpunktsachse
- J_2: Trägheitsmoment des Körpers auf der Achse, die sich parallel zur Schwerpunktsachse befindet
- m: Masse des Körpers
- l: Abstand zwischen Schwerpunktsachse und der parallel dazu
- ml^2 wird als Steinerschen Anteil bezeichnet. Um diesen Wert erhöht sich das Trägheitsmoment, wenn der Körper nicht um die Schwerpunktsachse rotiert.

Der Satz von Steiner kann auch öfters angewendet werden. Damit kann das Trägheitsmoment zu einer parallelen Achse berechnet werden, auch wenn das Trägheitsmoment am Anfang nicht durch den Massenschwerpunkt geht.

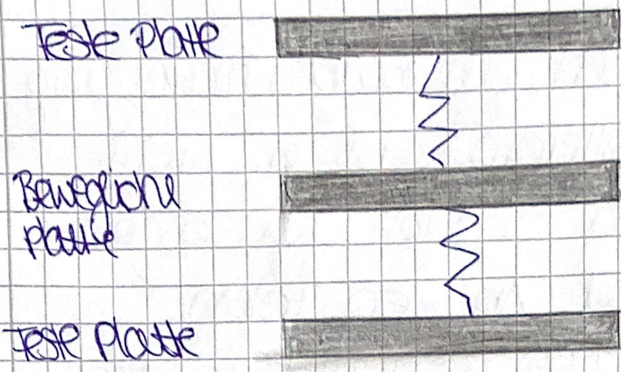
Der Satz von Steiner ist auch im Bezug auf unseren Versuch relevant. Da man mit dem steinerschen Satz das Trägheitsmoment J des Pendels berechnen kann. Das genaue Vorgehen wird in Folgenden Abschnitten erläutert.

Quelle: https://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/mechanik/kinematik/286-satz-von-steiner-2 [Stand: 10. Juli 2020]

3.6 Frage 6

Der ungefähre Wert der Erdbeschleunigung ist $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$. Allerdings ist er nicht überall gleich, da es sich um einen Mittelwert handelt. An den Polen beträgt sie $9{,}832 \frac{m}{s^2}$ und am Äquator $9{,}780 \frac{m}{s^2}$. [Quelle: Mende / Simon: Gleichungen und Tabellen]
Die Anziehung am Pol ist somit um ca. 0,5 % höher als am Äquator.
Dies kann man auf zwei Ursachen zurückführen. Zum einen ist der Erdradius nicht an allen Stellen konstant und zum Anderen wirkt die Zentrifugalkraft am Äquator radial nach außen und an den Polen wirkt sie nicht. ✓

Ein Beschleunigungs besteht aus zwei in Reihe angeordneten Kondensatoren mit insgesamt drei Kondensatorplatten.
Die beiden äußeren Platten sind mit dem Telefon verbunden, während die mittlere Platte an den äußeren Platten mit kleinen Federn befestigt ist, so dass sie noch schwingfähig ist.



Aufgrund der Massenträgheit möchte die mittlere bewegliche Platte, trotz Beschleunigung, in ihrer Ruhelage bleiben. Dadurch kommt es zur einer Abstandsänderung zwischen der mittleren Platte und den beiden äußeren Platten. Dies hat eine Kapazitätsänderung zur Folge hat:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

Diese Änderung der Kapazität kann das Smartphone messen und dadurch die Beschleunigung ermitteln.
In Smartphones kommen MEMS-Sensoren zum Einsatz.

Quelle: https://mascil.ph-freiburg.de/images/Aufgaben/Smartphone/02Beschleunigung/02Beschleunigungssensor.pdf
[Stand: 10. Juli 2020]

4 Auswertung

4.1 Berechnen des Direktionsmomentes D und des Trägheitsmomentes J

4.1.1 Herleiten von D und J

Das Pendel kann in eine Stange mit dem Trägheitsmoment J_{Stange} und den Pendelkörper $J_{Körper}$ unterteilt werden. Als gegeben werden die Trägheitsmomente eines Stabes und Zylinders angenommen.
[Quelle: Simon/Hende: Physik, Gleichungen und Tabellen, 17. Auflage, S.79]

$J_{Stab} = \frac{1}{12} m l^2$ und $J_{Zylinder} = \frac{1}{2} m r^2$

Es müssen nur noch die Drehachsen mithilfe des Satzes von Steiner verschoben werden. Die Drehachse geht durch die Mitte des Stabes. Somit muss die Drehachse um $\frac{1}{2} l$ verschoben werden.

$$J_{Stab} = \frac{1}{12} m_{Stab} \bar{l}^2 + m_{Stab} \left(\frac{\bar{l}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_{Stab} \bar{l}^2$$

Die Masse des Stabes lässt sich über die Dichte berechnen.

$$m_{Stab} = V_{Stab} \cdot \rho = \left(\frac{\bar{d}}{2}\right)^2 \pi \bar{l} \rho = \frac{\bar{d}^2 \bar{l} \pi \rho}{4}$$

Somit folgt für J_{Stab}:

$$J_{Stab} = \frac{1}{3} m_{Stab} \bar{l}^2 = \frac{1}{12} \bar{d}^2 \bar{l}^3 \pi \rho$$

Die Drehachse geht durch den Schwerpunkt des Zylinders, welcher in der Mitte ist. Somit muss die Drehachse um [Zylinder + (Stange verschoben werden. Für den Zylinder] Körper folgt:

$$J_{Körper} = \frac{1}{2} m_K r^2 + m_K (l+r)^2 = \frac{1}{2} m_K \left(\frac{\bar{D}}{2}\right)^2 + m_K \left(\bar{l} + \frac{\bar{D}}{2}\right)^2 =$$

$$= m_K \left(\frac{3\bar{D}^2}{8} + \bar{l}^2 + \bar{D}\bar{l}\right)$$

Die Masse des Körpers, lässt sich wieder über die Dichte berechnen: $m_K = V_K \cdot \rho = \frac{\bar{D}^2 \bar{h} \pi \rho}{4}$

Somit folgt das Trägheitsmoment $J_{Körper}$:

$$J_{Körper} = m_K \left(\frac{3\bar{D}^2}{8} + \bar{l}^2 + \bar{D}\bar{l}\right) =$$

$$= \frac{\bar{D}^2 \bar{h} \pi \rho}{4} \left(\frac{3\bar{D}^2}{8} + \bar{l}^2 + \bar{D}\bar{l}\right) =$$

$$= \frac{\bar{h}\pi\rho}{4} \left(\frac{3}{8}\bar{D}^4 + \bar{D}^3\bar{l} + \bar{D}^2\bar{l}^2\right)$$

Trägheitsmoment für das Pendel:

$$J_{Pendel} = J_{Stab} + J_{Körper} =$$

$$= \frac{1}{12} \bar{d}^2 \bar{l}^3 \pi \rho + \frac{\bar{h}\pi\rho}{4} \left(\frac{3}{8}\bar{D}^4 + \bar{D}^3\bar{l} + \bar{D}^2\bar{l}^2\right)$$

$$= \boxed{\left[\frac{\bar{l}^3\bar{d}^2}{12} + \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{3}{8}\bar{D}^4 + \bar{D}^3\bar{l} + \bar{D}^2\bar{l}^2\right)\right]\pi\rho}$$ ✓

16

Das Direktionsmoment ist definiert als:

$D = m r g$ (r: Abstand Schwerpunkt - Drehachse)

Der Schwerpunkt des Stabes liegt bei $l/2$.

Somit folgt für das Direktionsmoment des Stabes:

$$D_{Stab} = m_{Stab} r_{Stab} \cdot g = \frac{\bar{d}^2 \bar{l}^2}{8} \pi \rho g$$

Der Schwerpunkt des Körpers/Zylinders liegt bei $r_{Zylinder}$. Somit folgt für das Direktionsmoment:

$$D_{Körper} = m_K \cdot r_K g = \frac{\bar{D}^2 \bar{h} \pi \rho}{4} \left(\tfrac{1}{2}\bar{D} + \bar{l}\right) g =$$

$$= \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{\bar{D}^3}{2} + \bar{D}^2 \bar{l}\right) \pi \rho g$$

Daraus folgt das Gesamt Direktionsmoment D_{Pendel}:

$$D_{Pendel} = D_{Körper} + D_{Stab} =$$

$$= \frac{\bar{d}^2 \bar{l}^2}{8} \pi \rho g + \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{\bar{D}^3}{2} + \bar{D}^2 \bar{l}\right) \pi \rho g =$$

$$= \left[\frac{\bar{d}^2 \bar{l}^2}{8} + \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{\bar{D}^3}{2} + \bar{D}^2 \bar{l}\right)\right] \pi \rho g$$

4.1.2 Berechnung von J und D^*

Trägheitsmoment $\bar{J}$ eines Pendels:

$$J_{Pendel} = \left[\frac{\bar{l}^3 \cdot \bar{d}^2}{12} + \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{3}{8}\bar{D}^4 + \bar{D}^3\bar{l} + \bar{D}^2\bar{l}^2\right)\right]\pi\varrho$$

$$= 2{,}03808 4525\,kgm^2 \;(*)$$

Fehler:

$$s_J = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\partial J}{\partial x_i}\right)^2 s x_i^2}$$ wobi x_i für $\bar{l}, \bar{d}, \bar{D}, \bar{h}, \varrho$ steht

Die einzelnen Fehler ($s_{\bar{l}}, s_{\bar{d}}, s_{\bar{D}}, s_{\bar{h}}$) lassen sich aber folgende Formel bestimmen

$$s_{x_i} = \sqrt{s_a^2 + s_r^2}$$ s_a: Ablesefehler
s_r: Systematischer Fehler

$$s_{\bar{l}} = \sqrt{(3mm)^2 + (0{,}05\,mm + 5\cdot 10^{-4}\cdot 972\,mm)^2} =$$
$$= 3{,}04750652 2\,mm$$

$$s_{\bar{d}} = \sqrt{(0{,}01mm)^2 + (0{,}05mm + 10{,}05\cdot 10^{-5}mm)^2} =$$
$$= 0{,}0112256 4476\,mm$$

$$s_{\bar{D}} = \sqrt{(0{,}5mm)^2 + (0{,}05mm + 150{,}35\cdot 10^{-4}mm)^2} =$$
$$= 0{,}5042118119\,mm$$

$$s_{\bar{h}} = \sqrt{(0{,}05mm)^2 + (0{,}05mm + 11{,}9\cdot 10^{-4}mm)^2}$$
$$= 0{,}0715570828 1\,mm$$

$$s_\varrho = 0{,}004\,\frac{g}{cm^3} = 4\,kg/m^3$$

(*) $\bar{l} = 0{,}972m$ $\qquad \bar{h} = 0{,}0119m$
$\bar{d} = 0{,}01005m$
$\bar{D} = 0{,}15035m$
vgl. Messprotokoll

Für $\left(\frac{\partial J}{\partial x_i} s_{x_i}\right)$ folgt.

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{l}} s_{\bar{l}} = \left[\frac{3\bar{l}^2 \bar{d}^2}{12} + \frac{\bar{h}}{4}\left(\bar{D}^3 + 2\bar{D}^2 \bar{l}\right)\right] \pi \rho \, s_{\bar{l}}$$

$$= 4{,}110434996 \text{ kgm} \cdot 3{,}0475065 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 0{,}01252657746 \text{ kgm}^2$$

vergleich mit den Angaben.

$$\frac{\partial J}{\partial l} \approx 6{,}7 \text{ kgm}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{d}} s_{\bar{d}} = \frac{2\bar{l}^2 \bar{d}}{12} \pi \rho \, s_{\bar{d}}$$

$$= \underbrace{39{,}49448448 \text{ kgm}}_{\text{vergleich: } \approx 42 \text{ kgm}} \cdot 0{,}01122564476 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 4{,}4335 10528 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{D}} s_{\bar{D}} = \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{3}{2}\bar{D}^3 + 3\bar{D}^2 \bar{l} + 2\bar{D}\bar{l}^2\right) \cdot \pi \cdot \rho \cdot s_{\bar{D}}$$

$$= 26{,}36576237 \cdot 0{,}5042118119 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 0{,}01329392882 \text{ kgm}^2$$

das hat die größte Abweich?

Vergleich:

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{D}} \approx 46 \text{ kgm}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{h}} s_{\bar{h}} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\bar{D}^4 + \bar{D}^3 \bar{l} + \bar{D}^2 \bar{l}^2\right) \pi \rho \, s_{\bar{h}}$$

$$= 155{,}0572785 \text{ kgm} \cdot 0{,}07155708281 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 0{,}01109544652 \text{ kgm}^2$$

h ist falsch gemessen

Vergleich:

$$\frac{\partial J}{\partial h} \approx 160 \text{ kgm}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \rho} s_\rho = \left(\frac{\bar{l}^3 \bar{d}^2}{12} + \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{3}{8}\bar{D}^4 + \bar{D}^3\bar{L} + \bar{D}^2\bar{L}^2\right)\right)\pi \cdot s_\rho$$

$$= 2{,}565564608 \cdot 10^{-4}\,m^5 \cdot 4\,\frac{kg}{m^3}$$

$$= 1{,}026225843 \cdot 10^{-3}\,kgm^2$$

Vergleich:

$$\frac{\partial J}{\partial \rho} \approx 4{,}4 \cdot 10^{-4}\,m^5$$

Die einzelnen Fehlergrößen liegen ungefähr in den angegeben Größenordnungen, jedoch weichen manche ur Werte bis zu 50% ab. Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die Werte mit einem „$\bar{h}$" das zur Berechnung genutzt wurde, am stärksten abweichen. Daraus lässt sich schließen das bei der Messung von „$\bar{h}$" etwas schief gegangen ist.

$$s_J = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\partial J}{\partial x_i} s_{x_i}\right)^2} =$$

$$= 0{,}021401104114\,kgm^2$$

Somit folgt das Trägheitsmoment:

$$J = \bar{J} + s_J$$

$$J = (2{,}038 \pm 0{,}021)\,kgm^2$$

f

sehr klein / zu klein

20

Die Hilfsgröße D^* ist definiert als

$$D^* = \frac{D}{g}$$

$$\bar{D}^* = \frac{\left[\frac{1}{8}\bar{d}^2\bar{L}^2 + \frac{1}{4}\bar{h}\left(\frac{1}{2}\bar{D}^3 + \bar{D}^2\bar{L}\right)\right]\pi\, \rho \cancel{g}}{\cancel{g}} =$$

$$= 2{,}055217498\ \mathrm{kgm}$$

Fehler:

$$s_{D^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\partial D^*}{\partial x_i}\right)^2 s_{x_i}^2}$$

Die Einzelfehler ($s_{\bar{L}}, s_{\bar{d}}, s_{\bar{D}}, s_{\bar{h}}, s_{\rho}$) bleiben gleich, wie bei J.

Für $\frac{\partial D^*}{\partial x_i}$ folgt

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{L}} = \left(\frac{2\bar{L}\bar{d}^2}{8} + \frac{\bar{h}}{4}\bar{D}^2\right)\pi\rho$$

$$= 2{,}290881784\ \mathrm{kg}$$

Vergleich: $\frac{\partial D^*}{\partial L} \approx 3{,}4\ \mathrm{kg}$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{L}} s_{\bar{L}} = 2{,}290881784\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}047506522 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$= 6{,}981477179 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm}$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{d}} = \frac{2\bar{d}\bar{L}^2}{8}\pi\rho = 59{,}24172673\ \mathrm{kg}$$

Vergleich: $\frac{\partial D^*}{\partial d} \approx 60\ \mathrm{kg}$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{d}} \cdot s_{\bar{d}} = 59{,}24172673\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}01122564476 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$= 6{,}650265792 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kgm}$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{D}} = \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{3}{2}\bar{D}^2 + 2\bar{D}\bar{C}\right)\pi\,\bar{\rho}$$

$$= 24{,}218328 72\,kg$$

Vergleich: $\frac{\partial D^*}{\partial D} \approx 42\,kg$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{D}} s_D = 24{,}21832872\,kg \cdot 0{,}5042118119 \cdot 10^{-3}\,m$$

$$= 0{,}0122111674 1\,kgm$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\bar{D}^3 + \bar{D}^2\bar{C}\right)\pi\,\bar{\rho}$$

$$= 147{,}6914136\,kg$$

Vergleich: $\frac{\partial D^*}{\partial h} \approx 150\,kg$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{h}} s_{\bar{h}} = 147{,}6914136\,kg \cdot 0{,}07155708281 \cdot 10^{-3}\,m$$

$$= 0{,}0105638\,kgm$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \rho} = \left[\frac{\bar{d}^2\bar{l}^2}{8} + \frac{\bar{h}}{4}\left(\frac{1}{2}\bar{D}^3 + \bar{D}^2\bar{C}\right)\right]\pi$$

$$= 2{,}587131795 \cdot 10^{-4}\,m^4$$

Vergleich: $\frac{\partial D^*}{\partial \rho} \approx 4{,}2 \cdot 10^{-4}\,m^4$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \rho} s_\rho = 2{,}587131795 \cdot 10^{-4}\,m^4 \cdot 4\,\frac{kg}{m^3}$$

$$= 1{,}034852718 \cdot 10^{-3}\,kgm$$

Die einzelnen Fehlergrößen liegen in den angegebenen Größenordnungen. Jedoch weichen auch diese Werte, wie beim Trägheitsmoment J, ab. Auch hier sind die Werte mit dem „h" am auffälligsten.

Fehler:

$$S_{D^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{\partial D^*}{\partial x_i} S_{x_i} \right)^2} = 0{,}01763681345 \, kgm$$

Direktionsmoment:

$$D^* = \overline{D}^* + S_{D^*}$$

$$D^* = (2{,}06 \pm 0{,}02) \, kgm$$

~~sehr~~ zu klein

4.1.3 Diskussion

Ein Großteil des Fehlers (auch für die nachfolgenden Aufgaben), liegt daran, dass der Wert „h" wahrscheinlich falsch gemessen wurde.
Um den Fehler des Trägheitsmoment zu verbessern, muss der Durchmesser/ Radius der Scheibe besser gemessen werden. Da dieser Fehler mit 0,013 am größten in die Fehlerfortpflanzung eingeht.
Auch um den Fehler des Direktionsmoment zu verbessern, sollte der Radius/ Durchmesser besser gemessen werden, da auch dieser mit 0,012 am größten ist.

4.2 Bestimmung der Erdbeschleunigung

4.2.1 Einzelnes Pendel bei kleiner Amplitude

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$20T$ / s	40,95	40,66	40,35	40,75	40,69	40,70	40,38	40,82	40,62	40,59

Nach Chauvenet muss kein Messwert gestrichen werden

$\overline{T}_{20} = 40{,}6509999\,s$

$\sigma = 0{,}1827232272503\,s$

$s = 0{,}0577821157936\,s$

Fehler: $u_{20} = \sqrt{s_r^2 + s^2}$

mit $s_r = 0{,}01\,s$

$u_{20} = 0{,}05864109291\,s$

$\Rightarrow u_1 = 0{,}02932054646\,s$

$T_1 = (2{,}032 \pm 0{,}003)\,s$

4.2.2 Einzelnes Pendel mit max. Amplitude

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$20T$ / s	40,87	40,96	40,86	40,97	41,02	40,99	40,94	40,95	40,72	40,95

Nach Chauvenet muss der Messwert 9. (40,72s) gestrichen werden.

$\overline{T}_{20} = 40{,}9455556\,s$

$\sigma = 0{,}05174724898753\,s$

$s = 0{,}0172490829958449\,s$

Fehler: $u_{20} = \sqrt{s_r^2 + s^2} = 0{,}01993817605\,s$

$\Rightarrow u = 0{,}00099690880\,s$

$T_2 = (2{,}047 \pm 0{,}001)\,s$

4.2.3 Vergleich der Schwingungsdauern

Bei genauer Betrachtung der Schwingungsdauern für kleine bzw. maximale Amplituden fällt auf, dass die Schwingungsdauer bei der größeren Auslenkung ebenfalls größer ist. Bei uns handelt es sich um einen Unterschied von
$\Delta T = (0{,}015 \pm 0{,}003)s$

Warum das so ist wird klar, wenn man die Formel für die Schwingungsdauer, ohne Kleinwinkelnährung, betrachtet.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi}{2} + \ldots\right)$$

$$\text{mit } l_r = \frac{J}{s\,m}$$

Es ist sofort erkennbar, dass für größere Amplituden von φ eine größere Schwingdauer zu erwarten ist.

4.2.4 Berechnung von g

Zur Berechnung der Erdbeschleunigung wird der Schwingvorgang mit kleiner Auslenkung herangezogen, da hier die Kleinwinkelnährung verwendet werden kann. Somit ist folgende Abhängigkeit gegeben:

$$g = \frac{J \, 4\pi^2}{D^* T^2}$$

Somit ergibt sich für den Fehler:

$$s_g = g \cdot \sqrt{\left(\frac{2 s_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{s_J}{J}\right)^2 + \left(\frac{s_{D^*}}{D^*}\right)^2}$$

mit:

$J = (2{,}038 \pm 0{,}021)\ kgm^2$
$T = (2{,}035 \pm 0{,}003)\ s$
$D^* = (2{,}055 \pm 0{,}018)\ kgm$

$\Rightarrow \underline{\underline{g = (9{,}48 \pm 0{,}13)\ \frac{m}{s^2}}}$ ✓

Der Literaturwert für Bayreuth aus unten genannter Quelle beträgt $g_B = 9{,}8062\ \frac{m}{s^2}$. Die Abweichung ist durch eventuell nicht berücksichtigte Fehlerquellen (z.B. Kleinwinkelnährung) zu erklären. Außerdem ist uns höchstwahrscheinlich ein Messfehler unterlaufen dies wurde bereits im vorherigen Abschnitt, bei der Berechnung von J, diskutiert.

4.15 Schwerekarte

Mittels der Schwerekarte (die im Versuchsraum aushängt) kann die genauere Erdbeschleunigung für die jeweilige auf der Karte eingezeichnet Ort abgelesen werden. Der Wert von g kann mittels Farbcode und Höhenlinien der Karte entnommen werden. Für Bayreuth ergibt sich aus ~~aus~~ der Karte ein Wert von $\Delta g = -45 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s^2}$, der mit der Normalschwere verrechnet werden muss. Somit ergibt sich für $g = 9{,}80665 \frac{m}{s^2} - 0{,}00045 \frac{m}{s^2} = 9{,}8062 \frac{m}{s^2}$ in Bayreuth.

$\sim 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

4.3 Gekoppelte Pendel

4.3.1 Bestimmung der Schwingungsdauern der Fundamentalschwingungen

Fehler des Kopplungsabstand

$d = 4{,}5\,cm = 45\,mm$

Mit Messungenauigkeit: $s_a = 1\,mm$

Restfehler des Messschieber: $s_r = (0{,}05\,mm + 45 \cdot 10^{-4}\,mm)$

$= 0{,}0545\,mm$

$s_d = \sqrt{s_a^2 + s_r^2} = \sqrt{(1\,mm)^2 + (0{,}545\,mm)^2} = 1{,}001484\,mm$

$\Rightarrow \underline{d = (4{,}5 \pm 0{,}1)\,cm}$

Abstand: $d = 9\,cm = 90\,mm$

Messungenauigkeit $s_a = 0{,}5\,mm$

Fehler des Messschieber

$s_r = (0{,}05 + 90 \cdot 10^{-4})\,mm = 0{,}059\,mm$

$u_d = \sqrt{(0{,}5\,mm)^2 + (0{,}059\,mm)^2} = 0{,}503468966\,mm$

$\Rightarrow \underline{d = (9{,}00 \pm 0{,}05)\,cm}$

Fehler der Stoppuhr

Wie aus dem Protokoll ersichtlich beträgt der systematische Restfehler der Stoppuhr:

$s_r = 0{,}01\,s$

Da dies die kleinste Einheit ist folgt daraus der Ablesefehler: $s_a = 0{,}005\,s$

$s_{stopp} = \sqrt{s_a^2 + s_r^2} = \sqrt{(0{,}01\,s)^2 + (0{,}005\,s)^2} = \underline{\underline{0{,}01118034\,s}}$

Dieser wird als Fehler der Fundamentalschwingungen angenommen

1. Fundamentalschwing bei 4,5cm

Abstand: $d = (4,5 \pm 0,1)$ cm

Nr.	1	2	3	4	5	Mittelwert
T_{20}/s	40,56	40,49	40,39	40,45	40,36	40,45
T_1/s	2,028	2,0245	2,0195	2,0225	2,018	2,0225

Mittelwert: $\overline{T_{20}} = 40,45$ s

$\overline{T_1} = 2,0225$ s

Gesamtfehler: $u_{a_1} = 0,01118034$ s

$\Rightarrow T_{a_1} = (2,02 \pm 0,01)$ s $\leftarrow$ $T_1 = \frac{T_{20}}{20} \curvearrowright s_{T_1} = \frac{\partial T_1}{\partial T_{20}} \cdot s_{T_{20}} = \frac{1}{20} \cdot s_{T_{20}}$

2. Fundamentalschwingung bei 4,5cm

Abstand: $d = (4,5 \pm 0,1)$ cm

Nr.	1	2	3	4	5	Mittelwert
T_{20}/s	37,99	37,56	37,89	37,70	37,73	37,774
T_1/s	1,8995	1,878	1,8945	1,885	1,8865	1,8887

Mittelwert: $\overline{T_{20}} = 37,74$ s

$\overline{T_1} = 1,8887$ s

Gesamtfehler: $u_{b_1} = 0,01118034$ s

$\Rightarrow T_{b_1} = (1,89 \pm 0,01)$ s

1 Fundamentalschwingung 9cm

Abstand: $d = (9{,}00 \pm 0{,}05)\,cm$

Nr.	1	2	3	4	5	Mittelwert
T_{20}/s	40,63	40,49	40,41	40,65	40,56	40,548
T_1/s	2,0315	2,0245	2,0205	2,0325	2,028	2,0274

Mittelwert: $\overline{T_{20}} = 40{,}548\,s$

$T_1 = 2{,}0274\,s$

Gesamtfehler: $u_{a2} = 0{,}011180345$

$\Rightarrow T_{a2} = (2{,}03 \pm 0{,}01)\,s$

2 Fundamentalschwingung

Abstand: $d = (9{,}00 \pm 0{,}05)\,cm$

Nr.	1	2	3	4	5	Mittelwert
T_{20}/s	39,00	38,86	38,92	38,83	38,97	38,916
T_1/s	1,95	1,943	1,946	1,9415	1,9485	1,9458

Mittelwert: $\overline{T_{20}} = 38{,}916\,s$

$T_1 = 1{,}9458\,s$

Gesamtfehler: $u_{b2} = 0{,}011180345$

$\Rightarrow T_{b2} = (1{,}95 \pm 0{,}01)\,s$

4.3.2 Bestimmung der Fundamentalschwingung aus den Fragen zur Vorbereitung

Aus den Fragen zur Vorbereitung (3. Frage) sind die Formeln zur Berechnung von T_a und T_b ersichtlich

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D+2D_K}}$$

wobei D_K das Rückstellmoment und D das Direktionsmoment beschreibt

zuerst muss D bestimmt werden.
Aus den vorangegangen Auswertungen ist ersichtlich:

$D^* = (2{,}055 \pm 0{,}018)\,\text{kgm}$ f

wobei D^* eine Hilfsgröße ist: $D^* = \frac{D}{g}$

$g = (9{,}48 \pm 0{,}13)\,\frac{m}{s^2}$ f

Berechnung von D: $D = D^* \cdot g$

$D = 2{,}0552748\,\text{kgm} \cdot 9{,}482103\,\frac{m}{s^2} = 19{,}487784\,\frac{m^2\,kg}{s^2}$

Fehler von D:

$$u_D = \left(\frac{\partial D}{\partial D^*} u_{D^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial g} u_g\right)^2 = (g\,u_{D^*})^2 + (D^* u_g)^2 =$$

$$= 0{,}317041\,\frac{kgm^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow D = (19{,}5 \pm 0{,}3)\,\frac{kgm^2}{s^2}$$

Zudem muss das <u>Rückstellmoment D_k</u> bestimmt werden.
Dazu wird die Formel aus dem Versuchsaufbau genommen:

$$D_k = \frac{\pi G r^4}{2d} \quad \text{und} \quad G = (71{,}5 \pm 1{,}5) 10^9 \frac{N}{m^2}$$

<u>1) D_k für 4,5cm</u>

$$\overline{D_k} = \frac{\pi \cdot 71{,}5 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \cdot (0{,}001m)^4}{2 \cdot 0{,}045m} = 2{,}495820 \frac{kgm^2}{s^2}$$

<u>Fehlerberechnung:</u>

Radius: $r = \frac{d_r}{2} = \frac{2{,}0mm}{2} = 1{,}0mm$

gemessen wurde der Radius mit der Mikrometerschraube.

$S_a = 0{,}01mm$

$S_r = (0{,}005 + 2 \cdot 10^{-5}) mm = 0{,}00502mm$

$u_r = \frac{1}{2}\sqrt{S_a^2 + S_r^2} = 0{,}005594649mm$

Fehler von D_k:

$$\frac{\partial \overline{D_k}}{\partial G} = \frac{\pi}{2} \frac{r^4}{d} = 3{,}490659 \cdot 10^{-11}\, m^3$$

$$u_G = 1{,}5 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$\frac{\partial \overline{D_k}}{\partial r} = 2\pi \frac{r^3 \cdot G}{d} = 9983{,}283\, N$$

$$u_r = 0{,}005595 \cdot 10^{-3}\, m$$

$$\frac{\partial \overline{D_k}}{\partial d_1} = \frac{-\pi}{2} \frac{r^4 G}{d_1^2} = -55{,}4627\, N$$

$$u_{d_1} = 1{,}00251001 \cdot 10^{-3}\, m$$

$$u_{D_k} = \sqrt{\left(\frac{\partial D_k}{\partial G} u_G\right)^2 + \left(\frac{\partial D_k}{\partial r} u_r\right)^2 + \left(\frac{\partial D_k}{\partial d} u_d\right)^2} =$$

$$= 0{,}094621 \frac{kg\, m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow D_k = (2{,}50 \pm 0{,}09) \frac{kg\, m^2}{s^2}$$

ii) D_k für 9cm

$$\overline{D_k} = \frac{\pi \cdot 71{,}5 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \cdot (0{,}001\,m)^4}{2 \cdot 0{,}09m}$$

$$= 1{,}2479 \frac{kgm^2}{s^2}$$

Fehler von D_k

$$\frac{\partial \overline{D_k}}{\partial G} = \frac{\pi}{2} \frac{r^4}{d} = 1{,}745329 \cdot 10^{-11} m^3$$

$$u_G = 1{,}5 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$\frac{\partial \overline{D_k}}{\partial r} = 2\pi \frac{r^3 G}{d} = 4991{,}641 N$$

$$u_r = 0{,}005595 \cdot 10^{-3} m$$

$$\frac{\partial \overline{D_k}}{\partial d} = \frac{-\pi}{2} \frac{r^4 \cdot G}{d^2} = -13{,}86567 N$$

$$u_{d_2} = (0{,}5mm)^2 + ((0{,}05 + 90 \cdot 10^{-4})mm)^2$$

$$= 0{,}503498966mm = 0{,}503498966 \cdot 10^{-3} m$$

$$u_{D_k} = \left(\frac{\partial D_k}{\partial G} u_G\right)^2 + \left(\frac{\partial D_k}{\partial r} u_r\right)^2 + \left(\frac{\partial D_k}{\partial d} u_d\right)^2$$

$$= 0{,}038911548 \frac{kgm^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad D_k = (1{,}25 \pm 0{,}04) \frac{kgm^2}{s^2}$$

Einsetzen in die Formeln mithilfe früherer Auswertungen:

$J = (2{,}038 \pm 0{,}021)\,\mathrm{kgm^2}$

$$\overline{T_a} = 2\pi \sqrt{\frac{2{,}038\,\mathrm{kgm^2}}{19{,}5\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^2}}}} = 2{,}031256\,\mathrm{s}$$

Fehler:

$$\frac{\partial \overline{T_a}}{\partial J} = \frac{\pi}{\sqrt{DJ}} = 0{,}498502\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{kgm^2}}$$

$u_J = 0{,}021\,\mathrm{kgm^2}$

$$\frac{\partial \overline{T_a}}{\partial D} = \frac{-\pi\sqrt{J}}{D^{3/2}} = -0{,}0521325\,\frac{\mathrm{s^3}}{\mathrm{kgm^2}}$$

$u_D = 0{,}31704\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^2}}$

$$\Rightarrow u_{T_a} = \left(\frac{\partial T_a}{\partial J} u_J\right)^2 + \left(\frac{\partial T_a}{\partial D} u_D\right)^2 =$$

$$= 0{,}01956\,\mathrm{s}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_a = (2{,}03 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}}}$$

Da J und D konstant sind und T_a unabhängig von D_k & und somit unabhängig von dem Kopplungsabstand, gibt es nur eine erste Fundamentalschwingung für beide Kopplungslängen.

Zweite Fundamentalschwingung bei 4,5cm

$$T_{b1} = 2\pi \sqrt{\frac{2{,}038\,kgm^2}{19{,}5\,\frac{kgm^2}{s^2} + 2\cdot 2{,}50\,\frac{kgm^2}{s^2}}} = 1{,}812169\,s$$

Fehler

$$\frac{\partial T_{b1}}{\partial J} = \frac{\pi}{(D+2D_k)\sqrt{\frac{J}{D+2D_k}}} = 0{,}464478\,\frac{s}{kgm^2}$$

$$u_J = 0{,}021\,kgm^2$$

$$\frac{\partial T_{b1}}{\partial D_k} = \frac{-2\pi J}{(D+2D_k)^2\sqrt{\frac{J}{D+2D_k}}} = -0{,}07406\,\frac{s^3}{kgm^2}$$

$$u_{D_k} = 0{,}094621\,\frac{kgm^2}{s^2}$$

$$\frac{\partial T_{b1}}{\partial D} = \frac{-\pi J}{(D+2D_k)^2\sqrt{\frac{J}{D+2D_k}}} = -0{,}03703\,\frac{s^3}{kgm^2}$$

$$u_D = 0{,}317041\,\frac{kgm^2}{s^2}$$

$$u_{T_{b1}} = 0{,}016558\,s$$

$$\Rightarrow T_{b1} = (1{,}81 \pm 0{,}02)\,s$$

36

Zweite Fundamentalschwingung bei gem.

$$\overline{T_{b2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}038\,kg\,m^2}{19{,}5\,\frac{kgm^2}{s^2} + 2\cdot 1{,}25\,\frac{kgm^2}{s^2}}} = 1{,}912364\,s$$

Fehler:

$$\frac{\partial \overline{T_{b2}}}{\partial J} = \frac{\pi}{(D+2D_k)\sqrt{\frac{J}{D+2D_k}}} = 0{,}469352\,\frac{s}{kgm^2}$$

$u_J = 0{,}021\,kgm^2$

$$\frac{\partial \overline{T_{b1}}}{\partial D_k} = \frac{-\pi J}{(D+2D_k)^2\sqrt{\frac{J}{D+2D_k}}} = -0{,}087023\,\frac{s^3}{kgm^2}$$

$u_{Dk} = 0{,}038912\,\frac{kgm^2}{s^2}$

$$\frac{\partial \overline{T_{b2}}}{\partial D} = \frac{-\pi J}{(D+2D_k)^2\sqrt{\frac{J}{D+2D_k}}} = -0{,}0435115\,\frac{s^3}{kgm^2}$$

$u_D = 0{,}016558\,s$

$\Rightarrow u_{b2} = 0{,}0104467289\,s$

$\Rightarrow T_{b2} = (1{,}91 \pm 0{,}01)\,s$

37

- Vergleich der Werte

Fundamentalschwingungen bei 4,50m

Experiment	Theorie
$T_{a_1} = (2,02 \pm 0,01)\,s$	$T_a = (2,03 \pm 0,02)\,s$
$T_{b_1} = (1,89 \pm 0,01)\,s$	$T_{b_1} = (1,81 \pm 0,02)\,s$

Die erste Fundamentalschwingung stimmt überein. Die zweite Fundamentalschwingung weicht leicht ab, das ist auf den Fehler von D zurückzuführen. Die Größe D ist abhängig vom vorangegangen bestimmten D^* und diese ist abhängig von wahrscheinlich falsch gemessenen Wertes „h", somit zieht sich dieser Fehler durch.

Fundamentalschwingung bei 3cm

Experiment	Theorie
$T_{a2} = (2,03 \pm 0,01)\,s$	$T_a = (2,03 \pm 0,02)\,s$
$T_{b2} = (1,95 \pm 0,01)\,s$	$T_{b2} = (1,91 \pm 0,01)\,s$

Auch diese Abweichung von der zweiten Fundamentalschwingung, ist wie oben genannt von D und D^* abhängig.
Auch hier stimmt die erste Fundamentalschwingung überein

4.3.3 Bestimmung der Schwebungsdauer

Schwebungsdauer bei 4,5cm

Nr.	1	2	3	4	Mittelwert
T_5/s	131,73	137,24	136,27	137,15	135,5975
T_1/s	26,346	27,448	27,254	27,43	27,1195

Mittelwerte: $\overline{T_5} = 135{,}5975\,s$

$\overline{T_1} = 27{,}1195\,s$

Fehler: $u_{\tau_1} = 0{,}011180339\,s$

$\Rightarrow \tau_1 = (27{,}12 \pm 0{,}01)\,s$

Schwebungsdauer bei 9,0cm

Nr.	1	2	3	4	Mittelwert
T_5/s	249,52	248,77	248,63	247,74	248,665
T_1/s	49,904	49,754	49,726	49,548	49,733

Mittelwerte: $\overline{T_5} = 248{,}665\,s$

$\overline{T_1} = 49{,}733\,s$

Fehler $u\tau_2 = 0{,}011180339\,s$

$\Rightarrow \tau_2 = (49{,}73 \pm 0{,}01)\,s$

Auch hier wird der Fehler der Stoppuhr, als Fehler angenommen. (vgl. S28)

Vergleich mit den Fragen zur Vorbereitung

Schwebungsdauer bei 4,50m

$$\overline{\tau}_1 = \frac{T_a T_b}{T_a - T_b} = 29{,}36769\,s$$

Fehler:

$$\frac{\partial \overline{\tau}_1}{\partial T_a} = \frac{-T_b^2}{(T_a - T_b)^2} = -211{,}36686$$

$$u_{T_a} = 0{,}01\,s$$

$$\frac{\partial \overline{\tau}_1}{\partial T_b} = \frac{T_a^2}{(T_b - T_a)^2} = 241{,}4437$$

$$u_{T_b} = 0{,}01\,s$$

$$u_{\tau_1} = 3{,}2089\,s$$

$$\Rightarrow \tau_1 = (29 \pm 3)\,s$$

Schwebungsdauer bei 90cm

$$\overline{\tau}_2 = \frac{T_a T_b}{T_a - T_b} = 49{,}48125\,s$$

Fehler

$$\frac{\partial \overline{\tau}_2}{\partial T_a} = \frac{-T_b^2}{(T_a - T_b)^2} = -594{,}140$$

$$\frac{\partial \overline{\tau}_2}{T_b} = \frac{T_a^2}{(T_b - T_a)^2} = 643{,}89063$$

$u_{\tau_2} = 8{,}76126\,s$

$\Rightarrow \tau_2 = (49 \pm 9)\,s$

Vergleich

Experiment	Theorie
$\tau_1 = (127{,}12 \pm 0{,}01)\,s$	$\tau_1 = (129 \pm 3)\,s$ ✓
$\tau_2 = (49{,}75 \pm 0{,}01)\,s$	$\tau_2 = (49 \pm 9)\,s$

Die Schwebungsdauer stimmen bei τ_2 in etwa überein, bei τ_1 stimmen sie in etwa überein, wenn man den Fehler mitberücksichtigt.
Es fällt auf, das die Fehler bei den Theorie-Schwebungsdauern sehr hoch sind.
~~H~~ Bei der Theorie-Berechnung wurden wieder die Messwerte von T_a und T_b verwendet nicht die „Theorie-Messwerte“ die auf Seite 35-37 berechnet wurden.

4.3.4 Schwingungsdauer

Schwingungsdauer bei 4,5cm

Nr.	1	2	3	4	5	Mittelwert
T_{10}/s	19,63	19,76	19,74	20,09	19,87	19,818
T_1/s	1,963	1,976	1,974	2,009	1,987	1,9818

Mittelwerte: $\overline{T_{10}} = 19{,}818\,s$

$\overline{T_1} = 1{,}9818\,s$

Fehler: $u_{T_{S1}} = 0{,}01118033\,9\,s$

$\Rightarrow \underline{T_{S1} = (1{,}98 \pm 0{,}01)\,s}$

Schwingungsdauer bei 9cm

Nr.	1	2	3	4	5	Mittelwert
T_{10}/s	19,75	199,85	19,81	19,78	20,10	19,862
T_1/s	1,975	1,987	1,981	1,978	2,01	1,9862

Mittelwerte: $\overline{T_{10}} = 19{,}862\,s$

$\overline{T_1} = 1{,}9862\,s$

Fehler: $u_{T_{S1}} = 0{,}01180339\,s$

$\Rightarrow \underline{T_{S2} = (1{,}99 \pm 0{,}01)\,s}$

Vergleich mit den Fragen zur Vorbereitung

Schwingungsdauer bei 4,50m

$$\overline{T}_{S1} = 2 \cdot \frac{T_a T_b}{T_a + T_b} = 1{,}952828\,s$$

Fehler:

$$\frac{\partial \overline{T}_{S1}}{\partial T_a} = \frac{2 T_b^2}{(T_a + T_b)^2} = 0{,}499447$$

$$\frac{\partial \overline{T}_{S1}}{\partial T_b} = \frac{2 T_a^2}{(T_a + T_b)^2} = 0{,}5338008$$

$$u_{T_{S1}} = 0{,}007319\,s$$

$$\Rightarrow T_{S1} = (1{,}953 \pm 0{,}007)\,s$$

Schwingungsdauer bei 9,00m

$$T_{S2} = 2 \frac{T_a T_b}{T_a + T_b} = 1{,}989196\,s$$

Fehler

$$\frac{\partial T_{S2}}{\partial T_a} = \frac{2 T_b^2}{(T_a + T_b)^2} = 0{,}480102$$

$$\frac{\partial T_{S3}}{\partial T_b} = \frac{2 T_a^2}{(T_a + T_b)^2} = 0{,}520302$$

$$u_{T_{S2}} = 0{,}0070796\,s$$

$$\Rightarrow T_{S2} = (1{,}989 \pm 0{,}007)\,s$$

Vergleich

Schwingungsdauer bei 4,5cm

Experiment	Theorie
$T_{S1} = (1{,}98 \pm 0{,}02)\,s$	$T_{S1} = (1{,}953 \pm 0{,}007)\,s$

Schwingungsdauer bei 9,0cm

Experiment	Theorie
$T_{S2} = (1{,}99 \pm 0{,}01)\,s$	$T_{S2} = (1{,}989 \pm 0{,}007)\,s$

Wie aus den beiden Tabellen ersichtlich, passen die gemessen Schwingungsdauern und die berechneten Werte überein.

4.3.5 Kopplungsgrad

(V): $\kappa = \dfrac{D_k}{D + D_k}$

(VI): $\kappa = \dfrac{T_a^2 - T_b^2}{T_a^2 + T_b^2}$

$$\kappa = \frac{D_k}{D + D_k} = \frac{2D_k}{2D + 2D_k} = \frac{\frac{D+2D_k}{\vartheta} - \frac{D}{\vartheta}}{\frac{D+2D_k}{\vartheta} + \frac{D}{\vartheta}} =$$

$$= \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{\omega_b^2 + \omega_a^2} = \frac{T_a^2 - T_b^2}{T_a^2 + T_b^2}$$

mit $\omega_a = \sqrt{\frac{D}{\vartheta}}$ und $\omega_b = \sqrt{\frac{D+2D_k}{\vartheta}}$

Kopplungsgrad bei 4,5cm mit (V):

$$\bar{\kappa} = \frac{D_k}{D + D_k} = 0{,}113506$$

Fehler:

$$\frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial D_k} = \frac{D}{(D+D_k)^2} = 0{,}04034 \, \frac{1}{Nm}$$

$u_{D_k} = 0{,}0094621 \, Nm$

$$\frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial D} = \frac{-D}{(D+D_k)^2} = -0{,}005164 \, \frac{1}{Nm}$$

$u_D = 0{,}317041 \, Nm$

$u_\kappa = 0{,}001681072$

$\Rightarrow \kappa = 0{,}114 \pm 0{,}002$ f zu groß

Kopplungsgrad bei 4,5cm (VI)

$$\overline{K} = \frac{T_a^2 - T_b^2}{T_a^2 + T_b^2} = 0{,}06642$$

Fehler:

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial T_a} = \frac{4 T_b^2 T_a}{(T_a^2 + T_b^2)^2} = 0{,}492865 \,\frac{1}{s}$$

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial T_b} = \frac{-4 T_a^2 T_b}{(T_a^2 + T_b^2)^2} = -0{,}526766 \,\frac{1}{s}$$

$u_K = 0{,}0072$ ✓

$\Rightarrow$ $K = 0{,}066 \pm 0{,}07$ f zu groß

Fehler von T_a und T_b ~~ist~~ ist wieder, der Fehler der Stoppuhr.

Kopplungsgrad bei 9cm mit (V)

$\bar{K} = 0{,}05985$

Fehler

$\frac{\partial \bar{K}}{\partial D_K} = 0{,}045324 \frac{1}{Nm}$

$u_{D_K} = 0{,}03891548\,Nm$

$\frac{\partial \bar{K}}{\partial D} = -0{,}002902 \frac{1}{Nm}$

$u_D = 0{,}317041\,Nm$

$u_K = 0{,}00198919$

$\Rightarrow K = 0{,}060 \pm 0{,}002$ f

Kopplungsgrad bei 9 cm mit (VI)

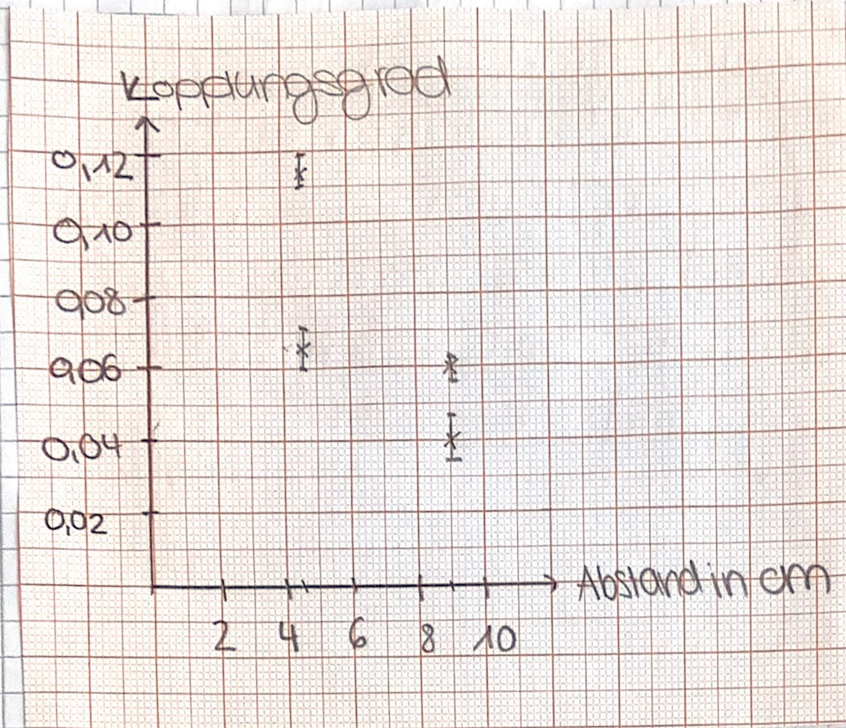
$\bar{K} = 0{,}040185$

$\frac{\partial \bar{K}}{\partial T_a} = 0{,}491815 \frac{1}{s}$

$\frac{\partial \bar{K}}{\partial T_b} = -0{,}511992 \frac{1}{s}$

$u_K = 0{,}007099$

$\Rightarrow K = 0{,}040 \pm 0{,}007$



Beim Kopplungsgrad zieht man eine deutlich Abweichung der Werte.
Der unterschied bei Kopplungs-länge 4,5cm beträgt
$\Delta K = 0{,}048 \pm 0{,}07$ was etwa
40% entspricht.
Eine Erklärungsmöglichkeit für diese Abweichung ist wieder die vermeindlich inkorrekt gemessene Größe h, die in D und Dk eingeht, natürlich könnte es auch andere Fehlerquellen, z.B Rundungsfehler, geben. Zudem wurde mit berechneten Werten gerechnet, die auch alle einen Fehler aufweisen.

Ganz Allgemein ist zu sehen, das der Kopplungsgrad bei 4,5cm größer ist als bei 9cm.
Dies ist so, da durch den kürzeren Draht die Direktionsmomente größer werden und somit auch der Kopplungsgrad.

5. Fazit

Während dem Versuch wurden die Fundamentalschwingungen, Schwebungsdauern und Schwingungsdauern für verschiedene Kopplungslängen (4,5cm und 9cm) gemessen.
Mithilfe der Abmessungen des Pendels konnte das Trägheitsmoment J und die Hilfsgröße D* berechnet werden.
Beim Vergleich mit den angegeben Werten, fiel auf, dass die Werte nicht exakt übereinstimmen. Diese Abweichung konnte auf die Größe h zurückgeführt werden und es wurde angenommen, das diese falsch gemessen wurde.
Als nächstes wurde die Erdbeschleunigung mithilfe des ungekoppelten Pendels bestimmt. Auch hier kam es zur einer Abweichung von dem aus der Schwerekarte bestimmtem Wert.
Wie die vorangegangene Abweichung, als auch die folgenden, kann diese auf die Größe h zurückgeführt werden.
Die gemessen Werte des gekoppelten Pendels wurden ausgewertet und mit den Theorie-Werten verglichen.
Vor allem beim Kopplungsgrad kam es zu einem grossen Unterschied

zwischen den Werten einer Kopplungslänge.

Bei der Auswertung und Versuchsdurchführung wurde unser Wissen über Trägheitsmomente und Drehmomente nocheinmal vertieft, zudem konnte der Satz von Steiner angewandt werden. Auch der Umgang mit einem Pendel wurde erlernt.

Außerdem wurde deutlich, welche Auswirkungen eine wahrscheinlich falsch gemessene ~~g~~ Größe hat.

Nachbessern, bitte alle Werte mit f neu berechnen,
im Prinzip nur die neuen Ergebnisse aufschreiben
ohne viel Text!

euer neuer Wert für $h_1 = 19{,}95\ mm$
$h_2 = 19{,}80\ mm$