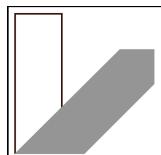


SS2010

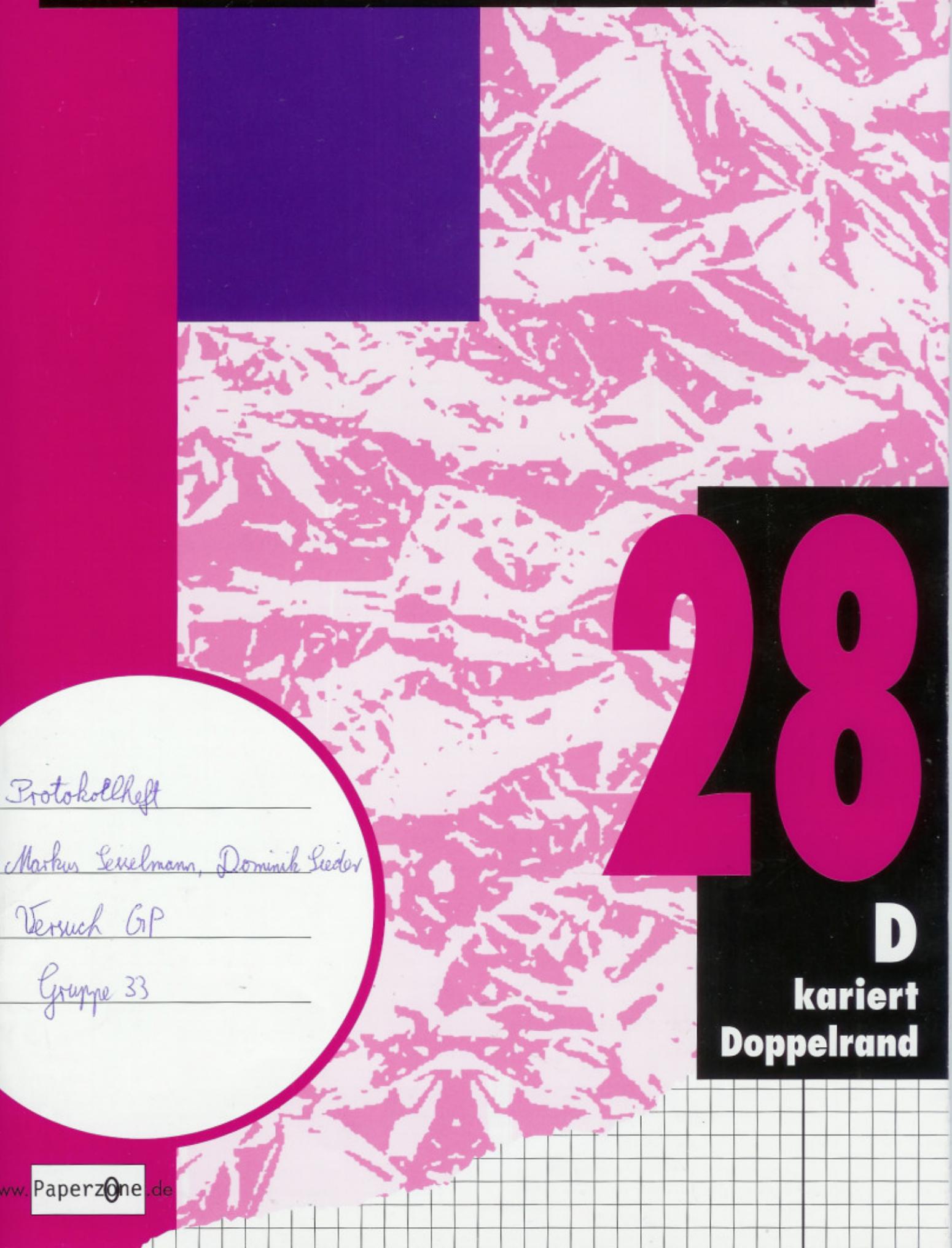
PPA1

Gekoppelte Pendel

Markus Sesselmann - Dominik Sieder



it's CREATIVE SCHOOL.



Versuch Gekoppelte Pendel

Teilnehmer: Dominik Lieder, Markus Lenelmann

Datum: 21.05.2010

Titel des Versuchs: Gekoppelte Pendel

Gruppe: 33

Versuchsort: 2. Platz von der Tür aus (3647)

Gliederung:

- | | |
|----------------------------|---------------|
| 1) Einleitung | S. 2 |
| 2) Fragen zur Vorbereitung | S. 3 - S. 9 |
| 3) Versuchsaufbau | S. 10 - S. 11 |
| 4) Messprotokoll | S. 12 - S. 19 |
| 5) Auswertung | S. 20 - S. 42 |
| 6) Zusammenfassung | S. 43 |

1) Einleitung

Das mathematische Pendel stellt eine Idealisierung im Vergleich zum physikalischen Pendel dar, welches die Schwingungen eines beliebigen realen starren Körpers beschreibt. Anhand dieses Pendels soll das Wissen über Trägheitsmomente vertieft, der Satz von Steiner angewandt und die Erdbeschleunigung gemessen werden. Gekoppelte Schwingungen sind ein Phänomen, das bei vielen physikalischen und technischen Systemen auftritt. Darunter fallen zum Beispiel Schwingungen von Atomen in Molekülen oder in einem Kristallgitter oder ~~*klassisch~~ gekoppelten elektrischen Schwingkreisen. Treten Schwingungen von Atomen in einem Kristallgitter auf, so handelt es sich hierbei meist um eine sehr große Zahl von gekoppelten Oszillatoren.

In unserem Beispiel soll ein einfaches mechanisches System aus zwei gekoppelten physikalischen Pendeln untersucht werden.

Nach der mathematischen Beschreibung sollen die beiden Fundamentalschwingungen des Systems, deren Überlagerung und die Schwebung für verschiedene Kopplungen vermessen werden.

* Schwingungen in

2) Fragen zur Vorbereitung

2.1 Lösung der Gleichung $\ddot{\varphi} + D\dot{\varphi} = 0$ (1)

Wbmatri: $\varphi(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \text{einsetzen: } -J\omega^2(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) + D(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow A \sin(\omega t) \cdot (D - J\omega^2) + B \cos(\omega t) \cdot (D - J\omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow D = J\omega^2$$

Die rückreibende Kraft beträgt $mgs \in \varphi$. Das rückreibende Drehmoment ist somit $r m g s \in \varphi$.

$$\Rightarrow J\ddot{\varphi} + r m g s \in \varphi = 0$$

Kleinwinkel Näherung: $\varphi \approx \sin \varphi$

$$\Rightarrow r m g \sin \varphi = r m g \varphi$$

$$\Rightarrow J\ddot{\varphi} + \underbrace{r m g \varphi}_{=D} = 0$$

$$\Rightarrow D = r m g$$

D ist das Drehmoment

$$\Rightarrow r m g = J\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{r m g}{J}}$$

$$J = \frac{\omega^2 I}{mr} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{I}{mr}$$

$$\text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}, T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{r m g}}$$

$$D^* \approx \frac{D}{g} = r m$$

r ist der Abstand von der Aufhängung bis zum Schwerpunkt.

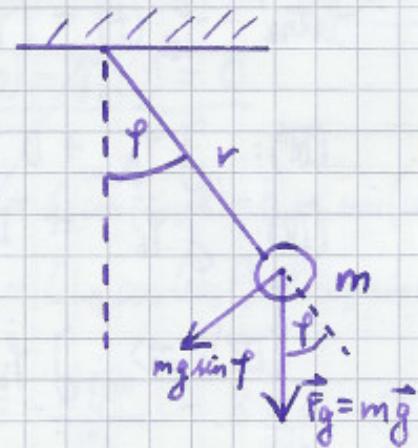
Bestimmung der Konstanten A und B:

$$\varphi_0 = \varphi(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 \Rightarrow B = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(t) = A \omega \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t)$$

$$\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0) = A \omega \cdot 1 - B \omega \cdot 0 \Rightarrow \dot{\varphi}_0 = A \omega \Rightarrow A = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}$$

(3)



$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{\varphi_0}{\omega} \sin(\omega t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega t)$$

2.2 Lösen von $\ddot{\varphi}_1 + D\dot{\varphi}_1 + D_K(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (\text{III})$ und $\ddot{\varphi}_2 + D\dot{\varphi}_2 + D_K(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (\text{IV})$:

$$(\text{III}) + (\text{IV}): \quad \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + D(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) = 0$$

$$(\text{III}) - (\text{IV}): \quad \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 + D(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + 2D_K(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Setze $\varphi_a(t) = (\varphi_1(t) + \varphi_2(t))$ und $\varphi_b(t) = (\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$

$$(\text{III}): \quad \ddot{\varphi}_a + D\dot{\varphi}_a = 0$$

$$(\text{IV}): \quad \ddot{\varphi}_b + D\dot{\varphi}_b + 2D_K\varphi_b = 0$$

$$(\text{IV}): \Rightarrow \ddot{\varphi}_b + (D + 2D_K)\varphi_b = 0$$

Annahme: $\varphi_a = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$

$$\text{in } (\text{III}): \quad -\cancel{\omega^2} \varphi_a + D\dot{\varphi}_a = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_a (D - \cancel{\omega^2}) = 0$$

Annahme: $\varphi_b = C \sin(\omega t) + E \cos(\omega t)$

$$\text{in } (\text{IV}): \Rightarrow -\cancel{\omega^2} \varphi_b + D\dot{\varphi}_b + 2D_K\varphi_b = 0$$

$$\Rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{D+2D_K}{J}}$$

$$\Rightarrow (\text{V}): \quad \varphi_1 + \varphi_2 = A \sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}} \cdot t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{D}{J}} \cdot t\right)$$

$$(\text{VI}): \quad \varphi_1 - \varphi_2 = C \sin\left(\sqrt{\frac{D+2D_K}{J}} \cdot t\right) + E \cos\left(\sqrt{\frac{D+2D_K}{J}} \cdot t\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\text{V} + \text{VI}): \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} (A \sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}} \cdot t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{D}{J}} \cdot t\right) + C \sin\left(\sqrt{\frac{D+2D_K}{J}} \cdot t\right) + E \cos\left(\sqrt{\frac{D+2D_K}{J}} \cdot t\right))$$

$$\frac{1}{2}(\text{V} - \text{VI}): \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} (A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t) - C \sin(\omega_b t) - E \cos(\omega_b t))$$

2.3. Lösungen für zwei Spezialfälle

Die Konstanten werden durch Anfangsbedingungen festgelegt. Hierbei treten zwei mögliche Fälle auf.

Seien $\varphi_1(0)$, $\dot{\varphi}_1(0)$, $\varphi_2(0)$ und $\dot{\varphi}_2(0)$ die Anfangsbedingungen.

a) Gleichsinnige Schwingung ($\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$):

$$\varphi_1(0) = \frac{1}{2} (A + C) \Rightarrow C = 2\varphi_1(0) - A \quad (I)$$

$$\varphi_2(0) = \frac{1}{2} (A - C)$$

$$\Rightarrow \varphi_2(0) = \frac{1}{2} A - \varphi_1(0) + \frac{1}{2} A \Rightarrow A = \varphi_1(0) + \varphi_2(0) = 2\varphi_1(0) \quad (I)$$

$$\Rightarrow C = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = 0$$

$$\dot{\varphi}_1(t) = \frac{1}{2} (w_a A \cos(\omega_a t) - B w_a \sin(\omega_a t) + C \frac{w_b}{\omega_b} \cos(\omega_b t) + E w_b \sin(\omega_b t))$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \frac{1}{2} (w_a A \cos(\omega_a t) - B w_a \sin(\omega_a t) - (w_b \cos(\omega_b t) + E w_b \sin(\omega_b t)))$$

$$\dot{\varphi}_1(0) = \frac{1}{2} (-B w_a - E w_b) \Rightarrow D = -\frac{2 \dot{\varphi}_1(0)}{\omega_b} - B \frac{w_a}{\omega_b} \quad (II)$$

$$\dot{\varphi}_2(0) = \frac{1}{2} (-B w_a + E w_b)$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_2(0) = -\frac{1}{2} w_a B - \dot{\varphi}_1(0) - \frac{B}{2} w_a$$

$$(II) \quad \dot{\varphi}_2(0)$$

$$\Leftrightarrow B = -\frac{\dot{\varphi}_1(0)}{w_a} - \frac{\dot{\varphi}_2(0)}{w_a} = -\frac{2 \dot{\varphi}_1(0)}{w_a}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{2 \dot{\varphi}_1(0)}{\omega_b} + \frac{w_a}{\omega_b} \left(-\frac{\dot{\varphi}_1(0)}{w_a} + \frac{\dot{\varphi}_2(0)}{w_a} \right) = -\frac{2 \dot{\varphi}_1(0)}{\omega_b} + \frac{\dot{\varphi}_1(0)}{w_b} + \frac{\dot{\varphi}_2(0)}{w_b}$$

$$\Rightarrow E = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1(t) = \varphi_1(0) \sin(\omega_a t) - \frac{\dot{\varphi}_1(0)}{\omega_a} \cos(\omega_a t)$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \varphi_1(0) \sin(\omega_a t) - \frac{\dot{\varphi}_1(0)}{\omega_a} \cos(\omega_a t)$$

$$\dot{\varphi}_1(t) = \dot{\varphi}_2(t)$$

Die Gleichungen beschreiben die gleiche Pendelbewegung.

b) Gegensinnige Schwingung ($\varphi_1(0) = -\varphi_2(0)$):

$$\Rightarrow A = \varphi_1(0) + \varphi_2(0) = 0$$

$$C = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = 2\varphi_1(0)$$

$$B = -\frac{1}{\omega_a} \dot{\varphi}_1(0) - \frac{1}{\omega_a} \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

$$E = -\frac{1}{\omega_b} \dot{\varphi}_1(0) + \frac{1}{\omega_b} \dot{\varphi}_2(0) = -\frac{2}{\omega_b} \dot{\varphi}_1(0)$$

(5)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = \dot{\varphi}_1(0) \sin(\omega_b t) - \frac{1}{\omega_b} \dot{\varphi}_1(0) \cos(\omega_b t) \\ \dot{\varphi}_2(t) = -\dot{\varphi}_1(0) \sin(\omega_b t) + \frac{1}{\omega_b} \dot{\varphi}_1(0) \cos(\omega_b t) \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}_1(t) = -\dot{\varphi}_2(t)$$

Hier beschreiben die Gleichungen gegengerichtete Pendelbewegungen.

2.3 4 unbestimmte Konstanten

Die vier Konstanten werden durch vier Anfangsbedingungen festgelegt. Hierbei sind diese die Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit der beiden Pendel.

Beide Pendel werden um einen bestimmten Winkel $\varphi_1(0)$ und $\varphi_2(0)$ ausgelenkt und werden dann losgelassen, d.h. sie besitzen keine Anfangsgeschwindigkeit, also $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$.

$$\Rightarrow \varphi_1(0) = \frac{1}{2}(B+E) \Leftrightarrow E = 2\varphi_1(0) - B$$

$$\varphi_2(0) = \frac{1}{2}(B-E)$$

$$\Rightarrow \varphi_2(0) = \frac{1}{2}B - \varphi_1(0) + \frac{1}{2}B \Leftrightarrow B = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)$$

$$\Rightarrow E = \varphi_1(0) - \varphi_2(0)$$

$$\dot{\varphi}_1(t) = \frac{1}{2}(w_a A \cos(\omega_a t) - w_a B \sin(\omega_a t) + w_b C \cos(\omega_b t) - w_b E \sin(\omega_b t))$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \frac{1}{2}(w_a A \cos(\omega_a t) - w_a B \sin(\omega_a t) - w_b C \cos(\omega_b t) + w_b E \sin(\omega_b t))$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1(0) = 0 = \frac{1}{2}w_a A - \frac{1}{2}w_b C \Leftrightarrow A = -\frac{w_b}{w_a} C$$

$$\dot{\varphi}_2(0) = 0 = \frac{1}{2}w_a A - \frac{1}{2}w_b C \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2}w_b C - \frac{1}{2}w_b C \Leftrightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi_1(t) = \frac{1}{2}([\varphi_1(0)+\varphi_2(0)] \cos(\omega_a t) + [\varphi_1(0)-\varphi_2(0)] \cos(\omega_b t))}$$

✓

$$\underline{\varphi_2(t) = \frac{1}{2}([\varphi_1(0)+\varphi_2(0)] \cos(\omega_a t) - [\varphi_1(0)-\varphi_2(0)] \cos(\omega_b t))}$$

✓

2.4 Lösungen für zwei Spezialfälle

$$a) \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_0$$

Hierbei handelt es sich um die gleichlange Pendelbewegung, d.h. die beiden Pendel werden von den selben Winkel φ_0 ausgelenkt.

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \frac{1}{2} \cdot (2\varphi_0 \cos(\omega_a t) + 0 \cdot \sin(\omega_a t)) = \underline{\underline{\varphi_0 \cos(\omega_a t)}} \quad \checkmark$$

$$b) \quad \dot{\varphi}_1(0) = -\dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_0$$

Hierbei handelt es sich um die gegensinnige Pendelbewegung, d.h. die beiden Pendel werden von demselben Winkel φ_0 ausgelenkt, aber in entgegengesetzter Richtung.

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \frac{1}{2} (0 \cdot \cos(\omega_a t) + 2 \cdot \varphi_0 \cos(\omega_b t)) = \underline{\underline{\varphi_0 \cos(\omega_b t)}} \\ \varphi_2(t) = \frac{1}{2} (0 \cos(\omega_a t) - 2 \cdot \varphi_0 \cos(\omega_b t)) = \underline{\underline{-\varphi_0 \cos(\omega_b t)}} \quad \checkmark$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{\Delta^2}{2}} > \sqrt{\frac{\Delta^2}{3}} = \omega_a \quad \checkmark$$

Das ist intuitiv klar, wenn man sich den Fall betrachtet, bei dem beide Pendel nach außen schwingen. Dabei verstetigen durch die Koppelung zwätzliche rückstoßende Momente. Folglich ist die Eigenfrequenz ω_b der gegenphasig schwingenden Pendel größer als ω_a .

2.5 Überlagerung der Fundamentalschwingungen

Schwingung eines der beiden Pendel um φ_0 und wird dann losgelassen. Pendel 1 soll ausgelenkt werden,

$$\text{d.h. } \dot{\varphi}_1(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \frac{1}{2} \varphi_0 \cos(\omega_a t) + \frac{1}{2} \varphi_0 \cos(\omega_b t)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} \varphi_0 \cos(\omega_a t) - \frac{1}{2} \varphi_0 \cos(\omega_b t)$$

Nutzen: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\cos \omega - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\omega+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$$

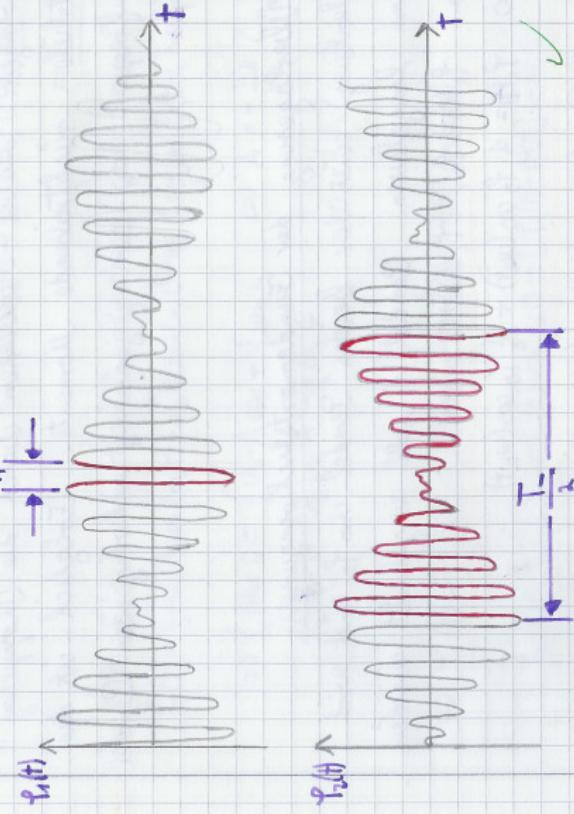
$$\Rightarrow f_1(t) = \frac{1}{2} f_0 \left(2 \cos\left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_a - \omega_b}{2}\right) \right) = f_0 \cos(\omega_a t) \cos(\omega_b t)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} f_0 \left(2 \sin\left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_a - \omega_b}{2}\right) \right) = -f_0 \sin(\omega_a t) \sin(\omega_b t)$$

$$\text{mit } \omega^+ := \frac{\omega_a + \omega_b}{2} \quad \text{und } \omega^- := \frac{\omega_a - \omega_b}{2}$$

2.6 Schwingungsfall $\omega_2 \approx \omega_b$:

Zur den Fall schwacher Kopplung (d.h. $\omega_a \approx \omega_b$) sind die Faktoren $\sin(\omega^+ t)$ und $\cos(\omega^+ t)$ langsam mit der Zeit veränderlich, da die Kreisfrequenz ω^- klein ist. Dagegen sind die Faktoren $\sin(\omega_b t)$ und $\cos(\omega_b t)$ wesentlich schneller mit der Zeit t veränderlich. Man kann deshalb $f_1(t)$ und $f_2(t)$ als zeitlich schnell ablaufende Schwingungen betrachten, deren Amplituden $f_0 \cdot \sin(\omega_b t)$ und $f_0 \cdot \cos(\omega_b t)$ zeitlich langsam veränderlich sind und auch negativ werden!



$$\text{mit: } T_- = \frac{2\pi}{\omega^-} = \frac{4\pi}{\omega_a - \omega_b}$$

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega^+} = \frac{4\pi}{\omega_a + \omega_b}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega^-} = \frac{2}{|\omega_a - \omega_b|} \quad \checkmark$$

2.7 Satz von Steiner

$$J = J_0 + m l^2$$

J_0 = Trägheitsmoment der zur Drehachse parallelen Scheibe durch den Schwerpunkt

m = Masse des Körpers

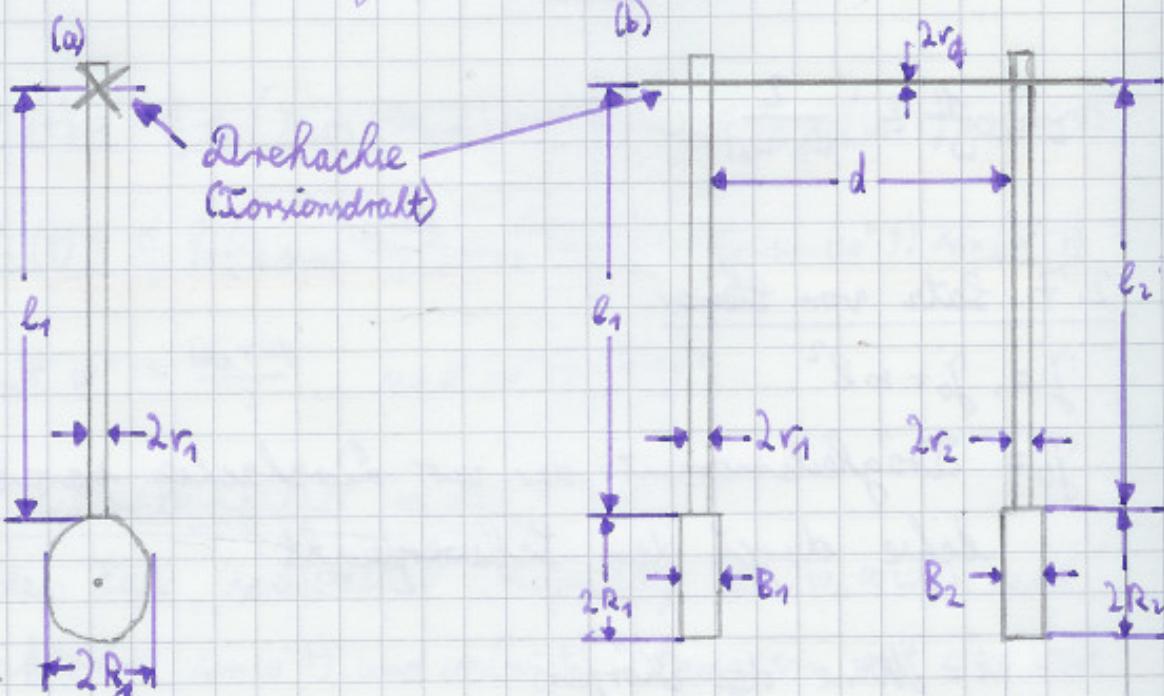
l = Abstand der parallelen Scheiben

→ Das Massenträgheitsmoment eines Körpers wird für eine Drehung um eine Scheibe durch den Schwerpunkt minimal.

(D4)

3) Versuchsaufbau

Schematische Darstellung des Pendels:



mit $2R_1$: Durchmesser Pendelkörper 1

$2R_2$: Durchmesser Pendelkörper 2

l_1 : Länge Pendelfaden 1

l_2 : Länge Pendelfaden 2

$2r_1$: Dicke Pendelfaden 1

$2r_2$: Dicke Pendelfaden 2

d : Abstand Pendelachse 1 zu 2

$2r_3$: Dicke Torsionsdräht

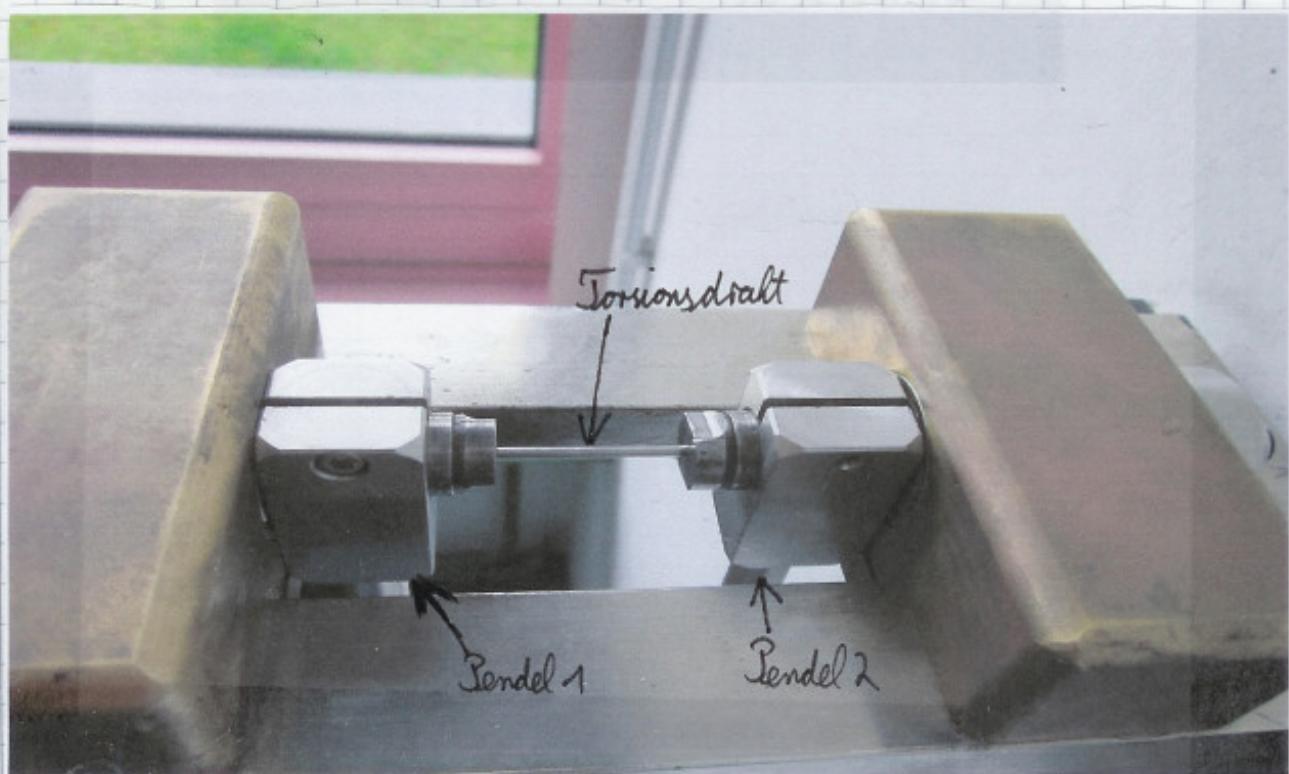
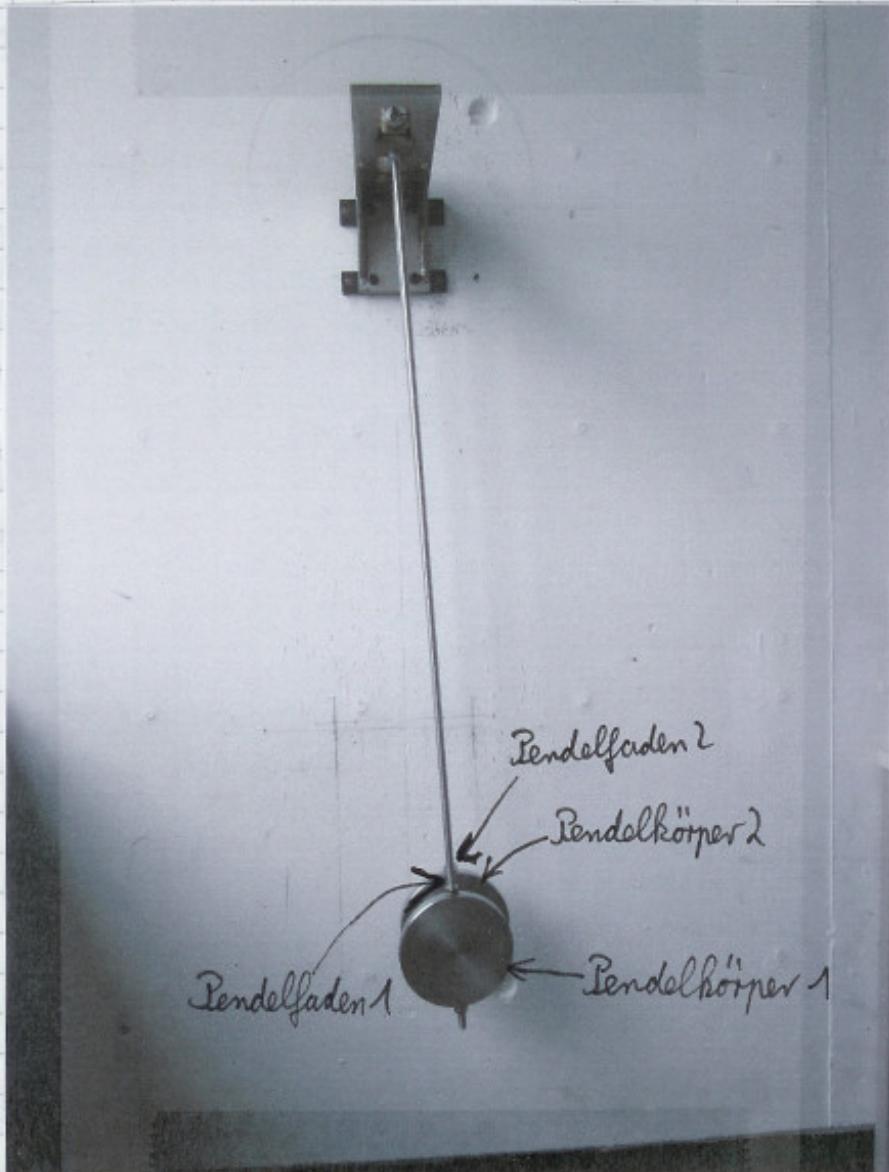
$$g \text{ (Pendelkörper)} = (9,844 \pm 0,004) \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

$D_k = \frac{\pi}{2} \frac{G r^4}{d}$ ist rechteckiges Moment

mit Torsionsmodul $G = (71,5 \pm 1,5) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Bei dem Versuch können und müssen die Pendel gleich eingestellt werden. Dies erfolgt durch höher- und tieferdrehen der Pendelkörper am Fuße des Pendelfadens.

Über den Torsionsdräht können die beiden Pendel aneinander gekoppelt werden.



(7)

(11)

4) Messprotokoll

4.1 Messen der Längen

Hierbei sollen Radius r und Länge l der Stange des Pendels und Radius R und Dicke B des Pendelkörpers gemessen werden. Längenmesser: Dominik

Messen des Radius r und Dicke B mit Mikrometerschraube:

Ablerefekler: $0,005\text{ cm} = 0,0005\text{ m}$; system. Fehler: $\Delta l = 0,005\text{ mm} + 1 \cdot 10^{-5}l$

$$2r = 0,950\text{ cm}$$

Messen der Länge l mit Meterstab (Stahl):

Ablerefekler: $0,05\text{ cm} = 0,0005\text{ m}$; system. Fehler: $\Delta l = 0,05\text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4}l$

$$l = 38,00\text{ cm}$$

Messen der Dicke B mit Messschieber:

Ablerefekler: $0,005\text{ cm}$; system. Fehler: $\Delta l = 0,05\text{ mm} + 1 \cdot 10^{-4}l$

$$B = 2,35\text{ cm} \quad \text{ich glaube } 2,03\text{ cm}$$

Messen des Radius R mit Meterstab (Stahl):

Ablerefekler: $0,05\text{ cm}$; system. Fehler: $\Delta l = 0,05\text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4}l$

$$2R = 14,90\text{ cm}$$

Messen des Torsionsradius r_d mit Mikrometerschraube:

Ablerefekler: $0,005\text{ cm}$; system. Fehler: $\Delta l = 0,005\text{ mm} + 1 \cdot 10^{-5}l$

$$2r_d = 1,980\text{ mm}$$

4.2 Bestimmung der Erdbeschleunigung

Messung der Frequenz ω eines einzelnen, ungedämpften Pendels

- a) Hierbei misst man zehn mal die Zeit für 20 Schwingungen des Pendels mit der Stoppuhr.

Zeitmeier: Dominik

Nr.	Zeit in s	ω in $\frac{1}{s}$ (alle Taschenrechnerstellen)
1)	40,80	3,079992798
2)	40,40	3,110487776
3)	40,60	3,095165176
4)	40,75	3,08377193
5)	40,55	3,098981656
6)	40,60	3,095165176
7)	40,65	3,091358085
8)	40,60	3,095165176
9)	40,45	3,106642921
10)	40,60	3,095165176

Das Pendel wurde dabei um 15,0 cm ausgelenkt.
in welcher Höhe gemessen?

Ablauffehler der Stoppuhr: 0,05 s

System. Fehler: $\Delta t = 0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} t$

$$\omega = 2\pi f \cdot n = n \cdot \frac{2\pi}{T} = 20 \cdot \frac{2\pi}{T_{20}}$$

- b) Nun wird Versuch 4.2 a) wiederholt, wobei nun das Pendel maximal (43,6 cm) ausgelenkt wird und sechs mal die Zeit für 10 Schwingungen gemessen wird.

Stoppuhr: Ablauffehler: 0,05 s

System. Fehler $\Delta t = 0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} t$

$$\omega = 2\pi f \cdot n = n \cdot \frac{2\pi}{T} = 10 \cdot \frac{2\pi}{T}$$

(13)

Nr.	Zeit in s	w in $\frac{1}{s}$ (alle TR-Stellen)
1)	20,50	3,064968443
2)	20,75	3,028041112
3)	20,60	3,050089955
4)	20,60	3,050089955
5)	20,80	3,020762167
6)	20,50	3,064968443
7)	20,50	3,064968443
8)	20,60	3,050089955
9)	20,55	3,057511098
10)	20,60	3,050089955

Zeitmesser: Dominik

bzw.

$$T_{\max_{20}} = \frac{40,83}{20} = 2,04 \text{ s} \quad (\text{"normale" / kleine Auslenkung})$$

$$T_{\max_{10}} = \frac{20,83}{10} = 2,08 \text{ s} \quad (\text{maximale Auslenkung})$$

$$T_{\min_{20}} = \frac{40,43}{20} = 2,02 \text{ s} \quad (\text{kleine Auslenkung})$$

$$T_{\min_{10}} = \frac{20,53}{10} = 2,05 \text{ s} \quad (\text{max. Auslenkung})$$

Vergleicht man nun die minimalen und maximalen Schwingungsdauern der verschiedenen Auslenkungen miteinander, so stellt man fest, dass die Schwingungsdauern ^{der} maximalen Auslenkung minimal größer ist.

=> w der maximalen Auslenkung ist minimal größer als das w der kleinen Auslenkung, was man auch durch Vergleich der beiden Tabellen feststellen kann.

aber beide Werte sind im Rahmen der Messgenauigkeit gleich, sieht man dann weiter horben.

4.3 Fundamentalschwingungen und Schwingung; gekoppelte Pendel

a) Messungen mit Kopplungslänge 4,5cm des Torsionsdrahtes

1. Messung von ω_a der ersten Fundamentalschwingung

Nun sind beide Pendel über den Torsionsdraht gekoppelt. Bei der ersten Fundamentalschwingung werden beide ^{Pendel} in die gleiche Richtung und um den gleichen Winkel ausgelenkt. Nun wird sechs mal die Zeit für 20 Schwingungen gemessen.

Zeitmesser: Dominik

Abtastfehler: 0,05s

system. Fehler: $\Delta t = 0,2s + 5 \cdot 10^{-4}t$

Nr.	Zeit in s	ω_a in $\frac{1}{s}$ (alle TR-Stellen)
1)	40,65	3,091358085
2)	40,75	3,08377193
3)	40,50	3,102807559
4)	40,60	3,095165176
5)	40,65	3,091358085
6)	40,80	3,07992798

$$\omega_a = n \cdot 2\pi f = n \cdot \frac{2\pi}{T_{20}} = 20 \cdot \frac{2\pi}{T_{20}} ; \text{ Auslenkung d. Pendels: } 15,0 \text{ cm}$$

in welcher Höhe?

2. Messung von ω_b der zweiten Fundamentalschwingung

Beide Pendel werden um den selben Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung ausgelenkt. Hier wird auch die Zeit für 20 Schwingungen sechs mal gemessen.

Auslenkung der Pendel: 10cm warum jetzt nur noch 10cm?

Zeitmesser: Markus

Ableref Fehler: 0,05 s

system. Fehler: $\Delta t = 0,2s + 5 \cdot 10^{-4} t$

Nr.	Zeit in s	w_b in $\frac{1}{s}$ (alle TR-Stellen)
1)	38,00	3,306939635
2)	38,00	3,306939635
3)	38,00	3,306939635
4)	38,05	3,302594117
5)	37,97	3,30955244
6)	38,10	3,298260004

$$w_b = n \cdot 2\pi f = n \cdot \frac{2\pi}{T_{10}} = 20 \cdot \frac{2\pi}{T_{10}}$$

3. Messung der Schwingungszeit τ

Das zweite Pendel wird um einen bestimmten Betrag ausgelenkt, während das erste Pendel in Ruhelage gehalten wird. Dann werden beide Pendel gleichzeitig losgelassen. Nun wird die Zeit gemessen, bis das erste Pendel drei mal still steht.

Zeitmesser: Markus

Ableref Fehler: 0,05 s ; system. Fehler: $0,2s + 5 \cdot 10^{-4} t$

Nr.	Zeit in s	τ in s (alle TR-Stellen)
1)	101,60	33,86666667
2)	103,00	34,33333333
3)	102,45	34,15000000
4)	102,85	34,18333333
5)	102,09	34,03000000
6)	102,30	34,10000000

$$\tau = \frac{T_0}{3}$$

; Auslenkung: 15,0 cm

4. Messung der Schwingungsdauer T

Das erste Pendel wird um einen bestimmten Betrag ausgelenkt, während die Kopplung aktiv ist. Hierbei wird die Zeit für 10 Schwingungen des ersten Pendels gemessen.

Zeitmesser: Dominik ; Auslenkung: 15,0 cm

Nr.	Zeit in s	T in s (alle TR-Stellen)
1)	20,10	2,01000000
2)	20,15	2,01500000
3)	20,10	2,01000000
4)	20,10	2,01000000
5)	20,05	2,00500000
6)	20,50	2,05000000

Ablauffehler: 0,05 s ; system. Fehler: $0,2s + 5 \cdot 10^{-7} t$

$$T = \frac{t_{10}}{n} = \frac{t_{10}}{10}$$

noch zu beachten bei Vorgehensweise
siehe S. 19; 4.3 B) 4.

5) Messung mit Kopplungslänge 3,0 cm des Torsionsdrehes

Es wird die vorherige Stoppuhr weiterverwendet.

1. Messung von ω_a der ersten Fundamentalschwingung

Bei der ersten Fundamentalschwingung werden beide Pendel in die gleiche Richtung und um den gleichen Winkel ausgelenkt. Nun wird sechs mal die Zeit für 20 Schwingungen gemessen.

Zeitmesser: Dominik

$$\omega_a = n \cdot 2\pi f = n \cdot \frac{2\pi}{T_{10}} = 20 \cdot \frac{2\pi}{T_{10}}$$

; Auslenkung d. Pendel: 15,0 cm

Nr.	Zeit in s	w_a in $\frac{1}{s}$ (alle TR-Stellen)
1)	40,60	3,095165176
2)	40,50	3,102807559
3)	40,70	3,087560348
4)	40,60	3,095165176
5)	40,65	3,091358085
6)	40,45	3,106642921

2. Messung von w_b der zweiten Fundamentalschwingung
 Beide Pendel werden um den selben Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung ausgelenkt. Hier wird auch die Zeit für 20 Schwingungen sechs mal gemessen.
 Auslenkung des Pendels: 10 cm

Zeitmesser: Markus

Nr.	Zeit in s	w_b in $\frac{1}{s}$ (alle TR-Stellen)
1)	38,95	3,226282571
2)	39,20	3,205706789
3)	39,27	3,199992517
4)	39,25	3,201623086
5)	39,50	3,181359649
6)	39,20	3,205706789

$$w_b = n \cdot 2\pi f = n \cdot \frac{2\pi}{T_{20}} = 20 \cdot \frac{2\pi}{T_{20}}$$

3. Messung der Schwingungsdauer T

Das zweite Pendel wird um einen bestimmten Betrag ausgelenkt, während das erste Pendel in Nulllage gehalten wird. Dann werden beide Pendel gleichzeitig losgelassen. Nun wird die Zeit gemessen, bis das erste

Pendel drei mal still steht.

Nr.	Zeit in s	T in s (alle TR-Stellen)
1)	187,82	62,60666667
2)	190,40	63,46666667
3)	190,45	63,48333333
4)	190,80	63,60000000
5)	185,20	61,73333333
6)	187,47	62,49000000

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}{6}$$

Zeitmesser: Markus ; Auslenkung: 15,0 cm

4. Messung der Schwingungsduauer T

Das erste Pendel wird um einen bestimmten Betrag ausgelenkt, während die Kopplung aktiv ist. Hierbei wird die Zeit für 10 Schwingungen des ersten Pendels gemessen.

Zeitmesser: Dominik ; Auslenkung: 15,0 cm

Nr.	Zeit in s	T in s (alle TR-Stellen)
1)	20,10	2,01000000
2)	20,00	2,00000000
3)	19,85	1,98500000
4)	20,05	2,00500000
5)	20,10	2,01000000
6)	20,00	2,00000000

$$T = \frac{t_{10}}{n} = \frac{t_{10}}{10}$$

Noch zu beachten: Die Zeitmessung hier beginnt dann, sobald das erste Pendel nach seiner Schwingung wieder eine gewisse Auslenkung (Hälfte der Maximalauslenkung) erreicht hat.

27.5.2010, 11:18

(13)

5) Auswertung

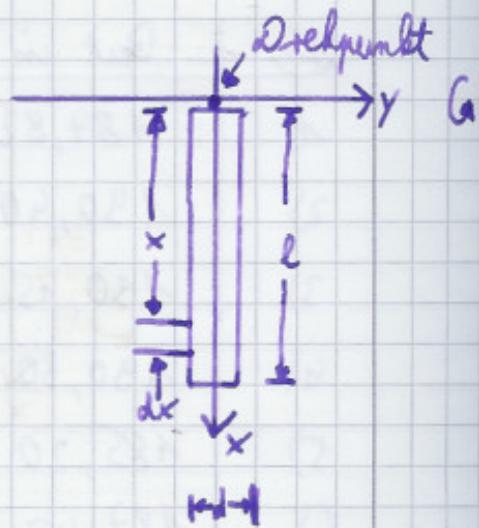
5.1.1 Bestimmung von D und J

Stab: $\bar{d} = 2r$

$$J = \int x^2 dm$$

$$\text{mit } dm = g dx = \frac{m_{st}}{l} dx$$

$$\Rightarrow J = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m_{st}}{l} dx = \frac{m_{st}}{l} \int_0^l x^2 dx \\ = \frac{m_{st}}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} m_{st} l^2$$



Scheibe:

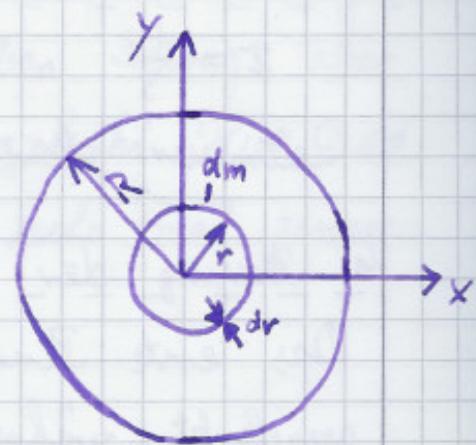
$$\bar{D} = 2R$$

$$J = \int r^2 dm$$

$$\text{mit } dm = \sigma dA$$

$$\text{und } dA = \frac{m_{sch}}{A} 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow J = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma \cdot 2\pi r dr = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = \\ = \frac{2\pi m_{sch}}{A} \frac{R^4}{4} = \frac{\pi m_{sch}}{2\pi R^2} \cdot R^4 = \frac{1}{2} m_{sch} R^2$$



Das ist das Trägheitsmoment der Scheibe für den Fall, dass ihr Mittelpunkt im Drehpunkt liegt. Da jedoch der Drehpunkt an der Halterung des Pendels (Stabende) liegt, wird für die Scheibe Satz von Steiner angewendet.

$$\Rightarrow J_{ges} = \frac{1}{3} m_{st} l^2 + \frac{1}{2} m_{sch} R^2 + m_{sch} (R+l)^2 = \\ = \frac{1}{3} m_{st} l^2 + \frac{1}{2} m_{sch} \frac{\bar{D}^2}{4} + m_{sch} \left(\frac{\bar{D}}{2} + l \right)^2$$

$$\text{mit } m_{st} = g \cdot V = g\pi R^2 B = g\pi \bar{D}^2 \cdot \frac{1}{4} B$$

$$m_{sch} = g V = g\pi \frac{\bar{D}^2}{4} \cdot l$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{gas}} = \frac{1}{R} \cdot \ln \left[\pi \bar{D}^2 \bar{B}^2 + \pi \bar{D}^2 \frac{1}{4} B \left[\frac{\bar{D}}{2} \left(\frac{\bar{D}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\bar{D}}{2} + \bar{L} \right)^2 \right] \right]$$

$$= \pi \left[\frac{d^2 \bar{e}^3}{R} + \frac{B}{4} \left(\frac{1}{8} \bar{D}^4 + \frac{\bar{D}^4}{4} + \bar{D}^2 \bar{L}^2 + \bar{D}^2 \bar{L}^2 \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{d^2 \bar{e}^3}{R} + \frac{B}{4} \left(\frac{3}{8} \bar{D}^4 + \bar{D}^2 \bar{L}^2 + \bar{D}^2 \bar{L}^2 \right) \right] \quad \checkmark$$

$$D = m_{\text{schw}} g + m_{\text{st}} g \quad \text{mit } r \text{ Abstand "Hängung-Punktespunkt"}$$

$$\Rightarrow D = (L+R) \cdot m_{\text{schw}} g + \frac{L}{2} \cdot m_{\text{st}} g = \\ = \pi \bar{g} \left(\frac{L}{2} \bar{D}^2 \bar{L} + (L+\bar{L}) \frac{\bar{D}^2}{4} B \right) = \pi \bar{g} \left(\frac{L^2}{8} \bar{D}^2 + \frac{L \bar{D}^2}{4} B + \frac{\bar{D}^3}{8} B \right) \\ = \pi \bar{g} \left(\frac{L^2 \bar{D}^2}{8} + \frac{B}{4} (L \bar{D}^2 + \frac{\bar{D}^3}{2}) \right)$$

5.1.2.2 Berechnung von D^* und \bar{f}

$$D = \pi \bar{g} \left(\frac{L^2 \bar{D}^2}{8} + \frac{B}{4} (L \bar{D}^2 + \frac{\bar{D}^3}{2}) \right)$$

$$\text{mit } g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \quad ; \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow D = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \pi \cdot 381 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \left(\frac{(98,00 \text{cm})^2 (0,980 \text{cm})^2}{8} + \frac{2,35 \text{cm}}{4} (98,00 \text{cm}) \cdot (14,90 \text{cm})^2 + \right.$$

$$\left. \frac{(14,90 \text{cm})^3}{2} \right) = \frac{365339068}{2} \frac{\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}^2} \approx 36,559 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \text{ m}$$

$$\Rightarrow D^* = \frac{D}{g} = 372618,8259 \text{ g/m} \quad \approx 3,72618,8259 \text{ kg/m}$$

Waren nicht gleich?
Wie kann das sein?

$$D^* = \pi \bar{g} \left(\frac{L^2 \bar{D}^2}{8} + \frac{B}{4} (L \bar{D}^2 + \frac{\bar{D}^3}{2}) \right)$$

Fehlerrechnung von D^* :

$$\frac{\partial D^*}{\partial L} = \pi \left(\frac{L^2 \bar{D}^2}{8} + \frac{B}{4} (L \bar{D}^2 + \frac{\bar{D}^3}{2}) \right) = \frac{46805,68306 \text{ mm}^4}{46805,68306 \text{ mm}^4}$$

$$\underline{u_g = 0,001 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}}$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial L} = \pi \left(\frac{L^2 \bar{D}^2}{8} + \frac{B}{4} (L \bar{D}^2 + \frac{\bar{D}^3}{2}) \right) = \frac{3851,473033 \text{ g}}{46805,68306 \text{ mm}^4}$$

$$u_2 = \sqrt{(0,05 \text{ cm})^2 + (0,005 \text{ cm} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 98 \text{ cm})^2} = 0,073593477 \text{ cm}$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial d} = g \pi \left(\frac{e^2 d}{h} \right) = 59322,09265 g$$

$$u_d = \sqrt{(0,005 \text{ cm})^2 + (0,005 \text{ cm} + 1 \cdot 10^5 \cdot 0,990 \text{ cm})^2} = 0,005025932551 \text{ cm}$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial R} = g\pi \left(\frac{e\bar{D}^2}{4} + \frac{\bar{D}^3}{8} \right) = \frac{146065.6978}{2284023.70092} g$$

$$u_B = \sqrt{(0,005\text{ cm})^2 + (0,005\text{ cm} + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 2,35\text{ cm})^2} = 0,00723914532 \text{ cm}$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \bar{D}} = g\pi \left(\frac{B\ell \bar{D}}{2} + \frac{3}{8}\bar{D}^2 \right) = 44837,0241 \text{ g}$$

$$u_D = \sqrt{(0,05 \text{ cm})^2 + (0,005 \text{ cm} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 14,9 \text{ cm})^2} = 0,051526716 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \underline{D^* = 3,726 \text{ kg} \cdot \text{m} \pm 0,028 \text{ kg} \cdot \text{m}} \quad \checkmark$$

Beachte Hinweis: Unsere Werte in der Fehlerrechnung zu D stimmen (mit der Großschreibung) mit dem Hinweis überein

$$g = \pi \left[\frac{e^3 d^2}{12} + \frac{13}{4} \left(\frac{3}{8} D^4 + e D^3 + e^2 D^2 \right) \right] =$$

$$= \underline{38204386,05 \text{ g cm}^2} \approx 3,820 \text{ kg m}^2 \checkmark$$

Fehlerrechnung von J:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e^2} = \pi g \left[\frac{1}{4} e^2 d^2 + \frac{B}{4} (D^3 + 2eD^2) \right] = \underline{745237,6513 \text{ g.cm}}$$

$$u_2 = \underline{0,0735933477\text{cm}}$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial d} = \pi g \left(\frac{1}{6} l^3 d \right) = 3875710,053 \text{ g} \cdot \text{cm}$$

$$u_d = 0,005025932551 \text{ cm}$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial B} = \pi g \frac{1}{4} \left(\frac{3}{8} \bar{D}^4 + l \bar{D}^3 + l^2 \bar{D}^2 \right) = 15441067,9 \text{ g} \cdot \text{cm}$$

$$u_B = 0,007239145322 \text{ cm}$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial D} = \pi g \left(\frac{B}{4} \left(\frac{3}{2} \bar{D}^3 + 3l \bar{D}^2 + 2l^2 \bar{D} \right) \right) = 5226052,208 \text{ g} \cdot \text{cm}$$

$$u_D = 0,051526716 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow s_J = \left[\left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial l} \cdot u_l \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial d} \cdot u_d \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial B} \cdot u_B \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial D} \cdot u_D \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = 294317,774155661 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \approx 0,030 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\Rightarrow \underline{J = 3,820 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \pm 0,030 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \quad \checkmark$$

Beachte Hinweis: Unsere Werte in der Fehlerrechnung zu \bar{J} stimmen (mit der Größenordnung) mit dem Hinweis überein.

5.2 Bestimmung der Erdbeschleunigung

$$g = \omega^2 \frac{J}{D^*} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{J}{D^*} = 4\pi^2 \frac{J}{D^* T^2}$$

\bar{T} aus 4.2 a):

$$\bar{T}_{20} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_{20i} = 40,60 \text{ s} \quad \Rightarrow \bar{T} = 2,03 \text{ s}$$

Fehlerrechnung zu \bar{T} : ($n \geq 6$)

$$u_{\bar{T}} = \sqrt{s_r^2 + s^2}$$

$$\text{mit } s = \left[\frac{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{T_{20i}}{T_{20}} - \bar{T} \right)^2}{n(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow s_D = \left[\frac{1}{90} \left((2,02s - 2,03s)^2 + (2,02s - 2,03s)^2 + (2,03s - 2,03s)^2 + (2,0375s - 2,03s)^2 + (2,0275s - 2,03s)^2 + (2,03s - 2,03s)^2 + (2,0225s - 2,03s)^2 + (2,03s - 2,03s)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = 0,0019007923751652s$$

$$\Rightarrow s_D = 0,02s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \underbrace{40,60s}_{\cdot 2,03s} = 0,0403s \quad \text{die passt hier!}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \underline{0,040344777s} \approx 0,04s$$

$$\Rightarrow \bar{T} = 2,03s \pm 0,04s = (203 \pm 0,04)s$$

Fehlerrechnung zu g:

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \frac{4\pi^2}{D^2 T^2} = 2,571004685 \frac{1}{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial D} = - \frac{4\pi^2 \cdot f}{D^3 T^2} = - 2,636077175 \frac{1}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = - \frac{8\pi^2 f}{D^2 T^3} = - 9,677359422 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$$

$$D^* = 3,726188257 \text{ kg} \cdot \text{m} \pm 0,0257667083197506 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

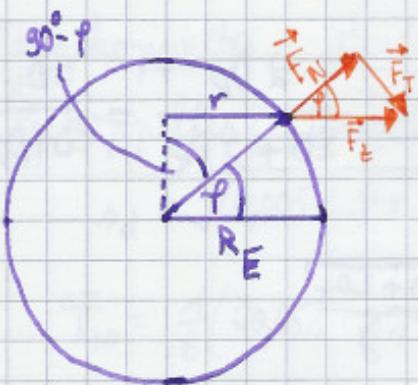
$$f = 3,8204938605 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \pm 0,02873122741556611 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\Rightarrow s_g = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial f} \cdot u_f \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial D^*} \cdot u_{D^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \cdot u_T \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = 0,10933846002322 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{f}{D^* T^2} = 9,822519813 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow g = 9,82(3) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \pm 0,10(9) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \checkmark$$

Vergleich der Erdbeschleunigung mit theoretisch berechneten Wert der Erdbeschleunigung für Bayreuth aus Experimentalphysik I:



$$\frac{r}{R_E} = \sin(90^\circ - \varphi) \quad (\Rightarrow r = \cos \varphi \cdot R_E \quad (1))$$

$$\cos \varphi = \frac{F_N}{F_g} \quad (\Rightarrow F_N = F_g \cdot \cos \varphi \quad (2))$$

$$w = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} \quad (3)$$

Winkel für Bayreuth:
 $f = 49,948036^\circ$

$$\vec{F}_{\text{eff}} = \vec{F}_g - \vec{F}_N \quad (\Rightarrow m \cdot g_{\text{eff}} = m \cdot g - F_g \cdot \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow g_{\text{eff}} = g - w^2 r \cos \varphi = g - 4\pi^2 \frac{1}{T^2} \cos^2(\varphi) R_E \quad (1), (3)$$

$$= 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 4\pi^2 \frac{1}{(27.3600)^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \cos^2(49,948036^\circ) \cdot 6368 \cdot 10^3 \text{m} =$$

$$= 9,792705364 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{für Bayreuth}$$

(COOL :-))

$\left. \begin{array}{l} g \text{ aus Flammer/} \\ \text{Hammer} \\ \text{Physikalisches Formel} \\ \text{und Tabellen} \\ 5.80: g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array} \right\}$

Der Wert hierfür ist aber auch nur eine "Vorläng", da der Radius r unter der Annahme, dass die Erde kugelförmig ist, berechnet wurde.

Die prozentuale Abweichung beträgt

$$\frac{3,823 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9,792705364 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3,823 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 100 = 0,30840513 \%$$

Das heißt, dass der theoretisch berechnete Wert von unserem experimentell ermittelten Wert um $0,30840513\%$, welche kleiner als 1% ist, abweicht.

Unabhängig davon, ob man nun unseren Wert mit dem theoretisch berechneten Wert von oben oder mit dem Wert aus der Flammer/Flammer Formelabmengung vergleicht, stellt man fest, dass sich unser Wert in einem relativ guten Rahmen bewegt.

5.3 gekoppelte Pendel

$$K = \frac{D_K}{D+D_K} = \frac{\frac{w_b^2 - w_a^2}{w_b^2 - w_a^2}}{\frac{w_b^2 - w_a^2}{w_b^2 - w_a^2}} = \frac{D+2D_K}{D+2D_K} - \frac{\frac{D}{J}}{\frac{D+2D_K}{J}} = \frac{\frac{2D_K}{D+2D_K}}{\frac{D+2D_K}{J}} = \frac{D_K}{D+D_K}$$

mit $w_a = \sqrt{\frac{D}{J}}$ und $w_b = \sqrt{\frac{D+2D_K}{J}}$ ✓

• $D_K = 0$:

$$\text{aus } K = \frac{D_K}{D+D_K} \text{ folgt } K=0$$

Die Pendel verhalten sich, als wäre keine Kopplung vorhanden. D.h. es wird keine Energie übertragen. $w_a = w_b$ ✓

• $D_K \gg D$:

$$\begin{aligned} \text{aus } K = \frac{D_K}{D+D_K} &\text{ folgt } K \approx 1 \\ \Rightarrow -w_a^2 + w_b^2 &\stackrel{?}{=} w_b^2 + w_a^2 \\ \Leftrightarrow 2w_a^2 &\stackrel{?}{=} 0 \quad (\Rightarrow w_a = 0) \text{ hätte falsch!} \end{aligned}$$

Die Verformung der Pendel ist in diesem Fall stark. Die Bewegung des einen Pendels wird sofort auf das andere übertragen. Das Trägheitsmoment ist hoch, das Drehmomentsmoment dagegen gering. Das w_a entfällt.

5.3.1 Vergleich von ω_0 der ersten Fundamentalschwingung mit ω des ungekoppelten Pendels

Ungekoppeltes Pendel: $T = 2,030 \text{ s} \pm 0,040 \text{ s}$ aus 5.2)

Gekoppeltes Pendel mit $d = 4,500 \text{ cm} \pm 0,0074 \text{ cm}:$

$$s_d = \sqrt{(0,005 \text{ cm})^2 + (0,005 \text{ cm} + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 4,5 \text{ cm})^2} = 0,00733643844 \text{ cm}$$

$$\bar{T}_{20} = \frac{1}{6} (40,65 \text{ s} + 40,75 \text{ s} + 40,50 \text{ s} + 40,60 \text{ s} + 40,65 \text{ s} + 40,80 \text{ s}) = 40,65833333 \text{ s} \\ \approx 40,66 \text{ s}$$

$$u_{\bar{T}} = \sqrt{s_r^2 + s^2} \quad \text{mit } s = \left[\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{20i}}{20} - \bar{T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow s = \left[\frac{1}{30} \left((2,0325 \text{ s} - 2,032916667 \text{ s})^2 + (2,0375 \text{ s} - 2,032916667 \text{ s})^2 + (2,025 \text{ s} - 2,032916667 \text{ s})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (2,03 \text{ s} - 2,032916667 \text{ s})^2 + (2,0325 \text{ s} - 2,032916667 \text{ s})^2 + (2,04 \text{ s} - 2,032916667 \text{ s})^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ = 0,019339033000656 \text{ s}$$

$$s_r = 0,02 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 40,65833333 \text{ s} = 0,040329166 \text{ s}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{s_r^2 + s^2} = 0,042059269 \text{ s} \approx 0,042 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{T} = 2,03 \text{ s} \pm 0,042 \text{ s}} \quad \checkmark$$

Gekoppeltes Pendel mit $d = 9,000 \text{ cm} \pm 0,0077 \text{ cm}:$

$$s_d = \sqrt{(0,005 \text{ cm})^2 + (0,005 \text{ cm} + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \text{ cm})^2} = 0,00773369252 \text{ cm}$$

$$\bar{T}_{20} = \frac{1}{6} (40,60 \text{ s} + 40,50 \text{ s} + 40,70 \text{ s} + 40,60 \text{ s} + 40,65 \text{ s} + 40,45 \text{ s}) = \\ = 40,58333333 \text{ s} \approx 40,58 \text{ s}$$

$$\bar{T} = 2,029166667 \text{ s} \approx 2,029 \text{ s}$$

$$u_{\bar{T}} = \sqrt{s_r^2 + s^2}$$

$$s = \left[\frac{1}{30} \left((2,03 \text{ s} - 2,029166667 \text{ s})^2 + (2,025 \text{ s} - 2,029166667 \text{ s})^2 + (2,035 \text{ s} - 2,029166667 \text{ s})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (2,03 \text{ s} - 2,029166667 \text{ s})^2 + (2,0325 \text{ s} - 2,029166667 \text{ s})^2 + (2,0225 \text{ s} - 2,029166667 \text{ s})^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = 0,010376031873366 \text{ s}$$

$$s_r = 0,02s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 40,58333333s = 0,040291666s$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{s_r^2 + s^2} = \underline{0,041606254s} \approx 0,042s$$

$$\Rightarrow T = \underline{2,029s \pm 0,042s} \quad \checkmark$$

Für 4,5 cm:

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,02916667s} = \underline{3,090774479 \frac{1}{s}}$$

$$s_{\omega_a} = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_a}{\partial T} \cdot u_T\right)^2} = -\frac{2\pi}{T^2} \cdot u_T = \frac{2\pi}{(2,02916667s)^2} \cdot 0,041606254s = \underline{0,063944388 \frac{1}{s}}$$

$$\underline{\omega_a = 3,09 \frac{1}{s} \pm 0,06 \frac{1}{s}} \quad \text{für } 4,5 \text{ cm} \quad \checkmark$$

Für 9,0 cm:

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,029166667s} = \underline{3,096436791 \frac{1}{s}}$$

$$s_{\omega_a} = \frac{2\pi}{T^2} \cdot u_T = \frac{2\pi}{(2,029166667s)^2} \cdot 0,041606254s = \underline{0,063483666 \frac{1}{s}}$$

$$\underline{\omega_a = 3,10 \frac{1}{s} \pm 0,06 \frac{1}{s}} \quad \text{für } 9,0 \text{ cm} \quad \checkmark$$

w für ungekoppeltes Pendel aus 5.2.:

$$\bar{T} = 2,03s, \quad u_T = 0,040344777s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\bar{T}} = \underline{3,095165176 \frac{1}{s}}$$

$$s_\omega = \frac{2\pi}{\bar{T}^2} \cdot u_T = \frac{2\pi}{(2,03s)^2} \cdot 0,040344777s = \underline{0,061514161 \frac{1}{s}}$$

$$\underline{\omega = 3,10 \frac{1}{s} \pm 0,06 \frac{1}{s}} \quad \checkmark$$

Die Frequenzen ω_a der ersten Fundamentalschwingung stimmen mit der Frequenz ω des ungekoppelten Pendels wie erwartet überein. Das zeigt, dass ω (relativ)

unabhängig von der Kopplungslänge d ist. ✓

5.3.2 Kopplungsgrade für $d = 4,5\text{cm}$ und $d = 9,0\text{cm}$

$$K = \frac{D_K}{D + D_K} \quad \text{mit} \quad D_K = \frac{\pi r_d^4 G_1}{d}$$

$$\text{mit } G_1 = (71,5 \pm 1,5) \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$d = 4,5000\text{cm} \pm 0,0074\text{cm}:$$

$$D_K = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{71,5 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (0,000933\text{m})^4}{0,045\text{m}} = 2,397475531 \text{ Nm} \approx 2,397 \text{ Nm}$$

$$2r_d = 0,00198 \text{ m}$$

$$s_{D_K} = \sqrt{(0,05\text{mm})^2 + (0,005\text{mm} + 1 \cdot 10^{-5} \cdot 1,980\text{mm})^2} = 0,050251352 \text{ mm}$$

$$2r_d = 1,980 \text{ mm} \pm 0,050 \text{ mm}$$

Fehlerrechnung für D_K mit $d = 4,5\text{cm}$:

$$\frac{\partial D_K}{\partial G} = \frac{\pi}{2} \frac{r_d^4}{d} = 3,353112631 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3$$

$$s_G = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\frac{\partial D_K}{\partial r_d} = 2\pi G \frac{r_d^3}{d} = 9686,763823 \text{ N}$$

$$s_{r_d} = 0,050251352 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{\partial D_K}{\partial d} = -\frac{\pi}{2} \frac{Gr_d^4}{d^2} = -53,27723403 \text{ N}$$

$$s_d = 0,007396113844 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Rightarrow s_{D_K} = \sqrt{\left(\frac{\partial D_K}{\partial G} s_G\right)^2 + \left(\frac{\partial D_K}{\partial r_d} s_{r_d}\right)^2 + \left(\frac{\partial D_K}{\partial d} s_d\right)^2} = 0,48938074166683 \text{ Nm}$$

$$\underline{D_K = 2,397 \text{ Nm} \pm 0,489 \text{ Nm}} \quad \checkmark$$

$$K = \frac{D_K}{D+D_K} \quad \text{für } d=4,5\text{ cm}:$$

~~$$K = \frac{2,397475531 \text{ Nm}}{36,5539068 \text{ kg m}^2}$$~~

Bemühte D aus 5.1.2: $D = \frac{36,5539068 \text{ kg m}^2}{s^2}$ (S. 21)

Brauchen noch Fehlerrechnung zu D mit:

$$\frac{\partial D}{\partial L} = \frac{\partial D^*}{\partial L} \cdot g = 37,81193185 \text{ kg m}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \frac{\partial D^*}{\partial a} g = 581,9497283 \text{ kg m}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial B} = \frac{\partial D^*}{\partial B} \cdot g = 1432,904495 \text{ kg m}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial D} = \frac{\partial D^*}{\partial D} \cdot g = 440,4338064 \text{ kg m}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow s_D = \left[\left(\frac{\partial D}{\partial L} \cdot u_L \right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial a} \cdot u_a \right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial B} \cdot u_B \right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial D} \cdot u_D \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

mit u_L, u_a, \dots aus S. 22

$$= 0,2527714148034 \text{ kg m}^{-\frac{1}{2}} \quad \checkmark$$

$$K = \frac{2,397475531 \text{ Nm}}{36,5539068 \text{ Nm} + 2,397475531 \text{ Nm}} = \underline{0,06155046} \approx 0,062$$

$$\frac{\partial K}{\partial D_K} = \frac{D}{(D+D_K)^2} = \frac{36,5539068 \text{ Nm}}{(36,5539068 \text{ Nm} + 2,397475531 \text{ Nm})^2} = 0,024092843 \frac{1}{\text{Nm}}$$

$$s_{D_K} = 0,480338074166083 \text{ Nm}$$

$$\frac{\partial K}{\partial D} = - \frac{D_K}{(D+D_K)^2} = - \frac{2,397475531 \text{ Nm}}{(36,5539068 \text{ Nm} + 2,397475531 \text{ Nm})^2} = -0,001580186815 \frac{1}{\text{Nm}}$$

$$s_D = 0,2527714148034 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow s_K = \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial D_K} \cdot s_{D_K} \right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial D} \cdot s_D \right)^2} = \underline{0,011737337060303} \approx 0,012$$

30 $\Rightarrow \underline{K = 0,062 \pm 0,012}$ für 4,5 cm \checkmark

$$d = 9,0000 \text{ cm} \pm 0,0077 \text{ cm}$$

$$D_K = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{71,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 (0,00033 \text{ m})^4}{0,090 \text{ m}} = \underline{1,198737766 \text{ Nm}} \approx 1,199 \text{ Nm}$$

Fehlerrechnung für D_K mit $d = 9,0 \text{ cm}$:

$$\frac{\partial D_K}{\partial G} = 1,676556316 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3$$

$$\Delta G = 1,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\frac{\partial D_K}{\partial r_d} = 4843,3849312 \text{ N}$$

$$\Delta r_d = 0,050251352 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{\partial D_K}{\partial d} = -13,31930851 \text{ N}$$

$$\Delta d = 0,00773368257 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta D_K = \underline{0,24468460692887 \text{ Nm}}$$

$$\underline{D_K = 1,199 \text{ Nm} \pm 0,245 \text{ Nm}} \quad \checkmark$$

$$K = \frac{D_K}{D+D_K} \quad \text{für } d = 9,0 \text{ cm}$$

$$K = \frac{1,198737766 \text{ Nm}}{36,5539068 \text{ Nm} + 1,198737766 \text{ Nm}} = \underline{0,031752418} \approx 0,032$$

$$\frac{\partial K}{\partial D_K} = \frac{D}{(D+D_K)^2} = \frac{36,5539068 \text{ Nm}}{(36,5539068 \text{ Nm} + 1,198737766 \text{ Nm})^2} = 0,025647145 \frac{1}{\text{Nm}}$$

$$\Delta D_K = 0,24468460692887 \text{ Nm}$$

$$\frac{\partial K}{\partial D} = -\frac{D_K}{(D+D_K)^2} = -\frac{1,198737766 \text{ Nm}}{(36,5539068 \text{ Nm} + 1,198737766 \text{ Nm})^2} = -0,0008410697457 \frac{1}{\text{Nm}}$$

$$\Delta_D = 0,25277141418034 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow \sigma_K = \left[\left(\frac{\partial K}{\partial w_b} \cdot s_{w_b} \right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial w_a} \cdot s_{w_a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \underline{0,0062790616930503} \approx 0,006$$

$$\Rightarrow K = 0,032 \pm 0,006 \quad \checkmark$$

• Berechnung von $K = \frac{w_b^2 - w_a^2}{w_b^2 + w_a^2}$ für $d = 4,5 \text{ cm}$:

$$\text{mit } w_a = 3,090724479 \frac{1}{3} \pm 0,063344388 \frac{1}{3}$$

- Berechnung von w_b :

$$\bar{T}_{20} = \frac{1}{6} (38,00_s + 38,00_s + 38,00_s + 38,05_s + 37,97_s + 38,10_s) =$$

$$= 38,02_s$$

$$\bar{T} = \underline{1,901_s}$$

$$u_T = \sqrt{s_r^2 + s_b^2}$$

$$\Rightarrow s = \left[\frac{1}{30} (3 \cdot (1,9_s - 1,901_s)^2 + (1,9025_s - 1,901_s)^2 + (1,8985_s - 1,901_s)^2 + (1,905_s - 1,901_s)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = 0,0003574271078_s$$

$$s_r = 0,02_s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 38,02_s = 0,03901_s$$

$$\Rightarrow u_T = \underline{0,0390217471_s} \approx 0,039_s$$

$$\bar{T} = 1,901_s \pm 0,039_s \quad \checkmark$$

$$w_b = \frac{2\pi}{\bar{T}} = \frac{2\pi}{1,901_s} = \underline{3,305200056 \frac{1}{3}} \approx 3,305 \frac{1}{3}$$

$$s_{w_b} = \frac{2\pi}{\bar{T}^2} \cdot u_T = \frac{2\pi}{(1,901_s)^2} \cdot 0,0390217471_s = \underline{0,067845007 \frac{1}{3}} \approx 0,068 \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow w_b = \underline{3,305 \frac{1}{3} \pm 0,068 \frac{1}{3}} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow K = \frac{w_b^2 - w_a^2}{w_b^2 + w_a^2} = \frac{(3,305200056 \frac{1}{3})^2 - (3,090724479 \frac{1}{3})^2}{(3,305200056 \frac{1}{3})^2 + (3,090724479 \frac{1}{3})^2} = \underline{0,066990995} \approx 0,067$$

Fehlerrechnung mit:

$$\frac{\partial K}{\partial w_a} = - \frac{4 w_b^2 w_a}{(w_b^2 + w_a^2)^2} = -0,322036716 \rightarrow$$

$$s_{w_0} = 0,063944388 \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial K}{\partial w_b} = \frac{6 w_a^2 w_b}{(w_b^2 + w_a^2)^2} = 0,301195749$$

$$\lambda_{W_0} = 0,067845007\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow s_K = \left[\left(\frac{\partial K}{\partial w_a} \cdot s_{w_a} \right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial w_b} \cdot s_{w_b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 0,029013456381148 \approx 0,029$$

$$\Rightarrow \underline{K = 0,067 \pm 0,029} \quad \checkmark$$

beiden

Vergleicht man die Kopplungsgrade für $d=4,5\text{ cm}$, stellt man fest, dass sie eine minimale Abweichung vorweisen. Das heißt, es sind beide Wege zur Bestimmung von K möglich. Natürlich. Ich würde eben feststellen, dass beide Ergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen.

- Berechnung von $K = \frac{w_b^2 - w_a^2}{w_b^2 + w_a^2}$ für $d = 9,0\text{cm}$:

mit $w_a = 3,096436291 \frac{1}{x} \pm 0,063489666 \frac{1}{x^2}$

- ## - Berechnung von W_b :

$$\bar{T}_{20} = \frac{1}{6}(38,95_s + 39,20_s + 39,27_s + 39,75_s + 39,50_s + 39,20_s) =$$

$$= 33,2283333 \text{人}$$

$$\bar{T} = 1,961416667 \text{ s} \approx 1,961 \text{ s}$$

$$u_{\perp} = \sqrt{s^2 + s^2}$$

$$\Rightarrow s = \left[\frac{1}{30} \left((1,9475s - 1,961416667s)^2 + (1,96s - 1,961416667s)^2 + (1,9635s - 1,961416667s)^2 + (1,9675s - 1,961416667s)^2 + (1,975s - 1,961416667s)^2 + (1,981416667s - 1,961416667s)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \boxed{33} \quad (33)$$

$$= 0,0035949474350205 \text{ s}$$

$$s_r = 0,02 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 39,22833333 \text{ s} = 0,039614166 \text{ s}$$

$$\Rightarrow u_T = \underline{0,03977695} \text{ s} \approx 0,040 \text{ s}$$

$$T = \underline{\underline{1,961 \text{ s}}} \pm 0,040 \text{ s}$$

$$\omega_b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,961416667 \text{ s}} = \underline{\underline{3,203391412 \frac{1}{3}}} \approx 3,203 \frac{1}{3}$$

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T^2} \cdot u_T = \frac{2\pi}{(1,961416667 \text{ s})^2} \cdot 0,03977695 \text{ s} = \underline{\underline{0,06496383 \frac{1}{3}}} \approx 0,065 \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_b = 3,203 \frac{1}{3}}} \pm 0,065 \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow K = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{\omega_b^2 + \omega_a^2} = \frac{(3,203391412 \frac{1}{3})^2 - (0,06496383 \frac{1}{3})^2}{(3,203391412 \frac{1}{3})^2 + (0,06496383 \frac{1}{3})^2} = \frac{0,033945151}{0,034} \approx 0,034$$

Fehlerrechnung zu K:

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_a} = -\frac{4 \omega_b^2 \omega_a}{(\omega_b^2 + \omega_a^2)^2} = -0,372579776 \text{ s}$$

$$\Delta \omega_a = 0,063489666 \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_b} = \frac{4 \omega_a^2 \omega_b}{(\omega_b^2 + \omega_a^2)^2} = 0,311809453 \text{ s}$$

$$\Delta \omega_b = 0,06496383 \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \Delta K = \left[\left(\frac{\partial K}{\partial \omega_a} \cdot \Delta \omega_a \right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial \omega_b} \cdot \Delta \omega_b \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \underline{\underline{0,028805716663 \frac{1}{163}}} \approx 0,029$$

$$\Rightarrow K = \underline{\underline{0,034 \pm 0,029}} \quad \checkmark$$

Vergleicht man die beiden Kopplungsgrade für $d = 9,0 \text{ cm}$, so stellt man fest, dass sie innerhalb ihres

Fehlerintervalls übereinstimmen. Das zeigt, dass beide Deekenwege für K äquivalent sind.

5. 3. 3 Vergleich der Schwingungsdauern mit der theoretischen:

$$d = 4,5 \text{ cm:}$$

(Meinprotokoll 4.3 a) 3., S. 16)

$$\bar{T}_3 = \frac{1}{6} (101,60_s + 103,00_s + 102,45_s + 102,85_s + 102,09_s + 102,30_s) = \\ = 102,3816667_s$$

$$\bar{T} = \frac{34,12722223_s}{\sqrt{s_r^2 + s_t^2}} \approx 34,13_s$$

$$s_t = \sqrt{s_r^2 + s_t^2}$$

$$s = \left[\frac{1}{30} \left((33,86666667_s - 34,12722223_s)^2 + (34,33333333_s - 34,12722223_s)^2 + (34,15_s - 34,12722223_s)^2 + (34,78333333_s - 34,12722223_s)^2 + (34,03_s - 34,12722223_s)^2 + (34,1_s - 34,12722223_s)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 0,058652017501689_s$$

$$s_r = 0,02_s + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 102,3816667_s = 0,071190833_s$$

$$s_t = \underline{0,032265311_s} \approx 0,03_s$$

$$\Rightarrow \bar{T} = \underline{34,13_s} \pm 0,03_s \quad \checkmark$$

theoretisch berechnetes T (aus 2.6):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_b - \omega_a}$$

$$\text{mit } \omega_a = 3,090724479 \frac{1}{s} \pm 0,063944388 \frac{1}{s}$$

$$\omega_b = 3,305200056 \frac{1}{s} \pm 0,067845007 \frac{1}{s}$$

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{3,305200056 \frac{1}{s} - 3,090724479 \frac{1}{s}} = \underline{29,28557479} \rightarrow \approx 29,30_s \quad (35)$$

Fehlerrechnung zu \bar{T} :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega_b} = -\frac{2\pi}{(\omega_b - \omega_a)^2} = -136,5916586 \text{ s}^2$$

$$\Delta \omega_b = 0,067845007 \%$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega_a} = \frac{2\pi}{(\omega_b - \omega_a)^2} = 136,5916586 \text{ s}^2$$

$$\Delta \omega_a = 0,063944388 \%$$

$$\Rightarrow \Delta \bar{T} = \left[\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega_b} \cdot \Delta \omega_b \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega_a} \cdot \Delta \omega_a \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \underline{12,73443801020458 \text{ s}} \approx 12,73 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \bar{T} = 23,30 \text{ s} \pm 12,73 \text{ s} \quad \checkmark$$

Der theoretisch berechnete Wert für \bar{T} weist einen sehr großen Fehler auf, weshalb dieser auch mit dem gemessenen Wert innerhalb des Fehlers übereinstimmen könnte. Die große Abweichung kann dadurch erklärt werden, dass wir den Stillstand des Pendels und damit die Schwingungsphase nicht eindeutig bestimmen konnten und dadurch ungenau gemessen haben.

$$\underline{d = 3,0 \text{ cm:}}$$

(Messprotokoll 4.3 0>3; S. 19)

$$\bar{T}_3 = \frac{1}{6} (187,82 \text{ s} + 190,40 \text{ s} + 190,45 \text{ s} + 190,80 \text{ s} + 185,20 \text{ s} + \\ + 187,47 \text{ s}) = 188,69 \text{ s}$$

$$\bar{T} = \underline{62,83666667 \text{ s}} \approx 62,80 \text{ s}$$

$$u_{\bar{T}} = \sqrt{s_T^2 + s_d^2}$$

$$s = \left[\frac{1}{30} \left((62,60666667_s - 62,83666667_s)^2 + (63,46666667_s - 62,83666667_s)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (63,48333333_s - 62,83666667_s)^2 + (63,6_s - 62,83666667_s)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (61,73333333_s - 62,83666667_s)^2 + (62,49_s - 62,83666667_s)^2 \right]^{1/2} = \\ = 0,30367623923563_s$$

$$s_r = 0,02_s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 62,8366667_s = 0,051448333_s$$

$$\Rightarrow u_{\tilde{\tau}} = \underline{0,308003553} \approx 0,31_s$$

$$\Rightarrow \underline{\tau} = \underline{62,90_s} \pm 0,31_s \quad \checkmark$$

theoretisch berechnetes τ (aus 2.6):

$$\tilde{\tau} = \frac{2\pi}{w_b - w_a}$$

$$\text{mit } w_a = 3,096436291 \frac{1}{s} \pm 0,063489666 \frac{1}{s}$$

$$w_b = 3,203391412 \frac{1}{s} \pm 0,064936383 \frac{1}{s}$$

$$\tilde{\tau} = \frac{2\pi}{3,203391412 \frac{1}{s} - 3,096436291 \frac{1}{s}} = \underline{58,74599784_s} \approx 58,75_s$$

Fehlerrechnung zu τ :

$$\frac{\partial \tau}{\partial w_b} = - \frac{2\pi}{(w_b - w_a)^2} = - 549,2583926_s^2$$

$$s_{w_b} = 0,064936383 \frac{1}{s}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial w_a} = \frac{2\pi}{(w_b - w_a)^2} = 549,2583926_s^2$$

$$s_{w_a} = 0,063489666 \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow s_{\tau} = \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial w_b} \cdot s_{w_b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial w_a} \cdot s_{w_a} \right)^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \underline{43,183761070752375_s} \approx 43,89_s$$

$$\Rightarrow \underline{\tau = 58,75_s} \pm 43,89_s \quad \checkmark$$

Der theoretisch berechnete Wert für τ weist einen erheblich großen Fehler, weshalb dieser mit dem gemessenen Wert innerhalb des Fehlers übereinstimmen könnte. Die große Abweichung kann dadurch erklärt werden, dass wir den Stillstand des Pendels und damit die Schwingungsphase nicht eindeutig bestimmen konnten und dadurch ungenau gemessen haben.

Anmerkung - zum Fehler der theoretisch berechneten τ :

Die Werte der Fehler machen vom Mittelwert ca. 45% bzw. 85% aus. Das bedeutet, dass die Ergebnisse der theoretisch berechneten Schwingungsdauern sehr ungenau und damit schwach in ihrer Aussagekraft sind. Die Größenordnung der Fehler lässt sich auf die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \tau}{\partial w_a}$ und $\frac{\partial \tau}{\partial w_b}$ in der Fehlerfortpflanzung zurückführen. Diese Ableitungen sind bereits große Werte, da in deren Nenner $(w_b - w_a)^2$ steht, welche eine sehr kleine Zahl aufgrund der Ähnlichkeit von w_b und w_a ist. Super :-)

5.3.4 Vergleich der gemessenen Schwingungsdauer im gekoppelten Zustand mit den erwarteten Werten

$$d = 4,5 \text{ cm} :$$

(aus Messprotokoll 4.3 a) 4.5. 17)

$$\bar{T}_{10} = \frac{1}{6} (20,10_s + 20,15_s + 20,10_s + 20,10_s + 20,05_s + 20,50_s) =$$

$$= 20,1666667_s$$

$$\bar{T} = \underline{2,01666667_s} \approx 2,017_s$$

$$u_T = \sqrt{s_r^2 + s^2}$$

$$\Rightarrow s = \left[\frac{1}{30} ((2,01_s - 2,01666667_s)^2 + (2,015_s - 2,01666667_s)^2 + (2,01_s - 2,01666667_s)^2 + (2,01_s - 2,01666667_s)^2 + (2,005_s - 2,01666667_s)^2 + (2,05_s - 2,01666667_s)^2) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 0,067905162624878_s$$

$$s_r = 0,02_s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 20,1666667_s = 0,030083333_s$$

$$\Rightarrow u_T = \underline{0,074270573_s} \approx 0,074_s$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{T} = 2,017_s \pm 0,074_s} \quad \checkmark$$

$$d = 9,0 \text{ cm} :$$

(aus Messprotokoll 4.3 b) 4., 5. 19)

$$\bar{T}_{10} = \frac{1}{6} (20,10_s + 20,00_s + 19,95_s + 20,05_s + 20,10_s + 20,00_s) =$$

$$= 20,03333333_s$$

$$\bar{T} = \underline{2,003333333_s} \approx 2,003_s$$

$$u_T = \sqrt{s_r^2 + s^2}$$

$$\Rightarrow s = \left[\frac{1}{30} ((2,01_s - 2,003333333_s)^2 + (2,00_s - 2,003333333_s)^2 + (1,995_s - 2,003333333_s)^2 + (2,005_s - 2,003333333_s)^2 + (2,01_s - 2,003333333_s)^2 + (2,00_s - 2,003333333_s)^2) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 0,0024720661623652_s$$

$$s_r = 0,02s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 20,03333333s = 0,030016666s$$

$$\Rightarrow s_T = \underline{0,030118289s} \approx 0,030s$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = 2,003s \pm 0,030s}}$$



Erwartete Werte:

(siehe 2.6)

$$\omega_t = \frac{\omega_a + \omega_b}{2} =: \omega \quad \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} \right)$$

• $d = 4,5\text{cm}$:

$$T_a = 2,032916667s \pm 0,042059269s \quad (5.3.1 \text{ S.27})$$

$$T_b = 1,901s \pm 0,039021747s \quad (5.3.2 \text{ S.32})$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \left(\frac{1}{2,032916667s} + \frac{1}{1,901s} \right)^{-1} = \underline{1,964746542s} \approx 1,965s$$

Fehlerrechnung:

$$\frac{\partial T}{\partial T_a} = 2 \cdot \left(\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{T_b^2} = 0,46707907395824$$

$$\Delta_{T_a} = 0,042059269s$$

$$\frac{\partial T}{\partial T_b} = 2 \cdot \left(\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{T_a^2} = 0,53409539903147$$

$$\Delta_{T_b} = 0,041606254s$$

$$\Rightarrow \Delta_T = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial T_a} \Delta_{T_a} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_b} \Delta_{T_b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \underline{0,023658859062664s} \approx 0,030s$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = 1,965s \pm 0,030s}}$$



$d = 3,0 \text{ cm}$:

$$T_a = 2,029166667_s \pm 0,041606254_s \quad (5.3.1 \text{ S.} 27/28)$$

$$T_b = 1,961416667_s \pm 0,03977695_s \quad (5.3.2 \text{ S.} 33/34)$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \left(\frac{1}{2,029166667_s} + \frac{1}{1,961416667_s} \right)^{-1} = \underline{1,994716555_s} \approx 1,995_s$$

Fehlerrechnung:

$$\frac{\partial T}{\partial T_a} = 2 \cdot \left(\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{T_a^2} = 0,48316664942029$$

$$\Delta_{T_a} = 0,041606254_s$$

$$\frac{\partial T}{\partial T_b} = 2 \cdot \left(\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{T_b^2} = 0,51717158499213$$

$$\Delta_{T_b} = 0,03977695_s$$

$$\Rightarrow \Delta_T = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial T_a} \Delta_{T_a} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_b} \Delta_{T_b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \underline{0,028761534410497_s} \approx 0,029_s$$

$$\Rightarrow \underline{T = 1,995_s \pm 0,029_s} \quad \checkmark$$

Vergleich:

$$d = 4,5 \text{ cm}: \quad \frac{1,964746542_s}{2,01666667_s} = 0,974754483$$

\Rightarrow relativer Fehler: 2,5345517 % (Mittelwert)

$$d = 3,0 \text{ cm}: \quad \frac{1,994716555_s}{2,003333333_s} = 0,995698779$$

\Rightarrow relativer Fehler: 0,43017203 % (Mittelwert)

Vergleicht man sowohl für $d = 4,5 \text{ cm}$ als auch für $d = 3,0 \text{ cm}$ den gemessenen Wert für die Schwingungs dauer im gekoppelten Zustand mit den dafür vorgesehenen erwarteten Wert, so stellt man fest, dass sie nahezu 41

gleich sind. Also ist hier die Theorie ohne Bedenken anwendbar. ✓

6) Zusammenfassung

Im Laufe dieses Versuches traten wir uns mit den Fundamentalschwingungen zweier gekoppelter Pendel und dem Kopplungseffekt der Schwingung auseinander. Während des Versuches wurden die Schwingungsdauern der Pendel gemessen und daraus die dazugehörigen Schwingungsfrequenzen berechnet. Diese Werte wurden in der Auswertung auch noch mit der Theorie verglichen. Dabei haben wir festgestellt, dass bei der Berechnung der Schwingungsdauern die Theorie nicht uneingeschränkt anwendbar ist. Es wurde außerdem die Erdverkleinerung mit Hilfe eines Pendels bestimmt. Bei der Auswertung und der Versuchsdurchführung wurde unser Wissen über Trägheitsmomente und Drehmomente vertieft und der Satz von Steiner angewandt. Supi :-)

Mir fällt nichts ein, was ich verbessern könnte.

- Gute Hervorhebung der Ergebnisse
 - Saubere Form, schlüssige Auswertung
 - Statistische Berechnung der Zeiten + Fehler.
 - Fragen zur Vorbereitung richtig
 - Ergebnisse wiedergabefähig
 - Sauberes, verständliches, vollständiges Protokoll
- Mehr als 6 mal messen wäre besser für Statistik

Ergebnis 10/20