

Fragen zur Vorbereitung

.1) $A=0 \rightsquigarrow$ freie Schwingung

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

Ansatz: $x(t) = B e^{\alpha t}$, $B \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ characteristisches Polynom

In (1)

$$\rightsquigarrow B e^{\alpha t} (\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \rightsquigarrow \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow x_h(t) = B_1 e^{\alpha_1 t} + B_2 e^{\alpha_2 t}$$

a) Kleine Dämpfung ($\gamma^2 < \omega_0^2$) \rightsquigarrow komplexe EW

$$\Rightarrow \alpha_{1,2} = -\gamma \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega \rightsquigarrow x(t) = e^{-\gamma t} \underbrace{(B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t})}_{\text{Dämpfung}}$$

$x_h(t)$ muss reell sein

$$x_h(t) = \operatorname{Re}(x(t)) + \operatorname{Im}(x(t)) = e^{-\gamma t} \left(\underbrace{(B_1 + B_2)}_{B_+} \cos \omega t + \underbrace{(B_1 - B_2)}_{B_-} \sin \omega t \right)$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\gamma t} (B_+ \cos \omega t + B_- \sin \omega t)$$

Bei kleiner Dämpfung schwingt das System mit exponentiell abnehmender Amplitude. Dabei ist ω_0 die Eigenfrequenz des Systems und ω die Schwingfrequenz.

Abweichung wird durch die Dämpfung bestimmt $\rightsquigarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

b) Aperiodischer Grenzfall ($\gamma^2 = \omega_0^2$) \rightsquigarrow reelle EW

$\Rightarrow \alpha_{1,2} = -\gamma$ \rightsquigarrow Lösungen sind entartet \rightsquigarrow Variation der Konstanten

$$\Rightarrow x_h(t) = B(t) e^{-\gamma t} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{x}_h(t) = (\dot{B}(t) - \gamma B(t)) e^{-\gamma t} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \ddot{x}_h(t) = (\ddot{B}(t) - 2\gamma\dot{B}(t) + \gamma^2 B(t)) e^{-\gamma t}$$

$$\xrightarrow{\text{In (1)}} \ddot{B}(t) - 2\gamma\dot{B}(t) + \gamma^2 B(t) + 2\gamma(\dot{B}(t) - \gamma B(t)) + \omega_0^2 B(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{B}(t) - B(t) \left(\frac{=\!0}{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) = 0 \rightsquigarrow \ddot{B}(t) = 0 \rightsquigarrow B(t) = (B_1 + B_2 t)$$

$$\Rightarrow x_h(t) = (B_1 + B_2 t) e^{-\gamma t}$$

Hier liegt die Besonderheit, dass die Amplitude des Systems streng genommen nicht mehr sondern exponentiell abflacht.

Eine Anwendung des aperiodischen Grenzfalls ist die eines Stoßdämpfers.

Bei Stoßdämpfer wird eine externe Kraft abgedämpft, damit die Auswirkung der Kraft auf das dämpfte System minimal sind.

c) Große Dämpfung ($\lambda^2 > \omega_0^2$) \rightarrow reelle EW

$$\Rightarrow \omega_{1/2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm \omega$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\lambda t} (B_1 e^{\omega t} + B_2 e^{-\omega t})$$

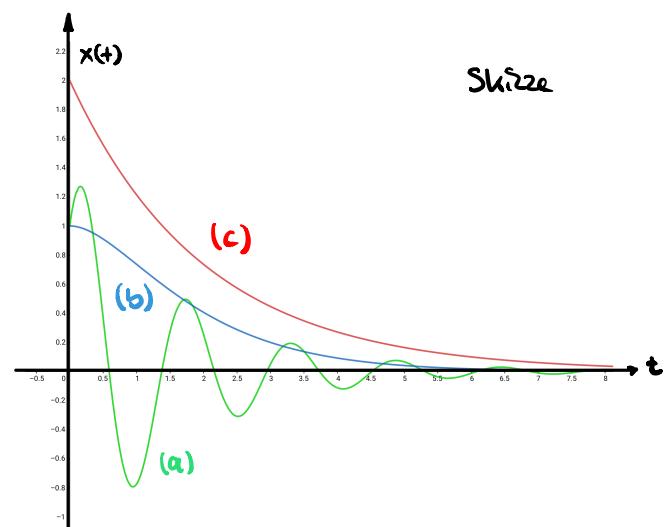
Hier erfolgt keine Schwingung mehr.

Nach anfänglicher Auslenkung des Systems kehrt es in seine Ruhelage zurück.

Der Unterschied zu dem aperiodischen

Umfallsfall liegt darin, dass der aperiodische

Umfallsfall als Schnellster Fall in die Ruhelage übergeht.



Skizze

Die Konstanten werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$.2) \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\omega_A t) = \text{Im}[A e^{i\omega_A t}] \quad (\text{II})$$

$$\text{Ansatz in der Angabe: } x_s(t) = x_0 \sin(\omega_A t + \delta) = \text{Im}[x_0 e^{i(\omega_A t + \delta)}]$$

$$\Rightarrow x_s(t) = x_0 e^{i(\omega_A t + \delta)} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{x}_s(t) = i\omega_A x_0 e^{i(\omega_A t + \delta)} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \ddot{x}_s(t) = -\omega_A^2 x_0 e^{i(\omega_A t + \delta)}$$

$$\xrightarrow{\text{in (II)}} x_0 e^{i(\omega_A t + \delta)} (\omega_0^2 + i2\lambda\omega_A - \omega_A^2) = A e^{i\omega_A t}$$

$$\Leftrightarrow x_0 e^{i\delta} (\omega_0^2 + i2\lambda\omega_A - \omega_A^2) = A$$

$$\Leftrightarrow x_0 e^{i\delta} \left(1 + i \frac{2\lambda}{\omega_0} \frac{\omega_A}{\omega_0} - \left(\frac{\omega_A}{\omega_0} \right)^2 \right) = \frac{A}{\omega_0^2} \Leftrightarrow x_0 e^{i\delta} = \frac{x_A}{(1 - \alpha^2 + i\alpha)} \frac{(1 - \alpha^2 - i\alpha)}{(1 - \alpha^2 - i\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow x_0 (\cos \delta + i \sin \delta) = \frac{x_A}{(1 - \alpha^2)^2 + \alpha^2} ((1 - \alpha^2) - i\alpha)$$

$$\Rightarrow x_0 = \left| \frac{x_A}{(1 - \alpha^2)^2 + \alpha^2} ((1 - \alpha^2) - i\alpha) \right| = \frac{x_A}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \alpha^2}} \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{x_A}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \alpha^2}}$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} = \frac{2\lambda\omega_A}{(\omega_A^2 - \omega_0^2)}$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{2\lambda\omega_A}{(\omega_A^2 - \omega_0^2)}$$

$$\Rightarrow x_s(t) = \text{Im}[x_0 \cdot e^{i(\omega_A t + \delta)}] \Rightarrow x_s(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_A^2)^2 + 4\lambda^2\omega_A^2}} \sin(\omega_A t + \arctan(\frac{2\lambda\omega_A}{(\omega_A^2 - \omega_0^2)}))$$

.3)

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \dot{x}(t) = \dot{x}_h(t) + \dot{x}_s(t) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \ddot{x}(t) = \ddot{x}_h(t) + \ddot{x}_s(t)$$

$$\xrightarrow{f_n(11)} \ddot{x}_h + \ddot{x}_s + 2\gamma(\dot{x}_h + \dot{x}_s) + \omega_0^2(x_h + x_s) = A \sin(\omega_A t)$$

$$\Leftrightarrow (\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h) + (\ddot{x}_s + 2\gamma\dot{x}_s + \omega_0^2 x_s - A \sin(\omega_A t)) = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \\ \ddot{x}_s + 2\gamma\dot{x}_s + \omega_0^2 x_s - A \sin(\omega_A t) = 0 \end{array} \right\} \text{Erfüllt durch Aufgabe (1), (2)}$$

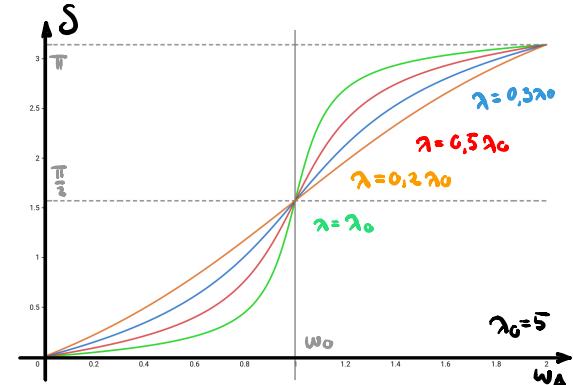
Es reicht in der Praxis nur $x_s(t)$ zu betrachten, da alle homogenen Lösungen von $x_h(t)$ mit $e^{-\gamma t}$ exponentiell in kurzer Zeit abklingen.

.4) Betrachte Grenzen von α : $\lim_{\omega_A \rightarrow 0} \alpha = 0$ $\lim_{\omega_A \rightarrow \infty} \alpha = \infty$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x_A}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \alpha^2 c^2}} = x_A$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_0 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x_A}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \alpha^2 c^2}} = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tan \delta = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha c}{1-\alpha^2} = 0 \quad \Rightarrow \delta = 0$$



$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tan \delta = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha c}{1-\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{c}{\alpha(\frac{1}{\alpha^2}-1)} = 0 \quad \Rightarrow \delta = \pi$$

Hier sieht man, dass wenn die Kreisfrequenz ω_A gegen Null geht kann das System dazu sofort auf die externe Schwingung reagieren und nimmt die maximale Amplitude an. Dabei schwingt das System gleichphasig mit der externen Schwingung

Wobei bei sehr hoher Kreisfrequenz kann das schwingende System nicht mehr auf die externe Schwingung antworten, wegen Trägheit und Reibung, und die Amplitude geht gegen Null. Dabei schwingt das System gegenphasig zur externen Schwingung

.5) $\omega_A = \omega_0 \rightsquigarrow \alpha = 1$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \delta = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \arctan \left(\frac{\alpha c}{1-\alpha^2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Maximum für x_0 :

$$\rightsquigarrow x_0(\alpha) = \frac{x_A}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \alpha^2 c^2}} \rightsquigarrow \frac{dx_0}{d\omega_A} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Erinnerung } \alpha = \frac{\omega_A}{\omega_0}$$

$$\frac{dx_0}{d\omega_A} = \frac{dx_0}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\omega_A} = x_A \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\frac{(1-\alpha^2)^2 + \alpha^2 c^2}{2}} \cdot (-2(1-\alpha^2) \cdot 2\alpha + 2\alpha c^2) \cdot \frac{1}{\omega_0} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow (2\alpha(1-\alpha^2) - \alpha c^2) = 0 \quad \Leftrightarrow -2\alpha \left(\alpha^2 + \frac{c^2}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \wedge \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{2}} \rightsquigarrow \omega_A = 0 \quad , \quad \omega_A = (\pm) \sqrt{1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}}$$

Der Fall $\alpha_1=0$ wurde in Aufgabe (4) schon diskutiert

$$\lim_{h \rightarrow 0} x'(a_2+h) > 0 \rightarrow \text{lokales Maximum bei } a_2 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{2}}$$

$$\Rightarrow x_{\max} = x(a_2) = \frac{x_A}{c \sqrt{1 - \frac{c^2}{4}}} \Rightarrow X_{\max} = \frac{A}{2\alpha \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

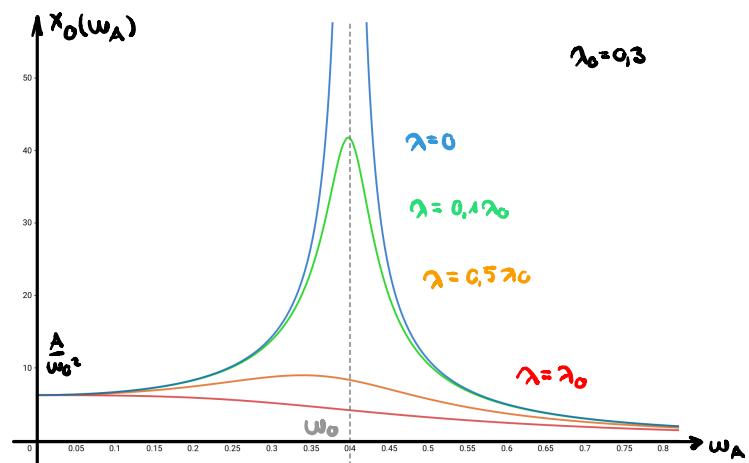
Die Dämpfung α verschiebt das Maximum je nach nach links oder rechts.
Bei Zunahme wird das Maximum der Amplitude immer kleiner, was zu erwarten war, da durch große Dämpfung die Schwingung des Systems nicht mehr gegeben ist.

.6) Resonanzüberhöhung

$$x_A = \frac{A}{\omega_0^2} \Rightarrow \frac{x_{\max}}{x_A} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

$$\alpha \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{x_{\max}}{x_A} \approx \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_{\max} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A}{2\alpha \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \infty$$



.7)

Mit dem x-+ Schreiber kann die Auslenkung eines Pendels aufgezeichnet werden. Die Schwingungen werden somit in Abhängigkeit der Zeit graphisch dargestellt.

Der Schreiber registriert eine Spannung, die von einem Digital-Analog-Wandler erzeugt wird. Der Wandler generiert eine zum Zählerstand der Lichtschranken proportionale Spannung. Der Zählerstand variiert je nach Wechsel der Markierungen der Zahnscheibe.

.8)

$$x_s(t) = \frac{Aw_A}{\sqrt{(w_0^2 - w_A^2)^2 + 4\alpha^2 w_A^2}} \cos(\omega_A t + \arctan\left(\frac{2\alpha\omega_A}{(w_A^2 - w_0^2)}\right)) \Rightarrow V_0 = \frac{Aw_A}{\sqrt{(w_0^2 - w_A^2)^2 + 4\alpha^2 w_A^2}}$$

$$\ddot{x}_s(t) = -\omega_A^2 x_s(t)$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{Aw_A^2}{\sqrt{(w_0^2 - w_A^2)^2 + 4\alpha^2 w_A^2}}$$

$$\lim_{w_A \rightarrow 0} V_0 = 0, \quad \lim_{w_A \rightarrow \infty} V_0 = \lim_{w_A \rightarrow \infty} \frac{A}{w_A \sqrt{\left(\left(\frac{w_0}{w_A}\right)^2 - 1\right)^2 + \frac{4\alpha^2}{w_A^2}}} = 0$$

$$\lim_{w_A \rightarrow 0} a_0 = 0, \quad \lim_{w_A \rightarrow \infty} a_0 = \lim_{w_A \rightarrow \infty} \frac{A}{\sqrt{\left(\left(\frac{w_0}{w_A}\right)^2 - 1\right)^2 + \frac{4\alpha^2}{w_A^2}}} = A$$

Maximas:

$$V_{\max} = w_A \cdot x_{\max} \Rightarrow V_{\max} = \frac{Aw_A}{2\alpha \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

$$, \quad a_{\max} = \omega_A^2 x_0 \Rightarrow$$

$$a_{\max} = \frac{Aw_A^2}{2\alpha \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

Auswertung

.1) Freie Schwingung

Anfangsbedingungen: $\varphi(0) = A_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow$ kleine Dämpfung 2.2 $\varphi(t) \approx A_0 \cos(\omega t) e^{-\gamma t}$

kleine Dämpfung \Rightarrow (2.1 a) Erinnerung: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$\approx \varphi(t) = e^{-\gamma t} (B_+ \cos \omega t + B_- \sin \omega t) \quad (I) \quad \approx \varphi(0) = B_+ = A_0$$

$$\approx \dot{\varphi}(t) = -\gamma \varphi(t) + \omega e^{-\gamma t} (-B_- \cos \omega t + B_+ \sin \omega t) \quad (II) \quad \approx \dot{\varphi}(0) = -\gamma A_0 + \omega B_- = 0 \Rightarrow B_- = \frac{\gamma A_0}{\omega}$$

$$B_-, B_+ \text{ in (I)} \Rightarrow \varphi(t) = e^{-\gamma t} \left(A_0 \cos \omega t + \frac{\gamma A_0}{\omega} \sin \omega t \right)$$

$$\text{Für } \gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0, \quad B_- = \frac{\gamma A_0}{\omega} \approx 0 \Rightarrow \varphi(t) \approx A_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\gamma t}$$

Vorbereitung und Checkliste

7.1.1) Ablesefehler Stoppuhr : 0,01 s ? \Rightarrow Fehler der Einzelmessung ?

Alles normal Berechnen und dann durch 50

$$\square \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow s_{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{T^2} \cdot s_T\right)^2}$$

Auswertung aus x-t Schreiber

\rightsquigarrow Viel gerechnet mit Computer \Rightarrow Vorbereitung

Fragen zur Vorbereitung Versuch Tor

3) Biegung zylinderförmiger Stab $\Rightarrow dA = r dr d\varphi$

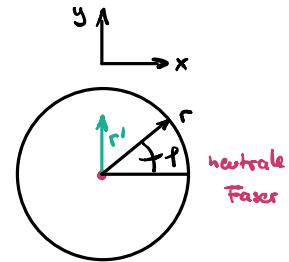
Berechnung von M_B :

$$\text{Gleichung (4)} \quad M_B = \frac{\alpha E}{l_0} \cdot I_B$$

$$I_B = \int_{\phi} r'^2 dA, \quad r' = \text{Abstand zur neutralen Faser}$$

Biegung nur in y-Richtung (Schwinge) $\Rightarrow r' = r \cdot \sin \varphi$

$$\Rightarrow I_B = \iint_{\phi} (r \sin \varphi)^2 r dr d\varphi = \iint_{\phi} r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi \stackrel{\text{sin } \varphi \text{ part. Int.}}{=} \frac{1}{4} R^4 \cdot \left(-\frac{\cos \varphi \sin \varphi + x}{2} \Big|_{0}^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{4} R^4 \quad \Rightarrow I_B = \frac{\pi}{4} R^4$$



$$\Rightarrow M_B = \frac{\alpha E}{l_0} \frac{\pi}{4} R^4$$

Berechnung von M_T

$$\text{Gleichung (7)} \quad M_T = \frac{\alpha G}{l} I_T$$

$$I_T = \int_{\phi} r'^2 dA, \quad r' \hat{=} \text{radialer Abstand von der Achse des Stabes}$$

$$I_T = \iint_{\phi} r'^2 r' dr d\varphi = 2\pi \int_0^R r'^3 dr = \frac{\pi}{2} R^4 \quad \Rightarrow I_T = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$\Rightarrow M_T = \frac{\alpha G}{l} \frac{\pi}{2} R^4$$

$$4) \quad J\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} = -\frac{D}{J}\dot{\alpha}$$

$$\text{Ansatz: } \alpha = C \cdot e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} = \lambda^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{D}{J} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i \sqrt{\frac{D}{J}}$$

$$\alpha_{\text{allg.}}(t) = C_1 \cdot e^{-i \sqrt{\frac{D}{J}} t} + C_2 e^{i \sqrt{\frac{D}{J}} t}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Nur an Realteil interessiert, $C_1 = A_1 + i B_1, \quad C_2 = B_1 - i A_2 \quad ; \quad A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$

$$\alpha(t) = \text{Re}(\alpha_{\text{allg.}}(t)) = (\underbrace{A_1 + B_1}_{D_1}) \cos(\sqrt{\frac{D}{J}} t) + (\underbrace{A_2 - B_2}_{D_2}) \sin(\sqrt{\frac{D}{J}} t)$$

$$\alpha(t) = D_1 \cos(\sqrt{\frac{D}{J}} t) \quad D_2 \sin(\sqrt{\frac{D}{J}} t) \quad ; \quad D_1, D_2 \in \mathbb{R}$$

$$\sin \text{ u. cos periodisch} \Rightarrow \sqrt{\frac{D}{J}} T = 2\pi \Rightarrow \frac{D}{J} T^2 = 4\pi^2 \Leftrightarrow J = \frac{D T^2}{4\pi^2}$$

Auswertung

$$7.1) \text{ Cálculo (ii)} : M_B = \frac{\pi \alpha E}{4L} R^4 \Leftrightarrow E = \frac{4L \cdot M_B}{\pi \alpha R^4}$$

Drehmoment greift an jeder Schneide S am Stab an \Rightarrow zwischen den Schneiden konstantes Biegemoment $M_B = M = Fa$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4L \cdot Fa}{\pi E R^4}$$

$$\text{Weiterhin gilt } \frac{L}{S} = \alpha \quad \nabla \alpha \text{ für Bogemaß}$$

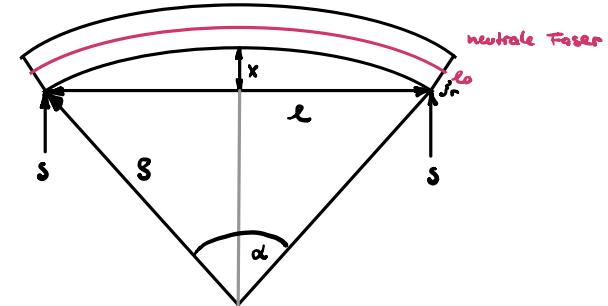
$$\Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{Fa}{\pi E R^4}$$

$$\text{Aus Skizze: } g^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (g - x)^2 = \frac{L^2}{4} + g^2 - 2gx + x^2$$

$$\Leftrightarrow 2gx = \frac{L^2}{4} + x^2 \stackrel{2g \gg x}{\approx} \frac{L^2}{4} \Leftrightarrow x \approx \frac{L^2}{8g}$$

$$\Rightarrow \frac{8x}{L^2} \approx \frac{4Fa}{\pi E R^4} \Leftrightarrow$$

$$x \approx \frac{L^2 Fa}{2\pi E R^4}$$



$$E = \frac{Fa \cdot L^2}{2\pi x R^4}$$

Fehlerrechnung:

$$E = \underbrace{\frac{m \cdot g}{2\pi}}_{\text{const.}} \cdot \frac{a \cdot L^2}{x R^4} = C \cdot \frac{a L^2}{x R^4}$$

$$\Rightarrow u_E = \left(\frac{\partial E}{\partial a} u_a \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial x} u_x \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L} u_L \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial R} u_R \right)^2$$

$$u_E = C \sqrt{\left[\left(\frac{L^2}{x R^4} \cdot u_a \right)^2 + \left(\frac{a L^2}{x^2 R^4} \cdot u_x \right)^2 + \left(\frac{2 a L}{x R^4} \cdot u_L \right)^2 + \left(\frac{4 a L^2}{x R^5} \cdot u_R \right)^2 \right]} \quad \text{Fehler im Protokol}$$

Fragen zur Vorbereitung Versuch CP

$$(3) \quad J\ddot{\varphi}_1 + D\dot{\varphi}_1 + D_h(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi}_1 = -\frac{D}{J}\dot{\varphi}_1 - \frac{D_h}{J}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (I)$$

$$J\ddot{\varphi}_2 + D\dot{\varphi}_2 + D_h(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi}_2 = -\frac{D}{J}\dot{\varphi}_2 - \frac{D_h}{J}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (II)$$

1) (I) + (II)

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \varphi_2) = -\frac{D}{J}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (III)$$

2) (I) - (II)

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{D}{J}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{2D_h}{J}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (IV)$$

3) Einführung von Hilfsgrößen $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\Psi = \varphi_1 - \varphi_2$ (Eigenmoden)

und definiere $\frac{D}{J} = \omega_a^2$, $\frac{D}{J} + \frac{2D_h}{J} = \omega_b^2$ (Eigenfrequenzen)

$$\rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \omega$$

$$\ddot{\Phi} = -\frac{D}{J}\dot{\Phi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\Phi} = -\omega_a^2 \Phi \quad (V)$$

$$\Rightarrow \ddot{\Psi} = -\frac{D}{J}\dot{\Psi} - \frac{2D_h}{J}\Psi = -\left(\frac{D}{J} + \frac{2D_h}{J}\right)\Psi \Rightarrow \ddot{\Psi} = -\omega_b^2 \Psi \quad (VI)$$

$$\Phi(t) = A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t) \quad (VII)$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = C \sin(\omega_b t) + D \cos(\omega_b t) \quad (VIII)$$

Durch Definition $\omega_a^2 = \frac{D}{J}$ u. $\omega_b^2 = \frac{D}{J} + \frac{2D_h}{J} = \frac{2D_h}{J} + \omega_a^2$ folgt, dass $\Psi(t)$ die größere der beiden Frequenzen hat.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (IX)$$

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{2D_h+D}} \quad (X)$$

4) Rücktransformieren

$$\varphi_1 = \frac{\Phi + \Psi}{2} = \frac{1}{2} (A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t) + C \sin(\omega_b t) + D \cos(\omega_b t)) \quad (XI)$$

$$\varphi_2 = \frac{\Phi - \Psi}{2} = \frac{1}{2} (A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t) - C \sin(\omega_b t) - D \cos(\omega_b t)) \quad (XII)$$

Je nach Wahl der Anfangsbedingungen lassen sich Gleichungen (IX) (X) dann noch zu einem Spezialfall vereinfachen.

4

Aus Angabe: $\omega_1 \approx \omega_2$
Überlagerung zweier sinus Schwingungen

Da mit $\omega_1 \approx \omega_2$ refn physikalisch ungefähr die selbe Schwingung beschrieben wird, haben auch beide Schwingungen die selbe Amplitude A_0

$$\Rightarrow \phi_1(t) = A_0 \sin(\omega_1 t) \quad (I)$$

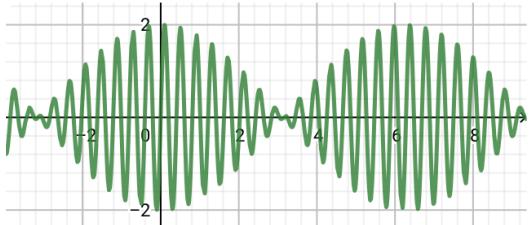
$$\phi_2(t) = A_0 \sin(\omega_2 t) \quad (II)$$

Daraus folgt die Summe $\Rightarrow \varphi(t) = \phi_1 + \phi_2 = A_0 \sin(\omega_1 t) + A_0 \sin(\omega_2 t) \quad (III)$ Quelle?

Durch die trigonometrischen Umformung, $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$, lässt sich $\varphi(t)$ umschreiben zu

$$\varphi(t) = 2A_0 \sin(\omega_+ t) \cos(\omega_- t) \quad (IV)$$

$$\text{oben } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_+ \quad \text{u.} \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_-.$$



Diskussion Schwebung

Bei der Interferenz von zwei Schallwellen, deren Frequenz sich leicht unterscheidet, tritt ein interessantes Phänomen auf, das man **Schwebung** nennt. Solche Schwingungen werden beispielsweise durch die Schallwellen von zwei Stimmgabeln oder zwei Saiteninstrumenten mit fast, aber nicht genau gleicher Frequenz erzeugt. Dabei wird der Ton abwechselnd lauter und leiser. Die

(Tripler S. 491)

Schwebung bei gekoppelten Pendeln

Durch die richtige Wahl der Anfangsbedingung lässt sich aus (3.XI) u. (3.XII) eine Schwebung modellieren. Dabei wird ein Pendel ausgelenkt und das andere Pendel in der Ruhelage festgehalten.

$$\text{Anfangsbdg: } \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varphi_1(0) &= \frac{1}{2}(B+D) = 0 & \Rightarrow B = \varphi_0, D = -\varphi_0 \\ \varphi_2(0) &= \frac{1}{2}(B-D) = \varphi_0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{\varphi}_1(0) = \frac{1}{2}(\omega_a A + \omega_b C) = 0 \\ \dot{\varphi}_2(0) = \frac{1}{2}(\omega_a A - \omega_b C) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C = 0, A = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2} (\cos(\omega_a t) - \cos(\omega_b t)) \quad (V), \quad \varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2} (\cos(\omega_a t) + \cos(\omega_b t)) \quad (VI)$$

Verwendet man erneut trigonometrische Umformungen

$$1) \cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

$$2) \cos\alpha - \cos\beta = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

$$\text{und definiert } \omega_+ = \frac{\omega_a + \omega_b}{2} \quad \text{u.} \quad \omega_- = \frac{\omega_a - \omega_b}{2}$$

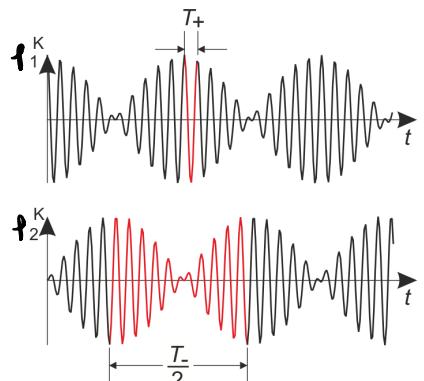
lässt sich (V) und (VI) zu zwei Schwingungen umschreiben (vgl. dazu (IV))

$$f_1^K(t) = 2\varphi_0 \sin(\omega_a t) \sin(\omega_b t) \quad (\text{VII}) \quad , \quad f_2^K(t) = 2\varphi_0 \cos(\omega_a t) \cos(\omega_b t) \quad (\text{VIII})$$

Für den Fall schwacher Kopplung (d.h. $\omega_a \approx \omega_b$) sind die Faktoren $\sin \omega_a t$ und $\cos \omega_b t$ langsam mit der Zeit t veränderlich, da die Kreisfrequenz ω_- klein ist; dagegen sind die Faktoren $\sin \omega_a t$ und $\cos \omega_b t$ wesentlich schneller mit der Zeit t veränderlich. Man kann deshalb $f_1^K(t)$ und $f_2^K(t)$ als zeitlich schnell ablaufende Schwingungen betrachten, deren Amplituden $\varphi_0 \sin \omega_- t$ und $\varphi_0 \cos \omega_- t$

zeitlich langsam veränderlich sind und auch negativ werden!]

(EUS S. 56 f.)



(EKS S. 57)

$$\text{Schwingungsdauer} \quad T_s = T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = \frac{4\pi}{\omega_a + \omega_b} \xrightarrow{(3.1x)} T_s = \frac{2T_a T_b}{T_b + T_a}$$

$$\text{Schwingungsdauer} \quad \tau = \frac{2\pi}{2\omega_-} = \frac{4\pi}{2\omega_a - \omega_b} \xrightarrow{(3.1x)} \tau = \frac{T_a T_b}{T_b - T_a}$$

Verbesserung CP → einfach alles am Schloss durch 20 ♂

Fragen zur Vorbereitung Versuch Ies

1) Grobe Fehler:

- Irrtümer beim messen oder notieren der Messwerte
 - Nichtberücksichtigen von größeren äußeren Störeinflüssen
 - Versagen des Messgerätes
- ⇒ grundsätzlich zu vermeiden, Bei groben Fehler mit Kommentar ausschließen

Systematische Fehler

- Ursache im Messgerät, Messverfahren oder im Beobachter
- reproduzierbar im Vorzeichen und Betrag oft quantitativ erfasst werden
- verschließt wahren Wert der Messgröße

Bsp: Eichfehler der Messgeräte, Äußere Einflüsse von Temperatur oder Luftdruck, Beobachtungsfehler wie die Parallaxe beim Ablesen der Skala

- Systematischer Restfehler immer vorhanden der von Messgerät bedingt ist

Zufällige Fehler (im jedem Experiment vorhanden)

- messtechnisch nicht erfassbare und nicht beeinflussbare Änderungen von:

- Messgeräten
- Messabläufen
- Umwelteinflüssen
- subjektive Einflüsse des Beobachters

- streut wahren Wert der Messgröße

⇒ zufällige Fehler unterliegen Gesetzen der Statistik → Einfluss auf Messergebnis bestimmbar

4)

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{Gl.(10)}$$

Gauß-Verteilung normiert und sym. ⇒ $\phi(z) + \phi(-z) = 1$

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{-z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \stackrel{(10)}{=} \phi(z) - \phi(-z) = 2\phi(z) - 1$$

Mittelwert liegt auf x-Achse bei $0 \rightarrow \bar{x}=0$ u. $\sigma^2=1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(\bar{x}+k\sigma) &= P(k) = 2\phi(k)-1 = 2\phi(1)-1 \approx 2(0,8413)-1 \approx 0,6826 \\ &\stackrel{(TW)}{=} 2\phi(2)-1 \approx 2(0,9773)-1 \approx 0,9546 \\ &2\phi(3)-1 \approx 2(0,9987)-1 \approx 0,9974 \\ &2\phi(4)-1 \approx 2-1 \approx 1,0 \end{aligned}$$

6) Die Klasse eines Histogramms wird stets vollenweise gleich 1 gesetzt ⇒ $\Delta x=1$

Damit $\sum_{j=1}^m h_j = 1$ erfüllt ist, da ein Histogramm lauter Rechtecke sind und h_j nach y-Achse aufträgt wird bei jedem Rechteck nur die Werte aufaddiert ⇒ $2h_j = 1$

Verbesserung f. Mes

Messprotokol

- Zeit t_{ins} , Zeit t/s , Zeit t (s)
- Arbeitsplatz
- Probekörper und Zeitgeber \rightarrow Nummer
- $\frac{\text{restfehler}}{2} \approx \text{ablesefehler}$ Faustformel Hinterfragen!

Auswertung

immer

- Messergebnisse Diskutieren \rightarrow Literaturwert \checkmark gut

- Liegtungswerte können schwanken

- Erweiterungen diskutieren \checkmark

- Wertetabelle \checkmark Werte angeben $\rightarrow 0,0155 \rightarrow 0,015$

Grenzen bei 1,955 - 1,925

↑ dann liegen Werte seit der Genauigkeit
wie an einer Stelle?

muss sich fehler
dafür sorgen

Zwilergebnisse immer genau angeben \rightarrow Messergebnis runden

Fehlerfortpflanzung

sehr wichtig

Nur mehr wie zwei Stellen?

$$dV = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial dV}\right)^2} \Rightarrow \text{Volumen muss genauer gemessen werden!}$$

zählen
nicht
einsetzen

$$dV = \bar{s} \left(b^4 + 4b^2h^2 + \frac{\pi^2 d^4}{12} + \frac{\pi^2}{4} d^2 t^2 \right)^{1/2} \Rightarrow \text{Breitemmung genauer einstellen danach Höhenmessung}$$