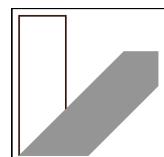


SS2010

PPA1

Torsion Biegung

Markus Sesselmann - Dominik Sieder



it's CREATIVE SCHOOL.

28

D

**kariert
Doppelrand**

Protokollheft

Markus Lesselmann, Dominik Gießer

Versuch Tor

Gruppe 33

www.Paperzone.de

DIN A4, feines holzfreies Schreibpapier tintenfest - 80g/m² chlorfrei gebleicht, **32 Blatt**

Versuch Trägheitsmomente, Torsion und Biegung

Teilnehmer : Dominik Lieder, Markus Lesselmann

Datum : 28.05.2010

Titel des Versuchs: Trägheitsmomente, Torsion und Biegung

Gruppe : 33

Versuchsort : 2. Platz vom Fenster (Fensterplatz, bei Biegung d. Stabes)

Gliederung:

- | | |
|----------------------------|-------------|
| 1) Einleitung | S.2 |
| 2) Fragen zur Vorbereitung | S.3 - S.7 |
| 3) Versuchsaufbau | S.8 - S.10 |
| 4) Messprotokoll | S.11 - S.18 |
| 5) Auswertung | S.19 - S.33 |
| 6) Zusammenfassung | S.40 ✓ |

1) Einleitung

Bei dem Versuch Trägheitsmomente, Torsion und Biegung geht es darum, die Verformung von Materialien unter der Einwirkung von Kräften kennen zu lernen, die durch einige wenige Materialparameter beschrieben werden. Hierbei werden Grundkenntnisse der Kontinuumsmechanik (Elastizitätslehre), so wie die richtige Handhabung von Messgeräten vermittelt.

Durch diesen Versuch soll der Zusammenhang zwischen Dehnung und Biegung, sowie Scherung und Torsion klar werden. Außerdem soll das Elastizitätsmodul und das Schubmodul für ein bestimmtes Material gemessen und das Trägheitsmoment eines beliebigen starren Körpers um eine beliebige Rotationsachse durch Drehschwingung ermittelt werden.

Elastizitätsmodul und Schubmodul werden nicht gemessen → Es werden Größen gemessen s.d. obige Module bestimmt werden können!

2) Fragen zur Vorbereitung

2.1 Das Hookesche Gesetz

Übt man auf einen festen Körper eine Kraft aus, so verändert er seine Gestalt. Kehrt der Körper nach Verschwinden dieser Kraft in seinen Ursprungszustand zurück, handelt es sich um eine elastische Verformung. Die meisten Körper sind nur bis zu einem gewissen Maximalwert elastisch. Diese Grenze nennt man Elastizitätsgrenze. In dem Bereich der elastischen Verformung gibt es anfangs einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Dieser Zusammenhang gilt nur bis zu einer Proportionalitätsgrenze, die vom Material abhängt. Diese lineare Relation ist das Hookesche Gesetz. Nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze gilt das Hookesche Gesetz nicht mehr, da der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung dort nicht mehr linear ist. Das Hookesche Gesetz findet bei der Dehnung eines Stabes Anwendung.

⇒ grundlegende Bedeutung für unseren Versuch

2.2 Dimensionen von E, G und μ

- Das Elastizitätsmodul E hat die Einheit einer mechanischen Spannung: $[E] = \frac{N}{m^2}$ (Pascal)
- Auch das Schubmodul G besitzt die Einheit einer Spannung: $[G] = \frac{N}{m^2}$ (Pascal)
- Die Querkontraktionszahl μ hat keine Einheit
→ dimensionslose Größen
- Einschränkung für μ :

$$\Delta V = (d - \Delta d)^2 (l + \Delta l) - d^2 l \approx d^2 \cdot \Delta l - 2 \Delta d \cdot l \cdot d$$

$$\text{num: } \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{d^2 l} \propto \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta l}{l} \left(1 - 2 \frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{l}{\Delta d}\right) = \epsilon (1 - 2\mu)$$

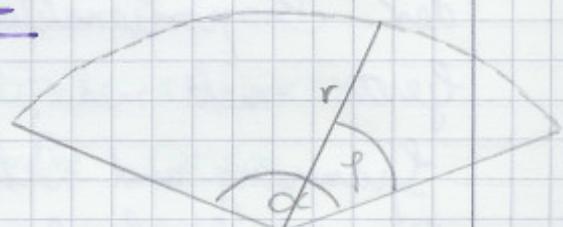
Da nun $\Delta V \geq 0$ angenommen wird, folgt für μ :

$$\mu \leq 0,5 \quad \checkmark \quad + \quad \mu > 0 \quad (-1/4)$$

2.3 Berechnung von M_B und M_T

Gleichung (4)

$$M_B = \frac{\alpha E}{l_0} = \int_{\phi} r'^2 dA = \frac{\alpha E}{l_0} \cdot I_B$$



$$\Rightarrow I_B = \int_0^{2\pi} \int_0^r (r' \sin \varphi)^2 r' dr' d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^r r'^3 (\sin \varphi)^2 dr' d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \int_0^{2\pi} (\sin \varphi)^2 d\varphi \stackrel{*}{=} \frac{1}{4} r^4 \left[\frac{1}{2} 2\pi - \frac{1}{4} \sin(4\pi) - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \sin(0) \right]$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \cdot \pi = \boxed{\frac{r^4}{4} \pi} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{\alpha E}{l_0} \underline{\underline{\frac{r^4}{4} \pi}} \quad \checkmark$$

*Bronstein
S. 1091
Nr. 275

Gleichung (7)

$$M_T = \frac{\alpha G}{e} \int_{\phi} r'^2 dA' = \frac{\alpha G}{e} \cdot I_T$$

$$\Rightarrow I_T = \int_{\phi} r'^2 dA'$$

$$I_T = \int_0^{2\pi} \int_0^r r'^3 dr d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4 dr = \frac{2\pi}{4} r^4 = \boxed{\frac{r^4}{2} \cdot \pi}$$

$$\Rightarrow M_T = \underline{\underline{\frac{\alpha G}{e} \cdot \frac{1}{2} \pi r^4}}$$

2.4 Lösung von $\ddot{\alpha} + D\alpha = 0$:

$$\ddot{\alpha} + D\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{D}{J}\alpha = 0$$

Ansatz: $\alpha = k e^{\lambda t}$ $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow k \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{Dk}{J} e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{D}{J} = 0$$

$$\ddot{\alpha} = k \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{\alpha} = k \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\frac{D}{J}} = \pm i \sqrt{\frac{D}{J}}$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = k e^{i \sqrt{\frac{D}{J}} t} + k e^{-i \sqrt{\frac{D}{J}} t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}} \cdot t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{J}} \cdot t\right)}}, C_1 \text{ und } C_2 \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt{\frac{D}{J}} T = 2\pi \quad (\sin \text{ und } \cos \text{ } 2\pi \text{-periodisch})$$

$$\Rightarrow \frac{D}{J} \cdot T^2 = 4\pi^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{DT^2}{4\pi^2} = J}$$

2.5 Vergleich der Biegemomente eines Stahlrohrs und eines zylindrischen Stahlstabes gleicher Länge und gleichen Gewichts miteinander

Wenn ein Rohr und eine massive Stange (Länge jeweils l_0) die gleiche Masse haben, so muss folglich das Rohr einen größeren Radius besitzen (im Vergleich zur Stange):

$$r_R > r_S$$

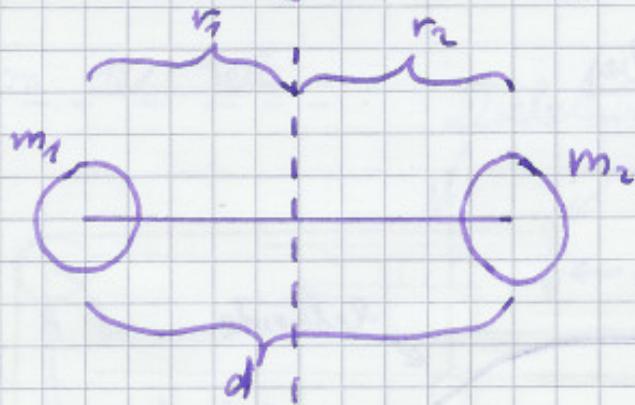
Wie in Aufgabe 2.3 geregelt, gilt für das Biegemoment:

$$M_B = \underbrace{\frac{\alpha E}{l_0} \cdot \frac{\pi}{4} r^4}_{=: c} = c r^4.$$

Es folgt somit sofort: $M_{B_R} = c r_R^4 > c r_S^4 = M_{B_S}$ ✓
⇒ Das Biegemoment des Rohres ist größer.

Das ist auch anschaulich verstehtbar: Beim Rohr sind die meisten Schichten weiter von der neutralen Faser entfernt als bei der Stange. Um das Rohr um ein gewisses Maß zu biegen, müssen die äußeren Schichten am meisten gedehnt bzw. gestaucht werden. Das gleiche gilt für die Stange, dort sind jedoch die Schichten ungerichtet näher an der neutralen Faser, d.h. sie müssen nicht so stark gedehnt / gestaucht werden. D.h. zum Verbiegen muss beim Rohr mehr Kraft als bei der Stange aufgewendet werden, weshalb das Biegemoment des Rohres größer ist. ✓

2.6 Berechnung der Trägheitsmomente



$$J = \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$m = m_1 = m_2, r_1 = r_2 = r$$

$$\Rightarrow J = 2mr^2 = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = m \frac{d^2}{4} = \frac{1}{2}md^2 \text{ für Achse senkrecht auf Verbindungsleitung}$$

2. Achse: Verbindungsleitung

$\Rightarrow J = 0$, ✓ da die Massenpunkte jeweils auf der Drehachse liegen. Die Drehachse bestimmt den Wert für J .

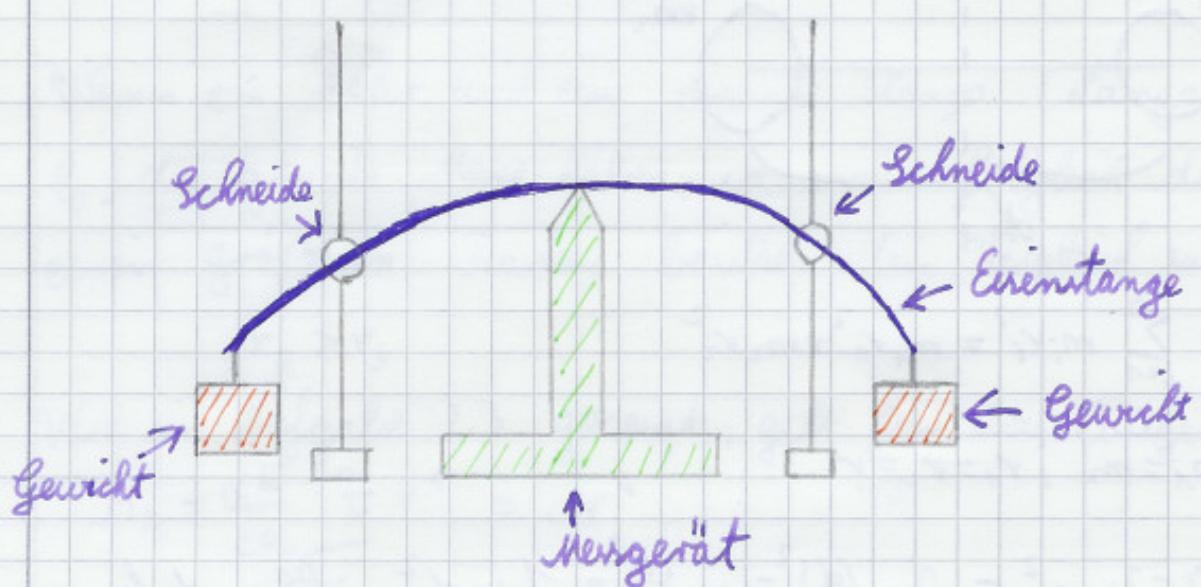
Aus dem Trägheitsmoment und der Umlaufdauer ist das Drehmoment, die Rotationsenergie, Drehimpuls berechenbar. Des Weiteren kann man auch eine Aussage über das Drehmoment und auf eine eventuell einwirkende Kraft machen. ✓ Stimmt

Allerdings: Folgerung:

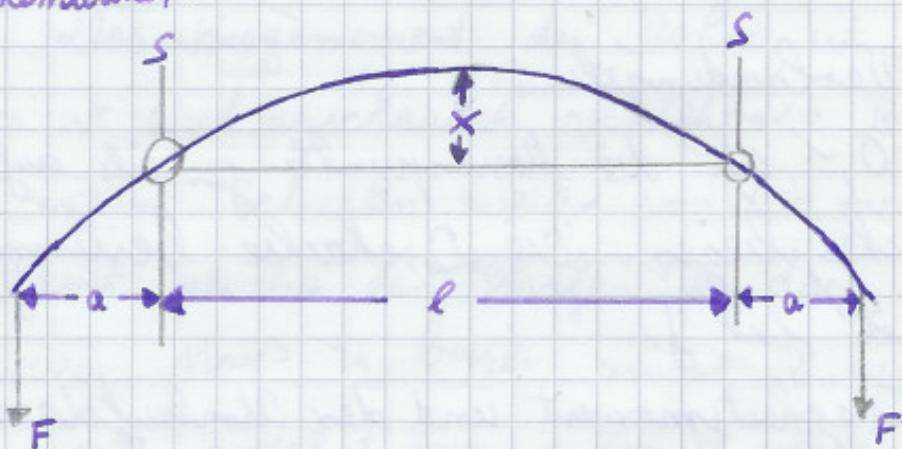
- Rotationsachse entscheidend für Trägheitsmoment
- Rotation um Achse 2 möglich?

3) Versuchsaufbau

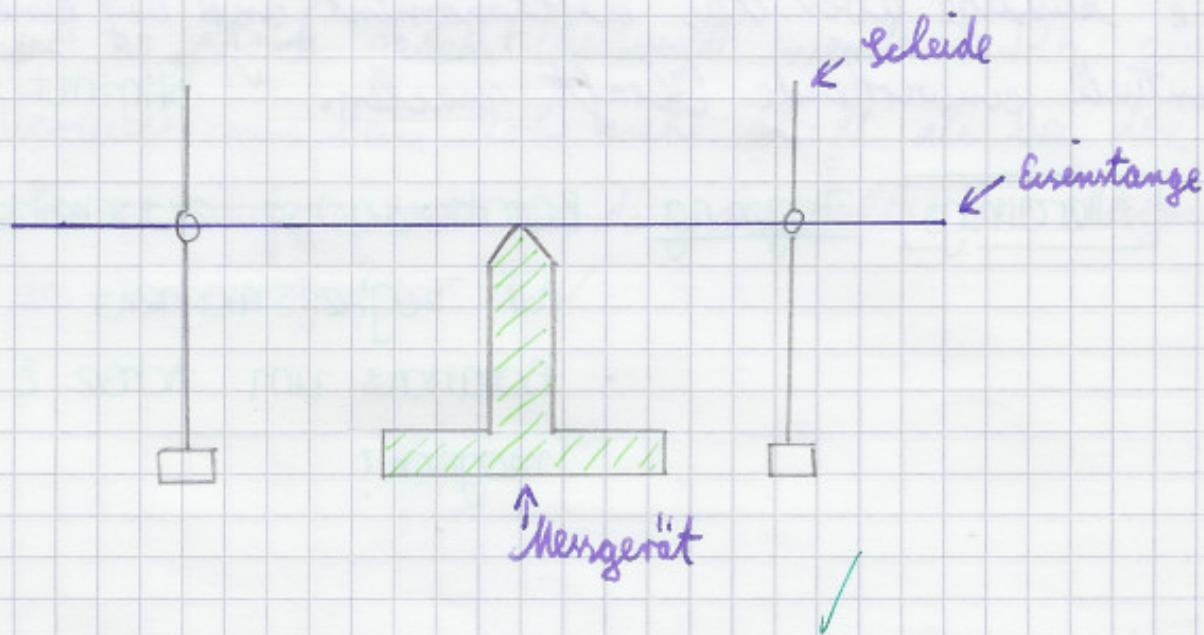
3.1 Biegung eines Stabes



Schematisch:



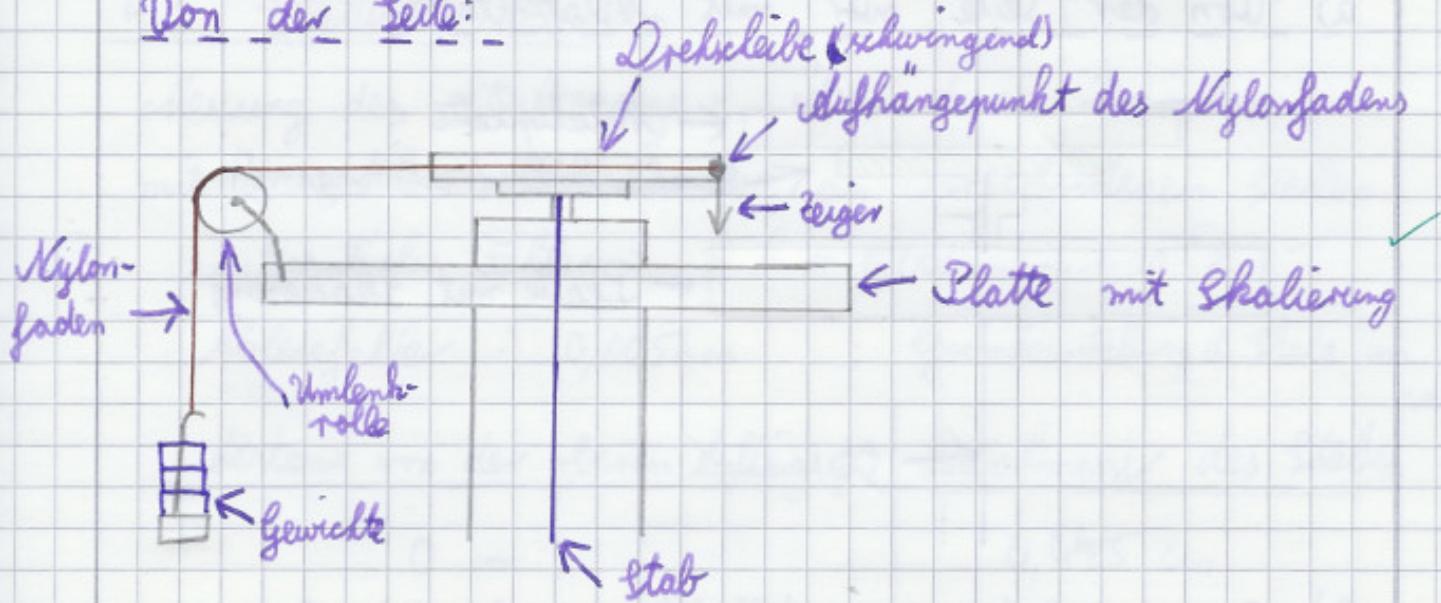
vorher (Versuchsbeginn):



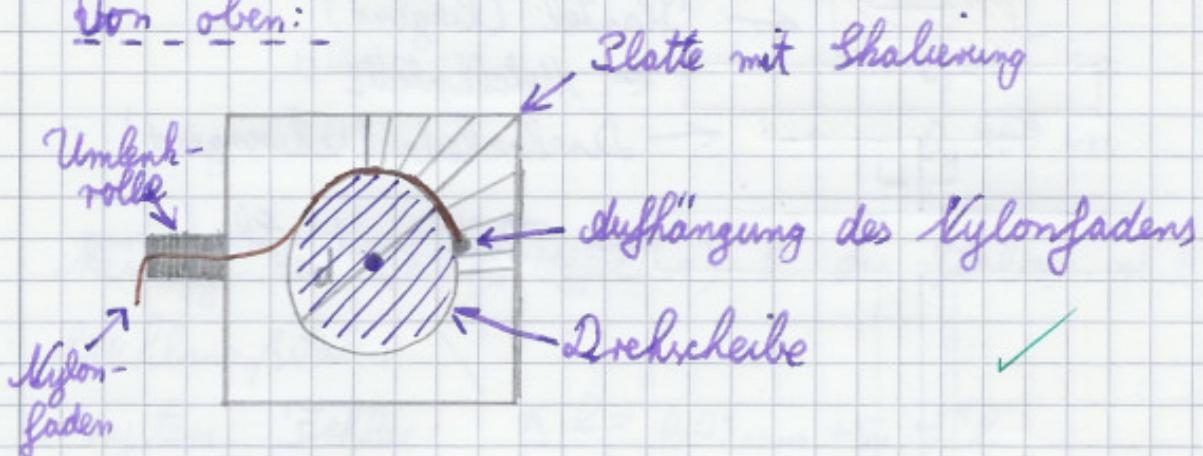
Versuchsort: Fensterplatz

3.2 Statische Torsion

Von der Seite:



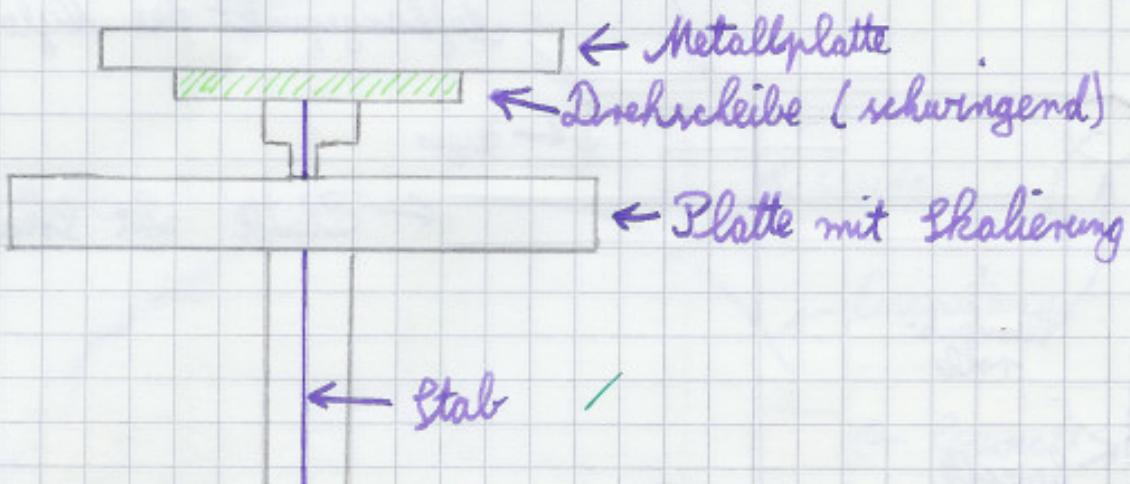
Von oben:



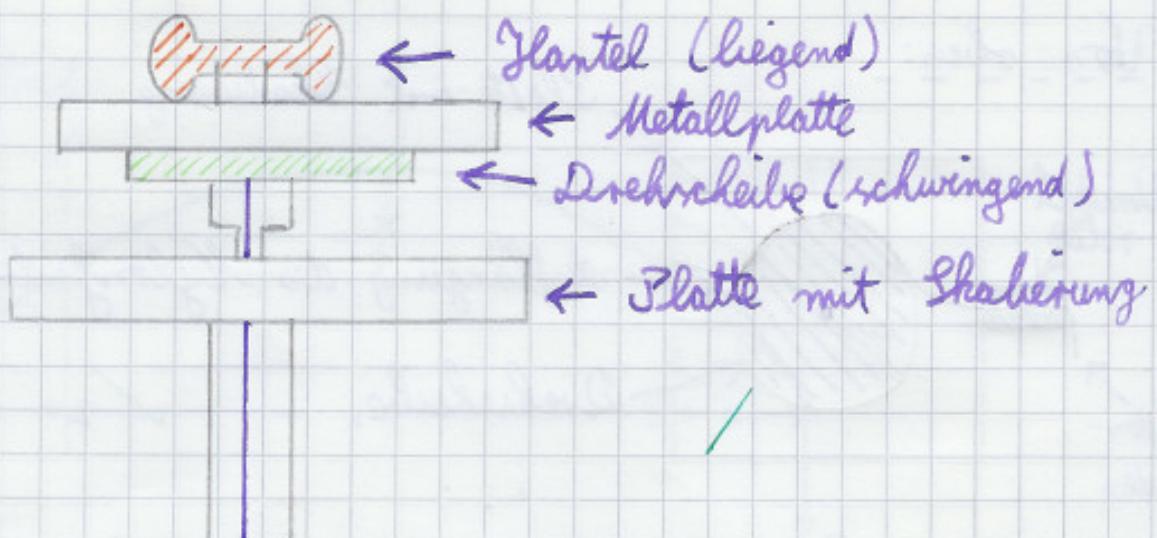
Versuchsplatz: 2. Platz vom Fenster aus

3.3 Drehschwingungen

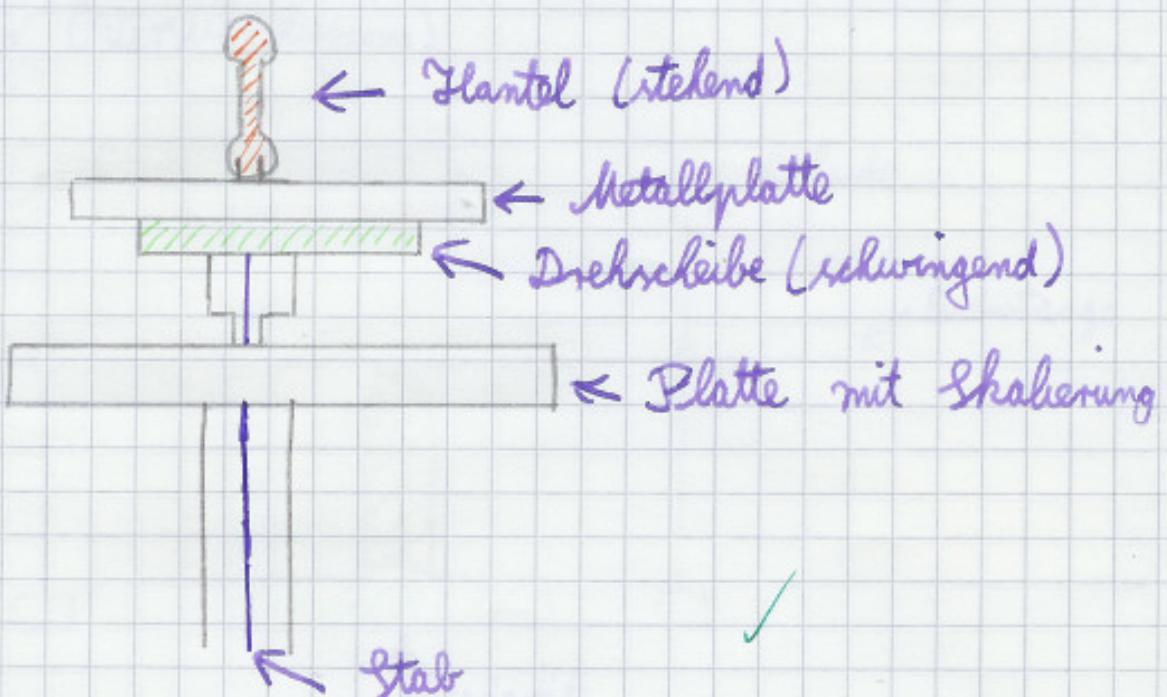
a) Von der Seite nur mit Metallplatte:



b) Von der Seite mit Metallplatte und Hantel liegend:



c) Von der Seite mit Metallplatte und Hantel stehend:



Versuchsort: 2. Platz vom Fenster aus

4) Messprotokoll

4.1 Statische Torsion

Messung des Stabradius r über deren Durchmesser mit der Mikrometerschraube an verschiedenen Stellen.

systematischer Fehler: $\Delta l = 0,005 \text{ mm} + 1 \cdot 10^{-5} l$ ✓

Ablerefehler: $0,005 \text{ mm}$; Grundeinstellung d. Skala um $0,47 \text{ mm}$ verschoben

Abstand von der oberen Aufhängung | Durchmesser des Stabes

| | | |
|-------|----------|-------------------------------|
| 0 cm | 0,475 cm | Längen- messer: Dominik |
| 20 cm | 0,460 cm | |
| 40 cm | 0,460 cm | |
| 60 cm | 0,465 cm | |
| 90 cm | 0,460 cm | |

Messung der Länge (effektive) l des Stabes mit dem Stahlmaßstab:

system. Fehler: $\Delta l = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} l$

Ablerefehler: $0,025 \text{ cm}$

$l = 30,3 \text{ cm}$

Längenmesser: Dominik ✓

Messung des Durchmessers d der Scheibe mit dem Stahlmaßstab:

system. Fehler: $\Delta l = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} l$

Ablerefehler: $0,025 \text{ cm}$

Längenmesser: Dominik

$d = 21,90 \text{ cm}$ ✓ → Ist das der effektive Durchmesser, bzw. Ry/2 effektiver Radius?

Messung der Dicke l_0 der Scheibe mit der Mikrometerschraube:

system. Fehler: $\Delta l = 0,005 \text{ mm} + 1 \cdot 10^{-5} l$

Ablerefehler: $0,005 \text{ mm}$

Grundeinstellung d. Skala um 0,47mm verschoben

$$D = 1,512 \text{ cm}$$

Längenmesser: Dominik

Messung der Starkeinwinkel α bei Durchdringung des Stabes durch Gewichte zwischen 100g und 1000g. Hierbei wird der Winkel von einer Platte, auf der eine Skala gehalten wird, abgelesen. Ablesefehler: 0,5 grad

| Gewichte in g | <u>Durchdruckwinkel α in grad</u> |
|---------------|-----------------------------------------------------|
| 50 | 0 (Nullpunkt) |
| 100 | 1,5 |
| 150 | 3,0 |
| 200 | 4,5 |
| 250 | 6,0 |
| 300 | 7,5 |
| 350 | 9,2 |
| 400 | 10,6 |
| 450 | 12,5 |
| 500 | 14,0 |
| 550 | 15,5 |
| 600 | 17,5 |
| 650 | 19,0 |
| 700 | 20,5 |
| 750 | 22,0 |
| 800 | 24,0 |
| 850 | 25,4 |
| 900 | 27,3 |
| 950 | 29,0 |
| 1000 | 30,4 |

Gradmeier : Markus

4.2 Biegung eines Stabes

Messung der benötigten ^{großen} Werte:

- durch Stahlmaßstab:

system. Fehler: $\Delta l = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} l$

Ablesefehler: $0,025 \text{ cm}$ ✓

- Abstand der Schneiden $l = 45,80 \text{ cm}$ Längenmesser: Dominik

- Zur Bestimmung von dem Abstand a der Schneide zum Angriffspunkt der Kraft F :

Der Stab wird auf der einen Seite so weit wie möglich herausgerogen. Auf dieser Seite wird dann der Abstand von der Schneide zum Messingkopf des Stabes gemessen und dieser Wert durch zwei geteilt.

$$2a = 48,60 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow a = 24,30 \text{ cm}$$

Längenmesser: Dominik

- durch Mikrometerschraube:

system. Fehler: $\Delta l = 0,005 \text{ mm} + 1 \cdot 10^{-5} l$

Nullstellung
MM-Schraube wie
vorne

Ablesefehler: $0,005 \text{ mm}$

- Durchmesser $d = 2r$ des Stabes :

Längenmesser: Dominik

| Nr. | Abstand vom linken Stabende | $d = 2r$ |
|-----|-----------------------------|----------|
| 1) | 0 cm | 0,460 cm |
| 2) | 12,15 cm | 0,455 cm |
| 3) | 24,30 cm | 0,455 cm |
| 4) | 35,00 cm | 0,470 cm |
| 5) | 47,50 cm | 0,455 cm |
| 6) | 65,00 cm | 0,460 cm |
| 7) | 80,00 cm | 0,460 cm |

Messung der maximalen Durchbiegung des Stabes mit Hilfe der Koniusschraube bei vier verschiedenen Drehrichtungen des Stabes.

$$\Delta \text{Längenfehler} = 0,05 \text{ mm}$$

$$\text{Bereitfehler: } \Delta x = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot x_K$$

links.

| Drehrichtung der Schraube am Messungskopf | Durchbiegung | * | ✓ |
|-------------------------------------------------|--------------|---------|---|
| nach oben (Nullpunkt bei 3,4 mm) | 7,4 mm | 10,8 mm | |
| im Richtung der Tür (Nullpunkt bei 2,1 mm) | 8,4 mm | 10,5 mm | |
| nach unten (Nullpunkt bei 1,0 mm) | 7,6 mm | 8,6 mm | |
| in Richtung des Fensters (Nullpunkt bei 1,6 mm) | 7,5 mm | 9,1 mm | |

Längenmeister: Dominik

Masse m der Gewichte 292 g

* Anreize der Koniusschraube für die Durchbiegung

Zur Durchführung der Durchbiegung des Stabes:

Die vier verschiedenen Merlagen des Stabes einzustellen gestalte sich als schwierig, da der Stab nur in einer Position (Schraube nach oben) ohne Einwirkung der Experimentatoren verharnte. Um nun die drei anderen Lagen messen zu können, wurden die Stabenden von den Experimentatoren gehalten, ohne dabei möglichst die Durchbiegung zu verschärfen. ✓

wo genau befinden sich die Schneiden im Versuchsaufbau

4.3 Drehschwingungen

Messung der Metallplatte mit Stahlmaßstab:

system. Fehler: $\Delta l = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot l$

Ablesefehler: 0,025 cm

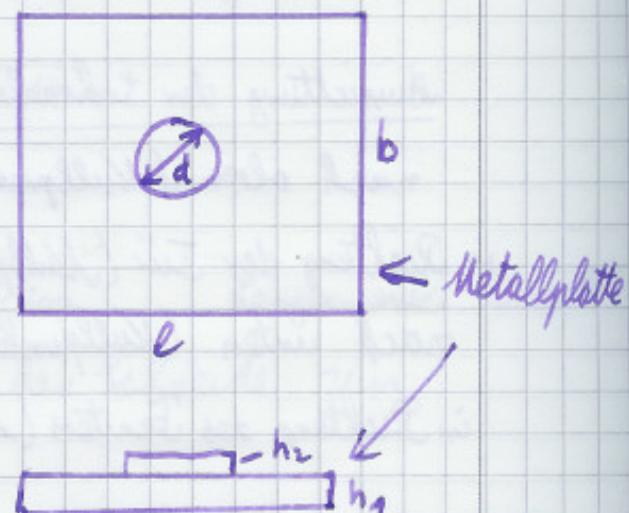
Länge $l = 30,10 \text{ cm}$

Breite $b = 29,80 \text{ cm}$

Durchmesser $d = 5,00 \text{ cm}$

Höhe $h_1 = 1,00 \text{ cm}$

Höhe $h_2 = 1,00 \text{ cm}$



a) nur mit Metallplatte

Hier wird die ausgemessene Metallplatte auf der Drehscheibe mit Schrauben befestigt. Wir senken die Drehscheibe vom Ruhpunkt aus und messen mit der Stoppuhr 20 Schwingungen.

Stoppuhr: System. Fehler: $\Delta t = 0,7 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$

Ablesefehler: 0,05 s

| Nr. | Schwingungsdauer t in s |
|-----|---------------------------|
| 1) | 30,60 |
| 2) | 30,60 |
| 3) | 30,60 |
| 4) | 30,60 |
| 5) | 30,50 |
| 6) | 30,60 |
| 7) | 30,50 |
| 8) | 30,60 |

✓

Zeitmesser: Dominik

b) Hantel auf Metallplatte liegend

Hier wird zusätzlich zum Aufbau von 4.3 a) eine liegende Hantel auf die Metallplatte mit Schrauben befestigt. Ebenfalls werden 20 Schwingungen mit der Stoppuhr nach einer Durchschlagung von der Ruhelage gemessen.

Stoppuhr: system. Fehler: $\Delta T = 0,2s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot T$

abtastfehler: 0,05s

| Nr. | Schwingungsduauer T in s |
|-----|----------------------------|
| 1) | 34,60 |
| 2) | 34,70 |
| 3) | 34,60 |
| 4) | 34,50 |
| 5) | 34,60 |
| 6) | 34,50 |
| 7) | 34,60 |
| 8) | 34,70 ✓ |

Zeitmesser: Dominik

c) Hantel auf Metallplatte stehend

Hier ist der Versuchsaufbau ähnlich von 4.3 b), nur dass die Hantel nicht liegend, sondern stehend auf die Metallplatte mit Schrauben befestigt wird.

Ebenfalls werden 20 Schwingungen mit der Stoppuhr nach einer Durchschlagung von der Ruhelage gemessen.

Stoppuhr: system. Fehler: $\Delta T = 0,2s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot T$

abtastfehler: 0,05s

| Nr. | Schwingungsdauer t in s |
|-----|-------------------------|
| 1) | 31,00 |
| 2) | 31,10 |
| 3) | 31,00 |
| 4) | 31,20 |
| 5) | 31,10 |
| 6) | 31,00 |
| 7) | 31,10 |
| 8) | 31,10 ✓ |

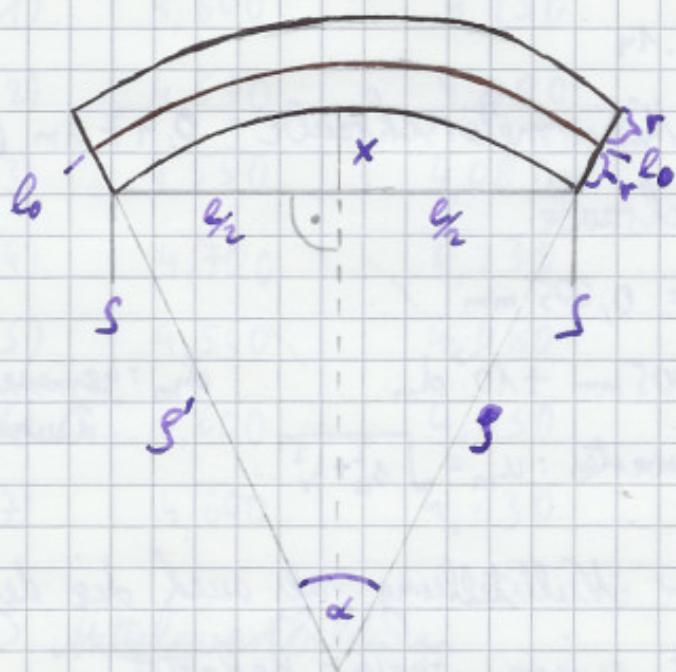
Zeitmesser Dominik

18. Mai 2010



5) Auswertung

5.1 Bestimmung von E



Formel von Seite 4:

$$M_B = \frac{\pi}{4} \alpha E r^4 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{4 M_B l_0}{\pi \alpha r^4}$$

Am Stab greift an jeder Schneide S das Drehmoment $M = Fa$ an, so dass zwischen den Schneiden überall das konstante Biegemoment $M_B = M = Fa$ herrscht.

$$\Rightarrow E = \frac{4 Fa l_0}{\pi \alpha r^4}$$

$$\text{Es gilt: } g\alpha = l_0 \Rightarrow \frac{l_0}{\alpha} = g \approx g' = \frac{l_0'}{\alpha}, \text{ da } x \ll 2g \text{ bzw. } r \ll g$$

$$\Rightarrow E \approx \frac{4 Fa}{\pi r^4} g'$$

Weiterhin ist aus der Zeichnung ersichtlich, dass gilt:

$$g'^2 = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + (g' - x)^2 = \frac{1}{4} l_0^2 + g'^2 - 2g'x + x^2$$

$$2g'x = \frac{1}{4} l_0^2 + x^2 \approx \frac{1}{4} l_0^2, \text{ da } x \ll 2g$$

$$\Rightarrow g' \approx \frac{l_0^2}{8x}$$

$$\Rightarrow E \approx \frac{4 Fa}{\pi r^4} \cdot \frac{l_0^2}{8x} = \frac{F_a \cdot l^2}{2 \pi \times r^4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{F \cdot a \cdot l^2}{2\pi Er^4} \quad / \quad \text{für } x, r \ll 2s$$

Bestimmung des Stabradius:

Messwerte siehe 4.2) S. 14

Nullstellung z_0 der Mikrometerschraube: 0,47 mm (S. 11)

Fehler der Mikrometerschraube:

- Ablesefehler: $s_a = 0,005 \text{ mm}$
- Testfehler: $s_r = 0,005 \text{ mm} + 10^{-5} d_m$ d_m : gemessener Durchmesser
- ⇒ Fehler eines Messwertes: $u_m = \sqrt{s_a^2 + s_r^2}$

Sowohl die Messung der Nullstellung, als auch die des Durchmessers sind mit einem Fehler behaftet.

⇒ Fehlerfortpflanzungsgehr für korrigierte Messwerte

$$r_k := \frac{1}{2} (d_m - z_0)$$

$$\Rightarrow u_{rk} = \sqrt{\left(\frac{\partial r_k}{\partial d_m} \cdot u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial r_k}{\partial z_0} \cdot u_{z_0}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{u_m^2 + u_{z_0}^2} = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{2s_a^2 + s_r^2(d_m) + s_r^2(z_0)} \quad \text{mit } u_{z_0} = \sqrt{s_a^2 + s_r^2(z_0)}$$

Es treten nur drei verschiedene Messwerte von d_m auf:

$$4,55 \text{ mm} ; 4,60 \text{ mm} ; 4,70 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow u_{rk55} = 0,0050125864665859 \text{ mm} \approx 0,005 \text{ mm}$$

$$u_{rk60} = 0,0050127122920132 \text{ mm} \approx 0,005 \text{ mm}$$

$$u_{rk70} = 0,0050129633707961 \text{ mm} \approx 0,005 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow u_{rk} = \frac{1}{3} (u_{rk55} + u_{rk60} + u_{rk70}) = \underline{0,0050127542431317 \text{ mm}} \approx 0,005 \text{ mm}$$

Korrigierte Messwerte:

| Nr. | Messwert in mm | Korrigierter Messwert d_K in mm | Radius $r_K = \frac{d_K}{2}$ in mm |
|-----|-------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) | 4,600 | 4,130 | 2,065 |
| 2) | 4,550 | 4,080 | 2,040 |
| 3) | 4,550 | 4,080 | 2,040 |
| 4) | 4,700 | 4,230 | 2,115 |
| 5) | 4,550 | 4,080 | 2,040 |
| 6) | 4,600 | 4,130 | 2,065 |
| 7) | 4,600 | 4,130 | 2,065 |

Insgesamt machen die Werte einen etwas großen Eindruck!

=> Mittelwertbildung:

$$\text{Sei } r := \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 r_{K_i} = \frac{1}{7} (3 \cdot r_{K_1} + 3 r_{K_2} + r_{K_3})$$

$$\Rightarrow \bar{r} = \underline{2,061428571 \text{ mm}} \approx 2,0614 \text{ mm} \quad /$$

$$\begin{aligned} \text{Fehler: } u_r^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial r_{K_1}} u_{K_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial r_{K_2}} u_{K_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial r_{K_3}} u_{K_3} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{3}{7} u_{K_1} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} u_{K_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{7} u_{K_3} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_r = \underline{0,0031214413106594 \text{ mm}} \approx 0,0031 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow r = \bar{r} + u_r = \underline{(2,0614 \pm 0,0031) \text{ mm}}$$

etwas viele Stellen
→ aber ok, da damit weitergerechnet wird!

Bestimmung der Zugkraft F:

Es gilt: $F = m g$

Die verwendete Masse ist $m = 232 \text{ g}$ (S. 14). Deren Fehler wird vernachlässigt. Fallbeschleunigung g wird aus der Formelsammlung „Physikalische Formeln und Tabellen“ (Hammer/Hammer, J. Lindauer Verlag, 8. Auflage) entnommen (S. 80):

$$g = 9,80665 \frac{m}{s^2} = 9,80665 \cdot 10^3 \frac{mm}{s^2}$$

Dessen Fehler wird vernachlässigt, da er nicht vorgegeben ist.

Abstand l zwischen den Schneiden:

\bar{l} wurde auf S.14 gemessen: $\bar{l} = 45,80 \text{ cm} = 458,0 \text{ mm}$

Es wurde der 0,5mm Maßstab verwendet.

• Ablesefehler: $s_a = 0,25 \text{ mm}$

• Restfehler: $\Delta l = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot l$

$$\Rightarrow u_l = \sqrt{s_a^2 + (\Delta l)^2} = \underline{0,374621142 \text{ mm}} \approx 0,37 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{l = 458,00 \text{ mm} \pm 0,37 \text{ mm}}}$$

Bestimmung von a:

Gemessen auf S.14: $\bar{a} = 24,30 \text{ cm} = 243,0 \text{ mm}$

Verwendet wurde der 0,5mm Maßstab. (Fehler siehe oben)

$$\Rightarrow u_a = \sqrt{s_a^2 + s_r^2} = \underline{0,294064618 \text{ mm}} \approx 0,29 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = 243,00 \text{ mm} \pm 0,29 \text{ mm}}}$$

Bestimmung von x:

x wurde auf S.15 vier mal gemessen.

| Nr. | Messung x_k |
|-----|---------------|
| 1) | 7,4 mm |
| 2) | 8,4 mm |
| 3) | 7,6 mm |
| 4) | 7,5 mm |

✓

Fehler der Konussschraube (S.15):

- Abtastefehler: $s_a = 0,05 \text{ mm}$
- Restfehler: $\Delta x = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} x_K$ ✓

$$\Rightarrow u_{x_n} = \sqrt{s_a^2 + (\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow u_{x_1} = 0,073373632 \text{ mm}$$

$$u_{x_2} = 0,073740355 \text{ mm}$$

$$u_{x_3} = 0,073446851 \text{ mm}$$

$$u_{x_4} = 0,073410234 \text{ mm} \quad \checkmark$$

Mittelwertsbildung:

$$\bar{x} = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 7,725 \text{ mm} \quad \checkmark$$

Fehler:

$$u_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} u_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_2} u_{x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_3} u_{x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_4} u_{x_4} \right)^2 = \frac{1}{4} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2 + u_{x_4}^2)$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{1}{4} \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2 + u_{x_4}^2} = 0,0367455786705 \text{ mm} \\ \approx 0,037 \text{ mm} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 7,725 \text{ mm} \pm 0,037 \text{ mm}}} \quad \checkmark$$

Bestimmung von E:

$$E = \frac{F \cdot a \cdot l^2}{2\pi \times r^4} = \frac{m g a l^2}{2\pi \times r^4} = \underbrace{\frac{g \cdot m}{2\pi}}_{\text{ohne Schleife}} \underbrace{\frac{al^2}{r^4}}_{\text{federbelastet}}$$

mit den Werten:

$$\bar{r} = 2,061428571 \text{ mm}, \quad u_r = 0,0031214413106594 \text{ mm}$$

$$\bar{l} = 458,0 \text{ mm}, \quad u_l = 0,374621142 \text{ mm}$$

$$\bar{a} = 243,0 \text{ mm}, \quad u_a = 0,294064618 \text{ mm} \quad \checkmark$$

$$\bar{x} = 7,725 \text{ mm}, \quad u_x = 0,0367455786705 \text{ mm}$$

$$m = 292 \text{ g}$$

$$g = 9,80665 \cdot 10^3 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow E = \underline{1,665287553923347 \cdot 10^{11} \text{ Pa}}$$

$$\text{Einheit: } 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{1}{\text{m}^2} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = 1 \frac{\text{G}}{\text{mm} \cdot \text{s}^2} = 1 \text{ Pa}$$

Fehler:

$$u_E^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial a} u_a \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial e} u_e \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial x} u_x \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial r} u_r \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2m}{2\pi} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{e^2}{x r^n} u_a \right)^2 + \left(\frac{a}{x r^n} u_e \right)^2 + \left(-\frac{a e^2}{x^2 r^n} u_x \right)^2 + \left(-\frac{4 a e^2}{x r^5} u_r \right)^2 \right]$$

$$u_E = 455746,8322202635 \cdot [195575,837216963 + 0,42584721364477 +$$

$$+ 3070955,773865354 + 4838069,050175684]^{1/2} \text{ Pa}$$

$$= \underline{1,7892310963126476 \cdot 10^9 \text{ Pa}}$$

$$\Rightarrow E = (166,5 \pm 1,3) \cdot 10^9 \text{ Pa} = (166,5 \pm 1,3) \text{ GPa}$$

Vergleich mit Literaturwert:

Es ist nur bedingt sinnvoll, den Elastizitätsmodul mit Literaturwerten zu vergleichen, da Stahl eine Mischung aus Metallen darstellt, und das Mischverhältnis hier unbekannt ist. D.h. das Material zeigt je nach Mischverhältnis andere Eigenschaften.

Wikipedia
ist keine

Vergleicht man E mit Werten von Wikipedia

wissenschaft (Elastizitätsmodul), so stellt man fest, dass
liche Quelle unser Wert vom normalen Stahlbereich 190 GPa-210 GPa
abweicht. Jedoch gibt es spezielle Stahlarten mit
geringen E-Werten, wie z.B. Twinning Induced Plasticity-
Stahl mit einem E-Wert von 170 GPa (siehe Wikipedia
„TWIP-Stahl“).

Die relativ starke Abweichung von ca. 30 GPa lässt sich möglicherweise dadurch erklären, dass durch das Glätten des Stabes durch die Experimentatoren die Durchbiegung des Stabes und somit die Ergebnisse beeinflusst wurde. → oder ungenaue Bestimmung von $r \rightarrow$ geht schließlich in $\frac{1}{r}$ \rightarrow in E

TB d. Physik Hammel / Deutscher 5. Auflage

$$E = [195 - 206 \text{ GPa}]$$

5.2 Bestimmung von G, μ und D

5.2.1 Bestimmung von G

Formel von Seite 5:

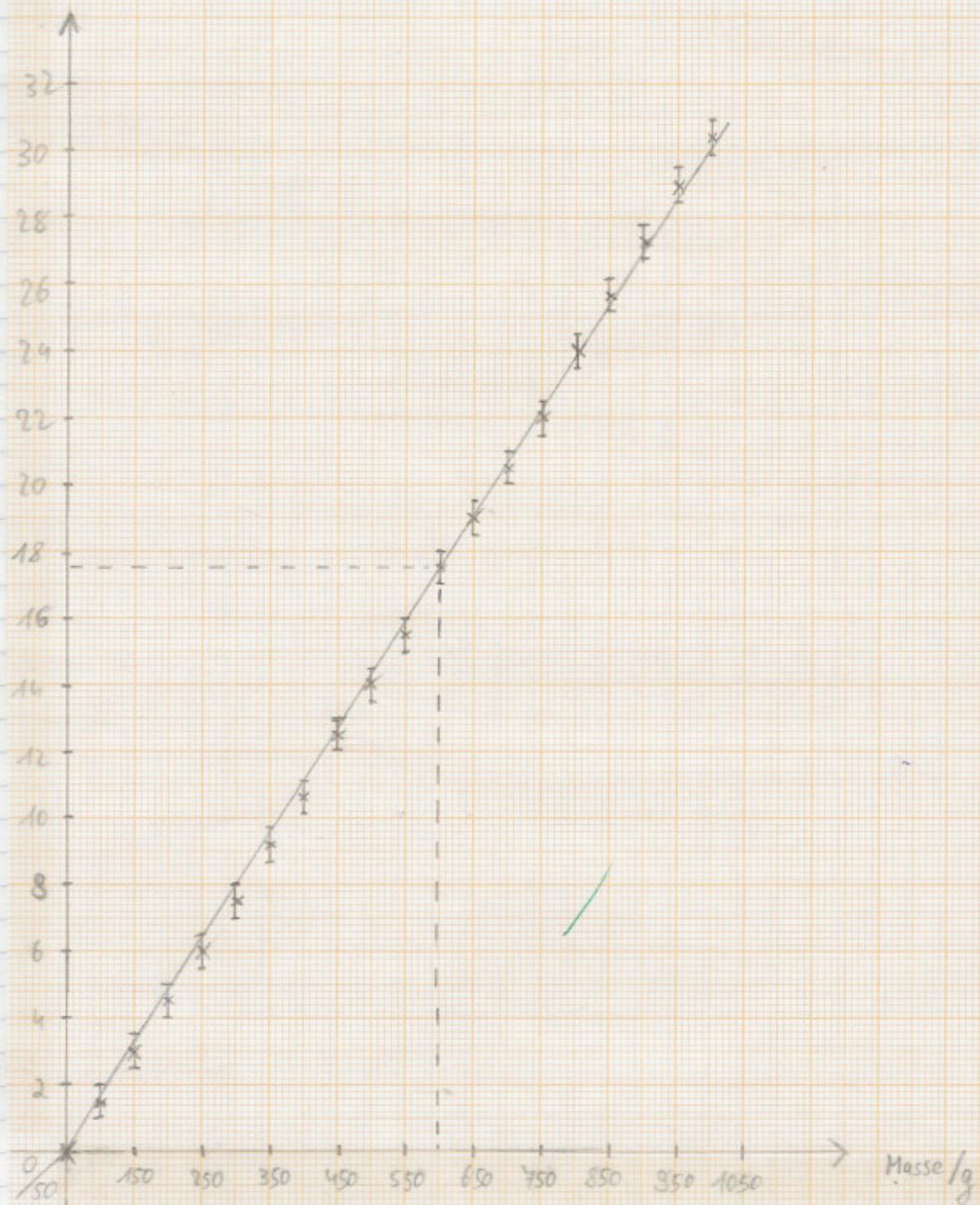
$$M_T = \frac{\alpha G I \pi r^4}{2e} ; M_T = F \cdot R = mg \cdot R$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha G I \pi r^4}{2e} = Rmg$$

$$\Rightarrow G_I = \frac{2R \cdot g \cdot m}{\pi r^4 \cdot \alpha}$$

Bestimmung von $\frac{m}{\alpha}$:

Auslenkung / grad



Ablesefehler 0,5 grad

$$\frac{\Delta m}{\Delta \alpha} = \frac{600 - 50}{17.5 - 0} \frac{g}{grad} = \frac{550}{17.5} \frac{g}{grad} = 31.42857143 \frac{g}{grad} =$$

$$= \frac{31.42857143 \cdot 180 \text{ grad}}{\pi} \frac{g}{grad} = \frac{1800.724493 \text{ g}}{\pi}$$

Fehlerrechnung dazu siehe S. 30

Bestimmung des Stabradius r:

Messwerte von 4.1, S. 11. ($2r =: d_m$)

Vollstellung z_0 der Mikrometerschraube: 0,97 mm (S. 11)

Fehler der Mikrometerschraube:

- Ablesefehler: $s_a = 0,005 \text{ mm}$

- Restfehler: $s_r = 0,005 \text{ mm} + 10^{-5} \cdot d_m$ d_m : gemessener Durchmesser

$$\Rightarrow u_m = \sqrt{s_a^2 + s_r^2}$$

Sowohl die Messung der Nullstellung, als auch die des doppelten Radius sind mit einem Fehler behaftet.

\Rightarrow Fehlerfortpflanzungsrechnung:

Strg + C

S. HOME

$$r_h := \frac{1}{2} (d_m - z_0)$$

$$\Rightarrow u_h = \sqrt{\left(\frac{\partial r_h}{\partial d_m} \cdot u_m \right)^2 + \left(\frac{\partial r_h}{\partial z_0} \cdot u_{z_0} \right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{u_m^2 + u_{z_0}^2}$$

$$\text{mit } u_{z_0} = \sqrt{s_a^2 + s_r^2(z_0)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2s_a^2 + s_r^2(d_m) + s_r^2(z_0)}$$

Es treten nur drei verschiedene Messwerte von d_m auf:

$$4,45 \text{ mm}; 4,60 \text{ mm}; 4,65 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow u_{h45} = 0,0050123348436632 \text{ mm} \approx 0,005 \text{ mm}$$

$$u_{h60} = 0,0050127122920132 \text{ mm} \approx 0,005 \text{ mm}$$

$$u_{h65} = 0,0050128381267502 \text{ mm} \approx 0,005 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow u_h = \frac{1}{3} (u_{h45} + u_{h60} + u_{h65}) = \underline{0,0050126284208089 \text{ mm}} \approx 0,005 \text{ mm}$$

korrigierte Messwerte:

| Urt. | Messwert in mm | korrigerter Messwert d_K in mm | Radius $r_K = \frac{d_K}{2}$ in mm |
|------|----------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) | 4,950 | 4,980 | 1,990 |
| 2) | 4,600 | 4,130 | 2,065 |
| 3) | 4,600 | 4,130 | 2,065 |
| 4) | 4,650 | 4,180 | 2,090 |
| 5) | 4,600 | 4,130 | 2,065 |

Vgl. Bau
Tabelle Vorne

=> Mittelwertbildung:

$$r = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 r_{K_i} = \frac{1}{5} \cdot (r_{K_1} + 3 \cdot r_{K_2} + r_{K_4})$$

$$\Rightarrow \bar{r} = \frac{r_{K_1} + 3r_{K_2} + r_{K_4}}{5} = 2,0550 \text{ mm}$$

Fehler: $u_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial r_{K_1}} u_K \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial r_{K_2}} u_K \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial r_{K_4}} u_K \right)^2 =$

$$= \left(\frac{1}{5} u_K \right)^2 + \left(\frac{3}{5} u_K \right)^2 + \left(\frac{1}{5} u_K \right)^2 = \frac{11}{25} u_K^2$$

$$\Rightarrow u_r = \underline{0,003325001537053 \text{ mm}} \approx 0,0033 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \underline{r = (2,0550 \pm 0,0033) \text{ mm}}$$

Bestimmung von R und l:

- Kunststoffreifenradius R:

auf S. 11 wurde gemessen: $d = 2R = 21,90 \text{ cm} = 219,0 \text{ mm}$
mit 0,5 mm Maßstab.

- Ablesefehler: $s_a = 0,25 \text{ mm}$

- Restfehler: $\Delta d = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} d$

=> Wurf Fehler von d: $u_d = \sqrt{s_a^2 + (\Delta d)^2}$

Fehler von $R = \frac{1}{2}d$:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial d} u_d\right)^2} = \frac{1}{2} u_d = \frac{1}{2} \sqrt{u_d^2 + (u_r)^2} = 9,14827360688943 \text{ mm}$$
$$\approx 0,15 \text{ mm}$$

$$\bar{R} = \frac{1}{2}d = 103,50 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow R = 103,50 \text{ mm} \pm 0,15 \text{ mm}$$

- Stablänge ℓ :

Gemessen auf S. 11: $\ell = 90,30 \text{ cm} = 903,0 \text{ mm}$
mit 0,5 mm Maßstab

Mengeller von ℓ :

$$u_\ell = \sqrt{u_d^2 + u_r^2} = 0,98379482708822 \text{ mm} \approx 0,9 \text{ mm}$$

$$\bar{\ell} = 903,0 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \ell = 903,0 \text{ mm} \pm 0,9 \text{ mm}$$

=> Bestimmung - vom g :

Formel von S. 25

$$g_1 = \frac{2R \cdot \ell^2}{\pi r^4} \cdot \frac{m}{s^2}$$

Unbestimmt ist noch der Wert der Fallbeschleunigung g ; er wird der "Formelsammlung", Physikalisch Formeln und Tabellen" (Hämmel/Gammer, J. Kindtler Verlag, 8. Auflage) entnommen (von S. 80):

$$g = 9,80665 \frac{m}{s^2} = 9,80665 \cdot 10^3 \frac{m/s^2}{s^2}$$

Dessen Teller wird vernachlässigt, da er nicht angegeben ist.

Noch benötigt wird der Fehler für $\frac{m}{\alpha}$:

Fehler von α : war der absolute Fehler 0,5 grad

Fehler von m : zur Bestimmung der Steigung der

unorthodox/
ungewöhnlich

Geraden von S. 26 wurde der Nullpunkt und
der Punkt bei 600g gewählt. Der Nullpunkt (50g)

→ aber Fehler liegt in Richtiger Größenordnung! Beim nach Skript F-5 einen Fehler von 0,45 mg.

Der zweite Punkt hat einen Fehler von 3,3 mg,

Eigentlich lin. Regression! da er sich aus einem 500g Stück, einem 50g Stück

und der Massenaufhängung mit einem Eigengewicht von 50g zusammen. Näherungsweise wird der Fehler um als $3,3 \text{ mg} = 0,0033 \text{ g}$ angesehen.

⇒ Fehlerfortpflanzungstr.:

$$u_{\frac{m}{\alpha}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{m}{\alpha}}{\partial m} u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{m}{\alpha}}{\partial \alpha} u_\alpha\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} u_m^2 + \frac{m^2}{\alpha^4} u_\alpha^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{180}{17,5 \cdot \pi} \cdot 0,0033 \text{ g}\right)^2 + \left(\frac{600 \text{ g}}{(17,5)^2} \cdot 0,5 \cdot \frac{\pi}{100}\right)^2} = \\ = \underline{0,021338990348916 \text{ g}} \approx 0,021 \text{ g}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{m}{\alpha} = 1800,72 \text{ g}}} \pm 0,021 \text{ g}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G = 6,2330790751710045 \cdot 10^{10} \text{ Pa}}} \approx 623 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

$$\text{Einheit: } 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = 1 \text{ Pa}$$

Fehlerfortpflanzung:

$$u_G^2 = \left(\frac{\partial G}{\partial R} u_R\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \epsilon} u_\epsilon\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r} u_r\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{m}{\alpha}\right)} u_{\frac{m}{\alpha}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2 \rho g}{\pi r^3} \frac{m}{\alpha} \cdot u_R\right)^2 + \left(\frac{2 R g}{\pi r^3} \frac{m}{\alpha} u_\epsilon\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 2 R g m}{\pi r^5} \frac{u_r}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2 R g}{\pi r^3} u_{\frac{m}{\alpha}}\right)^2$$

$$\Rightarrow G_1 = \underline{4,1763883870040905 \cdot 10^8 \text{ Pa}} \approx 4 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow \underline{G_1 = (623 \pm 4) \cdot 10^8 \text{ Pa} = (62,3 \pm 0,4) \text{ GPa}} /$$

Vergleich mit Literaturwert:

Genau wie beim Elastizitätsmodul ist es nur bedingt sinnvoll, das Schubmodul mit Literaturwerten zu vergleichen, da Stahl eine Mischung darstellt. Somit zeigt das Material andere Eigenschaften, je nach Mischverhältnis.

Literaturwert: Schubmodul G_1 für Stahl: $79,3 \text{ GPa}$ Ah NEN
(Wikipedia; Artikel: „Schubmodul“) nicht sehr viele

Es gibt zwar eine Abweichung ^{bei unserem Wert} vom Literaturwert, jedoch liegt unser Wert in der gleichen Größenordnung.

→ Abweichung liegt nicht im Bereich des Fehlers
+ Gründe? Verbesserungsvorschläge!

5.2.1 Bestimmung von μ :

Sowohl der Stab aus dem Biegeversuch, als auch der Stab des Torsionsversuchs sind aus dem gleichen Material. Damit gilt folgende Beziehung zwischen E , G und μ (Skript Seite Tor -3):

$$E = 2G(1+\mu)$$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{2G} = 1 + \mu$$

$$\Leftrightarrow \underline{\mu = \frac{E}{2G} - 1} /$$

$$E = 166,52875539233142 \cdot 10^9 \text{ Pa} \pm 1,2892310363126426 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad (5.24)$$

$$G = 6230730731710045 \cdot 10^8 \text{ Pa} \pm 4,1763883870040905 \cdot 10^8 \text{ Pa} \quad (5.30g) \quad 31$$

$$\Rightarrow \bar{\mu} = \underline{0,33584664527296} \approx 0,336$$

Fehlerfortpflanzung:

$$u_{\mu}^2 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial E} u_E \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial G_1} u_{G_1} \right)^2 = \left(\frac{u_E}{2G_1} \right)^2 + \left(-\frac{E}{2G_1^2} u_{G_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow u_{\mu} = \underline{0,013678123834507} \approx 0,013$$

$$\Rightarrow \mu = \underline{0,336 \pm 0,013}$$

\dagger Literaturvergleich / Diskussion

5.2.3 Bestimmung von D

$$M_r = -D \cdot \alpha \quad ; \alpha: \text{Winkelung}$$

Weiterhin gilt nach S.5:

$$M_T = \pi \frac{G_1}{2e} r^4$$

Wegen $M_T = -M_r$ erhält man:

$$D \alpha = \pi \frac{G_1}{2e} r^4$$

$$\Rightarrow D = \underline{\pi \frac{G_1}{2e} r^4}$$

G_1 , l und r sind fehlerbehaftet.

$$\Rightarrow u_D^2 = \left(\frac{\partial D}{\partial G_1} u_{G_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial r} u_r \right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial e} u_e \right)^2 =$$

$$= \left(\pi \frac{r^4}{2e} u_{G_1} \right)^2 + \left(4\pi \frac{G_1}{2e} r^3 \cdot u_r \right)^2 + \left(-\pi \frac{G_1}{2e^2} r^4 u_e \right)^2$$

$$\text{mit } G_1 = 623,3079731710045 \cdot 10^8 \text{ Pa} \pm 4,1769883870040905 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

$$l = 903,0 \text{ mm} \pm 0,38379482108822 \text{ mm}$$

$$r = 2,0550 \text{ mm} \pm 0,003325001537059 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{D} = \underline{1,9336687024389584 \cdot 10^9 \text{ Pa mm}^3} \approx 1,934 \cdot 10^9 \text{ Pa mm}^3$$

$$u_D = \underline{1,8137591788703848 \cdot 10^{-3} \text{ Pa mm}^3} \approx 0,018 \cdot 10^9 \text{ Pa mm}^3$$

$$\Rightarrow D = \underline{(1,934 \pm 0,018) \text{ Pa m}^3}$$

✓

Bemerkung zur Einheit: $[\text{Pa m}^3] = [\text{Nm}]$

Ist das realistisch?

5.3 Bestimmen der Trägheitsmomente

5.3.1 Bestimmen des Trägheitsmomentes ohne Glantel (nur mit Platte)

Messwerte: Tabelle S. 16

Fehler der Uhr:

- Ablesefehler: $0,05 \text{ s} = u_a$
- Restfehler: $u_r = 0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$

$$\text{Mittelwert: } \bar{T}_{20a} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 T_{20i} = \frac{6 \cdot T_{201} + 2 \cdot T_{205}}{8} = \frac{1223}{40} \text{ s} = \\ = \underline{30,575 \text{ s}} \approx 30,58 \text{ s} \quad \checkmark$$

Fehlerfortpflanzung:

→ Eigentlich stat. Fehlerauswertung bzw. Begründung

$$u_{T_{20a}} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_{20a}}{\partial T_{201}} u_{T_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{20a}}{\partial T_{205}} u_{T_5} \right)^2} \text{ warum nicht?}$$

$$\text{mit } u_{T_i} = \sqrt{(0,05 \text{ s})^2 + (0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} T_{20i})^2}$$

$$u_{T_1} = 0,2210296134 \text{ s}$$

$$u_{T_5} = 0,2209809098 \text{ s}$$

$$\Rightarrow u_T = 0,17473540213676 \text{ s} \approx 0,17 \text{ s} \quad \checkmark$$

(33)

$$\Rightarrow \bar{T}_{10a} = 30,585 \pm 0,147 \quad /$$

$$J_a = \frac{\bar{T}_{10a}^2}{4\pi^2 D} = \frac{(\bar{T}_{10a})^2}{4\pi^2} \quad | \quad (\text{Formel S.5})$$

mit $D = 1,9336684024389584 \cdot 10^{-9} \text{ Pa mm}^3 \pm 0,068137541788703848 \cdot 10^{-9} \text{ Pa mm}^3$

$$\Rightarrow J_a = 1,1447094585403653 \cdot 10^{-8} \text{ Pa mm}^3 \pm 0,11447094585403653 \text{ N m}^2 \approx 0,11 \text{ Nm}^2 \quad /$$

Stellenfehlerberechnung:

$$u_a = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{T}_{10a}}{\partial T_{10a}} u_{T_{10a}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{T}_{10a}}{\partial D} u_D\right)^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \bar{T}_{10a}}{20^2 \cdot \pi^2} D \cdot u_{T_{10a}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{T}_{10a}^2}{20^2 \cdot \pi^2} u_D\right)^2}$$

mit $\bar{T}_{10a} = 30,5753 \pm 0,174735402196761$
 $D = 1,9336687024389584 \cdot 10^{-9} \text{ Pa mm}^3 \pm 0,068137541788703848 \cdot 10^{-9} \text{ Pa mm}^3$

$$\Rightarrow u_a = \sqrt{2,7390461261329462 \cdot 10^{-3} + 1,1528747533807024 \cdot 10^{-7}} \text{ Pa mm}^2$$

$$= 5734691,360990712 \text{ Pa mm}^2$$

$$= 0,05234691300990712 \text{ N m}^2 \approx 0,05 \text{ Nm}^2$$

$$\Rightarrow J_a = (0,11 \pm 0,05) \text{ Nm}^2 = (0,11 \pm 0,05) \text{ kg m}^2 \quad /$$

5.3.2 Bestimmen des Trägheitsmomentes mit Hantel mit waagrechter Orientierung

Es wird erwartet, dass J_b etwas größer als J_a ist, da das Trägheitsmoment der Hantel noch hinzu kommt.

Meßwerte S. 17

- Ablaufehler: $0,05\text{s}$
- Reitfehler: $0,2\text{s} + 5 \cdot 10^{-7} \cdot T$

$$\begin{aligned}\text{Mittelwert: } \bar{T}_{20b} &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 T_{20b_i} \\ &= \frac{4 \cdot T_{20_1} + 2 \cdot T_{20_2} + 2 \cdot T_{20_3}}{8} = \underline{\underline{30,60\text{s}}}\end{aligned}$$

eigentlich stat Fehlerauswertung, da ≥ 6 Messwerte bzw. Begründung warum nicht (*)

Fehlerfortpflanzung:

$$u_{T_{20b}} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_{20b}}{\partial T_{20_1}} u_{T_{20_1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_{20b}}{\partial T_{20_2}} u_{T_{20_2}}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_{20b}}{\partial T_{20_3}} u_{T_{20_3}}\right)^2}$$

$$\text{mit } u_{T_i} = \sqrt{(0,05\text{s})^2 + (0,2\text{s} + 5 \cdot 10^{-7} \cdot T_i)^2}$$

$$u_{T_{20_1}} = 0,221023613\text{s}$$

$$u_{T_{20_2}} = 0,221078317\text{s}$$

$$u_{T_{20_3}} = 0,720980909\text{s}$$

$$\Rightarrow u_{T_{20b}} = \underline{\underline{0,1353524435903\text{s}}} \approx 0,14\text{s}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_{20b} = 30,60\text{s} \pm 0,14\text{s}}}$$

$$J_b = \frac{\bar{t}_b^2}{4\pi^2} \rightarrow = \left(\frac{\bar{t}_{10_b}}{20} \right)^2 \quad (\text{Formel S. 5})$$

mit $D = 1,9336687024389584 \cdot 10^9 \text{ Pa mm}^3 \pm 0,01813751478870 \text{ Pa mm}^3$

$$\Rightarrow J_b = \underline{1,1465821935678267 \cdot 10^8 \text{ Pa mm}^3} \approx 0,115 \text{ Nm}^2$$

- Feller-Sortenflansung:

$$u_b = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{t}_b}{\partial \bar{T}_{10_b}} u_{T_{10_b}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{t}_b}{\partial D} u_D \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2 \bar{t}_{10_b}}{10^4 \pi^2} D \cdot u_{T_{10_b}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{T}_{10_b}}{20^2 4\pi^2} u_D \right)^2}$$

$$u_b = \sqrt{1,0128869555668276 \cdot 10^{12} + 1,2352653205381389 \cdot 10^3} \text{ Pa s}^2 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow u_b = 10149340,107044433 \text{ Pa s}^2 \text{ mm}^3$$

$$= 0,010149340107044433 \text{ Nm s}^2 \approx 0,010 \text{ Nm s}^2$$

$$\Rightarrow \underline{J_b = (0,115 \pm 0,010) \text{ Nm}^2}$$

5.3.3 Bestimmen des Trägheitsmomentes mit Hantel mit senkrechter Orientierung

Es wird erwartet, dass J_0 ungefähr so groß wie J_1 ist, da das Trägheitsmoment der Hantel nach Aufgabe 2.6 (5.7) nicht so groß sein kann.

Messwerte S.18

$$\text{Abtastfehler: } s_a = 0,05s; \quad \text{Restfehler: } s_r = 0,2s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$$

$$\underline{\text{Mittelwert: }} \bar{T}_{20_c} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 T_{20_i} = \frac{3 \cdot T_{20_1} + 4 \cdot T_{20_2} + 1 \cdot T_{20_4}}{8} =$$

$$= \underline{31,075s} \approx 31,08s$$

Vgl. Bem (*)

Fehlerfortpflanzung:

$$u_{T_{20_c}} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_{20_c}}{\partial T_{20_1}} u_{T_{20_1}} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{20_c}}{\partial T_{20_2}} u_{T_{20_2}} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{20_c}}{\partial T_{20_4}} u_{T_{20_4}} \right)^2}$$

$$\text{mit } u_{T_{20_i}} = \sqrt{(0,05s)^2 + (0,2 + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{T}_{20_i})^2}$$

$$u_{T_{20_1}} = 0,221224433s$$

$$u_{T_{20_2}} = 0,22127314s$$

$$u_{T_{20_4}} = 0,221321847s$$

$$\Rightarrow u_{T_{20_c}} = \underline{0,14102495609889s} \approx 0,14s$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_{20_c} = 31,08s \pm 0,14s}}$$

$$J_c = \frac{T_{20_c}^2}{4\pi^2} \quad D = \frac{\left(\bar{T}_{20_c}\right)^2}{4\pi^2} \quad D \quad (\text{Formel S.5})$$

$$\text{mit } D = 1,9336687024389584 \cdot 10^9 \text{ Pa mm}^3 \pm 0,018137541788703848 \cdot 10^9 \text{ Pa mm}^3$$

$$\Rightarrow J_c = \underline{1,1824549796485083 \cdot 10^8 \text{ Pa mm}^3 s^2} \approx 0,118 \text{ Nm s}^2$$

Fehlerfortpflanzung:

$$u_c = \sqrt{\left(\frac{\partial J_c}{\partial T_{10c}} u_{T_{10c}}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_c}{\partial D} u_D\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2 \bar{T}_{10c}}{20^2 \pi^2} D \cdot u_{T_{10c}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{T}_{10c}}{20^2 \pi^2} u_D\right)^2}$$

mit $u_{T_{10c}} = 0,14102435603889 \text{ s}$

$$\Rightarrow u_c = \sqrt{1,1518578654207441 \cdot 10^{12} + 1,7739177100101759 \cdot 10^9} \text{ Pa s}^2 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow u_c = 1073839,735775667 \text{ Pa s}^2 \text{ mm}^3$$

$$= 0,01073839735775667 \text{ Nm s}^2 \approx 0,011 \text{ Nm s}^2$$

$$\Rightarrow \underline{J_c} = (0,118 \pm 0,011) \text{ Nm s}^2$$

5.3.4 Bestimmung des Trägheitsmomentes der Platte mit waagrechter Orientierung (ohne Platte)

$$J_{Hw} = J_b - J_a = 0,11865821935678962 \text{ Nm s}^2 - 0,1144709458570353 \text{ Nm s}^2 \\ = \underline{0,00018727349875308782 \text{ Nm s}^2} \approx 0,00018 \text{ Nm s}^2$$

Fehlerfortpflanzung:

$$u_{Hw} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{Hw}}{\partial J_b} \cdot u_b\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{Hw}}{\partial J_a} \cdot u_a\right)^2} = \sqrt{u_b^2 + u_a^2} =$$

$$= \underline{0,053321755820261 \text{ Nm s}^2} \approx 0,05 \text{ Nm s}^2$$

$$\Rightarrow \underline{J_{Hw} = (0,00018 \pm 0,05332) \text{ Nm s}^2 \approx (0,00 \pm 0,05) \text{ kg m}^2}$$

Der Fehler beträgt ca. das 250-fache des Ergebnisses!

5.3.5 Bestimmung des Trägheitsmomentes der Hantel mit senkrechter Orientierung (ohne Platte)

$$\begin{aligned} J_{H_s} &= J_c - J_a = 0,11824549496485083 \text{ Nm}^2 - 0,11447094585703653 \text{ Nm}^2 = \\ &= 0,0037745521078143 \text{ Nm}^2 \approx 0,0037 \text{ Nm}^2 \end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} u_{H_s} &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_{H_s}}{\partial J_c} u_c\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{H_s}}{\partial J_a} u_a\right)^2} = \sqrt{u_c^2 + u_a^2} = \\ &= 0,053436995419652 \text{ Nm}^2 \approx 0,05 \text{ Nm}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_{H_s} = (0,0037 \pm 0,0534) \text{ Nm}^2 = (0,00 \pm 0,05) \text{ kg m}^2 \checkmark$$

Der Fehler beträgt ca. das 13-fache des Ergebnisses! Trotzdem ist der Fehler u_{H_s} ungefähr gleich dem Fehler u_{H_w} . Das heißt, dass das Trägheitsmoment der Hantel in der senkrechten Orientierung deutlich größer als das Trägheitsmoment in der waagrechten Orientierung ist, ca. das 20-fache. Ein solches Verhalten des Trägheitsmomentes war nach Aufgabe 2.6 zu erwarten. ✓

† Diskussion worum Fehlerr> Messwert

Fehleranalyse

Verbesserungsmaßnahmen

Sind solche Ergebnisse überhaupt sinnvoll?

6) Zusammenfassung

Der Versuch „Trägheitsmomente, Torsion und Biegung“ zeigt, dass die Verformung von Materialien unter Einwirkung von Kräften durch einige wenige Materialparameter beschrieben werden kann.

Zu diesem gehört der Elastizitätsmodul, den wir durch die Biegung eines Stabes ermitteln können, genau so wie der Torsionsmodul, der sich durch das Verdrehen eines Stabes ermitteln lässt. Der Zusammenhang zwischen Torsionsmodul und Elastizitätsmodul wird beim Berechnen der Querkontraktionszahl μ , die hier die spezifische Materialkonstante des Stabes ist, klar. Außerdem lernt man bei diesem Versuch, wie der Torsionsmodul des Stabes mit dem Drehmoment zur Ermittlung des Trägheitsmomentes der Platte und der Platte zusammen gehört.

Ebenfalls eignet man sich bei diesem Versuch den genauen Umgang mit der Konussschraube, der Stoppuhr, der Mikrometerschraube und dem Büromessstab nebenbei an. Des Weiteren sollte das Rechnen mit dem Fehlerfortpflanzungsgeretr vertieft und darauf geachtet werden, hierbei keine Mängelchen, wie das fälsche Ablesen vom Taschenrechner oder Verschreiben, zu produzieren. ✓

- Diskussion ist sehr chirftig!
 \Rightarrow Schade, trübt den positiven Eindruck aus dem Protokoll und der durchdachten Fehleranalyse!
- Bei μ + Literaturvergleich komplett
- Wikipedia ist keine wissenschaftliche Quelle (VORSICHT!)
- Für mehr als 6 Messwerte / bzw 6 Werte
 \Rightarrow statistische Fehlerbehandlung bzw Begründung warum nicht!

| FzV | Protokoll | Auswertung | Fam | Σ |
|------|-----------|------------|------|----------|
| 3,75 | 2,5 | 8 | 1,25 | 15,5 |