SS2020

PPA1

Torsion Biegung

Charlotte Geiger - Manuel Lippert - Leonhard Schatt

Inhaltsverzeichnis

Nr.	Datum	Art der Arbeit	Zensur
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			

Fehlerzeichen

A = Ausdruck
Bz = Beziehung
F = Form
f = falsch
G = Grammatik

L = lexikalischer Fehler (falsches Wort)
R = Rechtschreibung
r = richtig
St = Stellung

T = Zeit
Z = Zeichensetzung
⌐ = fehlendes Wort
ᔑ = ein Wort zu viel
≀ = sachlich falsch

Versuch Tor: Trägheitsmomente, Torsion, Biegung

Teilnehmer: Manuel Lippert, Leo Schatt, Charlotte Geiger

Datum: 8.7.2020

Gruppe: 2

Arbeitsplatz:

<u>Gliederung:</u>

1. Einleitung
2. Fragen zur Vorbereitung
3. Versuchsaufbau
4. Auswertung
5. Fazit
6. Nachtrag
7. Anhang

1. Einleitung

Das Ziel des Versuches Tor ist es, sich mit den Themen Trägheitsmomente, Drehschwingung und Elastizität fester Stoffe unter der Einwirkung von Kräften auseinander-zu setzen. Die Verformung von den Materialien kann durch wenige Materialparameter beschrieben werden. Vermittelt werden Kenntnisse der Elastizitätslehre sowie der Zusammenhang zwischen Dehnung und Biegung, Scherung und Torsion.
Um das Elastizitätsmodul und das Schubmodul zu berechnen, werden in diesem Versuch im Laufe des Experiments verschiedene Größen gemessen, so dass obige Module bestimmt werden können. Zusätzlich dazu erfährt man und weist man experimentell nach, wie man das Trägheitsmoment eines beliebigen starren Körpers um eine beliebige Rotationsachse durch Drehschwingungen heraus-findet. Die Motivation im Großen und Ganzen wenn man auch auf Alltagsgegenstände und -gebäude übertragen. So ist es von enormer Bedeutung, die genannten Eigenschaften (Trägheits-moment, Torsion, Biegung) von Materialien zu kennen, um beispielsweise Brücken und Hochhäuser im generellen, aber vor allem in Erdbeben geprägten Regionen sicher und stabil zu bauen.

2. Fragen zur Vorbereitung

1. Was besagt das Hooksche Gesetz und was ist dessen Bedeutung für diesen Versuch?

Das Hooksche Gesetz setzt sich auf einen Draht wirkende Kraft F, die daraus resultierende Dehnung Δl, die Länge des Stabes l, die Querschnittsfläche A und sein Elastizitätsmodul für kleine F ins Verhältnis: $\Delta l = \frac{1}{E}\frac{lF}{A}$ oder $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma}$ mit $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ und $\sigma = \frac{F}{A}$.

Kurz gesagt: Verformt man einen Körper durch Krafteinwirkung einer Kraft und dieser kehrt in seine ursprüngliche Form zurück, handelt es sich um eine elastische Verformung. Meist sind Körper jedoch nur bis zu einer bestimmten Grenze elastisch. Diese Grenze heißt Elastizitätsgrenze. Bis dahin gibt es einen nahezu linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung.
Bei diesem Versuch kommt das Hooksche Gesetz vor allem bei der Biegung des Stabes zum Tragen.

Dabei kann man gedanklich alles Material oberhalb und unterhalb der neutralen Faser in ganz dünne Drähte zerlegen, auf die dann jeweils das Hooksche Gesetz zutrifft.

2.1 Welche Dimensionen haben E, G und μ?

$[E] = 1\,\frac{N}{m^2}$; folgend aus Hookeschem Gesetz

$$\underbrace{\frac{\Delta\ell}{\ell}}_{\text{Einheitenlos}} = \frac{1}{E} \cdot \underbrace{\frac{F}{A}}_{\frac{N}{m^2}}$$

$[G] = 1\,\frac{N}{m^2} = 1\,\text{Pa}$; folgt wie oben aus H.G ; $\tau = G\alpha$

$[\mu] :=$ Poissonzahl ; dimensionsfrei ; keine Einheit ✓

2.2 Welche Einschränkung ergibt sich für $\Delta V \geq 0$

Aus Gerthsen: (S. 118 3.4.1) $\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\mu)}$

1. Fall: $\Delta V = 0 \rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 0 = \varepsilon(1-2\mu) \Rightarrow \mu = 0{,}5$

2. Fall: $\Delta V > 0 \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} > 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon(1-2\mu) \Big|_{\substack{\varepsilon>0 \\ \varepsilon\neq 0}}$

$\Leftrightarrow 0 < 1-2\mu \Leftrightarrow -1 < -2\mu \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \mu$

$\Rightarrow \mu \leq 0{,}5$ ✓

Gemessen werden sinnvollerweise nur Werte mit

$\mu > 0{,}1$ ($\mu = 0$ heißt keine Querkontraktion)
($\mu < 0$ hieße, das Material dehnt sich quer zur Zugspannung aus.)

3. Biegung zylinderförmiger Stab $\Rightarrow dA = r\,d\varphi\,dr$

Berechnung von M_B:

$M_B = \frac{\alpha E}{\ell_0} \cdot I_B$ (Gl. 4)

$I_B = \int_\varnothing r'^2\,dA$, r' = Abstand zur neutralen Faser

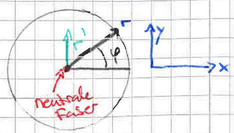
Biegung nur in y-Richtung (Skizze) $\Rightarrow r' = r \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow I_B = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r\sin\varphi)^2\, r\,d\varphi\,dr = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 \sin^2\varphi\,d\varphi\,dr$

$= \frac{1}{4}R^4 \left[\left(\frac{-\cos\varphi\sin\varphi + x}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}R^4$ ✓

$\Rightarrow I_B = \frac{\pi}{4}R^4$

$\Rightarrow \boxed{M_B = \frac{\alpha E}{\ell_0}\,\frac{\pi}{4}R^4}$



Berechnung von M_T

$M_T = \frac{\alpha G}{\ell} \cdot I_T$ (Gl. 7)

$I_T = \int_\varnothing r'^2\,dA$, $r' \hat{=}$ radialer Abstand von der Achse des Stabes

$I_T = \int_0^{2\pi}\int_0^R r'^2\, r'\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^R r'^3\,dr = \frac{\pi}{2}R^4 \rightsquigarrow I_T = \frac{\pi}{2}R^4$

$\Rightarrow \boxed{M_T = \frac{\alpha G}{\ell} \cdot \frac{\pi}{2}R^4}$ ✓

4. Was ist die allg. Lösung von Gl. 10?

$J\ddot\alpha + D\alpha = 0$ (Gl. 10) $\Rightarrow \ddot\alpha = -\frac{D}{J}\alpha$

Ansatz: $\alpha = C \cdot e^{\lambda t} \rightsquigarrow \ddot\alpha = \lambda^2\alpha \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{D}{J} \rightsquigarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{D}{J}}$

$\boxed{\alpha_{\text{allg.}}(t) = C_1 \cdot e^{-i\sqrt{\frac{D}{J}}t} + C_2 e^{i\sqrt{\frac{D}{J}}t}}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

Nur an Realteil interessiert, $C_1 = A_1 + iA_2$, $C_2 = B_1 + iB_2$

$A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha(t) = \text{Re}(\alpha_{\text{allg}}(t)) = (A_1+B_1)\cos\left(\sqrt{\frac{D}{J}}t\right) + (A_2-B_2)\sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}}t\right)$

$\boxed{= D_1\cos\left(\sqrt{\frac{D}{J}}t\right) + D_2\sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}}t\right)}$

sin und cos periodisch $\Rightarrow \sqrt{\frac{D}{J}}\,T = 2\pi \Rightarrow \frac{D}{J}T^2 = 4\pi^2$

$\Leftrightarrow \boxed{J = \frac{DT^2}{4\pi^2}}$ ✓

5. Bei einem Vergleich der Biegemomente eines Stahlrohres mit dem eines Stahlstabes gleicher Länge und Masse: Welches Biegemoment ist größer?

Damit ein Stahlrohr und ein Stahlstab die gleiche Länge haben, aber trotzdem die gleiche Masse besitzen, muss der Radius des hohlen Rohres größer als der Stab sein: $r_R > r_S$

Für das Biegemoment gilt: (vgl. Aufgabe 2.3)

$$M_B = \underbrace{\frac{\alpha E}{l_0} \cdot \frac{\pi}{}}_{:=c} r^4 = c r^4$$

? Woher kommt diese Formel? In Aufg. 2.3 werden nur zylinderförmige Stäbe behandelt.

$$\Rightarrow M_{B_R} = c r_R^4 > c r_S^4 = M_{B_S}$$

$\Rightarrow$ Das Biegemoment des Rohres ist größer.

Erklärung: Da im Durchschnitt die Schichten des Rohres weiter entfernt sind von der neutralen Faser als die massive Stange, müssen sich die Schichten (v.a. die äußeren) des Rohres proportional zum Biegungsgrad mehr gedehnt, bzw. gestaucht werden, als bei der Stange. ✓

Das heißt: für das Verbiegen des Rohres muss mehr Kraft aufgewendet werden, als beim Stab, weshalb das Biegemoment des Rohres größer ist. ✓

6. Welche Folgerungen kann man aus dem Trägheitsmoment eines zweiatomigen Moleküls ziehen?

$$J = \sum_{i=1}^{2} m_i v_i^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \quad ; \; m = m_1 = m_2 \quad ; \; v_1 = v_2 = v$$

$$\Rightarrow J = 2mr^2 = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = m\,\frac{2d^2}{4} = \frac{1}{2} m d^2$$ ✓

(Achse senkrecht auf Verbindungslinie)

$\Rightarrow$ Verbindungslinie: $J = 0$, da die Massepunkte jeweils auf der Drehachse liegen. Die Drehachse bestimmt den Wert für J. ✓

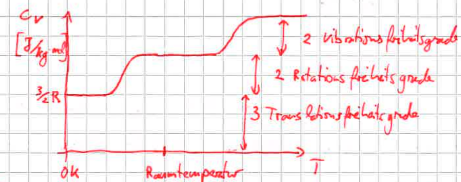
Aus dem Trägheitsmoment und der Umlaufdauer ist das Richtmoment, die Rotationsenergie, und der Drehimpuls berechenbar.

Folgerung:

-> zweiatomiges Molekül hat nur zwei Rotationsfreiheitsgrade

vgl. später: Molekülphysik, Thermodynamik

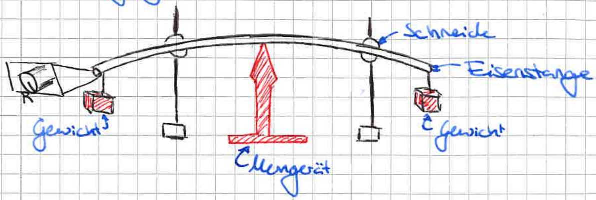
Wärmekapazität ideales zweiatomiges Gas:



(nicht gefordert)

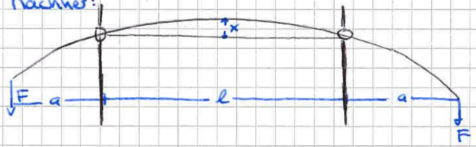
3. Versuchsaufbau

1. Biegung eines Stabes

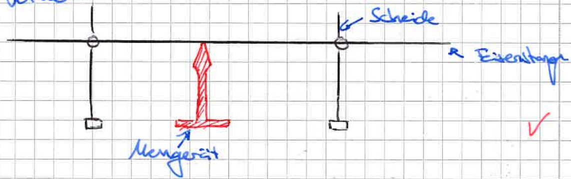


Schematisch:

nachher:



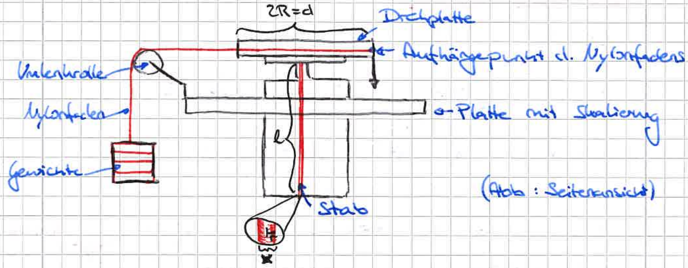
vorher:



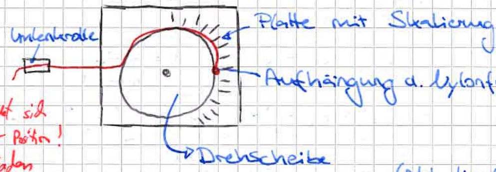
✓

(Naja, eigentlich ist ~~der~~ der Stab auch vor der Belastung schon ~~[illegible]~~ krumm. An der Theorie zur elastischen Biegung ändert dies jedoch nichts)

2. Statische Torsion



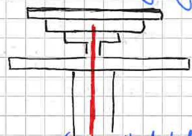
(Abb: Seitenansicht)



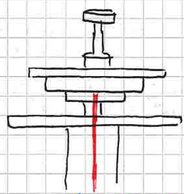
Umlenkrolle befindet sich nicht an dieser Position! Ein gespannter Faden verläuft gradlinig!

(Abb: Vogelansicht)

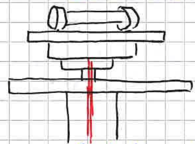
3. Drehschwingung



(nur mit Metallplatte)



(mit MP und stehender Hantel)



(mit liegender Hantel und Metallplatte)

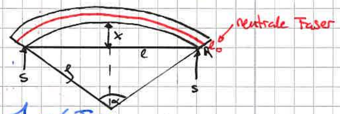
4. Auswertung

1. Bestimmung von E

(Gl. 4) $M_B = \frac{\pi \alpha E}{4 l_0} R^4 \Leftrightarrow E = \frac{4 l_0 M_B}{\pi \alpha R^4}$

Das Drehmoment greift an jeder Schneide S am Stab an $\Rightarrow$ zwischen den Schneiden konstantes Biegemoment $M_B = M = Fa$.

$\Rightarrow \alpha = \frac{4 l_0 F a}{\pi E R^4}$



Weiterhin gilt $\frac{l_0}{\rho} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{4Fa}{\pi E R^4}$

Aus Skizze: $\rho^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + (\rho - x)^2 = \frac{\ell^2}{4} + \rho^2 - 2\rho x + x^2$

$\Leftrightarrow 2\rho x = \frac{\ell^2}{4} + x^2 \overset{2\rho \gg x}{\approx} \frac{\ell^2}{4} \Leftrightarrow \rho \approx \frac{\ell^2}{8x}$

$\Rightarrow \frac{8x}{\ell^2} \approx \frac{4Fa}{\pi E R^4} \Leftrightarrow x \approx \frac{\ell^2 F a}{2\pi E R^4} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{F a \ell^2}{2\pi x R^4}}$ ✓

$E = \frac{m \cdot g \cdot a \cdot \ell^2}{2\pi \, x R^4} = \frac{291{,}8 g \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}238 m \cdot (0{,}498 m)^2}{2\pi \cdot 8{,}2 \cdot 10^{-3} m \cdot (2{,}24025 \cdot 10^{-3} m)^4} = 1{,}301997867 \cdot 10^{14} \frac{g}{s^2 m}$

$= 1{,}301997867 \cdot 10^{11} \frac{kg}{s^2 m}$

Fehlerrechnung:

$E = \underbrace{\frac{m \cdot g}{2\pi}}_{const} \cdot \frac{a \cdot \ell^2}{x R^4} = c \cdot \frac{a \ell^2}{x R^4} = 1{,}301997867 \cdot 10^{11}$ Pa

$\Rightarrow u_E^2 = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial a} s_a\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \ell} s_\ell\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial R} s_R\right)^2\right] \cdot c$ ✓

$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\ell^2}{x R^4} = 1200{,}767402 \frac{1}{mm^3}$

$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{a \ell^2}{x^2 R^4} = 34851{,}54165 \frac{1}{mm^3}$

$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial \ell} = \frac{2 a \ell}{x R^4} = 1147{,}721452 \frac{1}{mm^3}$

$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial R} = \frac{4 a \ell^2}{x R^5} = 510269{,}196 \frac{1}{mm^3}$

(mit $c = \frac{m \cdot g}{2\pi}$)

1g · 1000

$l_0 = (973 \pm 0{,}7333704725444022)$ mm

$\ell = (498 \pm 0{,}5825812347950088)$ mm

$a = (238 \pm 0{,}5277887835109799)$ mm

$m = 291{,}8$ g (← Ablesefehler 0,1 g vernachlässigbar)

Warum so viele Nachkommastellen im Fehler, wenn der eigentliche Wert ohne Nachkommastellen angegeben wird?

$\Rightarrow u_E = c \cdot \sqrt{\left(\frac{\ell^2}{x R^4} \cdot s_a\right)^2 + \left(\frac{a \ell^2}{x^2 R^4} s_x\right)^2 + \left(\frac{2 a \ell}{x R^4} s_\ell\right)^2 + \left(\frac{4 a \ell^2}{x R^5} s_R\right)^2}$

$= 11704335{,}2 = 11{,}7 \cdot 10^6 \frac{g \cdot m}{s^2 mm^2}$

$\Rightarrow$ $E = (1{,}302 \cdot 10^{11} \pm 11{,}7 \cdot 10^9)$ Pa (✓)

Rechnung ok, aber der Zahlenwert ist wegen falschem Wert für R etwa 40% zu klein.

R an verschiedenen Stellen:

$R = (2{,}24025 \pm 0{,}0502516121818 2)$ mm

Mittelwert = 2,24025   Varianz = 0,0009258200995772 5522 < s_a

Fehler von Mittelwert = 0,05 $\Rightarrow s_a$ = F_Mittelwert

$s_r = 0{,}0050224025$

Messunsicherheit = 0,0502516218182 = s_R

Biegung x = $(8{,}2 \pm 0{,}0368335996408 17)$ mm

Mittelwert = 8,2

$u_x = \sqrt{s_a^2 + (\Delta x)^2}$ ← ?

$u_{x_1} = 0{,}07381388758221585$ $u_{x_4} = 0{,}07341023430013011$

$u_{x_2} = 0{,}07377711365899623$ $u_{x_5} = 0{,}07366688536921$

$\Rightarrow u_x = 0{,}03683359964081 7$ mm

Wurde hier $s = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ angewandt? Diese Formel gilt nur für statistische Fehler!

Vergleich mit Literaturwert

Da Stahlgegenstände (beispielsweise der Stab) meist aus einer Mischung unterschiedlicher Metalle bestehen, und verschiedene Mischungen verschiedene Eigenschaften haben, ist es nur bedingt sinnvoll bei diesen Werten einen Literaturvergleich vorzunehmen, da wir nicht sicher sind, welches Mischverhältnis der Stab hat.

vielleicht eher von „Stahlsorte" sprechen

2. Bestimmung von G

$G :=$ Schubmodul / Torsionsmodul

(Bestimmung aus Verdrillung des Drahtes mit def. Drehmoment)

$$M_T = \frac{\alpha G \pi r^4}{2\ell} \quad \text{(aus Gl. 7)} \quad = F \cdot R = mg \cdot R$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha G \pi r^4}{2\ell} = Rmg \Rightarrow \boxed{G = \frac{2R\ell g}{\pi r^4} \cdot \frac{m}{\alpha}}$$

- Kunststoffscheibenradius R: $d = 2R = 22{,}0\,\text{cm} = 0{,}22\,\text{m}$

$$s_R = \frac{1}{2} s_d = 0{,}262488095\,\text{mm}$$

$$R = (110 \pm 0{,}262488095)\,\text{mm}$$

Eine so genaue Fehlerangabe macht wenig Sinn, außerdem müsste man dann $R = 110{,}000000000$ schreiben! Aber nur Zwischenangabe, also ok.

- Drahtlänge ℓ mit Fehler: $\ell = 91\,\text{cm}$
- Drahtdurchmesser x: $x = 4{,}495\,\text{mm}$

$$s_x = 0{,}0502538707016932\,\text{mm}$$

$$x = (4{,}495 \pm 0{,}05)\,\text{mm}$$

$$x_{\text{mittel}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i =$$

- Standardabweichung: $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{\text{mittel}})^2}{n}} =$
- – " – des Mittelwerts: $\sigma_{x,\text{mittel}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} =$

$\Rightarrow$ Drahtdurchmesser $x = (\text{Mittelwert} \pm \sigma_{x,\text{mittel}})\,\text{mm}$

$=$

-radius $r = \frac{1}{2} \cdot x = 2{,}2475 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$

$g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Fehlerrechnung

$$\frac{\partial G}{\partial d} = \frac{\ell \cdot g}{\pi \cdot r^4} \cdot \frac{m}{\alpha} = \cancel{1{,}1136835346 \cdot 10^{11} \cdot \frac{m}{\alpha}} = 1{,}270090674 \cdot 10^{13}\,\frac{\text{g}}{\text{m}^2\text{s}^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \ell} = \frac{d \cdot g}{\pi \cdot r^4} \cdot \frac{m}{\alpha} = \cancel{2{,}6924421277 \cdot 10^{10} \cdot \frac{m}{\alpha}} = 3{,}070548882 \cdot 10^{12}\,\frac{\text{g}}{\text{m}^2\text{s}^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = +\frac{4 d\ell g}{\pi r^5} \cdot \frac{m}{\alpha} = \cancel{+4{,}791850955 \cdot 10^{13} \cdot \frac{m}{\alpha}} = 2{,}486455646 \cdot 10^{15}\,\frac{\text{g}}{\text{m}^2\text{s}^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial (\frac{m}{\alpha})} = \frac{d\ell g}{\pi r^4} = 1531{,}314601\,\frac{1}{\text{m}\,\text{s}^2}$$

$$d = (220 \pm 0{,}5249761899362675)\,\text{mm}$$

$$\ell_{\text{eff}} = (910 \pm 0{,}7106511098985212)\,\text{mm}$$

$$x = (4{,}495 \pm 0{,}0502538707016932)\,\text{mm}$$

$$\frac{m}{\alpha} = (1824{,}7063548 \pm 106{,}7181324)\,\text{g}$$

$$G = \frac{d \cdot \ell \cdot g}{\pi r^4} \cdot \frac{m}{\alpha} = \cancel{2{,}78418548\;\text{GPA}}\; 44{,}68988532\,\text{GPA}$$

$$s_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial d} \cdot s_d\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \ell} \cdot s_\ell\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r} \cdot s_r\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \frac{m}{\alpha}}\, u_{\frac{m}{\alpha}}\right)^2}$$

$$\cancel{= 0{,}264539626\;\text{GPA}}$$

$$\Rightarrow G = (44{,}7 \pm 4{,}8)\,\text{GPA}$$

Werte

$\varnothing$ Stab $= x = 4{,}495\,\text{mm} = 2r$ $\quad \ell = 91\,\text{cm}$ $\quad d = 2R = 22{,}0\,\text{cm}$

Fehlerrechnung

$$\frac{\partial G}{\partial d} = 2{,}031358424 \cdot 10^{11}\,\frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{m}^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \ell} = 4{,}910976409 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{m}^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 7{,}953705952 \cdot 10^{13}\,\frac{\text{kg}}{\text{s}\text{m}^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial (\frac{m}{\alpha})} = 2{,}450103362 \cdot 10^{10}\,\frac{1}{\text{m}\text{s}^2}$$

$$s_G = 4{,}75876967\,\text{GPA}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G = (44{,}7 \pm 4{,}8)\,\text{GPA}}}$$

Rechnung richtig, aber Wert auch hier ca 40% zu klein

Literaturvergleich

Genau wie beim Elastizitätsmodul ist es nur bedingt sinnvoll, das Schubmodul mit Literaturwerten zu vergleichen. Doch!

3. Bestimmung von μ

Die für die Biegung und für die Torsion verwendeten Stäbe sind aus dem gleichen Material.

$\Rightarrow$ Bestimmung von μ aus Beziehungen zw. E und G

$$E = 2G(1+\mu) \Leftrightarrow \frac{E}{2G} = 1+\mu \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{E}{2G} - 1}$$

Berechnete Werte von:

$$E = (1{,}302 \cdot 10^{11} \pm 11{,}7 \cdot 10^{9})\,\text{Pa}$$

$$G = (44{,}7 \pm 4{,}8)\,\text{GPa}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{E}{2G} - 1 \approx 0{,}46$$

Fehlerfortpflanzung

$$s_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial E} s_E\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial G} s_G\right)^2}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial E} = \frac{1}{2G} = 1{,}118568233 \cdot 10^{-11}\,\frac{1}{\text{Pa}}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial G} = \frac{-E}{2G^2} = 3{,}258111496 \cdot 10^{-11}\,\frac{1}{\text{Pa}}$$

$s_E \approx 11{,}7 \cdot 10^9$ Pa

$s_G \approx 4{,}8$ GPa

Werte für E und G beide um gleichen Faktor falsch, daher stimmt das Endergebnis ungefähr. Die Fehlerangabe ist vmtl. fehlerhaft.

$$\Rightarrow s_\mu = 0{,}2039227212$$

$$\Rightarrow \mu = (0{,}46 \pm 0{,}20)$$

(✓)

Literaturvergleich

Die Poissonzahl könnte Aufschluss über das Material des Stabes geben. Wegen der hohen Ungenauigkeit ist sie jedoch nur wenig Aussagekräftig.

Auf Grund der Farbe kommt Messing und Kupfer eher nicht infrage. Aluminium oder möglicherweise Eisen scheinen von den Materialeigenschaften besser zu passen.

Aluminium (rein): $\mu = 0{,}34$ bzw. α-Eisen: $\mu = 0{,}28$

4. Bestimmung von D (Winkelrichtgröße)

$M_r = -D \cdot \alpha$; α: Auslenkung

$$M_T = \frac{\pi \alpha G r^4}{2l}$$

$$M_T = M_r \rightarrow D \cdot \alpha = \pi \frac{\alpha G r^4}{2l} \Leftrightarrow \boxed{D = \pi \frac{G}{2l} r^4}$$

$$D = \pi \cdot \frac{G \cdot (2{,}2475 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^4}{2 \cdot 0{,}91\,\text{m}} = 1{,}96\,\text{Nm}$$

$$s_D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial G} s_G\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial r} s_r\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial l} s_l\right)^2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial G} = \frac{\pi r^4}{2l} = 4{,}404303985 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3$$

$$\frac{\partial D}{\partial r} = \frac{4\pi G r^3}{2l} = 3503{,}84673\,\text{m}^2\,\text{Pa}$$

$$\frac{\partial D}{\partial l} = \frac{-\pi G r^4}{2l^2} = 2{,}163432837\,\text{m}^2\,\text{Pa}$$

s_G = (siehe vorne)

s_r = "

s_l = "

$$\Rightarrow s_D = 0{,}2750040051\,\text{Nm}$$

$$\Rightarrow D = (1{,}96 \pm 0{,}3)\,\text{Nm}$$

✓

Literaturvergleich/Diskussion

Verwendet man die in GP gegebene Materialkonstante $G = (71{,}5 \pm 1{,}5) \cdot 10^5\,\text{N/m}^2$ so erhält man für diesen Aufbau einen Direktionsmoment von 4,63 Nm. Das ist nur um einen Faktor 2 größer als unser Ergebnis hier. Da es sich vermutlich um ein anderes Material handelt ist dieser Unterschied verständlich. Die Größenordnung stimmt jedoch!

liegt wieder an falschem Wert für Stabdurchmesser, sonst passt alles!

5. Bestimmung der Trägheitsmomente

1. Messen und Berechnen

A Schwingung der Platte alleine

Die Platte schwingt 20x. Unser Programm ermittelt für $\bar{T} =$

$$J_\alpha = \frac{DT^2}{4\pi^2} = 0{,}1132 \text{ kgm}^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial D} = \frac{T^2}{4\pi^2} = 0{,}057756 \text{ s}^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial T} = \frac{2DT}{4\pi^2} = 0{,}1132 \text{ Nms}$$

$$s_J = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial D} s_D\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T} s_T\right)^2} = 0{,}01591540185$$

$$\Rightarrow J_\alpha = (0{,}11 \pm 0{,}02) \text{ kgm}^2$$

B Schwingung der Platte und Hantel liegend

Die Platte schwingt 20x. Werte werden wie oben ermittelt.

$$\Rightarrow J_{H_{liegend}+P} = (0{,}14 \pm 0{,}02) \text{ kgm}^2$$

C Schwingung der Platte und Hantel stehend

$$\Rightarrow J_{H_{stehend}+P} = (0{,}12 \pm 0{,}02) \text{ kgm}^2$$

D Hantel ohne Platte

Trägheitsmomente sind additiv

$$\Rightarrow J_{ges} = J_1 + J_2$$

$$\Rightarrow J_1 = J_{ges} - J_2$$

$$\Rightarrow J_{H_w} = (0{,}03 \pm 0{,}03) \text{ kgm}^2 \checkmark$$

$$J_{H_s} = (0{,}003 \pm 0{,}028) \text{ kgm}^2 \checkmark$$

Die Fehler sind kleiner, wenn man die Fehlerrechnung direkt für die Formel $J_{H_W} = \frac{D}{4\pi^2}(T_{H_W}^2 - T_0^2)$ durchführt. Das liegt daran, dass ~~bei~~ dann die Information, dass D für beide Konfigurationen gleich ist, in der Rechnung nicht verloren geht.

zu C

$\bar{T} = (1{,}531150000 \pm 0{,}01414214)$

Mittelwert $= 30{,}6230$

Varianz $= 0{,}007838827 86$

Fehler von Mittelwert $= 0{,}01$

$s_r = 0{,}01$

$s_{\bar{T}} = 0{,}0141421356237 3095$

zu B

$\bar{T} = (1{,}70385 \pm 0{,}01414 21356)$

Mittelwert $= 34{,}077$

Varianz $= 0{,}0074425578040 52727$

Fehler vom Mittelwert $= 0{,}01$

$s_r = 0{,}01$

$s_{\bar{T}} = 0{,}01414 21356$ (gleich wie bei C

zu A

$\bar{T} = 1{,}50880 \pm 0{,}010978564 97402502$

Mittelwert $= 30{,}1760$

Varianz $= 0{,}01432790 5549151937$

F_Mittelwert $= 0{,}0045308816900 12328$

$s_r = 0{,}01$

$s_{\bar{T}} = 0{,}010978564 57402502$

2. Annahme: Hantel besteht aus 2 Kugeln + 1 Zylinder

$$\Rightarrow J_\perp = \frac{1}{4} m \left(r^2 + \frac{1}{3} l^2\right)$$

$$J_{\parallel} = \frac{1}{2} m r^2$$

} Zylinder

Trägheitsmoment Kugel: $J_0 = \frac{2}{5} MR^2$

mit Satz von Steiner: $J_0 = \frac{2}{5} MR^2 + Ma^2$ (a: Abstand zur Rotationsachse)

A. Waagrechte / Liegende Hantel

Annahme: $R = \frac{95m + 60\,mm}{2 \cdot 2}$ ← Radius ≠ Durchmesser.

Skizze wäre hilfreich!

$$= \frac{95mm + 60mm}{2} = 77{,}25\,mm$$

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \approx \frac{1}{2}\sqrt{2}\,m$$

$R = (77{,}25 \pm$ ✓

Zylinder: $r = 15\,mm \pm$ ✓

$l = 105\,mm \pm$ ✓

$$\Rightarrow J_{Hantel} = \frac{1}{4} m \cdot \left(r^2 + \frac{1}{3} l^2\right) + 2\left(\frac{2}{5} MR^2 + \left(\frac{1}{2} l + R\right)^2 \cdot M\right)$$ ✓

$$= \frac{1}{4} \cdot \overbrace{7{,}874 \frac{g}{cm^3} \cdot (1{,}5cm)^2 \cdot \pi \cdot 10{,}5cm}^{m} \left((1{,}5cm)^2 + \frac{1}{3}(10{,}5cm)^2\right)$$

$$+ 2 \cdot 7{,}874 \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (7{,}725cm)^{3} \cdot \left(\frac{2}{5}(7{,}725cm)^2 + \frac{1}{2}(10{,}5cm + 7{,}725cm)^2\right)$$

$$= 0{,}1107\cancel{374}\,kgm^2$$

Da es sich um eine Abschätzung handelt, die uns nur den Umgang für Größenordnungen mitgeben soll, wird hier auf die Fehlerfortpflanzung verzichtet. OK.
Der errechnete Wert liegt jedoch relativ nahe an dem realen Wert.

B. Hantel senkrecht / Stehend

• Kugeln werden um den Schwerpunkt gedreht:

$$J_{Kugel} = 2 \cdot \frac{2}{5} MR^2 = \frac{4}{5} MR^2$$

$$M = \rho_E \cdot V_{Kug} = 1900{,}5g \approx 1{,}9006\,kg$$ ✓

• Zylinder wird um Körperachse gedreht:

$$J_{Zyl} = \frac{1}{2} m r^2 \quad \rightarrow m = \rho_{Eis} \cdot V_{Zyl} = 584{,}49g \approx 0{,}58449\,kg$$

← Hier richtig mit Radius gerechnet

$$\Rightarrow J_{ges} = J_{Kugel} + J_{Zyl} = \frac{4}{5}(0{,}038625m)^2 \cdot 1{,}9006\,kg + \frac{1}{2} \cdot 0{,}58449\,kg \cdot (0{,}015m)^2$$

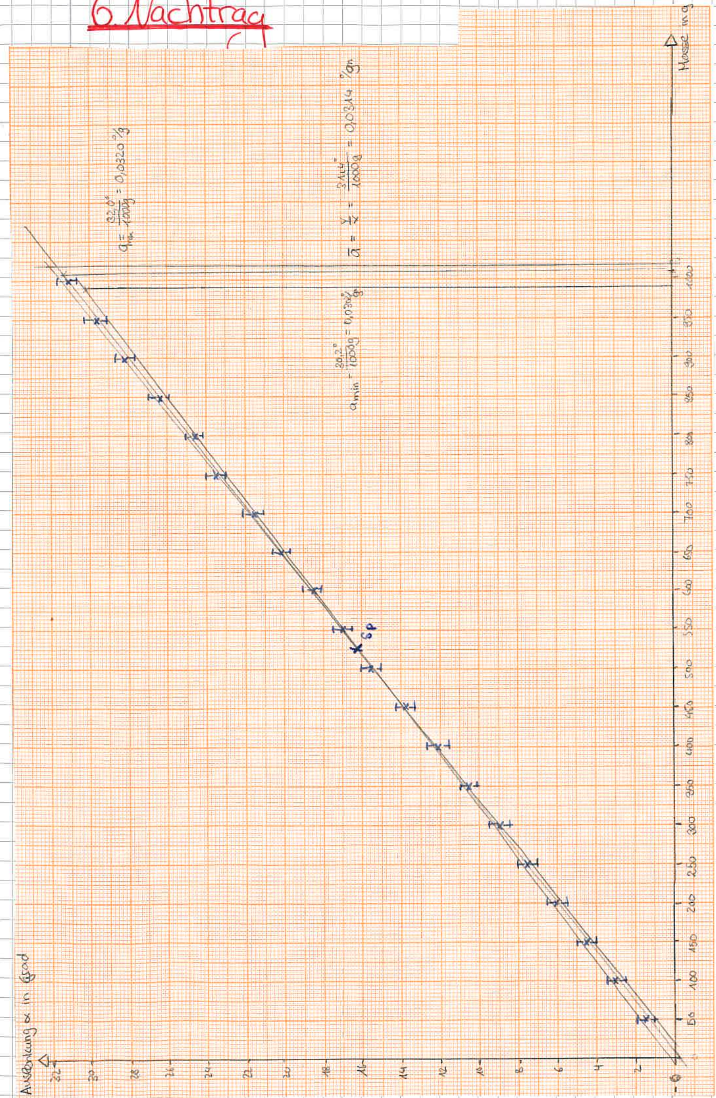
$$= 2{,}33407 \cdot 10^{-3}\,kgm^2 \approx 0{,}002\,kgm^2$$ ✓

Die Näherung ~~ist~~ mit den zwei Kugeln ist nicht sonderlich genau, insofern passt dieses Ergebnis gut!

5. Fazit

Der Versuch „Tor" zeigt, dass die Verformung von Materialien unter Einwirkung von Kräften durch einige wenige Materialparameter beschrieben werden kann.
Zu diesem gehört der Elastizitätsmodul, den wir durch die Biegung eines Stabes ermitteln konnten, genauso wie der Torsionsmodul, der sich durch das Verdrillen eines Stabes bestimmen lässt. Der Zusammenhang zwischen Torsionsmodul und Elastizitätsmodul wird beim Errechnen der Querkontraktionszahl μ, die hier die spezifische Materialkonstante des Stabes ist, klar.
Außerdem lernt man bei dem Versuch, wie der Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer, dem Trägheitsmoment und dem Direktionsmoment des Stabes.
Ebenfalls eignet sich der Versuch um den Umgang mit der Noniusschraube, der Stoppuhr und der Schieblehre präzise zu ermitteln lernen. Desweiteren soll das Auge geschult werden für falsches Ablesen und leichtsinniges Verrechnen mit dem Taschenrechner.

6. Nachtrag



zusätzlicher Messpunkt bei $m=0, \alpha=0$ | Die Gerade muss eine Ursprungsgerade sein (→ keine Kraft = keine Auslenkung) ⇒ zusätzlicher Messpunkt bei Null

7. Anhang

7.1. Versuchsaufbau → siehe [3.]

2. Messungen

2.1 Biegung des Stabes

Messende Person: Manuel Lippert

Messung des Stabradiuses r (bzw des Durchmessers d): Mikrometerschr.

- systematischer Fehler: ∤
- Ablesefehler:

	Abstand von linken Ende des St. $[l]=cm$	Durchmesser $[d]=mm$
1.)	0	4,4680
2.)	10	4,4680
3.)	20	4,480
4.)	30	4,480
5.)	40	4,480
6.)	50	4,485
7.)	70	4,80
8.)	96	4,479

Messwert für Durchmesser falsch!

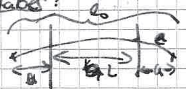
Umgang mit Messschraube!

Gewicht der Massen: Waage Fensterplatz

$m = 281,8\,g$ Ablesefehler: 0,1 g

Länge des Stabes:

~~48,8~~



$l = 48,8\,cm$ gemessen mit Stahlmaßstab

$l_0 = 57,3\,cm$ Messungenauigkeit hoch weil nicht an einem Stück gemessen – Stab schon eingespannt

$a = 23,7\,cm$

Manuel misst den Stab aus um ihn danach symmetrisch auszurichten. Er nimmt die Scheide dabei an den äußeren Enden der Führung an, wo der Stab aufliegt.

Manu beschwert sich, dass immer das gleiche rauskommt

Zum Justieren muss Manu von Scheide zu Scheide. Dann schiebt er den Stab heraus. → Addiert die beiden + erhält l

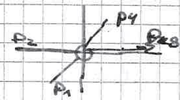
Richtet Rechts nach b aus, welche der Experimentator errechnet hat.

Orientierung wird an der linken Endklemme festgemacht.

Justierung des Messgerätes, so dass es direkt unter dem Stab steht.

Ruhelage für P_1:

$r_1 = 4,3\,mm$



Ausgelenkt bei $h_1 = 14,9\,mm$

Um andere Orientierung zu Messen wird der Stab mit dem Finger an der einen Scheide fixiert, da der Stab schon etwas verbogen ist

$r_2 = 4,5$ $h_2 = 13,0\,mm$

Gemessen wird mit einer Noniusschraube:

Position	P_3	P_4	~~P_5~~	~~P_6~~
Ruhelage	4,2 mm	4,2 mm		
Ausgelenkt	11,7 mm	12,4 mm		

2.2 Statische Torsion Platz: 3656

Messen den Stab aus. Messperson: Manuel

Platz: zweiter vom Fenster Messwert falsch!

Durchmesser des Stabes: $d = 4,485\,mm$ gemessen mit Mikrometerschraube

Die Länge des Stabes wird mit einem Metallmaßstab gemessen. ⇒ $l = 81\,cm$ schwer zu messen, wegen behindernder Aufbau

Gemessen wurde zwischen den Einspannungen oben und unten.

Durchmesser ~~Schei~~ Drehscheibe oben:

Gemessen mit Metallmaßstab: 22,0 cm syst. Fehler: 2 Abl. Fehl

Dicke der Scheibe mit Messschieber:

$d = 14,8\,mm$ syst. Fehler Abl. Fehler

Gemessen wird der Auslenkwinkel α bei Gewichten zwischen 100 – 1000g

Gewicht in g	Auslenkwinkel α in grad
50	~~5°~~ 1,5 ?
100	3,0
150	4,5
200	6,0
250	7,5
300	9,0
350	10,5
400	12,2
450	13,8
500	15,5
550	17,0
600	18,5
650	20,2
700	21,6
750	23,5
800	24,7
850	26,3
900	28,1
950	29,6
1000	31,1

0 Gramm Gewicht sollten 0° Auslenkung sein.

Die Gewichte werden der Reihe nach von dem Experimentator der Reihe nach ~~ausgemessen~~ aufgelegt. Die Torsion wird anhand der Skala ermittelt.

syst. Fehler: ≈ $0{,}5° + \frac{1}{30°} \cdot 1 \cdot \alpha$?

Ablesefehler: 0,5° ✓

Dabei läuft das Seil, an dem die Gewichte hängen über eine Rolle.

Gewichtszusammensetzung:

Grundgewicht g=50g:

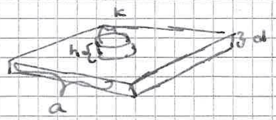
g ist eine ungünstige Wahl wegen Verwechslungsgefahr mit der Einheit Gramm.

Addierte Zusammensetzungen

50g: g	550g: g + 500g
100g: g + 50g	600g: g + 500g + 50g
150g: g + 100g	650g: g + 500g + 100g
200g: g + 100g + 50g	700g: g + 500g + 100g + 50g
250g: g + 100g + 100g	750g: g + 500g + 100g + 100g
300g: g + 100g + 100g + 50g	800g: g + 500g + 100g + 100g + 50g
350g: g + 200g + 100g	850g: g + 500g + 100g + ~~100g~~ 200g
400g: g + 200g + 100g + 50g	900g: g + 500g + 200g + 100g + 50g
450g: g + 200g + 100g + 100g	950g: g + 500g + 200g + 100g + 100g
500g: g + 200g + 100g + 100g + 50g	1000g: g + 500g + 200g + 100g + 100g + 50g

2.8 Drehschwingung

Die Stahlplatte wird auf die Drehscheibe geschraubt. Die Platte hat die Abmessungen:



a = 30,0 cm gemessen mit Stahlmaßband ~~Fehler~~

syst. Fehler: Ablesefehler:

k = 5,0 cm

d = 10,2 mm gemessen mit Messschieber

h = 10,0 mm m. Messs. syst. Fehler Ablesefehler

Gemessen werden 20 Schwingungen. Auslenkung 40°

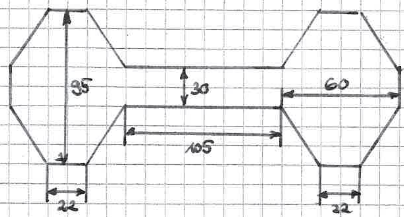
	Zeit in s
1	30,02
2	29,93
3	30,03
4	30,06
5	30,13
6	30,13
7	30,96
8	30,16
9	30,16
10	30,18

Gestoppt wird von Charlotte mit der Stoppuhr

systematischer Fehler: 0,01 s

Ablesefehler: 0,01 s

Dimension der Hantel:



Messungen mit Messschieber

schöne Zeichnung!

Auslenkung 40° mit Hantel liegend — Hantel stehend
→ Schwingungsdauer (20 Schwingungen)

Hantel liegend:

	Zeit in s
1	33,91
2	34,08
3	34,06
4	33,95
5	34,09
6	34,13
7	34,29
8	34,12
9	33,89
10	34,33

Hantel stehend:

	Zeit in s
1	30,48
2	30,69
3	30,64
4	30,82
5	30,69
6	30,64
7	30,87
8	30,36
9	30,67
10	30,47

08.07.20 M. Eisert

Insgesamt gute Auswertung!

Zu beanstanden:

- Mikrometerschraube konsequent um 1/2 mm falsch abgelesen.
  → Dadurch Endergebnisse für Material konst. um ca 40% daneben.
- Fehlerangaben bei Zwischenergebnissen ~~[illegible]~~ unnötig genau, v.a. wenn der Messwert gar nicht so genau angegeben wurde.
- Rechenfehler bei der Abschätzung des Trägheits-moments der liegenden Hantel

Form:	2/2	
Protokoll / Durchführung	2/4	(wg. Messfehler)
Auswertung	12/14	
Σ	16/20	

29.06.20 M. Eichhorst