

## **Einleitung:**

# **Ziel und Zweck des physikalischen Grundpraktikums**

Im physikalischen Grundpraktikum werden anhand ausgewählter Versuche Kenntnisse aus der Vorlesung und den Übungen vertieft und die experimentelle Wissenschaft als wichtige Grundlage der Physik erfahrbar gemacht. Im Mittelpunkt steht dabei das Vermitteln praktischer Fertigkeiten und damit das Beobachten und Messen physikalischer Vorgänge und Größen. Sie lernen, quantitative Zusammenhänge zwischen den von Ihnen gemessenen Größen zu erzielen, sowie die gewonnenen Ergebnisse mit einer Theorie und/oder mit Literaturwerten zu vergleichen und damit einer kritischen Wertung zu unterziehen.

Ein wichtiger Bestandteil des Praktikums ist das Erlernen verschiedener Messmethoden sowie des richtigen Einsatzes unterschiedlicher Messgeräte und deren Bedienung. Sie werden mit einer Reihe einfacher und auch komplizierterer Geräte arbeiten, aber natürlich kann nicht die ganze Vielfalt wissenschaftlicher Instrumente in einem Kurs von wenigen Semestern eingesetzt werden. Das Praktikum wird Sie deshalb in der Bedienung von Instrumenten im Allgemeinen unterweisen und Ihnen damit die Angst vor dem Gebrauch unbekannter Geräte nehmen. Messgeräte aller Art gehören zum Handwerkszeug eines jeden experimentellen Physikers, und die Bedienung eines Oszilloskops sollte für Sie genauso selbstverständlich werden wie die eines Schraubenziehers oder eines Lötkolbens.

Der vielleicht wichtigste Aspekt des Praktikums ist, dass Sie lernen *wie man Experimente macht*. Sie sollen in die Lage versetzt werden, einen Versuch zu entwerfen, dessen Genauigkeit in einem sinnvollen Zusammenhang zu seiner Aufgabenstellung steht. Dabei ist das Erkennen und Vermeiden von systematischen Fehlern bei den Methoden und Instrumenten genauso wichtig wie das Analysieren der Ergebnisse mit dem Ziel, die richtigen Schlüsse daraus zu ziehen. Weiterhin müssen Sie die Genauigkeit der Endergebnisse bestimmen und in der Lage sein, Ihre Messergebnisse und Berechnungen genau, klar und knapp aufzuzeichnen. Sie lernen also, Experimente durchzuführen, zu protokollieren und auszuwerten. Dies alles lässt sich in der Aussage summieren, dass Sie zu einem kompetenten Experimentator ausgebildet werden sollen!

Konzentrieren Sie sich im Praktikum auf das, was Sie anderswo nicht tun. Es kommt darauf an, etwas zu machen und zu wissen, warum man es gerade so macht. Theoretische Kenntnisse sind zwar auch im Praktikum wichtig, allerdings steht die Theorie im Dienste des Experiments. Lassen Sie sich bei den zum Teil umfangreichen Vorbereitungen und Auswertungen von folgenden Fragen leiten:

1. Was soll gemessen werden?
2. Wie kann es gemessen werden?
3. Wie können die Messergebnisse erklärt werden?

Die Frage nach der theoretischen Erklärung, die in Vorlesungen oft im Vordergrund steht, kommt hier also erst an dritter Stelle. Versuchen Sie dabei insbesondere, eine Erklärung für Ihre eigenen Messergebnisse zu finden.

Durch die Laborarbeit werden Sie die Komplikationen des wirklichen Lebens kennen lernen und herausfinden, dass sich Physik nicht ganz so reibungslos messen lässt wie man es aufgrund der Vorlesung vielleicht glauben könnte. Sie werden aber auch lernen, diese

## Einleitung

---

Schwierigkeiten zu überwinden.

Sollten Sie Fragen zum Praktikum haben, wenden Sie sich bitte an den Praktikumsleiter oder an die Praktikumsbetreuer. Dies gilt sowohl für allgemeine Fragen zur Organisation als auch für spezielle Fragen zu den einzelnen Versuchen. Weitere Hinweise, insbesondere zu formalen Fragen der Vorbereitung, Durchführung, Auswertung und Korrektur, der einzuhaltenden Fristen, der Beurteilung der Praktikumsleistung und des Leistungsnachweises finden Sie im übernächsten Kapitel “Organisatorisches”, welches Sie **vor Praktikumsbeginn** lesen müssen.

**Beachten Sie unbedingt das folgende Kapitel “Sicherheit im Praktikum”!**

Die Kapitel “Protokollführung und Darstellung von Messdaten” sowie “Fehlerrechnung” wurden in großen Teilen von einem Skript der Universität Bremen beeinflußt:  
Rückmann, Glüge, Windzio *“Hinweise zum Praktikum und zur Auswertung von Messergebnissen”* Universität Bremen, Fachbereich 1/Physik und Elektrotechnik (2011).  
Ich danke Herrn Prof. Rückmann für das freundliche Zurverfügungstellen des Skriptes!

# Sicherheit im Praktikum

Hier finden Sie allgemeine, von bestimmten Versuchen unabhängige Hinweise zum Gefährdungspotenzial im Praktikum. In den Anleitungen zu den einzelnen Versuchen sind dann nur noch die jeweils spezifischen Sicherheitshinweise angegeben.

Dieses Kapitel muss **unbedingt vor Beginn des Praktikums** gelesen werden! Bei Fragen hierzu wenden Sie sich an den Praktikumsleiter oder die Betreuer.

- In fast jedem Raum oder auf dem Gang direkt davor gibt es einen Feuerlöscher.
- Sollte es im Praktikum zu einer Verletzung oder zu einem Unfall kommen, ist **sofort** der Betreuer und wenn möglich der Praktikumsleiter zu unterrichten! Bei ungewöhnlichem Betriebsverhalten (unerwartete Geräusche, Gerüche etc.) ist ebenfalls umgehend der Betreuer oder der Praktikumsleiter zu benachrichtigen. Außerdem hängt in jedem Praktikumsraum ein Zettel mit **telefonischen Notrufen** aus.
- Ganz allgemein ist das Mitbringen von Speisen und Getränken in Laborräume aus gesundheitlichen Gründen (Verwechslungsgefahr, Verschmutzungsgefahr!) untersagt. Sie können den Raum jederzeit zum Essen und Trinken verlassen. Des Weiteren sind nicht benötigte Mäntel, Jacken und Taschen (Stolpergefahr, insbesondere in abgedunkelten Räumen!) an den im Gang bereitgestellten Garderoben oder in den Spinden aufzubewahren.

Im Folgenden sind die während des Praktikums möglichen, über das normale Alltagsmaß hinausgehenden Gefährdungen und damit verbundene Sicherheitsmaßnahmen aufgeführt.

**Strom** Die in manchen Versuchen verwendeten 4 mm–Federstecker (“Bananenstecker”) dürfen auf keinen Fall in eine Steckdose gesteckt werden. Nicht oder schlecht isolierte Kabel sowie Geräte die mit solchen Kabeln versehen sind, dürfen ebenfalls auf keinen Fall verwendet werden. Im Falle einer akuten elektrischen Gefährdung gibt es in jedem Raum bzw. direkt vor der Türe einen *Not-Aus–Schalter*, durch dessen Betätigung der Stromkreis im betreffenden Raum sofort unterbrochen wird.

**Verdunklung** In abgedunkelten Räumen besteht eine erhöhte Stolpergefahr durch herumliegende Gegenstände und durch am Boden verlaufende Kabel. In allen solchen Räumen ist stets ein Notlicht anzuschalten.

**Laser** Im Grundpraktikum werden ausschließlich Laser der Klasse 2 verwendet. Falls keine Beeinträchtigung durch Medikamente vorliegt, begrenzt der Lidschlussreflex die Bestrahlungsdauer auf etwa 0,25 s, was bei dieser Laserklasse ungefährlich ist. Dennoch schauen Sie niemals direkt in den Laserstrahl! Außerdem sind direkte Reflexe über Schmuck, Uhren oder Ähnliches zu vermeiden.

**(heißes) Wasser** Bei direktem Kontakt mit heißem Wasser besteht Verbrennungsgefahr, ebenso beim Kontakt mit Oberflächen, auf die heißes Wasser verschüttet wurde. Vermeiden Sie es, Wasser zum Sieden zu bringen! Achten Sie weiterhin darauf, dass Wasser nicht mit elektrischen Geräten in Kontakt kommt.

**Tauchsieder** Fassen Sie einen Tauchsieder (auch nach der Abschaltung) nicht an der Heizspirale an, da dann für die Haut Verbrennungsgefahr droht!

**Glasbruch** Im Falle eines Glasbruchs (Thermometer, Glasgefäße) ist besondere Vorsicht geboten, da es zu Schnittverletzungen kommen kann.

**schwere Gewichte** Die bei manchen Versuchen verwendeten schweren Gewichte können zu Quetschungen an Füßen, Zehen und Fingern führen.

**Druckluft** Bei Verwendung von Druckluft kann es zu hoher Lärmbelästigung kommen. In diesem Fall ist der bereitgestellte Gehörschutz zu tragen.

**Stroboskop** Stroboskoplicht in einem abgedunkelten Raum kann zur Auslösung eines epileptischen Anfalls führen. Sollten Sie unter Epilepsie leiden, geben Sie dies bitte rechtzeitig dem Praktikumsleiter bekannt.

**chemische Stoffe** Als Lösungsmittel wird neben Wasser nur Ethanol verwendet. Dieses ist brennbar und darf auch nicht getrunken werden. Aus den Vakuumpumpen könnten im Falle eines Defektes Abgase und Öl austreten. Einige Geräte sind mit Quecksilber gefüllt. Im normalen Betrieb geht von diesen Geräten keine Gefahr aus. Sollte es dennoch zu einem Austritt chemischer Stoffe kommen, ist das entsprechende Gerät umgehend abzuschalten und der Betreuer bzw. Praktikumsleiter zu informieren!

**Radioaktivität** Bei einem Versuch (Rad) wird ein schwach radioaktives Präparat verwendet. Ganz allgemein gilt, eine geeignete Abschirmung zu verwenden, die Aufnahme in den Körper zu verhindern, den Abstand groß und die Aufenthaltszeit klein zu halten. Bei Verdacht auf Beschädigung eines Präparates ist sofort der Praktikumsleiter zu informieren. Spezifische Gefährdungspotenziale und dazu gehörende Sicherheitsanweisungen sind ausführlich in der entsprechenden Versuchsanleitung dokumentiert, welche vor Versuchsbeginn unbedingt zu lesen ist!

Bei Einhaltung aller Sicherheitsmaßnahmen geht von diesem Versuch keinerlei Gefahr aus, auch nicht für schwangere Teilnehmerinnen. Sollten Sie Zweifel oder Bedenken haben, suchen Sie bitte rechtzeitig vor dem Versuchsdatum ein klarendes Gespräch mit dem Praktikumsleiter.

# Organisatorisches

In diesem Kapitel sind allgemeine Hinweise zur Organisation des Praktikums, zur Vorbereitung, Durchführung und Auswertung, sowie zur Betreuung und zur Bewertung zusammengestellt. Dieses und die beiden folgenden Kapitel zur Protokollführung und zur Fehlerrechnung müssen **unbedingt vor Beginn des Praktikums** gelesen werden!

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an den Praktikumsleiter oder die Betreuer.

## 1. Allgemeine Organisation des Praktikums

Im Grundpraktikum sind je nach Studienrichtung 12 oder 18 Experimente zu absolvieren, aufgeteilt auf 2 oder 3 Semester mit je 6 Versuchen. Dieses Praktikum richtet sich an alle, die 3 Semester mit insgesamt 18 Versuchen benötigen.

Typischerweise findet gegen Ende des vorhergehenden Semesters eine gesondert angekündigte Vorbesprechung statt, in deren Rahmen sich die Teilnehmer für das Praktikum anmelden.<sup>1</sup> Bitte beachten Sie die Aushänge hierzu! Die Versuche werden in zufällig zusammengelosten Dreiergruppen durchgeführt, welche wünschenswerterweise für die gesamte Dauer des Praktikums bestehen bleiben. Maximal 3 solcher Dreiergruppen führen an einem Tag den gleichen Versuch unter Anleitung eines Betreuers durch.

Die Grundpraktika werden als eigene Kurse auch auf dem eLearning–Server der Universität Bayreuth (<https://elearning.uni-bayreuth.de/>) angeboten. Für die Teilnahme am Praktikum müssen Sie sich für den jeweiligen eLearning–Kurs anmelden! Dort finden Sie alle wichtigen das Grundpraktikum betreffenden Information zusammen mit den aktuellen Versuchsanleitungen und den hier gedruckten allgemeinen Hinweisen. Außerdem finden Sie die endgültigen Gruppeneinteilungen, den Zeitplan und die Reihenfolge der Versuche, sowie die Namen, Sprechstunden, Raum- und Telefonnummern der Betreuer. Gruppeneinteilung und Betreuerkontakte hängen während des Semesters auch am Praktikumsbrett im zweiten Stock des NWII aus (neben Raum 2.2.02.699).

Bei der Einschreibung oder am ersten Versuchstag erhalten Sie zusammen mit der Praktikumsanleitung (dieses Buch) eine Testatkarre, die Sie für das jeweilige Semester benötigen. Auf dieser Karte wird Ihnen für jeden Versuch die erfolgreiche Durchführung sowie die korrigierte Auswertung mit der entsprechenden Punktzahl bestätigt. Bitte tragen Sie vor dem ersten Versuch Ihre persönlichen Daten ein und bringen die Karte dann zu allen Versuchen mit. Die Karte ist der Nachweis für Ihre Praktikumsleistungen, bewahren Sie diese also sorgfältig auf!

Am ersten Versuchstag erhält jede Gruppe ein Protokollbuch, in welchem die einzelnen Versuche fortlaufend protokolliert werden (s. auch nächstes Kapitel “Protokollführung und Darstellung von Messdaten”). Dieses Buch müssen Sie zu jedem Versuch mitbringen, sonst ist eine Durchführung nicht möglich!

Die Betreuer halten jede Woche Sprechstunden ab und stehen auch schon vor Praktikumbeginn für Fragen zur Verfügung. Zur Vor- und Nachbereitung stehen die Versuchsräume während des Semesters von Dienstag bis Donnerstag von 8:00 bis 18:00 Uhr, bzw. nach Absprache mit dem Praktikumsleiter oder dem Betreuer offen. Außerdem sind sie zu bestimmten Zeiten während der vorlesungsfreien Zeit geöffnet.

---

<sup>1</sup> Ab dem zweiten Praktikussemester geschieht dies in der Regel online.

## 2. Rollenverteilung innerhalb einer Gruppe

Innerhalb einer Gruppe gibt es unterschiedliche Rollen: Mess-, Protokoll- und Auswerteperson. Da pro Semester 6 Versuche zu absolvieren sind, nimmt jedes Mitglied jede Rolle zweimal ein. Die jeweilige Rollenverteilung wird vor Praktikumsbeginn bekannt gegeben.

Die **Messperson** übernimmt die Verantwortung für die Messungen. Sie muss sich bereits vor Versuchsbeginn durch einen Besuch des Versuchsraums und gegebenenfalls durch Rücksprache mit dem Betreuer informieren, wie der Versuchsaufbau funktioniert und was zu messen ist. Während des Versuchs koordiniert sie die Durchführung und verteilt die Messaufgaben innerhalb der Gruppe.

Die **Protokollperson** ist für das Messprotokoll, welches während des Versuchs aufgezeichnet wird, verantwortlich. Sie verwaltet für den jeweiligen Versuch das Protokollbuch und sorgt dafür, dass alles für den Versuch Notwendige (s. nächstes Kapitel) darin festgehalten und am Ende von allen Teilnehmern unterschrieben wird.

Die **Auswerteperson** hat die Verantwortung für die Auswertung, welche aus den während des Versuchs aufgezeichneten Daten anhand der in der Anleitung gestellten Aufgaben zu erstellen ist. Sie muss bereits vor Versuchsbeginn wissen, wie die Messwerte zu verarbeiten sind, so dass schon während der Messung mit einer vorläufigen Auswertung begonnen werden kann. Damit kann sie fehlerhafte und auch fehlende Messwerte idealerweise gleich erkennen und korrigierend in die Messung eingreifen.

Die endgültige Auswertung erfolgt für jeden Versuch in einem eigenen Auswertheft (s. Abschnitt 5 weiter unten). Dieses wird von allen Gruppenmitglieder gemeinsam verfasst, welche auch gleichermaßen dafür verantwortlich sind.

## 3. Vorbereitung

Zu Versuchsbeginn muss jeder Praktikumsteilnehmer hinreichend mit den theoretischen und praktischen Grundlagen des Versuchs vertraut sein. Laden Sie sich deshalb die entsprechende Versuchsanleitung von der eLearning-Seite rechtzeitig herunter und lesen und verstehen Sie **unbedingt** die angegebene Literatur! Der Umfang der erwarteten Kenntnisse orientiert sich an den in der Anleitung gestellten „Fragen zur Vorbereitung“, welche **vor** dem Versuch **schriftlich** im Protokollheft zu beantworten sind und welche vom jeweiligen Betreuer auch korrigiert werden. Die Versuchsvorbereitung muss so rechtzeitig erfolgen, dass noch Rückfragen möglich sind. Bei Unklarheiten ist der jeweilige Betreuer **vor** Versuchsbeginn zu konsultieren.

Für die Vorbereitung ist kein reines Formelwissen gefragt, sondern grundlegende Abhängigkeiten und Zusammenhänge. Das Wesentliche dieser Vorbereitung ist in die Versuchsauswertung (siehe später) in einer wohldurchdachten, knappen Zusammenfassung einzuarbeiten. Zur Vorbereitung sollen die Teilnehmer den Versuchsraum auch schon in den Wochen vor der eigentlichen Durchführung aufsuchen, um sich mit den Aufbauten vertraut zu machen und damit zu spielen, und um Fragen auszuräumen.

## 4. Betreuung und Versuchsdurchführung

Das Praktikum beginnt **pünktlich** zu den im Aushang angegebenen Zeiten. Kann ein Teilnehmer an einem Versuch aus entschuldbaren Gründen (z.B. Krankheit, Unfall, etc.) nicht teilnehmen oder ist eine nachvollziehbare Verspätung zu erwarten, so ist dies dem

Praktikumsleiter und dem Betreuer **unverzüglich** schriftlich, per email oder telefonisch mitzuteilen und später (z.B. durch Attest) auch nachzuweisen. Das nichtverhinderte Mitglied einer Praktikumsgruppe muss diesen Versuch dann in der Regel alleine durchführen und auswerten. Für die Nachholer wird typischerweise am Ende des Semesters ein gemeinsamer Nachholtermin vereinbart. Unentschuldigt zu spät kommende Teilnehmer werden von der Versuchsdurchführung ausgeschlossen.

Bringen Sie zum Versuch bitte immer das Auswertehemd mit Ihrer Vorbereitung und den beantworteten "Fragen zur Vorbereitung" sowie das Protokollbuch mit. **Auf keinen Fall** jedoch dürfen Sie ein Vorgängerheft, also eine Auswertung aus einem früheren Jahrgang mitbringen, weder in Heftform noch digital auf dem Handy oder Laptop! Die Verwendung einer solchen Auswertung stellt einen Betrugsversuch dar und Sie müssen damit rechnen, dass diese einbehalten und Sie vom weiteren Praktikum ausgeschlossen werden.

Vor Beginn des Versuchs erfolgt ein kurzer schriftlicher **Eingangstest**, welcher auf den "Fragen zur Vorbereitung" basiert.<sup>2</sup> Bei einem unzureichenden Ergebnis können sie am jeweiligen Versuch nicht teilnehmen und müssen diesen zu einem späteren Zeitpunkt nachholen. Danach erläutert der Betreuer den Praktikumsgruppen das Wesentliche der Messmethode und die Einzelheiten des Messvorganges, sowie die Bedienung der Messgeräte. Die jeweiligen Schwerpunkte und eventuelle Zusatzaufgaben werden ebenfalls bekannt gegeben. Außerdem wird der Betreuer im Rahmen einer tiefer gehenden Fragerunde feststellen, inwieweit die Teilnehmer die Grundlagen des Versuchs verstanden haben.

Die zum jeweiligen Versuch gehörenden Geräte und das sonstige Zubehör befinden sich im Allgemeinen am Arbeitsplatz. Achten Sie während des Versuchs auf folgende Punkte:

- Machen Sie sich zunächst in Ruhe mit den Einzelteilen und ihrer Bedeutung und Funktion für den Versuch vertraut. Nehmen Sie sich Zeit, um mit dem Aufbau zu spielen und erst einmal Testmessungen durchzuführen. Es soll gut und nicht schnell gemessen werden. Nutzen Sie die zur Verfügung stehende Zeit aus!
- Überlegen Sie sich, wie die Apparatur zusammenzubauen ist, **bevor** Sie an den Aufbau gehen. Gehen Sie bei elektrischen Schaltungen präzise nach dem Schaltplan vor, um Schaltfehler zu vermeiden. Vor dem Einschalten der Spannung müssen alle elektrischen Schaltungen durch den Betreuer überprüft werden.
- Bei Fragen oder sonstigen Unklarheiten ist der Betreuer zu Rate zu ziehen, wobei Sie aber auch immer eine gesunde Portion Mut und Eigeninitiative zum Ausprobieren zeigen sollten. Selbstständiges Arbeiten steht im Praktikum im Vordergrund!
- Bearbeiten Sie alle in der Anleitung und vom Betreuer angegebenen Aufgaben.
- Achten Sie auf ein vollständiges und nachvollziehbares Protokoll (für Näheres siehe das nächste Kapitel über Protokollführung).
- Nach Versuchsende muss der Arbeitsplatz ordentlich zurückgelassen werden.
- Nach Beendigung des Versuchs werden die Protokolle durch den Betreuer auf Vollständigkeit und, soweit möglich, auf Richtigkeit überprüft und ein Vortestat erteilt. Bei offensichtlich falschen oder schlechten Messergebnissen muss die jeweilige Gruppe nachmessen.

---

<sup>2</sup>Dieser Test kann gegebenenfalls auch bereits vor dem Versuchstermin online erfolgen, was Sie dann aber rechtzeitig vom Praktikumsleiter erfahren.

- Schäden, die an den Apparaturen festgestellt werden oder beim Versuch auftreten, melden Sie bitte **sofort** dem Betreuer, auch wenn der Versuch bereits beendet ist. Sie können dadurch eine schnelle Reparatur veranlassen, so dass auch die Gruppe nach Ihnen den Versuch durchführen kann.
- Es wird von Ihnen keine fehlerfreie Bedienung der Geräte erwartet, außerdem sind die meisten der verwendeten Aufbauten hinreichend robust. Bitte beachten Sie aber, dass Sie für Schäden, die durch grobe Fahrlässigkeit entstehen, haftbar gemacht werden können.

Sie sollen während des Praktikums weitgehend selbstständig arbeiten und Probleme auch selbst lösen. Der Betreuer wird nicht ständig anwesend, aber immer telefonisch oder persönlich erreichbar sein. Sie dürfen zu den unter Punkt 1 angegebenen Zeiten Versuche komplett oder teilweise wiederholen, wenn z.B. schlecht oder falsch gemessen wurde, oder auch einfach nur aus Interesse.

## 5. Messprotokoll und Auswertung

Das Messprotokoll ist ein Originaldokument und wird direkt ins Protokollbuch geschrieben. Außer in Diagrammen erfolgen alle Eintragungen mit Kugelschreiber oder Tinte. Alle Zusatzblätter sind ins Protokollbuch **einzukleben**. Nach dem Versuch wird das Messprotokoll von den Teilnehmern unterzeichnet.

Die gesamte Auswertung eines Versuchs wird in einem Auswertehefte im Format DIN A4 (zweckmäßigerverweise kariert) in Form eines Praktikumsberichtes festgehalten.<sup>3</sup> Lose Blätter sind dabei nicht erlaubt. Das Messprotokoll wird als Kopie aus dem Protokollbuch zusammengeheftet und beigelegt. Diagramme werden mit Bleistift auf Millimeter- oder Logarithmenpapier angefertigt, wobei alle Sonderpapiere außer Millimeterpapier vom Betreuer zur Verfügung gestellt werden. Die zu einer Gruppe gehörenden Teilnehmer fertigen einen gemeinsamen Bericht an, **für den alle gleichermaßen verantwortlich sind** und der deshalb auch gemeinsam erarbeitet wird.

Wesentliche Teile des Berichtes sind die Fehlerrechnung und die Diskussion der Ergebnisse. Wegen deren Wichtigkeit nicht nur speziell für das Praktikum, sondern für wissenschaftliches Arbeiten allgemein, sind dem Protokoll und der Fehlerrechnung jeweils eigene Kapitel gewidmet, deren genaues Studium für Sie unerlässlich ist.

Der Praktikumsbericht muss vollständig, übersichtlich und nachvollziehbar sein. Er ist **handschriftlich** anzufertigen und muss die Messwerte sowie alle für die Auswertung benötigten Daten enthalten und alle wesentlichen Berechnungen klar erkennen lassen. Ein solcher Bericht ist wichtiger Teil eines jeden Experimentes, da ohne ihn der Versuch sinnlos wird. Es müssen mindestens die folgenden Gliederungspunkte wiedergefunden werden:

- **Allgemeines:** Teilnehmer, Datum, Titel des Versuchs, Nummer des Versuchsortes
- **Einleitung, Ziel:** Worum geht es, Aufgabenstellung und Versuchsziel, Hinweis auf praktische Anwendungen. Formeln sind hier möglichst zu vermeiden.
- **Fragen zur Vorbereitung:** Alle in der Anleitung gestellten Fragen zur Vorbereitung müssen **vor** Versuchsbeginn schriftlich im Protokollheft beantwortet werden. Dies hilft Ihnen auch bei der Vorbereitung, da die Fragen so gestellt sind, dass sie Ihr Verständnis für den Versuch fördern.

---

<sup>3</sup>Da in der Regel mehr als ein Versuch zur Korrektur ist, werden Sie mehrere solche Hefte brauchen.

- als Kopie aus dem Protokollbuch:
    - **Messmethode und Versuchsaufbau:** Die gewählte Messmethode und der Versuchsaufbau sind zu skizzieren und zu erklären. Es müssen alle Messgeräte (mit den zugehörigen Messfehlern) und deren Bedeutung für den Versuch aufgeführt werden, bei elektrischen Schaltungen auch ein Schaltbild.
    - **Messprotokoll:** Die im nächsten Kapitel ausführlich erklärte und während des Versuchs aufgezeichnete Mitschrift. Dies ist das für den Versuch wichtigste Dokument. Was hier nicht aufgeführt ist, kann auch nicht ausgewertet werden! Das Protokoll muss vollständig und nachvollziehbar sein, es ist nicht nur eine Ansammlung von Messwerten, sondern auch eine Tätigkeitsbeschreibung mit kurzem Bericht über den Ablauf des Versuchs. Schwierigkeiten sind besonders hervorzuheben.
  - **Auswertung mit Fehlerrechnung und Diskussion:** Die Messwerte sind gemäß den in der Versuchsanleitung gestellten Aufgaben auszuwerten. Die hierzu nötigen physikalischen Gesetzmäßigkeiten und Formeln müssen angegeben und erklärt, die benutzten Symbole definiert werden. Alle Rechnungen müssen nachvollziehbar sein. Die Fehlerquellen (systematische, statistische Fehler) sind zu diskutieren und es muss eine Fehlerrechnung durchgeführt werden. Die Ergebnisse sind als Grafiken und/oder in Tabellenform anzugeben, wobei auf vollständige und richtige Beschriftung zu achten ist. Die Endergebnisse mit ihren Fehlern müssen klar ersichtlich sein (unterstreichen, **hervorheben**, **umrahmen**).
- Messwerte und daraus resultierende Ergebnisse haben immer einen Fehler. Ein Messergebnis ohne Fehler hat keinen Aussagewert.**
- Siehe hierzu unbedingt das gesonderte Kapitel über Fehlerrechnung.
- Abschliessend sind die gewonnenen Ergebnisse einer kritischen Diskussion zu unterziehen und mit dem erwarteten Ausgang des Experiments zu vergleichen. Wenn immer möglich, wie z.B. bei der Bestimmung von Material- oder Naturkonstanten, werden die Ergebnisse mit Literaturwerten verglichen, wobei die verwendete Literatur natürlich anzugeben ist.
- Die Ergebnisse eines Versuchs müssen immer diskutiert werden.**
- **Zusammenfassung, Fazit, Ausblick:** Abschließend sollte der Versuch noch einmal kurz zusammengefasst und ein Fazit z.B. über das Gelernte und dessen Bedeutung für die Physik gezogen werden.

## 6. Vortestat, Fristen, Korrektur und Wiederholung

Sind die Messungen abgeschlossen, wird der Betreuer das Versuchsprotokoll und die Messwerte kurz durchsehen und, bei befriedigender Ausführung und nachdem der Arbeitsplatz aufgeräumt ist, ein Vortestat erteilen. Sie müssen dann den vollständigen Praktikumsbericht **spätestens 7 Tage** (also eine Woche) nach Durchführung des Versuchs bis 17:00 Uhr beim Betreuer abgeben, wobei ein Bericht ohne vortestiertes Messprotokoll nicht angenommen wird. Die Berichte werden vom Betreuer innerhalb von zwei Wochen nach den im folgenden Abschnitt definierten Gesichtspunkten korrigiert und bewertet.

Muss ein Versuch aufgrund von Krankheit oder anderen entschuldbaren Umständen wiederholt werden, so geschieht dies in Absprache mit dem jeweiligen Betreuer zum frühest-

möglichen Zeitpunkt. Spätestens jedoch muss der Versuch in der vorletzten Vorlesungswoche nachgeholt werden. Wiederholungen aus anderen Gründen (unentschuldigtes Fehlen, Nichteinhalten der Fristen) sind frühestens dann möglich, wenn der jeweilige Versuch wieder angeboten wird. Dies wird in der Regel erst das jeweils nächste Sommer- oder Wintersemester sein.

## 7. Beurteilung der Praktikumsleistung, Testat

Auf einen Praktikumsbericht werden maximal 20 Punkte vergeben. Diese verteilen sich wie folgt auf die verschiedenen Teile:<sup>4</sup>

Form:	2 Punkte
Messprotokoll/Versuchsaufbau/Versuchsdurchführung: (Ausnahme: Elektronikversuche El1, El2, El3)	4 Punkte 6 Punkte)
Bearbeitung der Aufgaben: (Ausnahme: Elektronikversuche El1, El2, El3)	14 Punkte 12 Punkte)
<b>Gesamt:</b>	<b>20 Punkte</b>

Es wird nach folgenden Kriterien beurteilt:

- Form: Insbesondere wird auf folgendes Wert gelegt:
  - Sind Namen, Datum, Versuchsplatz angegeben?
  - Ist die im vorletzten Abschnitt angegebene Gliederung wiederzuerkennen?
  - Sind die einzelnen Versuchsteile mit Nummerierung und Überschrift versehen?
  - Ist die Auswertung korrigierbar (Lesbarkeit, Rand, zweizeilig)?
  - Sind alle Zusatzpapiere eingeklebt?
  - Sind die Ergebnisse (mit Fehler) auffindbar (unterstrichen, eingerahmt, etc.)?
- Versuchsprotokoll/Versuchsaufbau/Versuchsdurchführung: Während der Versuchsdurchführung ist gemäß den im nächsten Kapitel aufgeführten Hinweisen ein vollständiges und nachvollziehbares Messprotokoll anzufertigen. Dies erfolgt direkt im Protokollbuch. Aus dem Protokoll müssen die einzelnen Schritte der Versuchsdurchführung ersichtlich sein.

Eine genaue Beschreibung des Versuchsaufbaus (mit Skizze und/oder Schaltplan) und der Messgeräte (einschließlich deren Unsicherheiten) ist ebenfalls ein wesentlicher Bestandteil des Messprotokolls.

Eine mangelnde Qualität der Messungen und damit der Messergebnisse wird dann beurteilt, wenn dies auf eine ungenügende Vorbereitung zurückzuführen ist.

- Bearbeitung der Aufgaben: Alle im Praktikumsskript angegebenen Aufgaben sowie im Text gestellte Zusatzfragen müssen nachvollziehbar, vollständig und richtig bearbeitet worden sein; es muss klar sein, was getan wurde. Es kann nur bearbeitet werden, was im Messprotokoll aufgezeichnet wurde. Die Messergebnisse sind möglichst in Tabellenform darzustellen. Wenn nicht anders angegeben, ist eine Feh-

<sup>4</sup>Beim Versuch Mes gehen die "Fragen zur Vorbereitung" mit bis zu 4 Minuspunkten in die Bewertung ein, s. weiter unten.

lerrechnung durchzuführen. Alle Ergebnisse müssen diskutiert und, wenn möglich, mit Literaturwerten (mit Quellenangabe) verglichen werden.

Die zur Auswertung benötigten physikalischen Gesetzmäßigkeiten und Formeln müssen angegeben und erklärt werden, wobei keine Herleitung verlangt, aber die Quelle anzugeben ist. Die verwendeten Messtechniken sind ebenfalls zu erklären, sofern dies noch nicht im Messprotokoll geschehen ist.

- Vorbereitung, Verständnis: Zu Beginn eines Praktikumsversuchs wird Ihre Vorbereitung und Ihr Verständnis des Versuchs durch einen schriftlichen Eingangstest und durch gezielte Fragen des Betreuers überprüft. Ebenso wird Ihre Fähigkeit zur selbstständigen Versuchsdurchführung beurteilt. Hierfür können bis zu 4 Minuspunkte vergeben werden, wobei das Ergebnis des Tests anteilmäßig in die Bewertung einfließt (Ausnahme: Versuch Mes, hier werden die Fragen zur Vorbereitung mit bis zu 4 Minuspunkten bewertet).

Insgesamt muss der Bericht nachvollziehbar sein. Alle Versuchs- und Aufgabenteile müssen bearbeitet worden sein, auch Zusatzfragen des Betreuers. Es wird darauf geachtet, dass nichts offensichtlich Falsches in Ihrem Bericht steht.

Etwa 2 Wochen nach der Abgabe können Sie die korrigierten Hefte während der Sprechzeiten gruppenweise bei Ihrem Betreuer abholen und Sie erhalten ein Testat. Dabei wird die Auswertung mit Ihnen durchgesprochen und diskutiert. Bitte achten Sie darauf, dass die Gesamtpunktzahl sowohl auf der Testatkarte als auch im Heft vermerkt wird.

Zur Verbesserung Ihrer Punktzahl kann der Auswerteteil für jeden Versuch **einmal** nachgebessert werden. Bitte sprechen Sie Abgabe- und Rückgabetermin für diese Verbesserung individuell mit dem jeweiligen Betreuer ab.

Beachten Sie folgende Mindestanforderungen um ein Testat zu erhalten:

- Jeder Praktikumsteilnehmer muss **pünktlich** zu Praktikumsbeginn (Zeiten s. Aushang) anwesend sein, da zu Beginn ein Eingangstest stattfindet und eine Einweisung in die Geräte erfolgt.
- Der Eingangstest muss mit mindestens 2 von 5 Punkten bestanden werden.
- Der Praktikumsbericht muss **spätestens 7 Tage** (also eine Woche) nach Durchführung des Versuchs **bis 17:00 Uhr** beim Betreuer abgegeben werden, wobei eine Auswertung ohne vortestiertes Messprotokoll nicht angenommen wird. Bei einer zu späten Abgabe wird jeder zusätzliche Tag mit 2 Minuspunkten bewertet!

## 8. Bestehen des Praktikums

Um das Praktikum zu bestehen, muss jeder Versuch mit mindestens 10 Punkten bewertet worden sein. Dies wird durch die Testatkarte nachgewiesen, welche Sie fertig ausgefüllt beim Praktikumsleiter abgeben müssen. Das Ergebnis wird dann dem Prüfungsamt übermittelt. Das Grundpraktikum wird nicht benotet.

## 9. Literaturangaben zu den Versuchen

Die theoretischen Abschnitte der Versuchsanleitungen sind bewusst knapp gehalten. Dafür sind bei jedem Versuch Literaturhinweise zur Erarbeitung der jeweiligen Grundlagen an-

gegeben. Das Studium mindestens eines dieser Lehrbücher ist zur Versuchsvorbereitung zwingend erforderlich. Dabei genügt es nicht, die angegebenen Abschnitte durchzulesen, der Inhalt muss auch verstanden worden sein.

Die Bücher finden Sie im Semesterapparat oder in der Lehrbuchsammlung der Bibliothek im NWII. Einige Ausgaben davon (BS, Gerthsen, EKS, Tipler, HBG) sind über die Universität Bayreuth online lesbar.

Die Standardlehrbücher sind mit Abkürzungen zitiert. Dabei bedeuten:

BS: Bergmann, Schaefer: "Lehrbuch der Experimentalphysik",  
Band 1, 12. Auflage (2008); Band 2, 8. Auflage (1999);  
Band 3, 10. Auflage (2004); Band 4 (1992)

Gerthsen: Meschede: "Gerthsen Physik", 25. Auflage (2015)

EKS: Eichler, Kronfeld, Sahm: "Das Neue Physikalische Grundpraktikum",  
2. Auflage (2006)

Berkeley: "Berkeley Physikkurs", Band 1, 5. Auflage (1991);  
Band 2, 4. Auflage (1989); Band 3, 3. Auflage (1989);  
Band 5, 2. Auflage (1981); Band 6, 2. Auflage (1980)

Tipler: Tipler, Mosca: "Physik für Naturwissenschaftler und Ingenieure",  
6. Auflage (2009)

und speziell für die Elektronikversuche:

HBG: Hering, Bressler, Gutekunst: "Elektronik für Ingenieure und  
Naturwissenschaftler", 6. Auflage (2014)

HH: Horowitz, Hill: "Die Hohe Schule der Elektronik"  
Teil 1: Analogtechnik, 6. Auflage (2001); Teil 2: Digitaltechnik (1996)  
Englische Originalausgabe: "The Art of Electronics"

TS: Tietze, Schenk: "Halbleiterschaltungstechnik", 6. Auflage (1983)

Falls Sie andere Ausgaben verwenden, müssen Sie sich die entsprechenden Abschnitte u.U. selbst heraus suchen. Im Prinzip werden die hier im Grundpraktikum behandelten Thematiken aber in den meisten Physiklehrbüchern besprochen.

# Protokollführung und Darstellung von Messdaten

Die folgenden Hinweise sind nicht nur fürs Grundpraktikum wichtig, Sie werden diese auch für weiterführende Praktika und spätere wissenschaftliche Arbeiten nützlich finden. Das frühzeitige Erlernen einer guten Protokollführung wird Sie vor vielen Fehlern und zahlreichen Zusatzmessungen bewahren und ist weiterhin die Grundlage für eine gute Auswertung. Machen Sie sich in diesem Zusammenhang immer bewusst, dass ein Experiment ohne Auswertung nicht sehr sinnvoll ist.

## 1. Allgemeines zur Protokollführung

“Schreib alles auf; gerade wenn etwas sich zuträgt, glaubt man es nie zu vergessen, weil die Gegenwart glänzt; aber die nächste tut es auch und dann vergisst man.”

Jean Paul

Bei jedem Experiment ist es von wesentlicher Bedeutung, ein fortlaufendes Protokoll zu führen, und zwar über alles was geschieht. Nur so kann ein Experiment überhaupt sinnvoll ausgewertet werden. Der Versuch, die Experimentbedingungen und -einstellungen im Nachhinein rekonstruieren zu wollen ist fehlerbehaftet und wird in der Regel fehlschlagen. Deshalb dürfen nur die während des Experiments gemachten Aufzeichnungen zur Versuchsauswertung verwendet werden. Diese Aufzeichnungen sollen klar, knapp, vollständig und nachvollziehbar sein.

Ein Messprotokoll besteht nicht nur aus einer Ansammlung von Messwerten, sondern beinhaltet neben einer Beschreibung des Versuchsaufbaus mit Skizze und/oder Schaltplan auch eine Tätigkeitsbeschreibung mit kurzem Bericht über den Ablauf des Versuchs. Weiterhin gehören die Einstellungen der verschiedenen Messgeräte sowie die Versuchsbedingungen und besondere Vorfälle ins Messprotokoll. Alle Einträge müssen datiert werden und sind mit Tinte oder Kugelschreiber auszuführen, da ein Protokoll ein Dokument ist.

**Ein Protokoll sollte auch nach längerer Zeit noch ohne Schwierigkeiten interpretiert werden können.**

Das Protokoll ist in einem gebundenen Heft oder Buch anzufertigen.<sup>1</sup> Dies hat den Vorteil, dass Sie immer wissen wo alles steht, dass nichts durcheinander gebracht werden kann, und dass es keine losen Zettel gibt, die Sie verlegen können. Weiterhin gilt ein Buch (insbesondere mit durchnummerierten Seiten) als fälschungssicher und ist auch leichter zu lesen als einzelne Blätter. Zusätzlich verwendete Zettel werden ins Buch eingeklebt. Das Messprotokoll wird nach jedem Versuch von den Teilnehmern unterschrieben.

## 2. Aufzeichnung der Messwerte

Eine physikalische Größe  $G$  besteht immer aus einem Zahlenwert  $\{G\}$  und einer Einheit  $[G]$  und wird auch immer als Produkt aus Zahlenwert und Einheit geschrieben (hier als Beispiel ein elektrischer Widerstand):

$$G = \{G\} \cdot [G] \quad \text{Beispiel : } R = 5000 \Omega = 5 k\Omega \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Im Grundpraktikum verwenden Sie für alle Versuche ein fortlaufendes Protokollbuch, aus dem Sie die jeweiligen Seiten für die Auswertung heraus kopieren.

Alle Messwerte müssen *sofort* und *direkt* aufgezeichnet werden. Führen Sie keinerlei Rechenoperationen — auch nicht die allereinfachsten — mit einer Ablesung durch, bevor diese niedergeschrieben wurde. Ein dabei auftretender Fehler kann niemals berichtet werden. Nach dem Aufzeichnen sollten Sie das gerade Geschriebene durch einen Blick auf das Instrument noch einmal überprüfen:

**ablesen → aufschreiben → prüfen.**

Notieren Sie immer, mit **welchen Geräten** und **sonstigen Bauteilen** die Messungen **durchgeführt** (z.B. durch die Seriennummern) und welche **Geräteeinstellungen** verwendet wurden. So lässt sich bei schlechten Ergebnissen später leichter feststellen, ob vielleicht ein fehlerhaftes Instrument oder eine falsche Einstellung die Ursache war.

Tragen Sie die Messwerte immer **direkt** ins Protokollbuch ein, und nicht zunächst auf ‘Schmier’-Zetteln, um sie dann später in ein ‘sauberes’ Protokoll zu übertragen. Letzteres ist nicht nur Zeitverschwendungen, es stellt auch eine nicht wieder zu berichtigende Fehlerquelle dar. Außerdem könnte man geneigt sein, offensichtlich oder scheinbar ‘falsche’ oder ‘unsinnige’ Werte auszusortieren. Auch wenn es bei der Auswertung vernünftig sein kann, eine Auswahl aus den Messwerten zu treffen, müssen alle Originalmesswerte erhalten bleiben. Zum einen ist eine **solche Auswahl** immer zu begründen, zum anderen könnte aufgrund neuer Erkenntnisse diese Auswahl zu einem späteren Zeitpunkt anders ausfallen.

**Die Ergebnisse können nur anhand der vollständigen Originaldaten rekonstruiert und diskutiert werden.**

Bei einem Protokoll ist die Klarheit wichtiger als das saubere Aussehen. Verwenden Sie Überschriften und Zwischenüberschriften. Trennen Sie verschiedene Themen und Messungen klar voneinander ab. Heben Sie Ihre wichtigen Ergebnisse hervor, z.B. durch Umrahmen oder Unterstreichen. Gehen Sie nicht zu sparsam mit dem Papier um und schreiben Sie lieber zu viel als zu wenig. Vermeiden Sie unklare oder mehrdeutige Beschreibungen und Ausdrucksweisen, es sollte zum Beispiel kein Zweifel entstehen, welcher Wert von Ihnen gemessen wurde, und welcher der Literaturwert ist. Überschreiben Sie schwer lesbare oder fehlerhafte Eintragungen nicht, sondern streichen Sie diese unter Zufügung eines Kommentars durch und schreiben das richtige Ergebnis daneben.

### 3. Tabellen

Messungen sollten immer in Tabellenform protokolliert werden, wobei Messwerte der gleichen Größe untereinander aufgezeichnet werden und die unabhängige Größe ganz links steht. Im Kopf jeder Spalte steht der Name und/oder das Symbol der Größe sowie die jeweilige Einheit. Die Tabelle selbst enthält dann nur noch reine Zahlen. Falls aus den Messwerten später weitere Größen berechnet werden müssen, können für diese bereits Spalten in den Tabellen reserviert werden. Es muss dann aber klar aus dem Protokoll hervorgehen, welche Werte direkt gemessen und welche berechnet wurden. Weiterhin sollte jede Tabelle einen Titel und zur leichteren Referenz auch eine Nummer tragen.

Das Beispiel in Tab. P.1 zeigt einen Ausschnitt aus einer Messwertetabelle. Die Werte der Spalte 1 wurden eingestellt, die Werte der Spalten 2 und 4 wurden gemessen und die Werte der Spalten 3 und 5 wurden berechnet.

Frequenz $f / 10^3 \text{ Hz}$	$C_N / \text{nF}$	$\epsilon'_r C_0 / \text{nF}$ (berechnet)	$R_N / \Omega$	$\epsilon''_r C_0 / \text{nF}$ (berechnet)
9	125	6,2	122	7,2
10	112	5,6	114	7,0
15	73	3,7	95	5,6
20	54	2,7	87	4,6
30	32	1,6	78	3,4
40	25	1,3	75	2,7
50	22	1,1	74	2,2
70	18	0,9	71	1,6
90	16	0,8	70	1,3

Tabelle P.1: Abgleichwerte  $C_N$ ,  $R_N$  als Funktion der Frequenz für Kondensator 3 bei  $-6^\circ\text{C}$ .

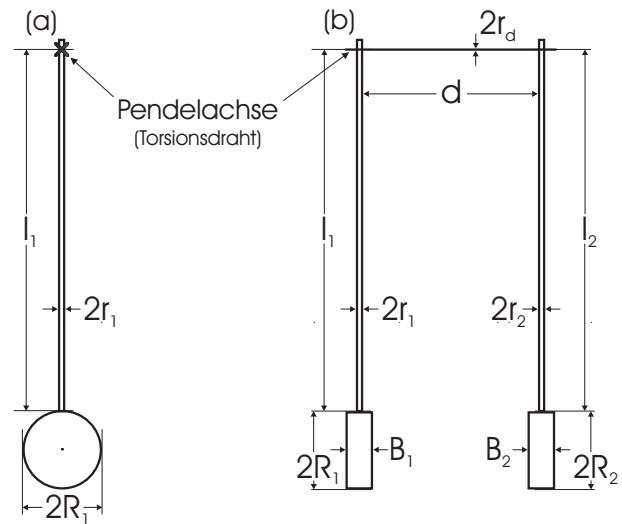
## 4. Skizzen und Abbildungen

“Ein Bild sagt mehr als tausend Worte.”

In Verbindung mit einigen erklärenden Worten ist eine schematische Darstellung häufig das einfachste und wirksamste Mittel zur Erklärung des Prinzips eines Experiments, der Beschreibung einer Apparatur oder der Einführung von Bezeichnungen. Eine Skizze des Versuchsaufbaus gehört zwingend zum Protokoll, im Falle elektrischer Schaltungen ist ein Schaltplan nötig. Die Abbildung muss keine kunstvolle oder naturgetreue Wiedergabe der Apparatur und auch nicht maßstabsgetreu sein. Oft kann eine verzerrte Darstellung sogar hilfreich zur Klarstellung eines bestimmten Punktes sein.

Das folgende Beispiel zeigt die schematische Darstellung eines Doppelpendels aus zwei verschiedenen Ansichten. Dabei werden auch die Größen eingeführt, welche für die spätere Auswertung wichtig sind und gemessen werden müssen.

Abbildung P.1: Schematische Darstellung der verwendeten Pendel und Bezeichnung der Messgrößen. (a) Frontansicht der Doppelpendel (die beiden Pendel befinden sich hintereinander). (b) Seitenansicht der beiden Pendel (nun nebeneinander).



## 5. Graphische Darstellung der Messergebnisse

**Wichtige Anmerkung:** Mit den Messpunkten müssen prinzipiell auch immer die zugehörigen Fehlerbalken eingezeichnet werden. Da es in diesem Abschnitt aber hauptsäch-

lich um die technischen Einzelheiten von Abbildungen geht, wird hier bewusst auf Fehlerbalken verzichtet, um die Zeichnungen nicht zu überladen. Messfehler und Fehlerbalken werden ausführlich im nächsten Kapitel “Fehlerrechnung” diskutiert.

Wenn immer möglich, sollten Ihre Messergebnisse in Form einer graphischen Darstellung präsentiert werden. Solche Darstellungen ermöglichen einen raschen Überblick über die Messdaten, zeigen ob zwischen den Größen ein funktionaler Zusammenhang besteht und geben einen ungefähren Hinweis auf die Form dieses Zusammenhangs. Auch im Praktikum, wo die theoretischen Beziehungen ja meist bekannt sind, erfolgt die experimentelle Überprüfung von Beziehungen oder die indirekte Bestimmung von Größen häufig aus grafischen Darstellungen, insbesondere aus Geradensteigungen und dem dazu gehörigen Achsenabschnitt. Beim Zeichnen sind folgende Regeln zu beachten:

- Es hat sich fest eingebürgert, die unabhängige Variable, also die Größe die vorgegeben wird, entlang der horizontalen Achse (Abszisse,  $x$ -Achse) aufzutragen. Die abhängige Variable, also die Größe deren Wert bestimmt wird, wird entlang der vertikalen Achse (Ordinate,  $y$ -Achse) aufgetragen. Anders ausgedrückt tragen Sie die Ursache entlang der  $x$ -Achse und die Wirkung entlang der  $y$ -Achse auf.
- Die Achsenteilung wird so gewählt, dass die Koordinaten jedes Punktes schnell und leicht aus der Zeichnung ermittelt werden können (vgl. Abb. P.2b mit Abb. P.2a).
- Außerdem ist die Achsenteilung so zu wählen, dass die Messpunkte einen möglichst großen Teil des verfügbaren Platzes einnehmen (vgl. Abb. P.2c mit Abb. P.2a). Der Nullpunkt (Koordinatenursprung) muss nicht in der Graphik enthalten sein und ist es in den meisten Fällen sinnvollerweise auch nicht.
- Des Weiteren sollte die Teilung der Achsen einfach sein, d.h. 1 cm des Zeichenpapiers entspricht 1 Einheit (oder 10, 100, 0,1 Einheiten, usw.) der gemessenen Größe. Die nächststeinfachen Teilungen sind die, bei denen 1 cm 2 oder 5 Einheiten entspricht. Jede weitere Teilung sollte vermieden werden, da sonst das Einzeichnen von Punkten bzw. das Auslesen von Koordinaten schwierig und damit fehlerbehaftet ist.
- Die Variablen werden oft so gewählt, dass die zu erwartende Messkurve einer **Geraden** nahe kommt. Wird z.B. die Periodendauer  $T$  eines Fadenpendels als Funk-

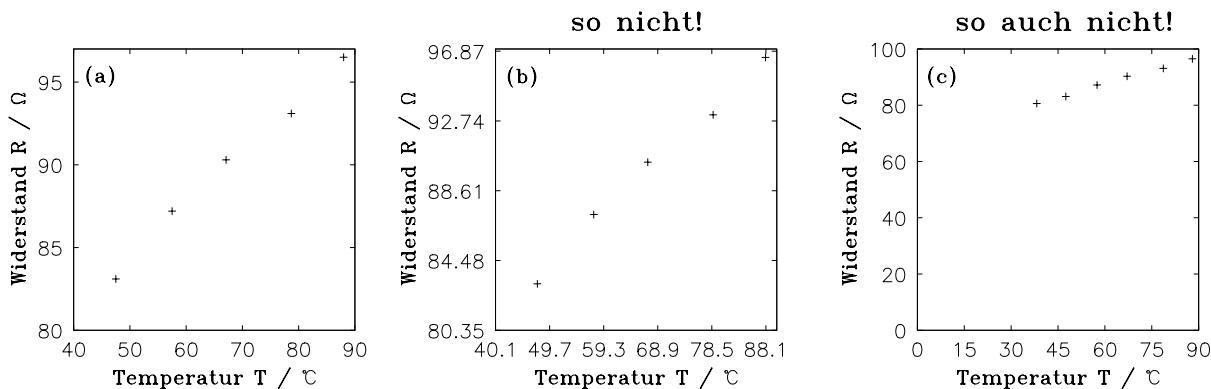
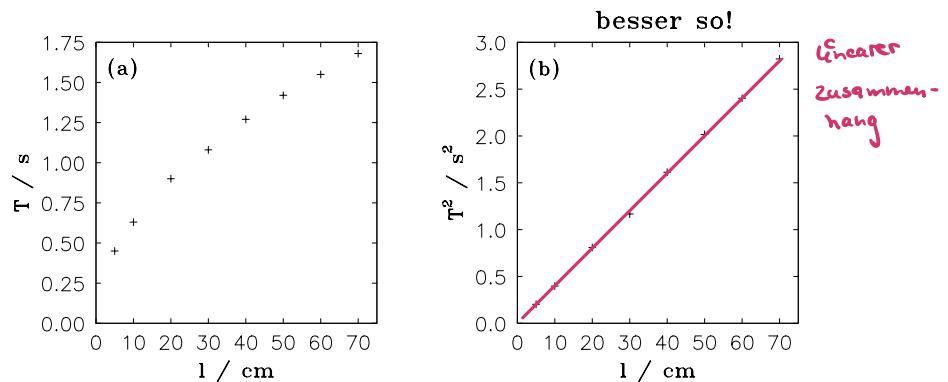


Abbildung P.2: Beispiele für die Wahl der Achseneinteilung bei einer graphischen Darstellung. Nur im Fall (a) wurde eine sinnvolle Einteilung gewählt.

Abbildung P.3: (a) Die direkt gemessenen Größen führen zu einer nichtlinearen Abhängigkeit. (b) Bei geschickter Wahl der Variablen ergeben die Messpunkte eine Gerade.



tion der Pendellänge  $l$  und der Erdbeschleunigung  $g$  gemessen, so erwartet man  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Anstatt  $T$  gegen  $l$  aufzutragen (Abb. P.3a) ist es besser  $T^2$  gegen  $l$  aufzutragen (Abb. P.3b), da dann aus dem Anstieg  $a = 4\pi^2/g$  der Geraden die gesuchte Erdbeschleunigung bestimmt werden kann.

- Die Achsen sind vollständig zu beschriften. Hierzu gehört als Titel der jeweiligen Achse die Größe die gezeigt wird zusammen mit ihrer Einheit (wie im Kopf einer Tabelle) sowie die Zahlenwerte der Größe entlang der Achse. Als Beispiele dienen die Abb. P.2 und P.3.

Bei Einhaltung dieser Regeln wird die resultierende Kurve etwa unter  $45^\circ$  verlaufen.

### Lineare und nichtlineare Skalen

In den meisten Fällen werden Sie es bei graphischen Darstellungen mit linearen Skalen zu tun haben. Hier ist der Abstand zweier Punkte auf dem Papier proportional zum tatsächlichen Abstand der dazugehörigen Werte. Gleiche Abstände auf dem Papier entsprechen also gleichen Abständen zwischen zwei Werten. Mathematisch lässt sich das so ausdrücken, dass einem (dimensionsbehafteten) Messwert  $x_m$  auf dem Papier die Länge  $l_x$  wie folgt zugeordnet wird:

$$l_x = l_e \cdot x_m \quad (2)$$

$l_e$  ist dabei die Einheitslänge der Skala und ist im Allgemeinen auch dimensionsbehaftet. Abbildungen P.2 und P.3 sind Beispiele für lineare Skalen. Für Abb. P.2(a) ist die Einheitslänge der  $x$ -Achse durch  $l_e = 37 \text{ mm}/50^\circ\text{C} = 0,74 \text{ mm}/^\circ\text{C}$  gegeben. Zum Auftragen der Daten mit linearen Skalen ist im Praktikum **immer** Millimeterpapier zu verwenden. Bei nichtlinearen Skalen besteht **kein** proportionaler Zusammenhang zwischen dem Wert und der entsprechenden Länge auf dem Papier. Mathematisch drückt sich das so aus, dass die Einheitslänge nicht einfach mit dem Messwert multipliziert wird, um  $l_x$  zu erhalten, sondern mit einer Funktion  $g$  des Messwertes:

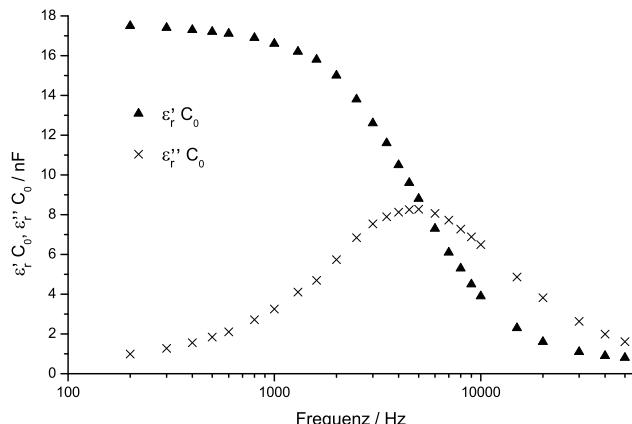
$$l_x = l_e \cdot g(x_m) \quad (3)$$

Die am häufigsten verwendete nichtlineare Skala, und für das Praktikum auch die wichtigste, ist der Logarithmus  $g(x) = \log(x)$ . Für ihn gilt:

$$g(10^{n+1}) - g(10^n) = \log(10^{n+1}) - \log(10^n) = (n+1)\log(10) - n\log(10) = \log(10) \quad (4)$$

Bei einer logarithmisch geteilten Skala wächst also beim Fortschreiten um die Länge  $l_e \cdot \log(10)$  (beim dekadischen Logarithmus ist dies genau die Einheitslänge  $l_e$ ) der Funktionswert  $x$  um eine Größenordnung. Die Wahl der Einheitslänge ist willkürlich und er-

Abbildung P.4: Beispiel einer logarithmischen Skala (hier die  $x$ -Achse). Gezeigt sind die beiden Anteile der komplexen Permittivität von Eis als Funktion der Frequenz.



folgt nach den gleichen praktischen Kriterien wie oben angeführt. Zum Auftragen solcher Abhängigkeiten wird im Praktikum logarithmisches oder doppelt-logarithmisches Papier verwendet, bei dem im ersten Fall eine Achse und im zweiten Fall beide Achsen eine logarithmische Teilung besitzen. Dieses Papier wird Ihnen vom Betreuer ausgehändigt. Logarithmische Skalen sind besonders dann sinnvoll, wenn eine Größe ihren Wert um mehrere Größenordnungen ändert, oder wenn zwischen den Variablen ein exponentieller Zusammenhang besteht. Im ersten Fall ist meist überhaupt nur mit einer logarithmischen Skala eine vernünftige Darstellung möglich. Abbildung P.4 zeigt als Beispiel die komplexe Permittivität von Eis. Hier variiert die Frequenz von 200 Hz bis 50 kHz. Man beachte, dass auf dem Papier der Abstand zwischen 100 Hz und 1000 Hz genauso groß ist wie der zwischen 1000 Hz und 10000 Hz.

Für den Fall eines exponentiellen Zusammenhangs betrachte man z.B. die Abhängigkeit der kinematischen Viskosität  $\nu$  einer Flüssigkeit von der Temperatur  $T$ :

$$\nu = D \cdot e^{T^*/T} \quad (5)$$

mit den Konstanten  $D$  und  $T^*$ . Die Viskosität steigt also exponentiell mit  $1/T$  an, was bei einer direkten Auftragung von  $\nu$  gegen  $T$  fast unmöglich mit dem Auge zu erkennen ist. Trägt man hingegen  $\nu$  logarithmisch gegen  $1/T$  auf, so erhält man wegen

$$\ln\left(\frac{\nu}{D}\right) = T^* \cdot \left(\frac{1}{T}\right) \quad (6)$$

eine lineare Abhängigkeit mit der Geradensteigung  $T^*$ . Um den Logarithmus nicht explizit berechnen zu müssen, verwendet man logarithmisches Papier.

Eine weitere Anwendung ist ein Potenzgesetz der Form  $y = y_0 x^p$  mit unbekanntem Exponenten  $p$  oder wenn der Exponent experimentell überprüft werden soll. So besagt das Hagen–Poiseuillesche Gesetz für viskose Flüssigkeiten, dass die pro Zeiteinheit durch ein Rohr strömende Flüssigkeitsmenge mit der vierten Potenz des Rohrradius  $r$  ansteigt. Dies kann so umformuliert werden, dass für eine wohldefinierte Apparatekonstante  $K$  gilt:

$$K = a \cdot r^4 \quad (7)$$

mit der Proportionalitätskonstanten  $a$ . Trägt man das gemessene  $K$  doppelt-logarithmisch gegen  $r$  auf, so erwartet man also eine Gerade mit der Steigung 4.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Gleichung (7) kann umgeschrieben werden in  $\frac{K}{ar_0^4} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^4$  mit einem Referenzradius  $r_0$ . Aus  $\log\left(\frac{K}{ar_0^4}\right) = 4 \cdot \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$  folgt dann die gewünschte Abhängigkeit.

Beachten Sie, dass das Argument des Logarithmus (wie auch der Exponentialfunktion) keine Dimension hat. Wenn Sie also mit dimensionsbehafteten Größen arbeiten, müssen Sie das Argument wie in den oben angegebenen Beispielen geeignet ent-dimensionalisieren. Messen Sie z.B. eine Auslenkung  $A$  in Metern, so dürfen Sie nicht  $\ln(A)$  schreiben, sondern entweder  $\ln(A/m)$  oder  $\ln(A/A_0)$  mit einem Referenzwert  $A_0$  (s. Abb. P.7).

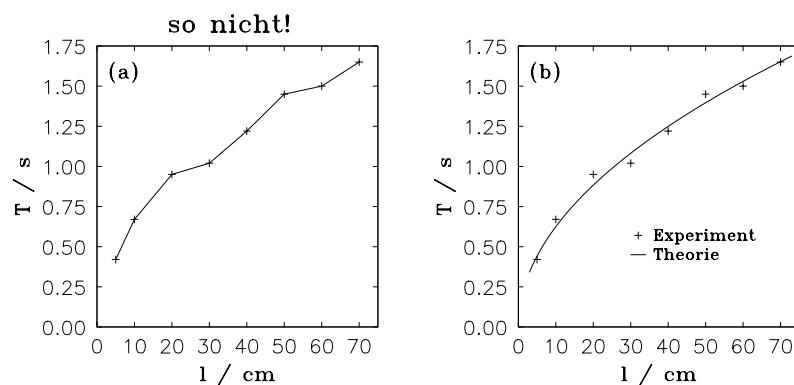
### Zeichnen von Messpunkten und Kurven

Die Messpunkte werden deutlich durch entsprechende Symbole gekennzeichnet, wobei für verschiedene Messreihen auch verschiedene Symbole zu wählen sind (s. Abb. P.4). Wird eine theoretisch erwartete Kurve durch die Punkte gelegt, oder auch einfach nur fürs Auge eine Kurve eingezeichnet, so wird diese normalerweise die Form einer durchgezogenen Linie haben und sich optisch deutlich von den Messpunkten absetzen. Dabei sind folgende Grundsätze zu beachten, welche anhand der Abb. P.5 veranschaulicht werden:

- Bei den meisten physikalischen Messungen werden glatte Kurven erwartet, man sollte also nie die Messpunkte in Art einer ‘Fieberkurve’ wie in Abb. P.5(a) verbinden.
- Die Kurve sollte möglichst wenig Wendepunkte haben.
- Die Kurve sollte so nah wie möglich an den Messpunkten verlaufen.
- Es ist nicht nötig, dass die Kurve überhaupt einen Messpunkt enthält und völlig unnötig, dass sie in einem der Messpunkte endet. Gerade die Endpunkte sind oft die ungenauesten Werte, da sie entweder durch die Grenzen der Messinstrumente oder der Messmethode bedingt sind.
- Etwa die Hälfte der Messpunkte sollte oberhalb und unterhalb der Kurve liegen, und zwar auch in Teilstücken der Kurve.

Einer beliebig freihand eingezeichneten Kurve ist natürlich immer ein Fit des theoretisch erwarteten Gesetzes an die Messwerte (wie in Abb. P.5b für die Schwingungsdauer des Fadenpendels) vorzuziehen. **In jedem Fall muss die Bedeutung der Kurve in der Bildunterschrift erklärt werden!**

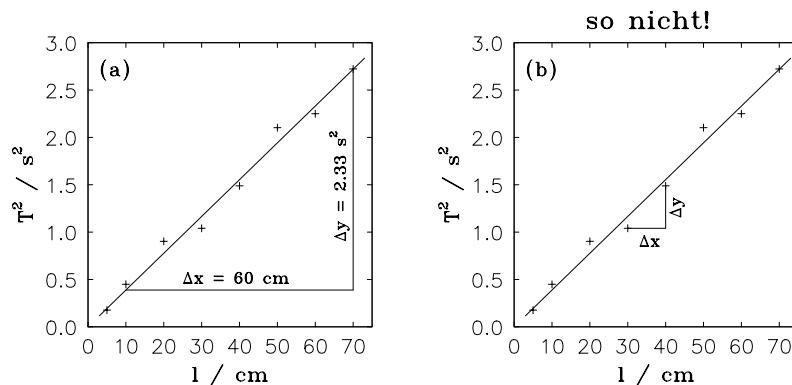
Abbildung P.5: (a) Die Zeichnung impliziert, dass eine Abhängigkeit gemäß der Zackenform besteht, was äußerst unwahrscheinlich ist. (b) Die Kurve ist ein Fit des theoretisch erwarteten Gesetzes an die Messpunkte.



### Graphisches Auswerten

Unter graphischem Auswerten versteht man das Herauslesen wichtiger Ergebnisse aus den nach oben diskutierten Regeln angefertigten Zeichnungen. Es können einzelne Punkte

Abbildung P.6: (a) Graphisches Bestimmen der Geradensteigung. (b) Das Steigungsdiagramm ist zu klein, außerdem gehört es nicht zur Geraden.



herausgelesen werden, wie Extremwerte oder Schnittpunkte, oder Kurven können gegen einen bestimmten Wert (z.B. gegen 0) extrapoliert werden. Bei einer linearen Auftragung ist sehr häufig die Steigung der Geraden sowie der Achsenabschnitt zu ermitteln.<sup>3</sup> Wichtig ist, dass für all diese Bestimmungen **nie** irgendwelche Messpunkte verwendet werden, sondern immer die durch die Messpunkte gelegte ‘mittlere Kurve’.

Wird also eine Gerade der Form  $y = ax + b$  betrachtet, so kann  $b$  einfach durch den Schnittpunkt der Geraden mit der  $y$ -Achse abgelesen werden, wenn die  $x$ -Achse bei 0 beginnt. Im Allgemeinen werden allerdings zur Bestimmung der Steigung  $a$  und des Achsenabschnittes  $b$  aus der Zeichnung die Koordinaten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  zweier möglichst weit auseinanderliegender<sup>4</sup> Punkte der Geraden entnommen:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_2 - ax_2 \quad (8)$$

Man beachte, dass  $a$  und  $b$  normalerweise dimensionsbehaftet sind. Als Beispiel wird wieder das Fadenpendel aus Abb. P.3(b) betrachtet. Die Messwerte sind in Abb. P.6 noch einmal gezeigt, nun zusammen mit einer durchgelegten Geraden sowie (a) mit einem geeigneten und (b) mit einem ungeeigtenen Steigungsdiagramm. Aus Abb. P.6(a) werden die Werte  $x_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $y_1 = 0,39 \text{ s}^2$  und  $x_2 = 70 \text{ cm}$ ,  $y_2 = 2,72 \text{ s}^2$  entnommen, woraus für die Steigung  $a = 3,883 \text{ s}^2/\text{m}$  folgt.<sup>5</sup> Mit  $a = 4\pi^2/g$  erhält man dann für die Erdbeschleunigung  $g = 10,17 \text{ m/s}^2$ . Der Achsenabschnitt ist hier näherungsweise 0, da es sich um eine Ursprungsgleichung handelt.

Zur Bestimmung der Geradensteigung aus logarithmisch aufgetragenen Daten gibt es verschiedene Möglichkeiten. Betrachtet man den Fall einer gedämpften Schwingung, so gilt für die Amplitude  $A$  der Schwingung

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \implies \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{1}{\tau_0} t \quad (9)$$

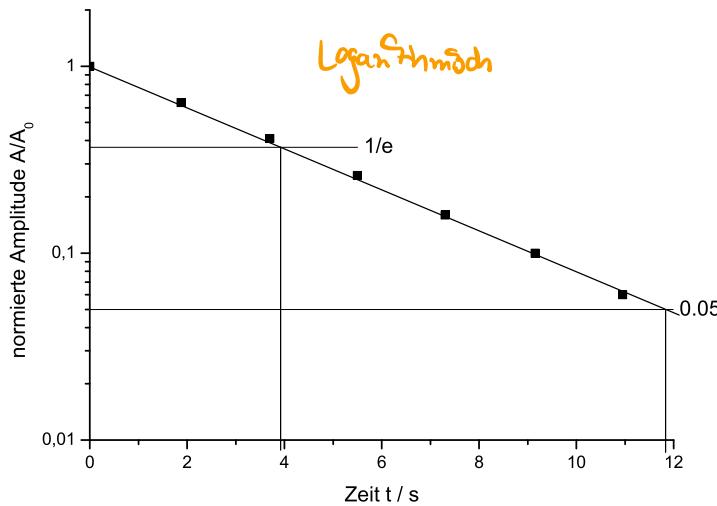
Trägt man also den Logarithmus der normierten Amplitude gegen die Zeit  $t$  auf, so ergibt sich aus der Geradensteigung die Zeitkonstante  $\tau_0$  der Dämpfung. Dies ist in Abb. P.7 gezeigt, wobei die **Gerade per ‘Augenmaß’** durch die Messpunkte gelegt wurde. Man kann nun die Steigung der Geraden mit Hilfe eines Steigungsdiagramms berechnen (hier gegeben

<sup>3</sup>Die Konstruktion der besten Geraden wird im nächsten Kapitel besprochen.

<sup>4</sup>Auf diese Weise wird der relative Ablesefehler minimiert.

<sup>5</sup>Es ist reiner Zufall, dass ein Messpunkt auf der Geraden und dann noch an der Stelle des Steigungsdiagramms liegt. Zur Bestimmung der Steigung wurde nur die Gerade und nicht der Messpunkt verwendet.

Abbildung P.7: Bestimmen der Geradensteigung aus logarithmisch aufgetragenen Daten. Näheres siehe Text.



durch die  $y$ -Achse und die untere waagerechte Linie). Der Zeichnung entnimmt man, dass die Amplitude nach 11,83 s auf einen Faktor 0,05 abgefallen ist:

$$\frac{1}{\tau_0} = -\frac{\ln(0,05) - \ln(1)}{(11,83 - 0) \text{ s}} = -\frac{\ln(0,05)}{11,83 \text{ s}} = 0,253 \frac{1}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = 3,95 \text{ s} \quad (10)$$

In diesem Fall kann man aber auch aus der Kurve direkt die Zeit ablesen, nach der die Amplitude auf den Faktor  $1/e$  abgefallen ist (obere waagerechte Linie), was ja genau die Zeit  $\tau_0$  ist, und erhält auf diese Weise  $\tau_0 = 3,92 \text{ s}$ .

Es gibt eine weitere Möglichkeit, wofür die direkt aus der Zeichnung in mm abgelesenen Strecken verwendet werden können. Liegt ein Gesetz der Form  $y = Be^{kx}$  vor, so findet man  $\ln(y) = \ln(B) + kx$ , bzw. beim Übergang zum dekadischen Logarithmus

$$\lg(y) = \lg(B) + k \lg(e)x \quad (11)$$

Trägt man die Messgrößen auf logarithmisches Papier auf (logarithmische Skala für  $y$ , lineare Skala für  $x$ ), so ergibt sich für die Längen  $l_y$  und  $l_x$  auf dem Papier ein linearer Zusammenhang:

$$l_y = l_B + al_x \quad (12)$$

Dabei ist die Steigung  $a$  einfach durch die abgelesenen Längen (in mm) eines Steigungs-dreiecks gegeben:  $a = \Delta l_y / \Delta l_x$ . Aufgrund der speziellen Definitionen der Skalen (vgl. Gln. (2) und (3) zusammen mit (4)) folgt aus Gl. (12)

$$l_{E_y} \lg(y) = l_{E_y} \lg(B) + al_{E_x} x \quad (13)$$

mit den Einheitslängen  $l_{E_x}$  und  $l_{E_y}$  für die beiden Skalen. Durch Vergleich mit Gl. (11) findet man also für die gesuchte Steigung

$$k = \frac{\Delta l_y l_{E_x}}{\Delta l_x l_{E_y}} \cdot \frac{1}{\lg(e)} \quad (14)$$

Angewendet auf Abb. P.7 findet man  $l_{E_x} = 6,44 \text{ mm/s}$ ,  $l_{E_y} = 24,7 \text{ mm}$ ,  $\Delta l_x = 76,1 \text{ mm}$  und  $\Delta l_y = 32 \text{ mm}$ . Damit folgt  $k = 0,252 \text{ 1/s}$  und  $\tau_0 = 3,96 \text{ s}$ .

Der Vorteil dieser Methode liegt insbesondere bei der Bestimmung des Exponenten von Funktionen wie  $y = Bx^p$ . Bildet man den dekadischen Logarithmus, so folgt

$$\lg(y) = \lg(B) + p \cdot \lg(x) \quad (15)$$

Trägt man die Messgrößen auf doppelt-logarithmisches Papier auf, so ergibt sich auf dem Papier wieder der lineare Zusammenhang aus Gl. (12) mit den gleichen Bedeutungen wie oben. Setzt man wieder die Definitionen der Skalen ein, so folgt diesmal

$$l_{E_y} \lg(y) = l_{E_y} \lg(B) + a l_{E_x} \lg(x) \quad (16)$$

so dass die gesuchte Steigung

$$p = \frac{\Delta l_y l_{E_x}}{\Delta l_x l_{E_y}} \quad (17)$$

ist. Der Vorteil liegt nun darin, dass auf logarithmischem und doppelt-logarithmischem Papier die Einheitslängen der logarithmischen Skalen typischerweise angegeben sind, und nicht gesondert gemessen werden müssen.

## 6. Praktikumsbericht — Inhalt und Gliederung

Auf die formalen Punkte eines Praktikumsberichtes wurde bereits im Kapitel “Organisatorisches” im Abschnitt ‘5. Messprotokoll und Auswertung’ ausführlich eingegangen. Wenn Sie die dort angegebene Gliederung mit Leben füllen, sind Sie auf dem besten Weg zu einem vollständigen, übersichtlichen und nachvollziehbaren Bericht!

Hier noch einmal zusammenfassend die Punkte, welche zu jedem Praktikumsbericht gehören:

- Teilnehmer, Datum, Titel, Versuchsplatz
- Einleitung, Aufgabenstellung, Ziel des Versuches
- Fragen zur Vorbereitung
- Versuchsdurchführung (Kopie aus dem Protokollbuch):
  - Messmethode, Versuchsaufbau, Skizze, Schaltbild
  - Messprotokoll (Vorgehensweise, Messwerte, Beobachtungen ...)
- Gesetzmäßigkeiten und Formeln, Auswertung mit Fehlerrechnung
- Diskussion der Ergebnisse, Literaturvergleich
- Zusammenfassung und Fazit

## 7. Literatur

G.L. Squires “Meßergebnisse und ihre Auswertung”, Teil III

S.L. Meyer “Data Analysis for Scientists and Engineers”, Part I and II

H.J. Eichler, H.-D. Kronfeld, J. Sahm “Das Neue Physikalische Grundpraktikum”, Kapitel I

W. Walcher “Praktikum der Physik”, Kapitel 1

D. Geschke “Physikalisches Praktikum”, Einführung

# Fehlerrechnung

## 1. Motivation

Betrachten Sie folgende Messungen des Widerstandes einer Drahtwicklung bei verschiedenen Temperaturen:

$$R = 2312,25 \Omega \quad \text{bei} \quad 10^\circ\text{C} \quad (1)$$

$$R = 2312,33 \Omega \quad \text{bei} \quad 20^\circ\text{C} \quad (2)$$

Ist der Unterschied zwischen den beiden Werten signifikant, d.h. kann man daraus schließen, dass sich der Widerstand mit der Temperatur ändert? Ohne Kenntnis des Fehlers kann diese Frage noch nicht einmal sinnvoll gestellt werden! Beträgt die Genauigkeit der Widerstandsmessung z.B.  $0,01 \Omega$ , so ist der Unterschied wesentlich, beträgt sie hingegen  $0,1 \Omega$ , sind die Werte im Rahmen der Messgenauigkeit gleich.

Oder betrachten Sie Abb. F.1(a): werden die Messpunkte durch die eingezeichnete Gerade beschrieben? Auch hier lässt sich die Frage ohne Kenntnis der Genauigkeit der Messpunkte nicht beantworten. Sind die Messfehler groß (Abb. F.1b), so könnten die Datenpunkte durchaus mit der Geraden vereinbar sein, während bei einer genaueren Messung (Abb. F.1c) eine signifikante Abweichung von der Geraden festgestellt wird.

Es lässt sich also schlussfolgern, dass ein Messergebnis ohne eine Fehlerangabe keine Aussagekraft hat:

**Messwerte und die daraus resultierenden Ergebnisse, welche nicht zugleich eine Aussage über ihre Genauigkeit beinhalten, sind für die Praxis sinnlos!**

Bei jedem Messwert und bei jedem Endergebnis muss also der zugehörige Fehler angegeben werden. Fehlerbalken werden immer dann in Diagramme eingezeichnet, wenn die graphische Darstellung dadurch nicht unübersichtlich wird, und wenn die Fehlerinformation in diesem Zusammenhang für wesentlich gehalten wird.

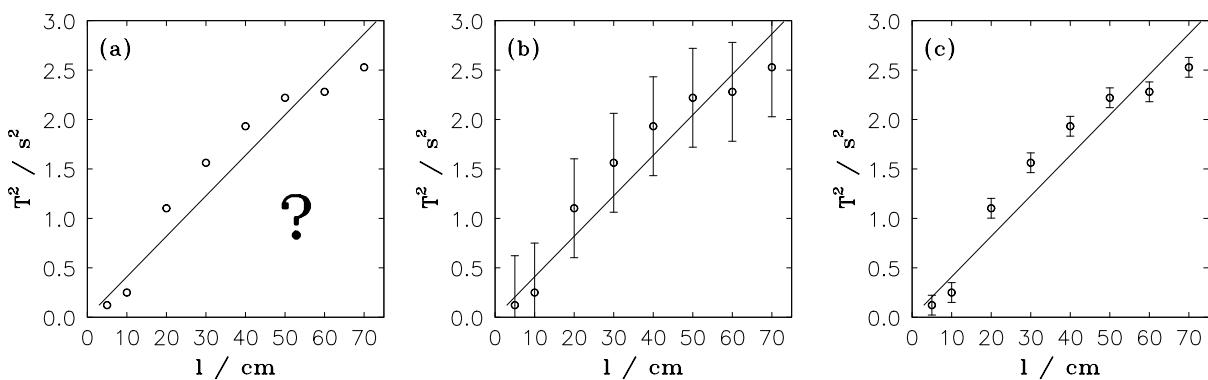


Abbildung F.1: Beispiele für die Relevanz von Fehlerbalken. Im Fall (a) kann nicht entschieden werden, ob die Datenpunkte durch die Gerade beschrieben werden. Die Abweichungen der Punkte von der Geraden sind in jedem Diagramm dieselben, wobei sie in (b) wahrscheinlich nicht signifikant sind, in (c) dagegen schon.

## 2. Aufgabe der Fehlerrechnung

Ziel jeder Messung ist es, den Wert einer Größe  $x$  zu ermitteln. Dabei wird nicht erwartet, dass ein oder mehrere gemessene Werte  $x_m$  genau gleich dem wahren Wert  $x_w$  der Größe sind. Es ist daher wichtig, einen Hinweis darauf zu geben, wie nahe das Ergebnis beim wahren Wert liegt, also eine Aussage über die Genauigkeit oder Zuverlässigkeit des Messwertes zu machen. Aufgabe der Fehlerrechnung ist es, aus den Messwerten  $x_m$  als beste Näherung für den wahren Wert einen *wahrscheinlichsten Wert*  $x_p$  zu bestimmen, und eine von den Messbedingungen abhängige Fehlergröße, die *Messunsicherheit*  $u$ , anzugeben. Das vollständige Messergebnis lautet dann

$$x = x_p \pm u \quad (3)$$

Die Länge eines Stabes könnte z.B. mit  $l = (125 \pm 3)$  mm angegeben sein. Dies ist immer eine Wahrscheinlichkeitsaussage. Sie besagt nicht etwa, dass der wahre Wert mit Sicherheit zwischen 122 mm und 128 mm liegt, sondern dass der wahre Wert mit einer kalkulierbaren (im Praktikum oft nur grob abschätzbar) Wahrscheinlichkeit innerhalb dieses Intervall erwartet werden darf.

Wie bereits eingangs erwähnt sind Fehlerangaben notwendig, da ohne sie keine signifikanten Schlüsse aus den Messergebnissen gezogen werden können. Aus der Messunsicherheit folgt typischerweise, ob ein Gerät oder eine Messmethode zur Ermittlung einer bestimmten Größe überhaupt eingesetzt werden kann. Andererseits ist es weder nötig noch wünschenswert, dass jedes Experiment mit der maximal möglichen Genauigkeit durchgeführt wird. Vielmehr ist es erforderlich, ein Experiment so zu planen und durchzuführen, dass die Genauigkeit des Endergebnisses dem Versuchsziel angemessen ist.

Genauso wie das Endresultat eines Experiments mit einer bestimmten Genauigkeit ermittelt werden soll, haben auch die Werte der verschiedenen gemessenen Größen innerhalb des Experiments bestimmte Genauigkeiten. Bei den wenigsten Versuchen wird die gesuchte Endgröße direkt gemessen, meistens wird sie aus verschiedenen anderen Messgrößen zusammengesetzt sein. Die Fehler der Ausgangsgrößen bestimmen dann den Fehler des Endergebnisses, wobei die Ausgangsfehler typischerweise ganz unterschiedliche Beiträge zum Endfehler liefern. Es ist also besonders sinnvoll, diejenigen Fehler zu verkleinern, die am stärksten beitragen. Die Fehlerrechnung wird nicht nur zeigen, wie der Endfehler zu bestimmen ist, sondern auch welche Einzelfehler die einflussreichsten sind.

Es sollte klar geworden sein, dass die Bestimmung der Messunsicherheit eines Experiments keine zweitrangige oder nebenschichtliche Aufgabe ist. Sie ist im Gegenteil eng verknüpft mit dem Ziel des Experiments, mit der Methode zu seiner Durchführung und mit der Aussagekraft seiner Ergebnisse. Der Analyse und der Beschreibung der Messunsicherheit(en) kommt also eine fast genauso große Bedeutung zu wie der Messung selbst.

In diesem Kapitel werden alle wichtigen Formeln zur Bestimmung der Fehler angegeben. Diese sind im Praktikum ebenso nutzbar wie bei späteren wissenschaftlichen Arbeiten. Für Ursprünge und Herleitungen der Formeln wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

## 3. Einteilung der Fehler

Wiederholungen einer Messung liefern im Allgemeinen unterschiedliche Ergebnisse, welche durch verschiedene Fehlerquellen verursacht sein können. Die Fehler werden wie folgt eingeteilt:

**Große Fehler** entstehen durch Irrtümer beim Messen oder beim Notieren der Werte, durch Nichtbeachten von größeren äußeren Störeinflüssen, durch Versagen des Messgerätes oder durch Ähnliches. Erkennt man starke Abweichungen in der Messreihe als grobe Fehler, so werden diese bei der Auswertung unter Hinzufügung eines Kommentars nicht berücksichtigt. Grobe Fehler sind praktisch immer auf Unachtsamkeit zurückzuführen und grundsätzlich zu vermeiden. Sie werden deshalb hier nicht weiter diskutiert.

**Systematische Fehler** können ihre Ursache im Messgerät, im Messverfahren oder im Beobachter haben. Sie sind typischerweise reproduzierbar in Vorzeichen und Betrag und können oft quantitativ erfasst werden. Beispiele sind Eichfehler der Messgeräte, Veränderungen durch äußere Einflüsse wie Temperatur oder Luftdruck, oder Beobachtungsfehler wie die Parallaxe beim Ablesen einer Skala. Grundsätzlich verbleibt aber auch ein nicht korrigierbarer systematischer Restfehler, der im Wesentlichen durch die technische Ausführung der Messgeräte bedingt ist.

**Zufällige Fehler** entstehen durch messtechnisch nicht erfassbare und nicht beeinflussbare Änderungen von Messgeräten, Messobjekten und Umwelteinflüssen, sowie durch subjektive Einflüsse des Beobachters. Mit gleicher Wahrscheinlichkeit treten positive und negative Abweichungen auf, größere Abweichungen treten seltener auf als kleinere. Da zufällige Fehler statistischen Gesetzen genügen, kann man mit Hilfe dieser Gesetze den Einfluss der Fehler auf das Messergebnis bestimmen. Ein wesentlicher Teil dieses Kapitels wird sich mit zufälligen Fehlern beschäftigen.

Zufällige Fehler gibt es bei jedem Experiment. Sie sind der Grund dafür, dass aufeinanderfolgende Messungen immer um den wahren Wert der Messgröße streuen, siehe Abb. F.2(a). Kommt dazu noch ein systematischer Fehler, so streuen die Ablesungen nicht um den wahren, sondern um irgendeinen dazu verschobenen Wert, siehe Abb. F.2(b).

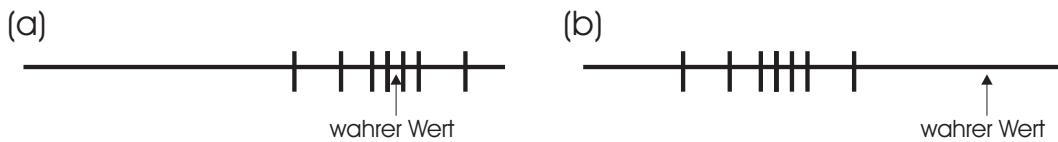


Abbildung F.2: Folge von Ablesungen (a) mit nur zufälligen Fehlern und (b) mit einem zusätzlichen systematischen Fehler.

#### 4. Korrigierbare systematische Fehler

Systematische Fehler treten häufig auf, weil sich der experimentelle Aufbau vom theoretisch angenommenen unterscheidet und der Korrekturfaktor, der diesen Unterschied berücksichtigt, vernachlässigt wird. Ein einfaches Beispiel ist das Messen einer Länge mit einem Stahlmaßband, welches für eine bestimmte Temperatur (z.B. 25 °C) geeicht ist. Wird bei einer anderen Temperatur gemessen, so führt dies aufgrund der thermischen Ausdehnung zu systematischen Fehlern, welche aber korrigiert werden können. Ähnlich verhält es sich mit der individuellen Reaktionszeit des Experimentators beim Benutzen einer Handstoppuhr. Diese Reaktionszeit kann im Prinzip bestimmt und damit die Messungen korrigiert werden. Ein allgemeines Verfahren für solche Korrekturrechnungen lässt sich allerdings nicht angeben, sondern hängt vom jeweiligen Versuchsaufbau ab. Hat man die Korrekturgröße  $s_c$  ermittelt, erhält man den korrigierten Messwert  $x_c$  als

$$x_c = x_m + s_c \quad (4)$$

Zufällige Fehler können durch Wiederholung der Messung entdeckt werden. Weiterhin ergibt das arithmetische Mittel vieler Messungen einen Wert, der sich dem wahren Wert immer mehr annähert. Beides trifft nicht auf einen systematischen Fehler zu. Mit derselben Apparatur wiederholte Messungen decken den systematischen Fehler weder auf, noch schalten sie ihn aus. Aus diesem Grunde sind systematische Fehler oft gefährlicher als zufällige Fehler. Ein großer Zufallsfehler zeigt sich in einem großen Wert der beim Endergebnis anzugebenden Messunsicherheit, wodurch die Ungenauigkeit des Experiments sofort klar wird. Ein versteckter systematischer Fehler kann aber zu einem offenbar zuverlässigen Ergebnis mit kleinem Zufallsfehler führen, welches in Wirklichkeit ernsthaft falsch ist. Typische Beispiele hierfür sind schlecht geeichte Messinstrumente.

Verwenden Sie z.B. eine zu langsam gehende Stoppuhr, so bleibt auch nach dem Bestimmen der Reaktionszeit ein nicht aufgedeckter systematischer Fehler zurück. Ein solcher Fehler lässt sich nur erkennen, wenn die gleiche Messung mit verschiedenen Stoppuhren durchgeführt wird. Durch einen Vergleich vieler Stoppuhren ließe sich die Größe des systematischen Fehlers zumindest abschätzen. Eine genaue Kenntnis erhält man allerdings nur, wenn ein vertrauenswürdiges Zeitnormal zur Verfügung steht, was in den meisten Fällen schwierig sein wird. Das sicherste Mittel gegen systematische Fehler ist, sie als Effekte zu betrachten, die es zu entdecken und auszuschalten gilt. Es ist eine Frage des Nachdenkens über die jeweilige Messmethode in Kombination mit einem gesunden Misstrauen gegenüber der Apparatur. Eine große Hilfe wird die Erfahrung sein, die Sie im Laufe der Jahre mit eigenen Experimenten gewinnen.

Manchmal können äußere Einflussgrößen (Temperatur-, Druckänderungen etc.) das Messergebnis beeinflussen, ohne dass eine strenge Korrekturrechnung möglich ist. Dennoch ist es für die Fehlerdiskussion wichtig, den maximalen Einfluss auf das Messergebnis abzuschätzen und die Richtung anzugeben. Einige Beispiele:

- Widerstandsbestimmungen durch Strom- und Spannungsmessungen sind oft mit der Entstehung von Wärme im Leiter verbunden, wodurch sich der spezifische Widerstand ändern kann. Wenn das Vorzeichen des Temperaturkoeffizienten bekannt ist, kann die Richtung der Widerstandsänderung angegeben werden.
- Bei der Bestimmung des Durchmessers eines Gummischlauches mit einem Messschieber liefert eine zu hohe Druckkraft einen systematisch zu kleinen Wert.
- **Prinzip der Maximalisierung:** Mit einer Präzisionseinrichtung wird die Länge eines Kupferstabes zu  $l_0 = (355,62 \pm 0,03) \text{ cm}$  gemessen, also mit einer Genauigkeit von  $3/35562 \approx 8 \cdot 10^{-5}$ . Während der Messung variiert die Zimmertemperatur zwischen  $18^\circ\text{C}$  und  $23^\circ\text{C}$ . Mit dem linearen Ausdehnungskoeffizienten von Kupfer  $\alpha_{\text{Cu}} = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  ergibt sich bei der maximalen Temperaturdifferenz von  $\Delta T = 5 \text{ K}$  eine relative Längenänderung von  $l/l_0 = 1 + \alpha_{\text{Cu}}\Delta T \approx 1 + 8 \cdot 10^{-5}$ . Man könnte also folgern, dass allein die Temperaturänderung den Messfehler bedingt. Als Abhilfe würde man bei einer solchen Präzisionsmessung derartige Temperaturschwankungen vermeiden.
- **Umkehrung der Maximalisierung:** Oft ist zur Abschätzung äußerer Einflüsse die Umkehrung dieses Prinzips sinnvoll. Ist das Ergebnis der Längenmessung eines Kupferstabs z.B.  $l_0 = (52,24 \pm 0,01) \text{ mm}$ , so kann man sich fragen, wie groß die Temperaturschwankung sein müsste, damit der Fehler durch die thermische

Längenänderung bedingt wäre. Es ergibt sich  $\Delta T = (l - l_0)/(\alpha_{\text{Cu}} l_0) \approx 11 \text{ K}$ . Eine so große Temperaturänderung während der Versuchsdurchführung erscheint recht unwahrscheinlich.

## 5. Systematische Restfehler (Messgerätefehler)

Es ist nicht immer möglich, und auch nicht immer nötig, die empfindlichsten Messgeräte zu benutzen, allerdings muss die Genauigkeit der verwendeten Geräte bekannt sein. Man muss sich also über die vom Hersteller zu garantierende Genauigkeit informieren. Diese Fehlertypen heißen *systematische Restfehler  $s_r$*  und sind im Rahmen von DIN-Vorschriften für Waagen, Längenmessgeräte, Thermometer, elektrische Messgeräte etc. festgelegt. Bei komplizierteren Messgeräten sind diese Angaben meist der Gebrauchsanleitung zu entnehmen. So sind z.B. bei einem Digitalmultimeter typischerweise für jeden Messbereich die Fehlertypen angegeben.

**Der systematische Restfehler  $s_r$  ist der Anteil des systematischen Fehlers an der Messunsicherheit  $u$ .**

Später wird gezeigt, wie dieser Restfehler im Rahmen der Fehlerrechnung zu behandeln ist. Hier sind die systematischen Restfehler für einige im Praktikum verwendete Geräte zusammengestellt:

- **Längenmessung** (gemessene Länge  $l$ , Restfehler  $\Delta l$ )

Büromesserstab:	$\Delta l = 0,2 \text{ mm} + 1 \cdot 10^{-3}l$	<i>Messunsicherheit</i>
Stahlmaßstab:	$\Delta l = 0,05 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4}l$	
Messschieber:	$\Delta l = 0,05 \text{ mm} + 1 \cdot 10^{-4}l$	
Mikrometerschraube:	$\Delta l = 0,005 \text{ mm} + 1 \cdot 10^{-5}l$	

- **Zeitmessung** (analoge Stoppuhr, Messzeit  $t$ , Restfehler  $\Delta t$ )

$$\text{Zeigerumlauf } 30 \text{ s: } \Delta t = 0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4}t$$

$$\text{Zeigerumlauf } 60 \text{ s: } \Delta t = 0,4 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4}t$$

- **Temperaturmessung** (Laborthermometer, Restfehler  $\Delta T$ )

Skalenteilung / K		1		0,5		0,2		0,1
$\Delta T$ / K		0,7		0,5		0,3		0,15

- **Massenmessung**

Feingewichtsstücke (Restfehler  $\Delta m$ ):

Nennmasse / g		500		200		100		50		20		5 , 10		1 , 2
$\Delta m$ / mg		3		1,5		0,75		0,45		0,30		0,23		0,15
Nennmasse / mg		100 – 500		20 – 50		0,5 – 10								
$\Delta m$ / mg		0,075		0,045		0,030								

einarmige Balkenwaage:

Bei den im Praktikum verwendeten Waagen beträgt der Restfehler eine Einheit der kleinsten Skalenteilung, diese ist meistens  $0,01 \text{ g} = 10 \text{ mg}$ .

- **analoge Messgeräte** (z.B. Strom-, Spannungs-, Widerstands-, Druckmessung)  
Die Anzeigefehler der Messgeräte sind ableitbar aus der auf dem Skalenträger angegebenen Genauigkeitsklasse: 0,1, 0,2, 0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, ... 5

Sie gibt den Anzeigefehler in Prozent vom *Endwert* des Messbereichs an, der prozentuale Fehler wächst also zum Skalenanfang hin. Ein Messgerät der Genauigkeitsklasse 0,5 hat beim Messbereich 250 mA somit einen Anzeigefehler von 1,25 mA. Dies entspricht bei einem Ausschlag von 25 mA einem Fehler von 5% und bei einem Ausschlag von 50 mA einem Fehler von 2,5%.

- **Widerstands- und Kapazitätsdekaden**

Die im Praktikum eingesetzten Widerstandsdekaden haben eine Toleranz von 1% des eingestellten Wertes, die Kapazitätsdekaden haben eine Toleranz von etwa 2%.

- **Digitale Messgeräte**

Der systematische Restfehler wird durch die Digitalisierung und durch interne Analog–Digital–Wandler sowie andere Bauelemente beeinflusst. Detaillierte Angaben zum Restfehler entnehmen Sie bitte der jeweiligen Gebrauchsanleitung. Wenn nichts angegeben ist, beträgt der Mindestfehler  $\pm 1$  der letzten angezeigten Ziffer.

## 6. Ablesefehler

Bei einer Ablesung von einer analogen Skala muss jedem Wert auch ein individueller Ablesefehler  $s_a$  zugeordnet werden. Dieser wird typischerweise als die Hälfte der kleinsten Skalenteilung angenommen. Bei einer Längenmessung mit einem Maßstab mit Millimetereinteilung wäre der Fehler somit  $\pm 0,5$  mm, bei einer Stoppuhr mit Zehntelsekunden Skala  $\pm 0,05$  s, usw. Bei einer digitalen Anzeige, bzw. einer digitalen Einstellmöglichkeit wie z.B. bei einer Dekade, wird ein Ablese- bzw. Einstellfehler von  $\pm 0,5$  der kleinsten Einheit angenommen. Wie diese individuellen Fehler innerhalb der Fehlerrechnung behandelt werden erfahren Sie in den nächsten beiden Abschnitten. Beachten Sie, dass der Restfehler oft größer ist als der Ablesefehler!

Manchmal wird der Ablesefehler durch andere Ursachen überlagert, z.B. wenn ein Messwert zeitlich stark schwankt oder wenn der Zeitpunkt der Messung nicht eindeutig zu bestimmen ist. Solchen Fällen begegnen Sie auch im Praktikum. Der Messfehler muss dann abgeschätzt werden und dieser Schätzwert ersetzt den in diesem Fall viel zu kleinen Ablesefehler des Messgeräts. Dies ist auch in den folgenden Kapiteln zu beachten, wenn immer von Ablesefehlern die Rede ist.

## 7. Fehler bei einer Einzelmessungen

In diesem und im nächsten Abschnitt wird vorausgesetzt, dass kein systematischer Fehler vorliegt, oder dass dieser bekannt ist und damit korrigiert werden kann.

Wird eine Größe nur **einmal** gemessen, so bestimmt sich ihre Messunsicherheit  $u$  einzig und allein aus dem Ablesefehler  $s_a$  und dem Restfehler  $s_r$ . Diese beiden Fehlereinflüsse werden als voneinander unabhängig angesehen, d.h. sie beeinflussen sich nicht gegenseitig und korrelieren also nicht. Deshalb werden sie üblicherweise quadratisch addiert:

$$\text{Gauß'scher Fehler einer Einzelmessung:} \quad u = \sqrt{s_r^2 + s_a^2} \quad (5)$$

Grundgedanke dieser pythagoreischen Addition nach Gauß ist, dass aufgrund der Unabhängigkeit der Fehler eine teilweise gegenseitige Kompensation möglich ist. Oft kann allerdings auch eine Größtfehlerabschätzung gemacht werden, bei der diese Kompensation vernachlässigt wird:

Größtfehlerabschätzung einer Einzelmessung:

$$u = |s_r| + |s_a| > \sqrt{s_r^2 + s_a^2} \quad (6)$$

## 8. Zufällige (oder statistische) Fehler

### Vorbemerkungen: Histogramm und Verteilung

Ursachen für zufällige Fehler können Schwankungen in der Genauigkeit der Messinstrumente oder natürliche Schwankungen des Messobjektes selbst sein, die der Beobachter nicht kontrollieren kann. Oft werden Signale elektronisch verstärkt, dabei ist der Verstärkungsfaktor nicht konstant, sondern kleinen Schwankungen unterworfen. Hinzu kommen nicht beeinflussbare Umwelteinflüsse und subjektive Einflüsse des Beobachters. Bei einer Längenmessung mit einem Maßband ergeben sich z.B. unterschiedliche Längen durch die Dehnung beim Ziehen am Maßband. Beim Zeitnehmen mit einer Handstoppuhr ist die (korrigierbare) Reaktionszeit nicht konstant, sondern unterliegt einer nicht ausschaltbaren Schwankung.

Betrachtet man also die wiederholte Messung einer Größe  $x$ , so werden die einzelnen Werte  $x_1, x_2$ , etc. aufgrund zufälliger Fehler um den wahren, aber unbekannten Wert  $x_w$  variieren. Wie erhält man nun einen "guten Wert" oder *Erwartungswert*  $\bar{x}$  für  $x_w$  und wie kann man eine Aussage über die Güte von  $\bar{x}$  machen? Da man ja den wirklichen Fehler von  $\bar{x}$  nicht kennt, kann man höchstens sagen, dass  $x_w$  innerhalb eines gewissen Bereiches um  $\bar{x}$  liegt. Das Problem lautet also, diesen Bereich für eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Betrachtet man die Messwerte in Abb. F.3(a), so würde man erwarten, dass  $x_w$  ziemlich dicht bei  $\bar{x}$  liegt, während es bei Abb. F.3(b) wahrscheinlich einen deutlichen Unterschied zwischen  $x_w$  und  $\bar{x}$  gibt. Mit anderen Worten: je größer die Streuung der Messergebnisse ist, desto größer wird der Fehler von  $\bar{x}$  erwartet.

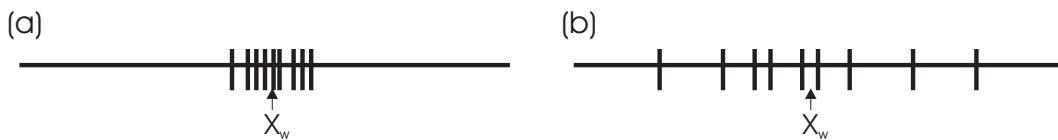
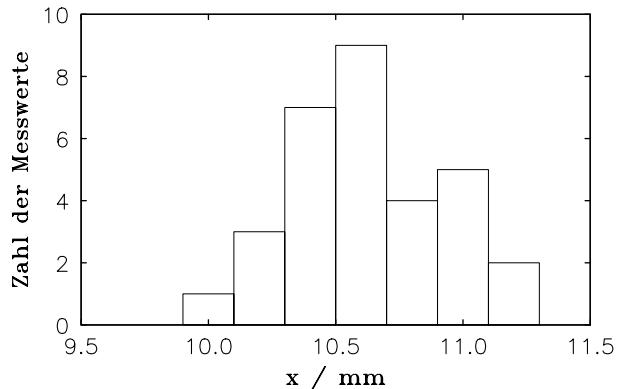


Abbildung F.3: Folge von Ablesungen derselben Größe (a) mit kleiner Streuung und (b) mit großer Streuung.

Eine Art der Darstellung der Ergebnisse einer Reihe von Messungen derselben Größe ist ein *Histogramm*, welches zeigt, wie oft die verschiedenen Werte gemessen wurden. Um ein Histogramm aufzustellen wird der Bereich der gemessenen Werte in gleich große Intervalle aufgeteilt und ausgezählt, wie häufig eine Messung in jedem Intervall vorkommt. Abbildung F.4 zeigt als Beispiel das Ergebnis der Längenmessung eines Werkstückes. Es wurden 31 Ablesungen zwischen 9,9 mm und 11,3 mm gemacht und in Intervalle der Breite 0,2 mm aufgeteilt. Aus dieser Auftragung lässt sich bereits abschätzen, dass die Genauigkeit der Messung nicht viel besser als  $\pm 0,5$  mm sein kann. Setzt man die Messungen mit etwa gleichbleibender Genauigkeit fort, so können engere Intervalle gewählt werden.

Abbildung F.4: Histogramm der Werteverteilung einer Längenmessung.



Insgesamt wird bei einer sehr großen Zahl von Messungen das Histogramm symmetrischer um den Erwartungswert, die Breite wird sich allerdings kaum ändern.

Die Breite der Intervalle ist willkürlich und wird nach praktischen Gesichtspunkten unter Berücksichtigung der gemessenen Werte bestimmt. Offenbar dürfen sie nicht zu eng sein, da sonst wegen der geringen Häufigkeiten die Schwankungen zu groß werden. Sind die Intervalle dagegen zu breit, vereinigen sich alle Messwerte in wenigen Intervallen und die enthaltene statistische Information geht verloren. Bei  $n$  „vernünftig“ zwischen  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  verteilten Messwerten können zur Abschätzung der Anzahl  $N$  der Intervalle mit Breite  $\Delta x$  folgende Faustregeln verwendet werden, wobei einzelne Ausreißer zunächst unberücksichtigt bleiben:

$$N \approx 5 \log n \quad \text{und} \quad \Delta x \approx \frac{1}{N} (x_{\max} - x_{\min}) \quad (7)$$

In der Praxis ergibt das dann zwischen 5 und 15 Intervalle. Besagte Ausreißer liegen allerdings außerhalb dieser Gruppe und benötigen zusätzliche Intervalle.

Eine solche als Histogramm aufgetragene Ansammlung von Messwerten nennt man eine **Verteilung**. Die Aufgabe der statistischen Fehlerrechnung ist es, diese Verteilung zu charakterisieren, d.h. Rechenvorschriften für den Mittelwert der Verteilung, für die Breite der Verteilung und für die Güte des Mittelwertes zu finden. Die Ergebnisse hierfür werden nun präsentiert. Im nächsten Abschnitt wird dann die Vorgehensweise bei der Fehlerbestimmung anhand eines Beispiels rezeptartig erläutert.

### Fehlerformeln bei Mehrfachmessungen

Wird eine Größe **mehrmals** gemessen, so können die Gesetze der Statistik zur Fehlerbestimmung herangezogen werden, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- Die einzelnen Messungen müssen voneinander unabhängig sein, d.h. das Ergebnis einer Messung darf die anderen Messungen nicht beeinflussen. Damit sind auch subjektive Einflüsse des Beobachters gemeint. Wird z.B. eine Zeit gestoppt, so darf der Beobachter aufgrund der Kenntnis der ersten Messung nicht voreingenommen bei den weiteren Messungen sein.
- Es müssen mindestens 6 unabhängige Messwerte der Größe vorliegen um die statistischen Gesetze sinnvoll anwenden zu können.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Eine Begründung für die Zahl 6 wird weiter unten gegeben.

- Die Messwerte müssen einer statistischen Verteilung genügen, wobei die exakte Form der Verteilung nicht wichtig ist. Näheres hierzu finden Sie in der Literatur. Als Beispiel diene die Dickenmessung einer Glasplatte mit einem Messschieber. Wird die Dicke 10 mal bestimmt, so wird man bis auf seltene Ausnahmen immer den gleichen Wert ablesen. Dies bedeutet nicht, dass man besonders gut gemessen hat, sondern dass die Größe der statistischen Schwankung unterhalb der Auflösungsgrenze des Messinstruments liegt. Eine Abhilfe wäre die Verwendung eines empfindlicheren Gerätes. Weiter unten finden Sie ein einfaches Kriterium, mit dessen Hilfe Sie entscheiden können, ob eine vernünftige Verteilung der Messwerte vorliegt oder nicht.

Ist die erste Voraussetzung nicht erfüllt, so muss eine Rechnung für korrelierte Fehler durchgeführt werden, was wesentlich komplizierter ist und wofür deshalb auf die Literatur verwiesen wird. Für die meisten praktischen Anwendungen werden die Messungen aber als statistisch unabhängig angenommen. Ist die zweite oder dritte Voraussetzung nicht erfüllt, so muss der Fehler wie in den oben angegebenen Formeln (5) oder (6) aus dem Ablesefehler und dem Restfehler bestimmt werden.

Liegen nun  $n$  Messwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der Größe  $x$  vor, so wird üblicherweise als beste Abschätzung für den wahren Wert  $x_w$  der arithmetische Mittelwert verwendet:<sup>2</sup>

Mittelwert einer Messreihe:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (8)$$

Der arithmetische Mittelwert hat zwei charakteristische Eigenschaften:

- Die Summe aller scheinbaren Fehler  $v_i = x_i - \bar{x}$  verschwindet, denn

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

Die Abweichungen nach oben und unten vom Mittelwert kompensieren sich also.

- Weiterhin ist der arithmetische Mittelwert der Wert, für den die Summe der Quadrate der scheinbaren Abweichungen minimal wird. Berechnet man nämlich die Ableitung der Funktion  $K(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2$ , so findet man

$$\frac{d}{d\hat{x}} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2 \right) = \frac{d}{d\hat{x}} \left( \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\hat{x} + \hat{x}^2) \right) = 2 \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n \hat{x} = 2 \sum_{i=1}^n x_i - 2n\hat{x}$$

Die Ableitung wird 0 für  $\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ .

Ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert ist die Varianz<sup>3</sup>

Varianz einer Messreihe:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (9)$$

Mittlerer Fehler der Einzelmessung:

$$\sigma$$

<sup>2</sup>Andere Möglichkeiten der Mittelwertdefinition finden Sie in der Literatur.

<sup>3</sup>Der Wert  $(n-1)$  im Nenner ergibt sich, weil durch die Festlegung von  $\bar{x}$  durch Gl. (8) nur noch  $(n-1)$  unabhängige Messwerte existieren.

Die Wurzel aus der Varianz,  $\sigma$ , heißt auch *Standardabweichung der Einzelmessung* und hat die gleiche Einheit wie die Messgröße. Sie drückt aus, wie weit im Mittel jeder Wert der Messreihe vom Mittelwert abweicht, gibt also den *mittleren Fehler der Einzelmessung* an. Für die Messreihe der Abb. F.3(a) wird  $\sigma$  kleiner sein als für die Messreihe der Abb. F.3(b).  $\sigma$  hängt nur von der *Qualität der Messapparatur* und der *Versuchsdurchführung* ab, nicht jedoch von der Anzahl der Messungen.

Es wurde schon anfangs erwähnt, dass jede Fehlerangabe lediglich eine Wahrscheinlichkeitsaussage ist, in diesem Fall wird also der wahre Fehler einer Messung mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit innerhalb eines bestimmten Intervalls liegen. Bei einer großen Anzahl von normal- (oder Gauß-) verteilten Messdaten liegt ein einzelner Messwert mit folgender Wahrscheinlichkeit in einem vorgegebenen Intervall um den Mittelwert  $\bar{x}$  (siehe Literatur und Versuch “Fehler einer Messung”):

mit 68,3% in	$\bar{x} \pm \sigma$	(10)
mit 95,4% in	$\bar{x} \pm 2\sigma$	
mit 99,7% in	$\bar{x} \pm 3\sigma$	

Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnet man als *statistische Sicherheit*. Man erkennt, dass nur etwa 68% der Messungen einen Wert innerhalb von  $\bar{x} \pm \sigma$  liefern, d.h. von drei Messwerten liegen nur zwei innerhalb dieser Grenzen! Lässt man andererseits eine Unsicherheit von  $\bar{x} \pm 2\sigma$  zu, liegen bereits etwa 95% und bei  $\bar{x} \pm 3\sigma$  sogar fast 100% aller Messungen im Fehlerbereich.

Bei einer geringen Anzahl von Messdaten wird die statistische Sicherheit allerdings kleiner, oder anders ausgedrückt, die in Gl. (10) angegebenen Intervalle müssen vergrößert werden, um die vorgegebene statistische Sicherheit beizubehalten. Um welchen Faktor das jeweilige Intervall dabei vergrößert werden muss, gibt der *Studentsche Faktor t* an. Für statistische Sicherheiten von 68,3%, 95,4% oder 99,7% und für eine sehr große Zahl von Messwerten ist dieser Faktor gemäß Gl. (10) 1, 2 oder 3. Wie sich  $t$  mit der Anzahl der Messungen ändert, kann der Tabelle F.1 entnommen werden. Man sieht also, dass sich bei 6 Messwerten eine statistische Sicherheit von 68,3% auf ein Intervall von  $\pm 1,11\sigma$  bezieht. Dennoch wird in der Physik üblicherweise mit diesen 68,3% gerechnet. In anderen Bereichen, insbesondere in der Technik, wird oft eine höhere Sicherheit zugrunde gelegt.

Tabelle F.1: Studentscher Faktor  $t$  für vorgegebene statistische Sicherheiten als Funktion der Zahl der Messwerte  $n$ .

n	<i>t</i> -Faktor für		
	68,3%	95,4%	99,7%
3	1,32	4,30	19,22
5	1,15	2,78	6,62
6	<b>1,11</b>	2,60	5,51
10	<b>1,06</b>	2,26	4,09
30	1,02	2,05	3,28
100	1,00	2,00	3,04

Neben der Genauigkeit der Messmethode, welche sich in  $\sigma$  ausdrückt, ist für die Bestimmung des zufälligen Fehlers einer Größe die Zuverlässigkeit des Mittelwertes von besonderem Interesse. Da er das Ergebnis vieler Messungen ist, wird der Mittelwert der Messreihe eine kleinere Abweichung vom wahren Wert der Messgröße haben als die einzelnen Messungen. Ein Maß für die Genauigkeit oder den *Vertrauensbereich* des Mittelwertes ist

die

Standardabweichung des Mittelwertes:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (11)$$

Der Vertrauensbereich gibt das Intervall an, in dem der wahre Wert mit einer bestimmten statistischen Sicherheit um den Mittelwert herum zu erwarten ist. Es gelten die gleichen Wahrscheinlichkeiten und Intervalle wie oben in Gl. (10) und Tab. F.1 angegeben. Man sieht aus Gl. (11), dass die Genauigkeit mit der Anzahl der Messungen besser wird, aber nur langsam, nämlich mit der Wurzel aus  $n$ . Eine Halbierung des Fehlers wird damit erst bei einer Vervierfachung der Anzahl der Messungen erreicht. Allerdings wird  $s$  auch dann kleiner, wenn  $\sigma$  kleiner wird, d.h. durch sorgfältigeres Messen.

Um die gesamte Messunsicherheit  $u$  des Mittelwertes zu bestimmen, muss auch hier wieder der Restfehler berücksichtigt werden:

Messunsicherheit des Mittelwertes:

$$u = \sqrt{s_r^2 + s^2} \quad (12)$$

Stellt sich heraus, dass die in Gl. (9) berechnete Standardabweichung  $\sigma$  deutlich kleiner ist als der Ablesefehler der Apparatur,  $s_a$ , so ist dies ein Hinweis darauf, dass die Messungen keiner statistischen Verteilung genügen. In diesem Fall darf nicht mit  $\sigma$  weitergerechnet und insbesondere nicht der Vertrauensbereich gemäß Gl. (11) verwendet werden. Vielmehr ist der Fehler des Mittelwertes dann wie bei einer Einzelmessung nach Gl. (5) oder (6) aus dem Ablesefehler und dem Restfehler zu bestimmen.

### Fehlerangabe beim Endergebnis

Das Endergebnis wird schließlich in folgender Form angegeben:

Endergebnis mit Fehlerangabe:

$$x = \bar{x} \pm u \quad (13)$$

Aufgrund der obigen Ausführungen lässt sich feststellen, dass insbesondere bei wenigen Messungen der Fehler selbst mit einer hohen Unsicherheit belastet ist. Bei einer Messreihe von 10 bis 20 Werten ist die Genauigkeit des Fehlers nur etwa 20%. Die Messunsicherheit wird deshalb in den meisten Fällen auf eine Stelle gerundet, nur wenn sie zwischen 1 und 3 liegt kann die Angabe der zweiten Stelle sinnvoll sein. Der Wert selbst wird dann nicht genauer angegeben, als es die Messunsicherheit zulässt. Für das Messergebnis sind also die Stellen anzugeben, in denen sich der Fehler mit großer Wahrscheinlichkeit noch nicht auswirkt (**signifikante Stellen**), plus die ein bis zwei Stellen, die aufgrund der Fehlerrechnung unsicher sind. Hier ein paar Beispiele:

richtig		falsch
$s = (6,33 \pm 0,06) \text{ m}$	<b>gleiche</b>	$s = (6,3279 \pm 0,058) \text{ m}$
$I = (350 \pm 90) \text{ mA}$	<b>Nach-</b>	$I = (350 \pm 88) \text{ mA}, I = (353 \pm 90) \text{ mA}$
$U = (36,00 \pm 0,04) \text{ V}$	<b>womma-</b>	$U = (36 \pm 0,04) \text{ V}$
$m = (15,4 \pm 0,9) \text{ kg}$	<b>Stellen!</b>	$m = (15,4 \pm 0,94) \text{ kg}$
$m = (15,42 \pm 0,14) \text{ kg}$		

Diese Regeln gelten für Endergebnisse, dagegen ist bei Zwischenergebnissen Vorsicht geboten. Hier muss die Genauigkeit erhöht werden, da es beim Weiterrechnen sonst zu

Rundungsfehlern kommt, die zu einer falschen Fehlerangabe beim Endergebnis führen können.

Wie die Beispiele zeigen, muss für das Messergebnis  $\bar{x}$  immer der Zahlenwert und die Einheit angegeben werden, ebenso wie für die Messunsicherheit  $u$  (auch: *absoluter Fehler*). In manchen Situationen kann die Angabe des *relativen Fehlers* gemäß  $u_r = \frac{u}{\bar{x}} \cdot 100\%$  sinnvoll sein. In einem solchen Fall schreibt man dann:

$$m = (15,3 \pm 1,0) \text{ kg}, \text{ was einer relativen Unsicherheit von } 6,5\% \text{ entspricht.}$$

## Aussondern von Messwerten

Fallen bei einer Messreihe ein oder mehrere Werte stark aus dem Rahmen, so ist man versucht, diese bei der Auswertung nicht zu berücksichtigen. Das mag oft vernünftig sein, es besteht dabei aber immer die Gefahr, signifikante Werte zu übersehen. Deshalb ist das Aussondern immer zu kommentieren und zu begründen, und die nicht verwendeten Daten sind für spätere Nachforschungen natürlich aufzubewahren.

Die gebräuchlichste Hilfe zur Entscheidung, ob Ausreißer einer Messreihe statistische Ursachen haben und somit für die Mittelwertbildung zu berücksichtigen sind, oder ob die Abweichung auf einen einmaligen methodischen Fehler zurückzuführen und somit der Messwert zu verwerfen ist, ist das *Chauvenetsche Kriterium* zum Aussondern von Messwerten. Es besagt, dass aus einer Reihe von  $n$  Messungen ein Wert  $x_a$  dann auszusondern ist, wenn die Wahrscheinlichkeit für sein Auftreten kleiner als  $\frac{1}{2n}$  ist. Anders ausgedrückt wird  $x_a$  dann nicht berücksichtigt, wenn sein Abstand  $|\bar{x} - x_a|$  vom Mittelwert größer ist als ein  $\Delta x_{\text{Ch}}$ , welches so gewählt wird, dass nur noch ein halber Messwert außerhalb des Intervall  $\bar{x} \pm \Delta x_{\text{Ch}}$  erwartet wird. Für normalverteilte Daten und einige ausgewählte  $n$  kann  $\Delta x_{\text{Ch}}$  in Einheiten von  $\sigma$  der folgenden Tabelle entnommen werden:

$n$	3	5	6	8	10	15	20	30	50	100	200	500
$\Delta x_{\text{Ch}}/\sigma$	1,82	1,89	1,92	2,01	2,08	2,21	2,31	2,44	2,60	2,80	3,02	3,29

Auch dieses Kriterium ist wie alle anderen Aussagen der Fehlerrechnung nur eine Wahrscheinlichkeitsangabe und damit in ihrer Wertung einer subjektiven Beurteilung unterworfen. Insbesondere ist im Zweifelsfall  $\Delta x_{\text{Ch}}$  lieber zu groß als zu klein zu wählen.

Das Aussondern nach diesem Verfahren darf höchstens einmal vorgenommen und nicht wiederholt angewendet werden. Ansonsten besteht die Gefahr, Daten zu verwerfen, welche nicht auf groben Fehlern beruhen, sondern tatsächlich auftretende seltene Abweichungen darstellen. Es erfolgt also zunächst eine vorläufige Berechnung von Mittelwert  $\bar{x}$  und Standardabweichung  $\sigma$  mit anschließender Bewertung aller außerhalb von  $\bar{x} \pm \Delta x_{\text{Ch}}$  liegender Daten. Werden einzelne Messwerte verworfen, so ist die endgültige Mittelwertbestimmung und Fehlerrechnung mit den verbliebenen Daten durchzuführen.

## Hypothesentest

### 9. Beispiel: Ergebnis für eine direkt gemessene Größe

Nach der ausführlichen Diskussion der verschiedenen Fehlerarten und der Bestimmung der Messunsicherheit werden nun für eine direkt gemessene Größe die einzelnen Schritte vom Messvorgang bis zum Endergebnis zusammengestellt und an einem Rechenbeispiel erläutert. Die schematische Vorgehensweise ist ganz allgemein in Abb. F.5 skizziert, während sich die einzelnen konkreten Rechenschritte in Tab. F.2 wiederfinden.

Als Beispiel dient die Messung der Periodendauer  $T$  eines Fadenpendels zur Bestimmung der amplituden-unabhängigen Periodendauer  $T_0$  des idealen Fadenpendels. Die Messung erfolgt mit einer elektronisch gesteuerten Lichtschranke, bei der die Zeit in Einheiten von 0,001 s angezeigt wird. Die einzelnen Messwerte mit Fehlerbalken, sowie der Mittelwert und dessen Fehler sind in Abb. F.6 gezeigt.

- 1. Einzelmessergebnisse:** Während des Messvorgangs erfolgt die Bestimmung einzelner Messwerte  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) einer physikalischen Größe. Es ist darauf zu achten, dass die Werte unabhängig voneinander gemessen werden.

Im Beispiel sind dies 10 Messwerte  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) für die Periodendauer des Fadenpendels (offene Kreise in Abb. F.6). In einem ersten Schritt könnte man nun einen vorläufigen Mittelwert und die Standardabweichung berechnen, um etwaige Ausreißer nach dem Kriterium von Chauvenet auszusondern. Aufgrund der Messmethode scheinen solche Abweichungen allerdings eher unwahrscheinlich zu sein, was ein Blick auf die Messwerte bestätigt. Bei handgestoppten Zeiten kann dies schon

Ausw  
ung

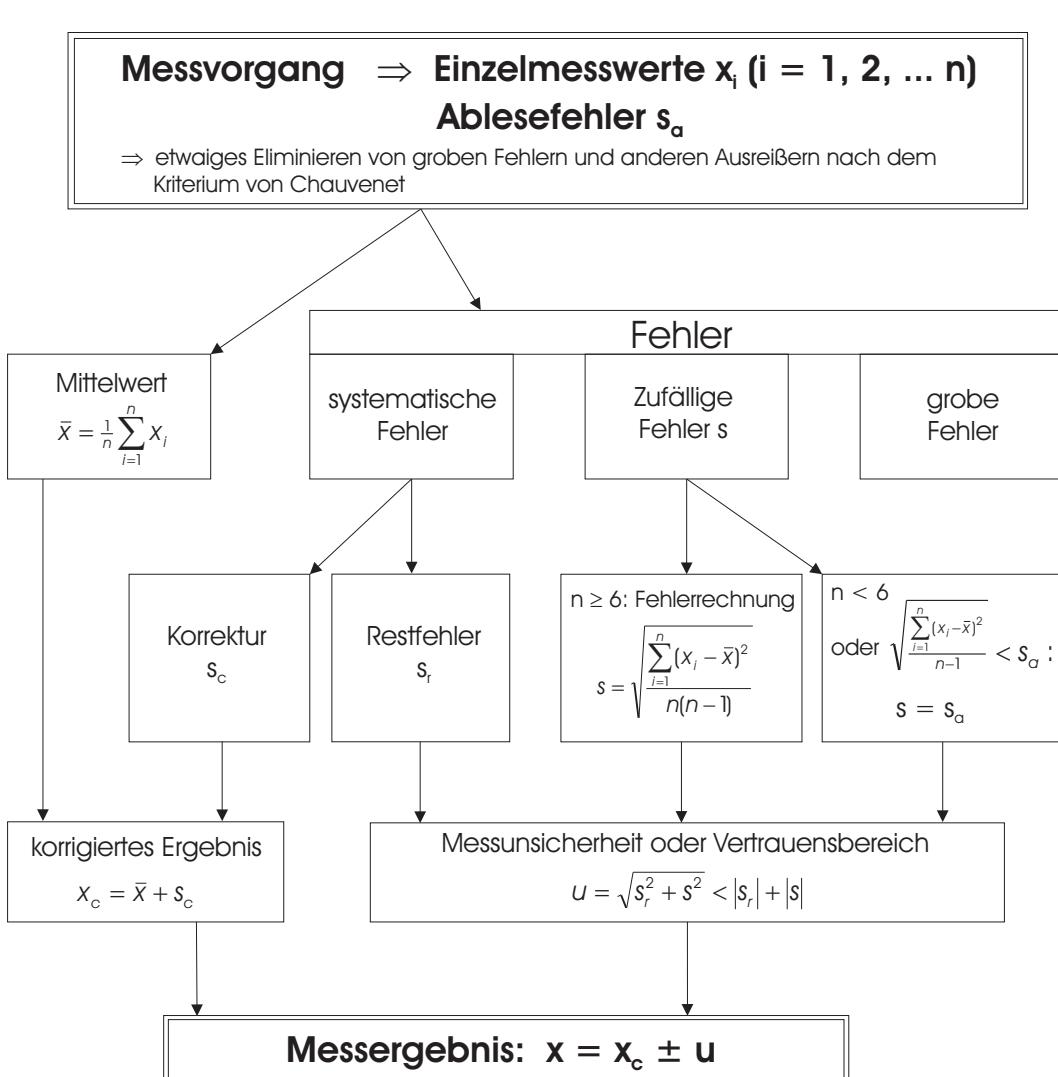


Abbildung F.5: Schematische Vorgehensweise bei der Berechnung des Messergebnisses und des dazugehörigen Fehlers, wenn eine Größe mehrmals gemessen wurde.

leichter passieren, wie Sie im ersten Versuch des Grundpraktikums selbst feststellen werden.

- 2. Ablesefehler:** Die Messwerte können nur mit einer bestimmten Ablesegenauigkeit  $s_a$  vom Messgerät abgelesen werden.  $s_a$  wird üblicherweise mit der Hälfte der kleinsten Skalenteilung angenommen, was bei einer digitalen Anzeige dem Rundungs- bzw. dem Digitalisierungsfehler entspricht.

Im Beispiel beträgt der Ablesefehler  $s_a = 0,0005 \text{ s}$ .

- 3. Mittelwert:** Aus den verbliebenen Daten wird der Mittelwert  $\bar{x}$  auf eine oder zwei Stellen mehr berechnet als die Messwerte aufweisen.

Im vorliegenden Beispiel ist der Mittelwert  $\bar{T}$  als waagerechte Linie in Abb. F.6 eingezeichnet.

- 4. Korrektur des Mittelwertes:** Werden die Messwerte durch den Versuchsaufbau, den Beobachter oder durch andere Einflüsse systematisch verfälscht und ist diese Verfälschung nach Richtung und Größe bestimmbar, so ermittelt man die Korrekturgröße  $s_c$ . Zusammen mit dem Mittelwert  $\bar{x}$  ergibt sich dann das korrigierte Messergebnis zu  $x_c = \bar{x} + s_c$ .

Die Periodendauer  $T$  eines Fadenpendels ist abhängig von der Schwingungsamplitude  $\varphi$ , bei der die Messung durchgeführt wird (s. z.B. BS Band I, Abschnitt über Pendelbewegungen):

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots \right) \quad (14)$$

Damit kann aus den Messgrößen  $T$  und  $\varphi$  die Periodendauer  $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$  des idealisierten mathematischen Pendels für eine Amplitude von  $\varphi = 0$  berechnet werden. In erster Näherung folgt aus Gl. (14) für den Mittelwert also

$$\bar{T} \approx T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \Rightarrow T_0 \approx \bar{T} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{-1} \approx \bar{T} \left( 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (15)$$

Im Beispiel erfolgt die Messung der Periodendauer bei einer Amplitude von  $\varphi = 8^\circ$ , was zu einem systematischen Fehler  $s_c = -\frac{\bar{T}}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = -2,9503 \text{ s} \cdot 0,0012 = -0,0036 \text{ s}$  führt.

- 5. Systematischer Restfehler:** Die nichtkorrigierbaren systematischen Fehler werden von den durch die Bauart und die technische Präzission bedingten Fehlern der Messgeräte bestimmt. Für wichtige Geräte des Praktikums sind diese systematischen Restfehler im Abschnitt 5 dieses Kapitels zusammengestellt. In anderen Fällen sind sie aus der Gerätebeschreibung zu entnehmen. Ist kein Restfehler angegeben, so ist dieser gegen den Ablesefehler und die zufälligen Fehler zu vernachlässigen.

Im Beispiel beträgt der Restfehler der verwendeten Quarzuhr  $s_r = 0,001 \text{ s}$ .

- 6. Fehler der Einzelmessung:** Ist  $n > 6$ , so kann der Fehler der Einzelmessung  $\sigma$  nach Gl. (9) berechnet werden. Andernfalls ist der Ablesefehler  $s_a$  zu verwenden. Stellt sich im ersten Fall heraus, dass  $\sigma$  deutlich kleiner ist als  $s_a$ , so sind

die Messwerte wahrscheinlich nicht gut statistisch verteilt, und es ist wiederum der Ablesefehler als Fehler der Einzelmessung anzunehmen.

Im Beispiel ist  $n = 10$  und  $\sigma > s_a$ , so dass beide Voraussetzungen erfüllt sind. In Abb. F.6 wird  $\sigma$  durch die Fehlerbalken der einzelnen Messpunkte repräsentiert.

- 7. Fehler des Mittelwertes:** Ist  $n < 6$  oder genügen die Messwerte keiner statistischen Verteilung, so kann auch der Fehler  $s$  des Mittelwertes lediglich durch den Ablesefehler abgeschätzt werden. Sind andererseits genügend Daten vorhanden, die auch gut verteilt sind, so wird  $s$  wie hier im Beispiel gemäß  $s = \sigma/\sqrt{n}$  berechnet.

Der Fehler des Mittelwertes ist ebenfalls in Abb. F.6 eingezeichnet.

**1. Einzelmessergebnisse:**

$i$	$T_i / \text{s}$	$(T_i - \bar{T}) / 10^{-4} \text{s}$	$(T_i - \bar{T})^2 / 10^{-8} \text{s}^2$
1	2,949	-13	169
2	2,951	7	49
3	2,950	-3	9
4	2,951	7	49
5	2,950	-3	9
6	2,949	-13	169
7	2,951	7	49
8	2,950	-3	9
9	2,952	17	289
10	2,950	3	9
	$\sum T_i = 29,503 \text{s}$	$\sum(T_i - \bar{T}) = 0$	$\sum(T_i - \bar{T})^2 = 810 \cdot 10^{-8} \text{s}^2$

**2. Ablesefehler:**  $s_a = \underline{0,0005 \text{s}}$

**3. Mittelwert:**  $\bar{T} = \frac{1}{n} \sum T_i = \underline{2,9503 \text{s}}$

**4. Korrektur:**  $s_c = -\bar{T}(\frac{1}{2} \sin(\frac{\phi}{2}))^2 = 2,9503 \text{s} \cdot 0,0012 = -0,0036 \text{s}$

$$T_c = \bar{T} + s_c = \underline{2,9467 \text{s}}$$

**5. Systematischer Restfehler:**  $s_r = \underline{0,001 \text{s}}$

**6. Fehler der Einzelmessung:**  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum(T_i - \bar{T})^2} = \underline{0,00095 \text{s}} > s_a$

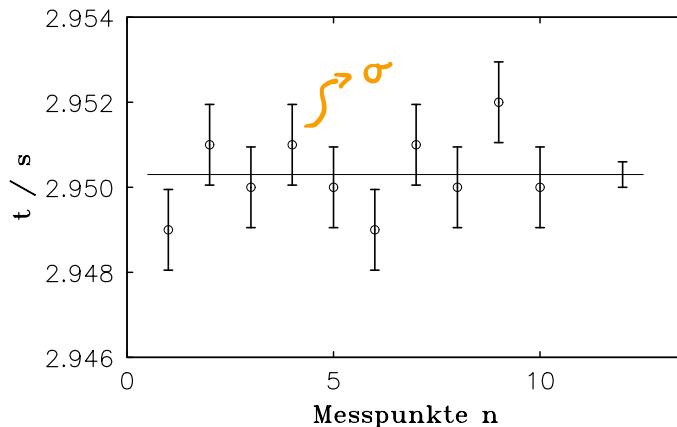
**7. Fehler des Mittelwerts:**  $s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \underline{0,0003 \text{s}}$

**8. Messunsicherheit:**  $u = \sqrt{s_r^2 + s^2} = \underline{0,001 \text{s}}$  oder  $u = |s_r| + |s| = \underline{0,0013 \text{s}}$

**9. Endergebnis:**  $\underline{\underline{T_0 = T_c \pm u = (2,947 \pm 0,001) \text{s}}}$

Tabelle F.2: Beispiel zur Bestimmung der Schwingungsdauer mit Fehler für ein Fadenpendel

Abbildung F.6: Messwerte für die Periodendauer des Fadenpendels. Die Fehlerbalken der einzelnen Punkte sind durch den mittleren Fehler der Einzelmessung gegeben. Die waagerechte Linie stellt den Mittelwert dar, dessen Fehler ebenfalls eingezeichnet ist.



8. **Messunsicherheit:** Die Messunsicherheit  $u$  ergibt sich aus dem systematischen Restfehler  $s_r$  und dem statistisch bestimmten Fehler des Mittelwertes  $s$ . Da die beiden Fehlerarten unabhängig voneinander sind, also nicht miteinander korrelieren, werden sie quadratisch addiert:  $u = \sqrt{s_r^2 + s^2}$ . Bei einer geringen Anzahl von Messpunkten ist allerdings auch eine Größtfehlerabschätzung gemäß  $u = |s_r| + |s|$  sinnvoll.

Im Beispiel sorgt der Restfehler der Uhr dafür, dass trotz eines sehr kleinen statistischen Fehlers das Endergebnis nicht genauer als  $\pm 0,001$  s sein kann.

9. **Vollständiges Messergebnis:** Das Ergebnis für die Größe  $x$  wird dann in der Form  $x = x_c \pm u$  angegeben.

In der Praxis muss man nicht wie hier im Beispiel eine Tabelle zur Bestimmung der scheinbaren Fehler  $v_i$  anfertigen, da die wissenschaftlichen Taschenrechner oder sonstigen Programme zur Mittelwert- und Fehlerbestimmung über eigene Statistikprogramme verfügen. Nach Eingabe der einzelnen Messwerte werden die gesuchten Größen typischerweise direkt berechnet. Allerdings weichen verschiedene Rechner in der Handhabung geringfügig voneinander ab, so dass ein genaues Studium der Bedienungsanleitung nötig ist. Insbesondere ist darauf zu achten, ob die Standardabweichung  $\sigma$  auf  $(n - 1)$  oder auf  $n$  bezogen ist.

Bei der Angabe des Ergebnisses muss dann noch die große Stellenzahl der elektronisch berechneten Werte auf die in Abschnitt 8 diskutierte messtechnisch sinnvolle Stellenzahl reduziert werden.

## 10. Fehlerfortpflanzung

Bei vielen Experimenten wird die gesuchte Größe  $F$  nicht direkt gemessen, sondern ergibt sich aus einem funktionalen Zusammenhang  $F = F(x_1, x_2 \dots x_n)$  zwischen verschiedenen, direkt messbaren Größen  $x_1, x_2 \dots x_n$ . Diese Größen werden durch Mess- oder Mittelwerte  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$  repräsentiert und sind mit Messunsicherheiten  $s_1, s_2 \dots s_n$  behaftet. Aus den  $\bar{x}_i$  und den  $s_i$  ist also der beste Wert für  $\bar{F}$  und dessen Fehler  $s_F$  zu ermitteln. Als Beispiel diene das Volumen eines Zylinders,  $V = \frac{\pi}{4}d^2h$ , wenn der Durchmesser  $d = \bar{d} \pm s_d$  und die Höhe  $h = \bar{h} \pm s_h$  gemessen wurden.

### Vorbemerkung: Partielle Ableitung

Für die Behandlung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes benötigt man das mathematische Werkzeug der *partiellen Ableitung* oder *partiellen Differentiation*. Für die Funktion einer Variablen  $f = f(x)$  ist die Ableitung von  $f$  nach  $x$  definiert als der Grenzwert

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (16)$$

Entsprechend heißen bei einer Funktion  $f = f(x, y, z)$  mit drei Variablen  $x, y, z$  die folgenden Grenzwerte

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} && \text{bei festen } y, z \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} && \text{bei festen } x, z \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} && \text{bei festen } x, y \end{aligned} \quad (17)$$

die partiellen Ableitungen der Funktion  $f$  nach  $x$ , nach  $y$  und nach  $z$ . Die Rechenregeln sind die gleichen wie für die Funktion einer Variablen, wobei die nicht abzuleitenden Variablen als Konstante behandelt werden. Folgende Beispiele sollen das kurz demonstrieren:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 2x^2 + 4y^5 + 3 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 4x & \frac{\partial f}{\partial y} = 20y^4 \\ f(x, y) = x^3y^2 + \sin x &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + \cos x & \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y \end{aligned}$$

### Fehlerfortpflanzungsgesetz

Der beste Wert  $\bar{F}$  für die gesuchte Größe  $F$  ist gegeben durch den Wert der Funktion  $F = F(x_1, x_2 \dots x_n)$ , wenn man die Messgrößen  $x_i$  durch die besten Werte  $\bar{x}_i$  ersetzt:

$$\bar{F} = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n) \quad (18) \quad \text{Bsp: } A = xy$$

Das *Fehlerfortpflanzungsgesetz* besagt nun, dass der Fehler von  $F$  gegeben ist durch

$$s_F = \sqrt{\left( \frac{\partial F}{\partial x_1} s_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} s_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial x_n} s_n \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} s_i \right)^2} \quad (19)$$

wenn  $s_i$  der Fehler für die direkt gemessene Größe  $x_i$  ist. Die Werte der Ableitungen müssen jeweils an der Stelle der Mittelwerte genommen werden:  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n)$ .<sup>4</sup> Eine Folge der quadratischen Addition gemäß Gl. (19) ist die relative Überbewertung von

<sup>4</sup>Die Herleitung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes findet man in der einschlägigen Literatur. Die in Gl. (19) angegebene Form gilt für unkorrelierte Messgrößen  $x_i$ , die Version für korrelierte Größen ist ebenfalls in der Literatur zu finden.

großen gegenüber kleinen Fehlern. Bei einer gewünschten Verbesserung des Endergebnisses sind also vor allem die am stärksten zum Fehler beitragenden Messwerte zu verbessern.

Im Beispiel des Zylinders ergibt sich also  $\bar{V} = \frac{\pi}{4}d^2\bar{h}$ . Mit  $\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi}{2}dh$  und  $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4}d^2$  findet man für den Fehler  $s_V = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\bar{d}\bar{h}s_d\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\bar{d}^2s_h\right)^2} = \bar{V}\sqrt{\left(\frac{2s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{\bar{h}}\right)^2}$  und damit für das Endergebnis  $V = \bar{V} \pm s_V$ .

## Einige Anwendungen

### a) Fehler einer Summe oder Differenz

Ist die gesuchte Größe  $m$  gegeben durch  $m = am_1 \pm bm_2$ , mit den Fehlern  $s_1$  und  $s_2$  der beiden Messgrößen  $m_1, m_2$ , so ergibt sich für den Fehler von  $m$ :

$$s_m = \sqrt{a^2s_1^2 + b^2s_2^2} \quad (20)$$

Die Fehler (mit Vorfaktoren) addieren sich also in beiden Fällen quadratisch, auch bei der Differenzbildung werden die Fehler nie kleiner, sondern stets größer.

### b) Fehler eines Potenzproduktes

Ist die gesuchte Größe  $f$  gegeben durch  $f = x^k y^l / z^m$ , mit den Fehlern  $s_x, s_y, s_z$  der Messgrößen  $x, y, z$ , so ergibt sich für den relativen Fehler von  $f$ :

$$\frac{s_f}{f} = \sqrt{k^2 \left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + l^2 \left(\frac{s_y}{y}\right)^2 + m^2 \left(\frac{s_z}{z}\right)^2} \quad (21)$$

Die relativen Fehler (mit Vorfaktoren) addieren sich also quadratisch, und man erspart sich das Differenzieren.

### c) Fehler des Mittelwertes

Der Mittelwert einer Messreihe wird nach Gl. (8) gemäß  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n$  bestimmt. Dabei sind die  $x_i$  unabhängige Einzelmessungen, welche alle den gleichen Fehler  $\sigma$  gemäß Gl. (9) aufweisen. Der Mittelwert  $\bar{x}$  kann demnach als Funktion der einzelnen Messungen  $x_i$  aufgefasst werden. Der Fehler des Mittelwertes berechnet sich dann nach Gl. (19) zu (vgl. Gl. 11):

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} \sigma \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} \sigma \right)^2 = \frac{n}{n^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (22)$$

## 11. Ausgleichsrechnung: Lineare Regression

Bei einem Experiment ist es häufig der Fall, dass eine Größe  $y$  eine Funktion einer anderen Größe  $x$  ist und Messungen von Wertepaaren für  $x$  und  $y$  gemacht werden:  $(x_i, y_i)$ . Die Werte werden dann in einem  $x$ - $y$ -Diagramm aufgetragen und es wird versucht, diejenige Kurve  $y(x)$  durch die Messpunkte zu legen, welche den theoretischen Vorhersagen entspricht und dabei so genau wie möglich durch die Messpunkte geht.

Hier wird nur der in der Physik sehr wichtige Fall besprochen, dass diese Funktion eine gerade Linie ist:

$$y = ax + b \quad (23)$$

Sind  $n$  Paare von Messwerten  $(x_i, y_i)$  gegeben, so lautet die Aufgabe also, die Werte der Parameter  $a$  und  $b$  für die beste Gerade durch diese Messpunkte zu berechnen. Es wird weiterhin vorausgesetzt, dass nur die  $y$ -Werte fehlerbehaftet sind, während die  $x$ -Werte fehlerfrei vorgegeben sind.<sup>5</sup> Außerdem soll der Fehler  $s_i$  für alle  $y_i$  gleich sein:  $s_i = s$  (s. Abb. F.7a).<sup>6</sup>

Die Standardmethode zur Bestimmung von  $a$  und  $b$  ist die Methode der kleinsten Quadrate: als Bestwerte für  $a$  und  $b$  werden die Werte angenommen, für die die Summe der Quadrate der Abweichungen  $v_i$  der Messpunkte von der Geraden minimal wird. Die Gerade ist gegeben durch  $y = ax + b$  und die Messpunkte durch  $(x_i, y_i)$ . Damit ist  $v_i = y_i - y(x_i) = y_i - ax_i - b$ , so dass die Bedingung lautet:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \text{minimal} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(\sum v_i^2)}{\partial a} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\sum v_i^2)}{\partial b} = 0 \quad (24)$$

Hieraus folgt zunächst

$$\sum_{i=1}^n x_i(y_i - ax_i - b) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \quad (25)$$

und für  $a$  und  $b$  ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \quad \text{und} \quad a \sum x_i + bn = \sum y_i \quad (26)$$

Man findet dann für die beste Gerade durch die Messpunkte

$$D = n(2x_i^2 - n\bar{x}^2) = n2(x_i - \bar{x})^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{1}{D} (n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i) \\ b &= \frac{1}{D} (\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i) \end{aligned}}$$

$$\text{mit } D = n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2 \quad (27)$$

Die auf diese Weise bestimmte beste Gerade geht immer durch den Schwerpunkt der Messpunkte. (s. Abb. F.7b)

Dabei ist der Schwerpunkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  durch die Mittelwerte  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$  und  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$  der  $x$ - und  $y$ -Werte definiert. Das kann leicht nachgerechnet werden, indem man  $x = \bar{x}$  in die gefundene Geradengleichung  $y = ax + b$  einsetzt. Diese Tatsache macht man sich zu Nutze, wenn man eine Gerade "per Auge" durch die Messpunkte legt. Man berechnet zunächst den Schwerpunkt und zeichnet eine Gerade durch diesen Punkt so, dass sie alle Messpunkte etwa gleichermaßen beschreibt. Auf diese Weise kann man auch die Geradenparameter bestimmen und deren Fehler grob abschätzen: man zeichnet, ebenfalls "per Auge", zwei weitere Geraden durch den Schwerpunkt, eine mit maximaler und eine mit minimaler Steigung, so dass beide gerade noch mit den Fehlerbalken vereinbar sind. Aus diesen drei Geraden bestimmt man dann jeweils Steigung und Achsenabschnitt und kann so Mittelwert und Fehler abschätzen. Diese Vorgehensweise ist in Abb. F.7c demonstriert. Beachten Sie bitte, dass dadurch die Unsicherheiten oft massiv überschätzt werden, weshalb die im nächsten Absatz beschriebene Methode vorzuziehen ist.

<sup>5</sup>Diese Voraussetzung ist sehr oft richtig. Wenn dies nicht der Fall ist, wird die Analyse des Problems weitaus schwieriger.

<sup>6</sup>Im nächsten Abschnitt wird auf die gewichtete Berechnung von Mittelwert und Fehler eingegangen, d.h. wenn alle Messwerte einen anderen Fehler besitzen. Dort werden dann auch die Ergebnisse der Ausgleichsgeraden für unterschiedliche Fehler  $s_i$  der einzelnen Messwerte präsentiert.

Insbesondere wenn die Ausgleichsgerade trotz großer Fehlerbalken sehr gut durch die Messpunkte geht, müssen die Unsicherheiten der Geradenparameter  $a$  und  $b$  durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes Gl. (19) auf Gl. (27) berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass nur nach  $y_i$  abgeleitet wird, da die  $x_i$  ja definitionsgemäß fehlerfrei sind. Man findet:

$$s_a = s \sqrt{\frac{n}{D}} \quad \text{und} \quad s_b = s \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D}} \quad (28)$$

Wenn der Fehler  $s$  nicht bekannt ist, muss das Streumaß  $s_y$  der Messwerte  $y_i$  aus der Streuung der Messpunkte relativ zur Ausgleichsgeraden bestimmt werden:<sup>7</sup>

$$s_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (29)$$

und man setzt  $s = s_y$  in Gl. (28) ein. Gleichung (29) kann noch vereinfacht werden indem man sie schreibt als

$$s_y^2 = \frac{1}{n-2} \left( \sum_{i=1}^n y_i(y_i - ax_i - b) - a \sum_{i=1}^n x_i(y_i - ax_i - b) - b \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \right) \quad (30)$$

Die letzten beiden Terme verschwinden wegen Gl. (25) und man erhält schließlich

$$s_y^2 = \frac{1}{n-2} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (31)$$

## 12. Gewichtete Mittelwertbestimmung und lineare Regression

Es kann vorkommen, dass für eine Messgröße  $G$   $n$  verschiedene Messergebnisse  $G_i$  mit unterschiedlichen Messunsicherheiten  $s_i$  vorliegen, z.B. weil  $G$  in verschiedenen Laboratorien, von verschiedenen Beobachtern oder nach verschiedenen Methoden mit jeweils

<sup>7</sup>Der Wert  $(n-2)$  im Nenner ergibt sich, weil zur Bestimmung einer Geraden zwei Messpunkte nötig sind und deshalb nur noch  $(n-2)$  unabhängige Kontrollmessungen existieren.

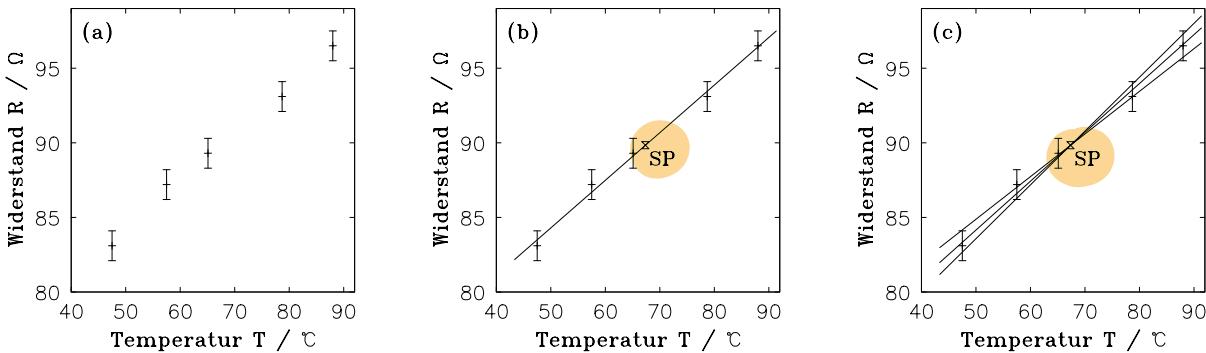


Abbildung F.7: (a) Es soll die beste Gerade durch die Messpunkte gefunden werden. Dabei sind nur die  $y$ -Werte fehlerbehaftet. (b) Gemäß Gl. (27) bestimmte Gerade nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die Gerade geht durch den Schwerpunkt SP. (c) Per Augenmaß bestimmte Geraden mit minimaler, mittlerer und maximaler Steigung, welche gerade noch mit den Fehlerbalken vereinbar sind. Alle drei Geraden gehen durch den Schwerpunkt SP.

unterschiedlichen Messfehlern gewonnen wurde. Sollen nun diese Einzelmessergebnisse zu einem Gesamtergebnis, d.h. zu einem Gesamtmittelwert oder besten Wert  $\bar{G}$  für  $G$  sowie dessen Unsicherheit  $s_G$  zusammengefasst werden, so ist eine Gewichtung der verschiedenen Ergebnisse gemäß ihrer jeweiligen Unsicherheiten nötig. Der Mittelwert berechnet sich dann zu

$$\bar{G} = \frac{w_1 G_1 + w_2 G_2 + \dots + w_n G_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum w_i G_i}{\sum w_i} \quad \text{mit} \quad w_i = \frac{1}{s_i^2} \quad (32)$$

Die Gewichte  $w_i$  der einzelnen Messwerte sind also durch die Reziprokwerte der Varianzen  $s_i^2$  der Messwerte gegeben.<sup>8</sup> Datenwerte mit kleinerer Unsicherheit tragen damit wegen des quadratischen Gewichtsfaktors entsprechend stärker zum Resultat bei als Daten mit größerer Unsicherheit.

Die Unsicherheit des gewichteten Mittelwertes ergibt sich durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes Gl. (19) auf Gl. (32):

$$s_G = \frac{\sqrt{\sum (w_i s_i)^2}}{\sum w_i} = \frac{\sqrt{\sum (\frac{1}{s_i})^2}}{\sum (\frac{1}{s_i})^2} = \frac{1}{\sqrt{\sum (\frac{1}{s_i})^2}} \quad (33)$$

Mit Hilfe des letzten Ausdrucks kann Gl. (32) umgeschrieben werden zu

$$\boxed{\bar{G} = s_G^2 \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{s_i^2} \quad \text{mit} \quad s_G^2 = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2} \right)^{-1}} \quad (34)$$

Die im letzten Abschnitt beschriebene Methode der kleinsten Quadrate zum Auffinden der besten Gerade durch eine Reihe von Messpunkten mit gleichen Gewichten kann nun leicht auf den Fall ungleicher Gewichte verallgemeinert werden. Es sind wieder  $n$  Paare von Messwerten  $(x_i, y_i)$  gegeben, von denen nur die  $y$ -Werte fehlerbehaftet sind, nun aber mit unterschiedlichen Fehlern  $s_i$ . Damit hat ein Wertepaar  $(x_i, y_i)$  das Gewicht  $1/s_i^2$ , so dass zur Bestimmung der besten Werte  $a$  und  $b$  der Geraden  $y = ax + b$  nun folgende Bedingung zu erfüllen ist:

$$\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{s_i^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - ax_i - b}{s_i} \right)^2 = \text{minimal} \quad (35)$$

Statt Gl. (26) ist jetzt folgendes Gleichungssystem für  $a$  und  $b$  zu lösen:

$$a \sum \frac{x_i^2}{s_i^2} + b \sum \frac{x_i}{s_i^2} = \sum \frac{x_i y_i}{s_i^2} \quad \text{und} \quad a \sum \frac{x_i}{s_i^2} + b \sum \frac{1}{s_i^2} = \sum \frac{y_i}{s_i^2} \quad (36)$$

<sup>8</sup>Dem liegt folgender Gedankengang zugrunde: Sind die unterschiedlichen Messunsicherheiten vorwiegend durch statistische Fehleranteile bestimmt, so können sie im Prinzip auf eine unterschiedliche Zahl von Einzelmessungen bei den verschiedenen Messreihen zurückgeführt werden. Bei gleicher Standardabweichung  $\sigma$  für alle Messreihen käme ein kleineres  $s_i$  also durch eine größere Zahl  $n_i$  von Einzelmessungen zustande, da  $s_i = \sigma / \sqrt{n_i}$ . Mit  $w_i = 1/s_i^2$  ist dann  $w_i \propto n_i$ , so dass der zugehörige Wert  $G_i$  durch den Gewichtsfaktor so behandelt wird, als wäre er  $w_i$ -mal gemessen worden. Diese für statistische Fehler begründete Wahl der Gewichtsfaktoren wird auf die Messunsicherheiten übertragen.

und man findet in diesem Fall für die beste Gerade durch die Messpunkte

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{1}{D} \left( \sum \frac{x_i y_i}{s_i^2} \sum \frac{1}{s_i^2} - \sum \frac{x_i}{s_i^2} \sum \frac{y_i}{s_i^2} \right) \\ b &= \frac{1}{D} \left( \sum \frac{x_i^2}{s_i^2} \sum \frac{y_i}{s_i^2} - \sum \frac{x_i}{s_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{s_i^2} \right) \end{aligned}} \quad \text{mit } D = \sum \frac{x_i^2}{s_i^2} \sum \frac{1}{s_i^2} - \left( \sum \frac{x_i}{s_i^2} \right)^2 \quad (37)$$

mit den Unsicherheiten

$$\boxed{s_a = \sqrt{\frac{1}{D} \sum \frac{1}{s_i^2}} \quad \text{und} \quad s_b = \sqrt{\frac{1}{D} \sum \frac{x_i^2}{s_i^2}}} \quad (38)$$

### 13. Literatur

G.L. Squirres "Meßergebnisse und ihre Auswertung", Teil I und II

S.L. Meyer "Data Analysis for Scientists and Engineers", Part I, II and III

H.J. Eichler, H.-D. Kronfeld, J. Sahm "Das Neue Physikalische Grundpraktikum", Kapitel I

W. Walcher "Praktikum der Physik", Kapitel 1

M. Drosig "Der Umgang mit Unsicherheiten"

# Versuch Mes: Messungen und Messunsicherheiten

## 1. Motivation und Versuchsziel

In der Physik werden Modelle u.a. zur Vorhersage des Ausgangs eines Experiments entwickelt. Um zu entscheiden, ob ein Modell eine gute Vorhersage liefert, vergleicht man diese mit dem Messergebnis. Allerdings stimmen Messwert und Vorhersagewert praktisch nie exakt überein, was auch daran liegt, dass jeder Messvorgang mit Messunsicherheiten (oft auch Messfehler genannt) einher geht. Die Frage, welche Abweichung bei einem guten Modell toleriert werden kann, beantwortet die Fehlerrechnung und die sich daraus ergebende Messunsicherheit.

Anhand einiger einfacher Beispiele werden Sie lernen, richtig mit diesen Unsicherheiten umzugehen. Sie werden dabei systematische und zufällige Fehler erfahren und wahrscheinlich auch grobe Fehler machen. Das Ziel ist, die Regeln der Fehlerrechnung auf konkrete Messungen anzuwenden. Dies beinhaltet das Erkennen und Ausschalten systematischer Fehler, die statistische Behandlung zufälliger Fehler, den Vergleich der Streuung der Messwerte mit einer Verteilungsfunktion sowie die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Außerdem soll der Einfluss des systematischen Restfehlers erkannt werden.

## 2. Literatur

Zur Vorbereitung muss mindestens eine der folgenden Quellen gelesen werden:

Berkeley 6, Kapitel 1 oder EKS, Kapitel I

G.L. Squires "Meßergebnisse und ihre Auswertung", Teil I

S.L. Meyer "Data Analysis for Scientists and Engineers", Part III, IV and V

M. Abramowitz, I.A. Stegun "Handbook of Mathematical Functions", Kapitel 26

F. Kohlrausch, "Praktische Physik", Band 1 und 3

## 3. Theoretischer Hintergrund

### 3.1 Histogramm, Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeiten

Im Kapitel über Fehlerrechnung wurde bereits erwähnt, dass eine Reihe von  $n$  Messungen  $x_i$  derselben Größe  $x$  zweckmäßigerweise als *Histogramm* dargestellt wird (s. Abb. Mes.1a). Bei sehr vielen verschiedenen Werten von  $x_i$  ist es sinnvoll, den Bereich der gemessenen Werte in  $m$  gleich große Intervalle der Breite  $\Delta x$ , so genannte *Klassen*, einzuteilen. Die Klasse  $j$  wird dann durch die Klassenmitte  $x_j$  und die Anzahl der Messwerte im Intervall, die Besetzungszahl  $n_j$  charakterisiert. Bei sehr vielen Messwerten  $n$  macht die relative Häufigkeit  $h_j = \frac{n_j}{n}$  der Klasse also eine Aussage darüber, wie wahrscheinlich es ist, einen Messwert in dieser Klasse zu finden. Es gilt offenbar

$$\sum_{j=1}^m n_j = n \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^m h_j = 1 \quad (1)$$

Mittelwert  $\bar{x}$  und Varianz  $\sigma^2$  der Messreihe ergeben sich aus den Histogrammdaten näherungsweise zu

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^m x_j \cdot h_j \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 \cdot h_j \quad (2)$$

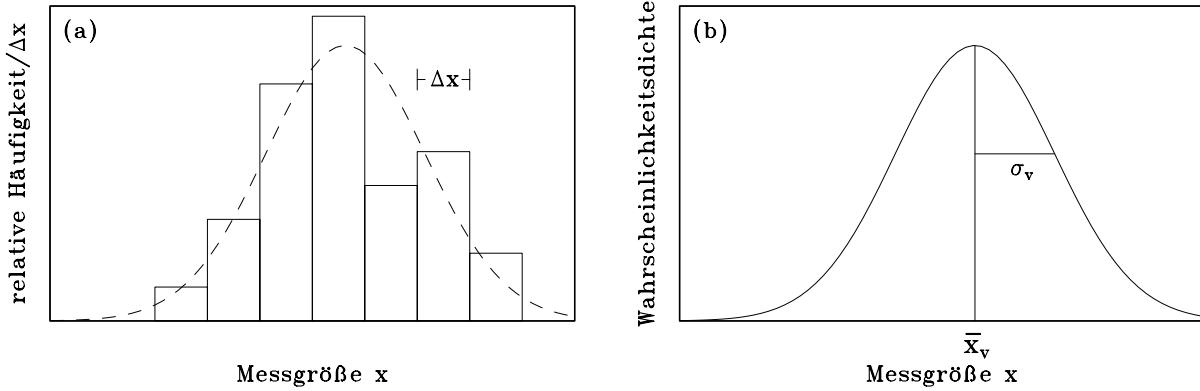


Abbildung Mes.1: (a) Histogramm für eine Reihe von Messwerten. (b) Verteilungsfunktion, welche diese Messwerte beschreiben könnte. Zum Vergleich ist die Kurve gestrichelt in (a) eingezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit  $P_{a,b}$ , einen Messwert zwischen  $x_a$  und  $x_b$  zu finden, ist

$$P_{a,b} = \sum_{j=a}^b h_j \quad (3)$$

Werden nun immer mehr Messungen durchgeführt und erlaubt das Messinstrument eine hinreichend feine Ablesung, so können die Intervalle immer kleiner und deren Anzahl immer größer gemacht werden. Im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  geht dann  $\Delta x \rightarrow dx$  und  $m \rightarrow \infty$ . Aus dem diskreten Histogramm wird eine glatte Kurve: die kontinuierliche Verteilungsfunktion  $f(x)$  (gestrichelte Kurve in Abb. Mes.1a). Dies ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte und  $f(x) dx$  gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, einen Messwert im Intervall zwischen  $x$  und  $x + dx$  zu finden.  $f(x)$  muss normiert sein:

Normierung:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

(4)

Der Mittelwert  $\bar{x}_v$  der Verteilung (s. Abb. Mes.1b) berechnet sich zu

Mittelwert:  $\bar{x}_v = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

(5)

Die mittlere quadratische Abweichung  $\sigma_v^2$  vom Mittelwert wird die Varianz der Verteilung genannt:

Varianz:  $\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}_v)^2 \cdot f(x) dx$

(6)

Die Wurzel daraus,  $\sigma_v$ , ist die Standardabweichung oder der Standardfehler der Verteilung (s. Abb. Mes.1b), also ein Maß für die Breite der Verteilung und damit ein Maß für die Streuung der Messwerte.

Die Wahrscheinlichkeit  $P(x_1, x_2)$ , für  $x$  einen Messwert zwischen  $x_1$  und  $x_2$  zu finden, ist gegeben durch

$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$

(7)

Das Ziel ist es, eine Verteilungsfunktion  $f(x)$  zu finden, welche die statistischen Eigenarten der Messwerte charakterisiert, so dass  $\bar{x} = \bar{x}_v$  und  $\sigma = \sigma_v$  gesetzt werden kann. Ist das Verteilungsgesetz der zufälligen Fehler bekannt, kann also mit den Gesetzen der Statistik ein Intervall angegeben werden, in dem mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit der wahre Wert der Messung liegt.

### 3.2 Die Normal– oder Gauß–Verteilung

Die Werte  $x_i$  einer Messreihe aus  $n$  unabhängigen Messungen, welche nur zufälligen Fehlern unterworfen sind, haben für den Mittelwert  $\bar{x}$  die größte Häufigkeit. Weiterhin streuen sie symmetrisch um  $\bar{x}$  und kleine Abweichungen  $|x_i - \bar{x}|$  vom Mittelwert sind häufiger als größere. Die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert mit großem Abstand vom Mittelwert zu finden nimmt rasch ab.

Das *zentrale Grenzwerttheorem* besagt nun, dass jede Verteilungsfunktion, welche eine solche Messreihe beschreibt, sich einer Gauß– (oder Normal–) Verteilung annähert, wenn die Anzahl der unabhängig gewonnenen Messwerte gegen Unendlich geht. Deshalb wird sie im Rahmen der Fehlerrechnung, aber auch für viele Zwecke der Statistik, für die Verteilungsfunktion der Messwerte  $x$  hergenommen:

$$\text{Gauß–Verteilung: } g(x) = A e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\lambda^2}} \quad (8)$$

Die Gauß–Verteilung  $g(x)$  hat zwei Parameter,  $\mu$  und  $\lambda$ . Deren Bedeutung sowie eine genauere Charakterisierung der Verteilung werden Sie im Rahmen der Fragen zur Vorberitung herausarbeiten. Dabei wird auch klar, dass sie die oben erwähnten Eigenschaften zufällig verteilter Messwerte besitzt.

Die Fehler  $v_i$  der einzelnen Messwerte sind gegeben durch  $v_i = x_i - \bar{x}$  und stellen, wie die Messwerte selbst, Zufallsgrößen dar, welche ebenfalls gemäß  $g(v) = A \exp(-\frac{v^2}{2\lambda^2})$  normalverteilt sind. Dies ist eine Gauß–Funktion mit dem Maximum bei  $v = 0$  und spiegelt die Statistik der zufälligen Fehler wider. Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler zwischen  $v_1$  und  $v_2$ , und damit einen Messwert zwischen  $\bar{x} + v_1$  und  $\bar{x} + v_2$  zu finden, ist gegeben durch

$$P(v_1, v_2) = A \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{v^2}{2\lambda^2}} dv = A \int_{-\infty}^{v_2} e^{-\frac{v^2}{2\lambda^2}} dv - A \int_{-\infty}^{v_1} e^{-\frac{v^2}{2\lambda^2}} dv \quad (9)$$



Das auftretende Integral ist nicht mehr elementar lösbar. Durch die Substitution  $t = \frac{v}{\lambda}$  kann es jedoch auf ein allgemeines, von  $\lambda$  unabhängiges Integral zurückgeführt werden, und man erhält schließlich mit der richtigen Wahl von  $A$  (und mit  $z_i = \frac{v_i}{\lambda}$ )

$$P(z_1, z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \quad \text{mit} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (10)$$

$\Phi(z)$  ist die *Gauß'sche Fehlerfunktion*, welche sich nur numerisch berechnen lässt und in der Literatur tabelliert ist (z.B. Abramowitz/Stegun oder Kohlrausch). Die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert in einem symmetrischen Intervall  $\bar{x} \pm v$  um den Mittelwert zu finden, ergibt sich also aus

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(z) - 1 \quad (11)$$

## 4. Fragen zur Vorbereitung

1. Diskutieren Sie die verschiedenen Fehlerarten!
2. Was ist die jeweilige Bedeutung von  $\sigma$  und  $s$  aus dem Kapitel über Fehlerrechnung? Wovon hängen die beiden ab und wie können sie jeweils verbessert werden? Was ist aber unabhängig davon oft der entscheidende Einfluß auf den Fehler einer Messgröße?
3. Machen Sie sich mit der Gauß–Verteilung vertraut:
  - (a) Bestimmen Sie  $A$ , so dass Gl. (4) gilt. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Gauß–Verteilung nach Gln. (5) und (6).
  - (b) Bestimmen Sie das Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ , Symmetrie, Maximum und Wendepunkte.
  - (c) Geben Sie nun die endgültige Form der Gauß–Verteilung an. Zeichnen Sie die Funktion für  $\sigma = 1, \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{4}$  mit jeweils festem  $\bar{x} = 1$  ins gleiche Diagramm.

Sie müssen während des Versuchs eine annähernd Gauß–förmige Kurve in Ihre Messdaten einzeichnen und daraus die Parameter der Kurve ablesen können.

4. Zeigen Sie mit Hilfe der Symmetrie der Gauß–Verteilung, dass Gl. (11) gilt. Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Messwert innerhalb von  $\bar{x} \pm k \cdot \sigma$  liegt, für  $k = 1, 2, 3$  und  $4$ . Wieviele Messwerte bräuchten Sie also etwa, um im Mittel einen Wert außerhalb des jeweiligen Intervalls zu finden?
5. Machen Sie sich mit der Darstellungsform “Ergebnis = Messwert  $\pm$  Messunsicherheit” vertraut und geben Sie einige Beispiele. Wieviele Stellen sind dabei sinnvoll?
6. Wie breit wählt man sinnvollerweise die Klassen eines Histogramms und warum?
7. Machen Sie sich mit der Bedienung eines Messchiebers vertraut (s. auch Anhang dieser Anleitung)!

## 5. Versuchsaufbau und Messtechniken

### 5.1 Zufälliger und systematischer Fehler

In ein gemeinsames Gehäuse sind ein Zeitgeber und eine elektronische Stoppuhr eingebaut.

- Zeitgeber: Der Zeitgeber kann auf etwa 2 oder auf etwa 6 Sekunden eingestellt werden (Kippschalter an der rechten Seite), wobei die exakten Zeiten für jedes Gerät unterschiedlich sind. Nach Drücken des linken Tasters leuchtet die Leuchtdiode für die eingestellte Zeit.
- Stoppuhr (Zeitmesser): Die Stoppuhr hat eine Zeitauflösung von 0,01 s, die interne Genauigkeit beträgt 1 ms. Nach Drücken des rechten Tasters wird die Uhr auf Null zurückgestellt und beginnt zu laufen, bis sie durch nochmaliges Drücken des Tasters angehalten wird. Die Zeit wird erst am Ende des Vorgangs angezeigt.

Das Gerät hat drei verschiedene Modi (Kippschalter an der Vorderseite):

- ohne Reaktionszeit, also ohne den durch die Reaktionszeit zustande kommenden systematischen Fehler: Ein Experimentator startet (verdeckt) den Zeitgeber. Der andere Experimentator startet die Stoppuhr, wenn er die Lampe aufleuchten sieht

und stoppt die Uhr nach dem Verlöschen der Lampe. Damit sind beide Tastendrücke durch die persönliche Reaktionszeit verzögert, so dass die reine Aufleuchtdauer gemessen wird. In diesem Modus arbeiten Zeitgeber und Zeitmesser unabhängig voneinander.

- mit Reaktionszeit, also mit dem durch die Reaktionszeit zustande kommenden systematischen Fehler: Ein Experimentator startet den Zeitgeber, wodurch auch automatisch die Stoppuhr gestartet wird. Der andere Experimentator stoppt die Uhr, nachdem er die Lampe verlöschen sieht. Diese Messung beinhaltet also die Aufleuchtdauer und die persönliche Reaktionszeit nach dem Verlöschen der Lampe.
- tatsächliche Aufleuchtdauer: Zeitgeber und Zeitmesser sind nun intern verbunden. Durch Drücken des linken Tasters beginnt gleichzeitig mit dem Aufleuchten der Diode auch die Uhr zu laufen. Die Uhr stoppt automatisch mit dem Erlöschen der Leuchtdiode. Der rechte Taster hat in diesem Modus keine Funktion.

Um weitere systematische Fehler zu vermeiden, bleibt die Anzeige der Stoppuhr während der Messung dunkel.

## 5.2 Fehlerfortpflanzung

Es liegt ein quaderförmiger Probekörper mit Höhe  $h$  und quadratischer Grundfläche (Seitenlänge  $a$ ) vor, aus dem ein zylinderförmiges Loch der Tiefe  $t$  mit Durchmesser  $d$  ausgeschnitten wurde. Mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes soll die Dichte des aus Messing MS 58 bestehenden Werkstückes bestimmt werden. Zur Messung dienen ein Messschieber (s. Anhang) und eine einarmige Balkenwaage.

## 6. Versuchsdurchführung

Bei diesem Versuch gibt es keine speziellen Gefährdungspotentiale.

Beachten Sie zur Bedienung des Messschiebers den Anhang!

### 6.1 Zufälliger und systematischer Fehler

1. Messen Sie in der Schalterstellung “2 s” je 60 Mal die Aufleuchtdauer der Leuchtdiode, und zwar
  - (a) ohne den durch die Reaktionszeit hervorgerufenen systematischen Fehler,
  - (b) mit dem durch die Reaktionszeit hervorgerufenen systematischen Fehler.
2. Führen Sie nun die gleichen Messungen in der Schalterstellung “6 s” durch.
3. Messen Sie für beide Schalterstellungen die exakten Aufleuchtdauern elektronisch.

Da die Reaktionszeit und deren Streuung vom jeweiligen Experimentator abhängt, muss eine vollständige Messreihe (also a und b) durch den gleichen Experimentator gestoppt werden!

### 6.2 Fehlerfortpflanzung

Bestimmen Sie mit dem Messschieber die Dimensionen des Probekörpers und mit der Balkenwaage dessen Masse.

## 7. Auswertung

Dieser Versuch wird als Präsenzauswertung bearbeitet, d.h. die Auswertung findet im Anschluss an den Versuch im Versuchsraum statt. Dabei dürfen Sie natürlich mit Ihren Kollegen diskutieren, außerdem steht der Betreuer für Fragen zur Verfügung. Altauswertungen dürfen selbstverständlich nicht verwendet werden.

Vergewissern Sie sich vor Beginn der Auswertung, ob der von Ihnen verwendete Rechner Statistikfunktionen zur korrekten Bestimmung von Mittelwert und Standardabweichung beinhaltet. Machen Sie sich gegebenenfalls mit diesen Funktionen vertraut.

Sind keine Statistikfunktionen vorhanden, so kann die Varianz wie folgt berechnet werden:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \rightarrow \quad \sum (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \quad (n-1)\sigma^2 = \sum_{i=1}^n t_i^2 - n\bar{t}^2 \quad \bar{x}_n = \sum x_i \quad (12)$$

Vergessen Sie bei der Auswertung nicht den Einfluss des Ablesefehlers und des systematischen Restfehlers!

### 7.1 Zufälliger und systematischer Fehler

Wenn Ihre Gruppennummer eine gerade Zahl ist, so bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben für die beiden "2 s"-Messreihen, andernfalls für die beiden "6 s"-Messreihen:

- Verteilung der Messwerte: Teilen Sie Ihre Messwerte in vernünftig gewählte Klassen ein und zeichnen Sie ein Histogramm!
- Berechnen Sie den Mittelwert  $\bar{t}$ , den mittleren Fehler der Einzelmessung  $\sigma$  und den Fehler des Mittelwertes  $s$ . Inspizieren Sie die Messwerte auf verdächtig große Abweichungen vom Mittelwert und prüfen Sie, ob diese Werte ausgesondert werden dürfen. Woher kommen diese Abweichungen? Gegebenenfalls müssen Mittelwert und Fehler neu bestimmt werden.

Geben Sie das Ergebnis mit Fehler in korrekter Form an. Was stellen Sie für die Genauigkeit fest?

Vergleichen Sie nun Ihr Ergebnis mit dem elektronisch gemessenen Wert  $t_w$  und diskutieren Sie Ihre Beobachtungen! Geben Sie die relative Abweichung des Ergebnisses vom genauen Wert an.

Bestimmen Sie schließlich aus den Ergebnissen Ihre persönliche Reaktionszeit.

- Zeichnen Sie den Mittelwert  $\bar{t}$  sowie die Intervalle  $\pm\sigma$ ,  $\pm 2\sigma$  und  $\pm 3\sigma$  um den Mittelwert ins Histogramm ein. Wieviel Prozent der Messwerte liegen innerhalb der jeweiligen Intervalle? Schätzen Sie ab, ob die Messwerte in etwa Gauß-verteilt sind.
- Reduzierte Messreihe: Berechnen Sie nun für 15 Messwerte (jeder vierte Wert; im Protokoll kennzeichnen!)  $\bar{t}$ ,  $\sigma$  und  $s$ . Was erwarten Sie für diese Werte im Vergleich zu den für die komplette Messreihe bestimmten Werten? Entspricht Ihre Beobachtung dieser Erwartung?
- Vergleichen Sie nun die Reaktionszeiten aus den "2 s"-Messreihen mit denen aus den "6 s"-Messreihen (Tafel) und diskutieren Sie das Ergebnis!

## 7.2 Fehlerfortpflanzung

- Berechnen Sie das Volumen des Probekörpers und den dazugehörigen Fehler. Geben Sie dabei explizit die aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz folgende Formel für den Fehler an.
- Bestimmen Sie nun die Dichte von MS 58 (wie oben mit Fehlerformel und Fehler).
- Welche Messgröße(n) müsste(n) also am ehesten genauer bestimmt werden, um die Messung zu verbessern?

$$V = \alpha^2 h - t \pi \frac{d^2}{4} \rightarrow dV^2 = [(2\alpha h) da]^2 + [(a^2) dh]^2 + [(-\pi \frac{d^2}{4}) dt]^2 + [(-t\pi \frac{d}{2}) dd]^2$$

### Anhang: Der Messschieber

#### A.1: Teile und Bedienung

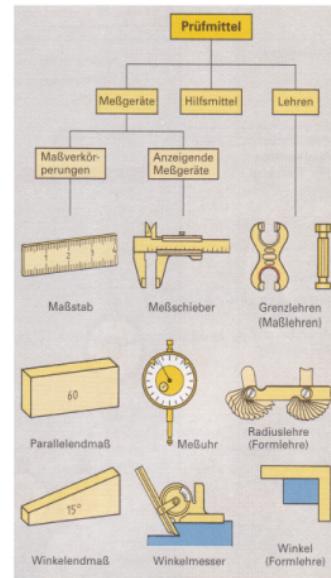
##### Schieblehre, Messschieber,

##### Schublehre....

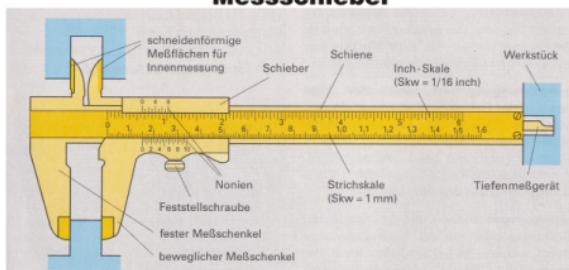
##### Was stimmt denn jetzt eigentlich???

**Messen** ist das Vergleichen einer Länge oder eines Winkels mit einem Meßgerät. Das Ergebnis ist ein Meßwert.

**Lehren** ist Vergleichen des Prüfgegenstandes mit einer Lehre. Man erhält dabei keinen Zahlenwert, sondern stellt nur fest, ob der Prüfgegenstand Gut oder Ausschuß ist.

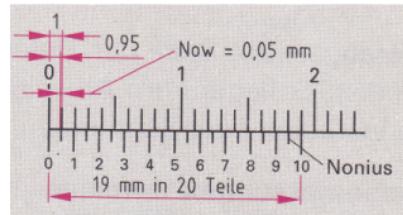


#### Bezeichnungen am Messschieber

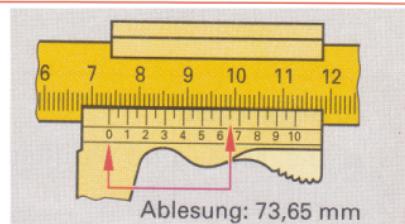


Die Ablesemöglichkeit eines Nonius ergibt sich aus dem Unterschied zwischen der Hauptteilung auf der Schiene und der Noniusteilung.

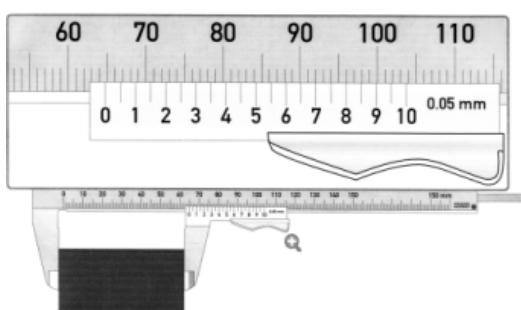
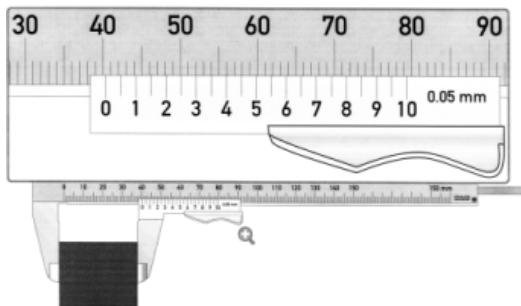
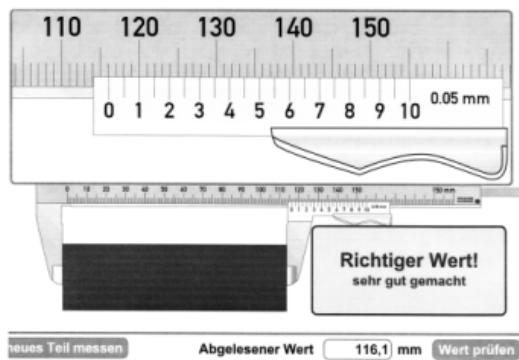
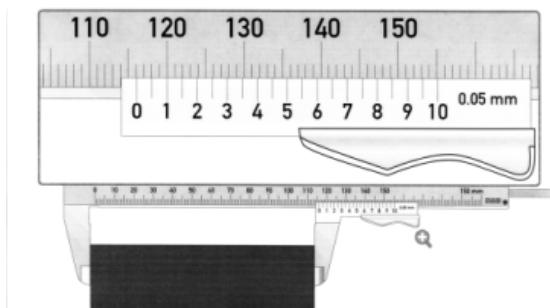
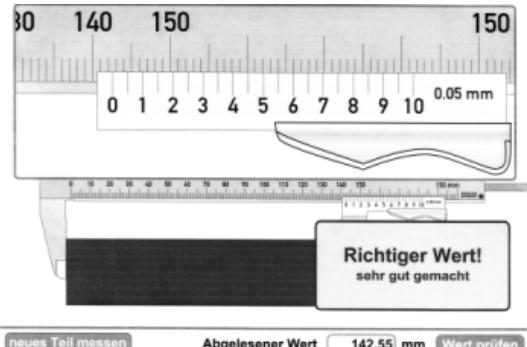
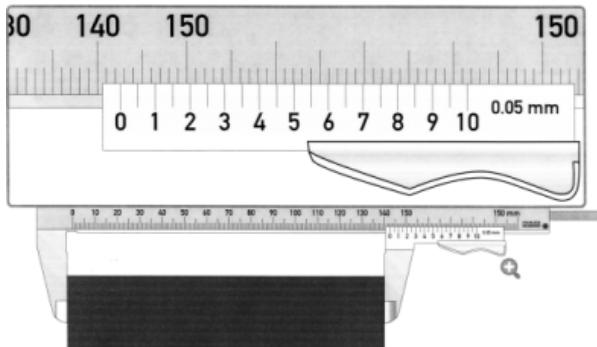
Beim **Zwanzigstel-Nonius** sind 19 mm in 20 Teile geteilt (**Bild 2**). Der Strichabstand auf dem Nonius ist also  $\frac{19}{20} \text{ mm} = 0,95 \text{ mm}$ , während der Strichabstand der Skale 1 mm beträgt. Es ergibt sich eine Teilungsdifferenz von  $1 \text{ mm} - 0,95 \text{ mm} = 0,05 \text{ mm}$ . Diese Teilungsdifferenz bezeichnet man als **Noniuswert Now**. Er entspricht dem Skalenteilungswert bei Zeiger-Meßgeräten.



Beim Ablesen betrachtet man den Nullstrich des Nonius als Komma. Links vom Nullstrich liest man auf der Strichskale die vollen Millimeter ab und sucht dann rechts vom Nullstrich den Teilstrich des Nonius aus, der sich mit einem Teilstrich der Strichskale deckt. Die Anzahl der Teilstrichabstände gibt dann je nach Nonius die Zwanzigstel- oder Fünfzigstel-Millimeter an.



## A.2: Übungen



# Versuch Tor: Trägheitsmomente, Torsion und Biegung

## 1. Motivation und Versuchsziel

Die Verformung von Materialien unter der Einwirkung von Kräften kann durch einige wenige Materialparameter beschrieben werden. In diesem Versuch werden elementare Kenntnisse aus der Kontinuumsmechanik, speziell aus der Elastizitätslehre vermittelt, woraus erstaunlich einfache Vorrichtungen zum Messen solcher Parameter resultieren.

Sie werden den Zusammenhang zwischen Dehnung und Biegung, sowie zwischen Scherung und Torsion kennen lernen und den Elastizitäts- und Schubmodul für ein bestimmtes Material messen. Weiterhin lernen Sie, wie das Trägheitsmoment eines beliebigen starren Körpers um eine beliebige Rotationsachse durch Drehschwingungen ermittelt werden kann, was Sie auf einen einfachen Fall anwenden werden.

## 2. Literatur

Zur Vorbereitung muss mindestens eine der folgenden Quellen gelesen werden:

BS-1, Abschnitte 5.1, 5.2, 8.2, 9.1 und 9.3–9.6

Gerthsen, Abschnitte 2.3, 2.4.1, 2.4.3 und 4.1

EKS, Abschnitte 8 und 9

Tipler, Abschnitte 9.3, 12.7, 14.1 und 14.3

## 3. Theoretischer Hintergrund

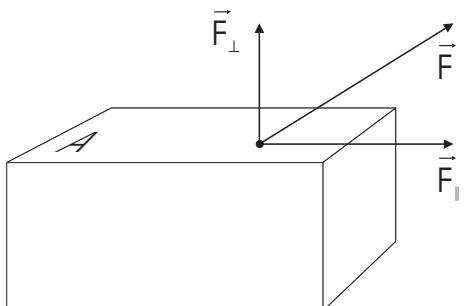


Abbildung Tor.1: Wenn an einem Körper eine Kraft  $\vec{F}$  angreift, so kann diese in eine Komponente senkrecht ( $\vec{F}_{\perp}$ ) und eine Komponente parallel ( $\vec{F}_{\parallel}$ ) zur Oberfläche A zerlegt werden. Dabei führt  $\vec{F}_{\perp}$  zu einer Dehnung des Körpers, während  $\vec{F}_{\parallel}$  eine Scherung zur Folge hat. Diese beiden Verformungsarten werden nun getrennt diskutiert.

### 3.1 Dehnung und Biegung

Eine senkrecht an einem Flächenelement  $dA$  angreifende Kraft  $dF$  bewirkt eine Längenänderung eines Stabes der Länge  $l_0$  um  $\Delta l$  (vgl. Abb. Tor.2a). Zwischen der *Zugspannung*  $\sigma = \frac{dF}{dA}$  und der *Dehnung*  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  besteht der Zusammenhang

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma \quad \text{oder} \quad \sigma = E \cdot \epsilon \quad (1)$$

$E$  heißt *Elastizitätsmodul* und ist eine Materialkonstante.

Eine solche Dehnung geht immer mit einer Querkontraktion einher, d.h. es findet gleichzeitig eine Verkleinerung des Querschnitts  $d_0$  um  $-\Delta d$  statt (Abb. Tor.2a).<sup>1</sup> Dabei gilt

<sup>1</sup>Das Vorzeichen von  $\Delta d$  wurde so gewählt, dass die Notation im Einklang mit der Literatur ist.

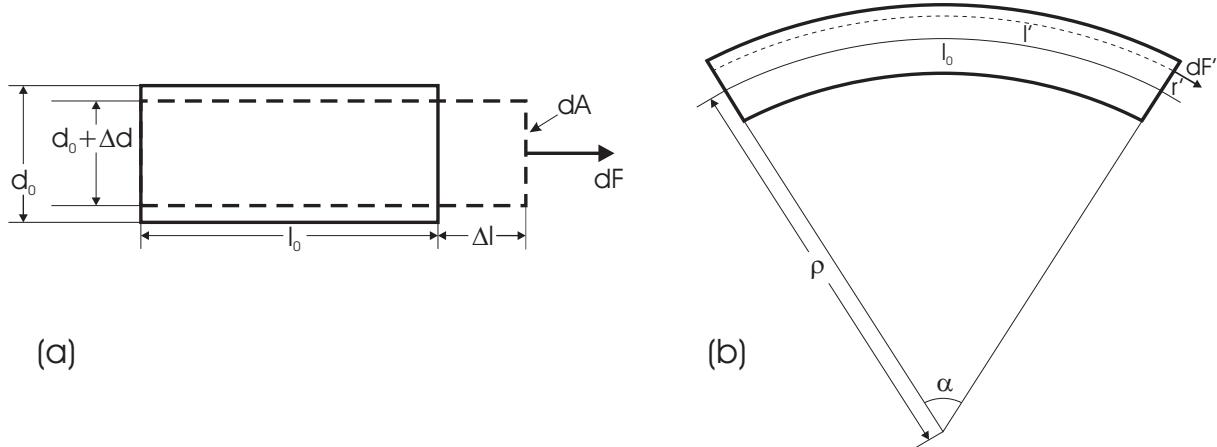


Abbildung Tor.2: (a) Veranschaulichung der Dehnung  $\Delta l$  und der Querkontraktion  $\Delta d$  unter Einwirkung einer Kraft  $dF$ , welche senkrecht an der Fläche  $dA$  angreift. (b) Verhältnisse beim Biegen eines Stabes.

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = -\mu \cdot \epsilon \quad (2)$$

Die *Querkontraktionszahl* oder *Poisson-Zahl*  $\mu$  ist wieder eine Materialkonstante.

Die Biegung eines Stabes kann auf Dehnungen (bzw. Stauchungen) der einzelnen Längsebenen des Stabes zurückgeführt werden. Wird ein Stab der Länge  $l_0$  kreisförmig verbogen (Abb. Tor.2b), so behält die neutrale Faser in der Mitte des Stabes ihre ursprüngliche Länge bei, während benachbarte Fasern ihre Längen von  $l_0$  nach  $l'$  ändern. Ist  $r'$  der senkrechte Abstand von der neutralen Faser, so ist  $l' > l_0$  für  $r' > 0$  und  $l' < l_0$  für  $r' < 0$ . Die damit verbundene Kraft  $dF'$  auf den Querschnitt  $dA'$  ist positiv für  $r' > 0$  (Dehnung) und negativ für  $r' < 0$  (Stauchung). Ist  $\alpha$  der Kippwinkel, so gilt für die Dehnung und die dafür verantwortliche Kraft

$$\epsilon' = \frac{\alpha r'}{l_0} \quad \text{und} \quad dF' = \frac{\alpha r'}{l_0} E dA' \quad (3)$$

Die Dehnung ist also proportional zum Abstand von der neutralen Faser.

Die Kraft  $dF'$  erzeugt bezüglich der neutralen Faser das Biegemoment  $dM'_B = r' dF'$ , woraus sich durch Integration über den Querschnitt das Gesamtbiegemoment  $M_B$  ergibt:

$$M_B = \frac{\alpha E}{l_0} \int_{\mathcal{O}} r'^2 dA' = \frac{\alpha E}{l_0} \cdot I_B \quad (4)$$

$I_B = \int_{\mathcal{O}} r'^2 dA'$  ist eine Geometrieeigenschaft und heißt *Flächenträgheitsmoment*.  $r'$  ist hier der senkrechte Abstand von der neutralen Faser und nicht der radiale Abstand von der Mittelachse des Stabes!

### 3.2 Scherung und Torsion

Eine tangential an einem Flächenelement  $dA$  angreifende Kraft  $dF$  sorgt dafür, dass übereinander liegende Ebenen des Körpers in Zugrichtung gegeneinander verschoben werden (vgl. Abb. Tor.3a). Zwischen der *Schubspannung*  $\tau = \frac{dF}{dA}$  und der *Scherung*  $\gamma$  besteht der Zusammenhang

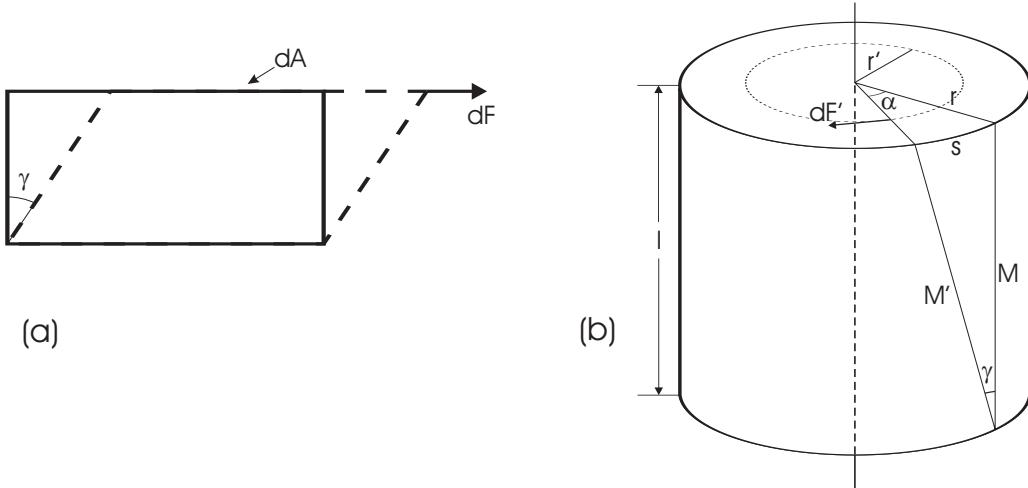


Abbildung Tor.3: (a) Veranschaulichung der Scherung  $\gamma$  unter Einwirkung einer Kraft  $dF$ , welche tangential an der Fläche  $dA$  angreift. (b) Verhältnisse beim Verdrillen eines Stabes.

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau \quad \text{oder} \quad \tau = G \cdot \gamma \quad (5)$$

$G$  heißt *Schub-* oder *Torsionsmodul* und ist eine weitere Materialkonstante.

Die Verdrillung (oder Torsion) eines Stabes mit Radius  $r$  um seine Längsachse ist mit Scherungen benachbarter Zylinderschalen verbunden (Abb. Tor.3b). Eine Torsion um den Winkel  $\alpha$  verschiebt eine ursprünglich parallel zur Achse liegende Mantellinie  $M$  nach  $M'$ , was einer Scherung  $\gamma$  auf der Außenseite des Stabes entspricht. Die Scherung wächst mit dem Abstand  $r'$  von der Achse und kann auf eine Kraft  $dF'$  auf das Flächenelement  $dA'$  zurückgeführt werden. Ist  $l$  die Länge des Stabes, so gilt für  $r \ll l$

$$\gamma' = \frac{\alpha r'}{l} \quad \text{und} \quad dF' = \frac{\alpha r'}{l} G dA' \quad (6)$$

Die Scherung ist also proportional zum Abstand von der Achse.

Die Kraft  $dF'$  erzeugt bezüglich der Achse das Torsionsmoment  $dM'_T = r' dF'$ , woraus sich durch Integration über den Querschnitt das Gesamttorsionsmoment  $M_T$  ergibt:

$$M_T = \frac{\alpha G}{l} \int_{\Omega} r'^2 dA' = \frac{\alpha G}{l} \cdot I_T \quad (7)$$

$I_T = \int_{\Omega} r'^2 dA'$  ist wieder eine Geometrieeigenschaft. Beachten Sie die Analogie zu Gl. (4), wobei  $r'$  jetzt aber der radiale Abstand von der Achse des Stabes ist!

$$E, G \text{ und } \mu \text{ sind durch folgende Beziehung verbunden:} \quad E = 2G(1 + \mu) \quad (8)$$

### 3.3 Trägheitsmomente und Drehschwingungen

Für die Rotationsbewegung eines starren Körpers um eine beliebige Achse ist nicht allein seine Masse  $m$ , sondern vielmehr das *Trägheitsmoment*  $J$  des Körpers bezogen auf diese Achse entscheidend:

$$J = \int_V r^2 dm \quad (9)$$

Die Integration erstreckt sich über das gesamte Volumen des Körpers, wobei  $r$  der Abstand des jeweiligen Massenelementes von der Drehachse ist. Dieses Integral kann i.Allg. nur für einfach gestaltete Körper bezüglich günstig gelegener Rotationsachsen berechnet werden. Ist ein Körper so in eine Vorrichtung eingebaut, dass bei einer Auslenkung um den (kleinen) Winkel  $\alpha$  bezüglich einer Achse ein rücktreibendes Moment  $M_r = -D\alpha$  wirkt, so kann er um diese Achse schwingen. Ein Beispiel ist das physikalische Pendel. Die Proportionalitätskonstante  $D$  heißt *Winkelrichtgröße* (auch *Direktionsmoment* oder *Richtmoment*) und hängt vom Aufbau ab. Die Schwingung wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:<sup>2</sup>

$$J\ddot{\alpha} + D\alpha = 0 \quad (10)$$

Nach Lösung der Gleichung kann bei bekanntem  $D$  aus der Schwingungsdauer  $T$  das Trägheitsmoment  $J$  bestimmt werden. In diesem Versuch werden Sie eine Apparatur benutzen, mit der Sie das Trägheitsmoment eines beliebigen starren Körpers um eine beliebige Rotationsachse messen können.

## 4. Fragen zur Vorbereitung

1. Was besagt das Hookesche Gesetz und was ist dessen Bedeutung für diesen Versuch?
2. Welche Dimensionen haben  $E$ ,  $G$  und  $\mu$ ? Welche Einschränkungen ergeben sich für  $\mu$ , wenn Sie davon ausgehen, dass bei einer Dehnung das Volumen nicht kleiner werden kann?
3. Berechnen Sie explizit die Integrale für  $I_B$  und  $I_T$  aus Gln. (4) und (7) für einen zylindrischen Stab mit Radius  $r$  (Ergebnisse:  $I_B = \frac{\pi}{4}r^4$ ,  $I_T = \frac{\pi}{2}r^4$ ). Berechnen Sie damit schließlich  $M_B$  und  $M_T$ .
4. Geben Sie die allgemeine Lösung von Gl. (10) an! Wie finden Sie also aus der Schwingungsdauer das Trägheitsmoment?
5. Vergleichen Sie das Biegemoment eines Stahlrohres mit dem eines zylindrischen Stahlstabes gleicher Länge und gleicher Masse! Welches Biegemoment ist größer? (Hier ist keine explizite Rechnung verlangt, sondern eine schlüssige Argumentation.)
6. Berechnen Sie die Trägheitsmomente eines zweiatomigen Moleküls bezüglich zweier Achsen durch den Molekülschwerpunkt, wobei eine Achse die Verbindungsline der beiden Atome und die zweite Achse senkrecht dazu ist. Welche Folgerungen könnten Sie hieraus ziehen und warum stimmen diese bei Molekülen nicht, bei entsprechenden makroskopischen Körpern aber schon? (Nehmen Sie die Atome als Massenpunkte der gleichen Masse  $m$  mit Abstand  $d$  an.)

## 5. Versuchsaufbau und Messtechniken

### 5.1 Apparatur zur Biegung eines Stabes und zum Messen von E

Hier wird der Stab mit dem zu messenden Elastizitätsmodul  $E$  waagerecht auf zwei im Abstand  $l$  voneinander angeordneten Schneiden S aufgelegt (schematisch dargestellt in

---

<sup>2</sup>Der Einfachheit halber wurde eine ungedämpfte Schwingung angenommen. Den Einfluß der Dämpfung werden Sie in einem anderen Versuch studieren.

Abbildung Tor.4:  
Schematische Darstellung der Biegeapparatur.

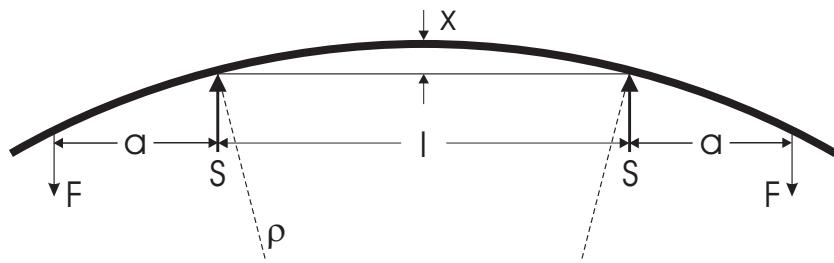


Abb. Tor.4). Wenn die Stabenden, welche symmetrisch nach beiden Seiten über die Schneiden hinausragen, im Abstand  $a$  von den Schneiden mit gleichen Gewichten  $F$  belastet werden, ergibt sich die maximale Durchbiegung  $x$  in der Mitte des Stabes.  $x$  kann mit Hilfe einer Noniusschraube gemessen werden.

## 5.2 Apparatur zur Torsion eines Stabes und zum Messen von $G$ und $J$

Eine kreisrunde Kunststoffscheibe mit Radius  $R$  ist so in eine Apparatur eingebaut, dass sie um eine vertikale kugelgelagerte Achse durch ihren Mittelpunkt drehbar ist. In diesem Mittelpunkt ist das obere Ende des Stabes mit dem zu messenden Torsionsmodul  $G$  befestigt, während das untere Ende im Laborsystem festgehalten wird.

Eine über den Rand der Scheibe gelegte Schnur kann über eine Umlenkrolle geführt und mit Gewichten belastet werden. Damit wirkt ein definiertes Drehmoment auf die Scheibe, dem das rücktreibende Moment des Drahtes entgegen wirkt. Mit Hilfe eines Zeigers am Scheibenrand kann die Winkelauslenkung von einer Skala abgelesen werden.

Auf die Kunststoffscheibe kann eine quadratische Metallplatte aufgeschraubt werden, auf der sich wiederum verschiedene Körper befestigen lassen. Wird die Scheibe ausgelenkt und losgelassen, so führt das zu Drehschwingungen, aus deren Schwingungsdauer sich das Trägheitsmoment des jeweiligen Körpers bestimmen lässt.

## 6. Versuchsdurchführung

**Gefährdungspotentiale:** Die relativ schweren Hanteln und Metallplatten können bei unsachgemäßer Behandlung zu Quetschungen (Finger, Zehen) führen.

**Allgemeine Hinweise:** Es stehen verschiedene Messgeräte zur Verfügung (Lineal, Messschieber, Mikrometerschraube). Überlegen Sie sich bei den einzelnen Messungen, welches das jeweils geeignetste Instrument ist.

### 6.1 Biegung des Stabes

1. Justieren Sie die Anordnung und messen Sie alle für die Auswertung benötigten Größen! Überlegen Sie dabei, wo genau sich bei dieser Apparatur die Schneiden befinden. Messen Sie den Stabradius  $r$  an verschiedenen Stellen.
2. Messen Sie nun durch Anhängen der Gewichte die maximale Durchbiegung, und zwar für mindestens vier verschiedene Orientierungen des Stabes! Überprüfen Sie dabei immer wieder die Justierung der Apparatur.

## 6.2 Statische Torsion

Lenken Sie die Scheibe mit Gewichten der Massen  $100 \text{ g} \leq m_i \leq 1000 \text{ g}$  aus, und messen Sie jeweils den Auslenkwinkel  $\alpha$ . Messen Sie alle weiteren für die Auswertung benötigten Größen. Überlegen Sie sich, wo genau die Gewichte an der Scheibe angreifen und welches die effektive Länge  $l$  des Stabes ist. Messen Sie den Stabradius  $r$  an verschiedenen Stellen.

## 6.3 DrehSchwingungen

1. Schrauben Sie die quadratische Metallplatte auf die Kunststoffscheibe und bestimmen Sie die Schwingungsdauer  $T$ . Führen Sie diese Messung mindestens 6 Mal für jeweils 20 Schwingungen durch.
2. Die Hantel kann in 2 verschiedenen Orientierungen auf der Metallplatte befestigt werden. Bestimmen Sie für jede Orientierung die Schwingungsdauer (mindestens 6 Mal für jeweils 20 Schwingungen).
3. Für Aufgabe 7.3 benötigen Sie einige Abmessungen der Hantel.

## 7. Auswertung

Gleichungen (4) und (7) sind wichtige Grundgleichungen der Technik, mit deren Hilfe die Verformung von Materialien unter der Einwirkung von Kräften beschrieben werden kann. Die Verformung ist von den Materialkonstanten  $E$  und  $G$  abhängig, sowie von der durch  $I_B$  oder  $I_T$  ausgedrückten Geometrie des untersuchten Körpers. Umgekehrt können damit also bei bekannter Geometrie und bekannten Kräften  $E$  und  $G$  bestimmt werden.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Literaturwerten!

### 7.1 Bestimmung von E

Bei der verwendeten Apparatur greift bei jeder Schneide das Moment  $M = Fa$  am Stab an, so dass zwischen den Schneiden überall das konstante Biegemoment  $M$  herrscht. Dadurch wird der Draht zu einem Kreisbogen mit Radius  $\rho$  und Öffnungswinkel  $\alpha$  zwischen den Auflagepunkten verbogen.

Zeigen Sie, dass für  $x \ll 2\rho$  die Durchbiegung in der Mitte zwischen den Schneiden durch

$$x = \frac{Fal^2}{2\pi Er^4} \quad (11)$$

gegeben ist. Bestimmen Sie aus Ihren Messwerten den Elastizitätsmodul  $E$  für den verwendeten Stahl!

### 7.2 Bestimmung von G, $\mu$ und D

1. Aus der Verdrillung des Drahtes mit einem definierten Drehmoment kann der Schubmodul  $G$  bestimmt werden. Zeigen Sie, dass gilt ( $g$  ist die Erdbeschleunigung):

$$G = \frac{2Rlg}{\pi r^4} \cdot \frac{m}{\alpha} \quad (12)$$

Tragen Sie die Torsionswinkel  $\alpha$  gegen die angehängten Massen  $m$  auf und bestimmen Sie durch lineare Regression die Steigung der Geraden und daraus dann  $\frac{m}{\alpha}$ . Berechnen Sie hiermit  $G$ !<sup>3</sup>

2. Die für die Biegung und für die Torsion verwendeten Stäbe sind aus dem gleichen Material. Bestimmen Sie die Querkontraktionszahl  $\mu$  für diesen Stahl!
3. Mit Hilfe von  $G$  können Sie nun auch die Winkelrichtgröße  $D$  für den Stab bestimmen.

### 7.3 Bestimmung der Trägheitsmomente

Bestimmen Sie aus den Schwingungsdauern die Trägheitsmomente der Hantel in den beiden Orientierungen! Beachten Sie dabei, dass sich Trägheitsmomente addieren.

Welche Rotation lässt sich also leichter anregen?

Schätzen Sie die jeweiligen Trägheitsmomente durch einfache geometrische Annahmen ab und vergleichen Sie diese mit Ihren Messergebnissen (nehmen Sie als Material Eisen an)!

---

<sup>3</sup>Beachten Sie dabei, dass die Auslenkung 0 ist, wenn keine Masse anhängt.

# Versuch ES: Erzwungene Schwingungen

## 1. Motivation und Versuchsziel

Schwingungen, insbesondere harmonische, tauchen in allen Bereichen der Physik auf, da sich viele Probleme auf diese Schwingungsform zurückführen lassen. Ebenso spielen erzwungene Schwingungen in der Physik sowie in ihren Anwendungen in der Technik eine wichtige Rolle. Viele scheinbar so verschiedenartige Probleme wie die Schwingung einer Feder, elektromagnetische Schwingkreise oder die Vorgänge bei der Absorption und Dispersion von Licht gehorchen einer analogen mathematischen Beschreibung.

Dabei taucht immer die Frage auf, wie Amplitude und Phase des schwingenden Systems mit der Frequenz des Erregers und der Dämpfung des Systems zusammenhängen. In diesem Versuch werden Sie solche Probleme anhand des Pohlischen Rades studieren und die Resonanzkurve dieses getriebenen schwingenden Systems aufnehmen. Zur Datenaufnahme lernen Sie die Einsatzmöglichkeit und Bedienung eines  $x$ - $t$ -Schreibers kennen.

## 2. Literatur

Zur Vorbereitung muss mindestens eine der folgenden Quellen gelesen werden:

BS-1, Abschnitt 5.1, 5.2, 5.4 und 7.2

Gerthsen, Abschnitte 1.3.3, 4.2.2 und 4.2.3

EKS, Abschnitt 7

Berkeley 1, Abschnitte 7.7–7.9 und 7.11.2; Berkeley 3, Abschnitte 3.1 und 3.2

Tipler, Abschnitte 9.1, 9.4, 14.1 und 14.3–14.5

## 3. Theoretischer Hintergrund

Ein schwingungsfähiges System ist dadurch gekennzeichnet, dass bei Auslenkung aus der Ruhelage eine rücktreibende Kraft wirkt, welche mit größer werdender Auslenkung zunimmt. Ist diese Kraft proportional zur Auslenkung, so handelt es sich um eine harmonische, also sinusförmige Schwingung. In der Realität gibt es immer Reibung, welche zu einer Dämpfung der Schwingung führt. Des Weiteren kann das System durch eine äußere Kraft angetrieben werden.

Als Beispiel dient zunächst eine Masse  $m$  an einer Feder mit Federkonstante  $k$ , deren zur Geschwindigkeit proportionale Reibung durch einen Faktor  $r$  ausgedrückt wird und an die eine zeitabhängige Kraft  $F(t) = F_0 \sin(\omega_A t)$  angreift. Die äußere Kraft wird also als harmonisch mit der Amplitude  $F_0$  und der Frequenz  $\omega_A$  angenommen. Die Bewegung der Feder wird durch eine Differentialgleichung beschrieben, welche aus dem Impulssatz folgt: Die Änderung  $m\ddot{x}$  des Impulses ist durch die Summe der einwirkenden Kräfte gegeben. Diese sind hier:

- die rücktreibende Kraft durch die Feder:  $-kx$
- die Dämpfung (innere Reibung der Feder, Luftreibung, etc.):  $-r\dot{x}$
- die äußere Anregung:  $F_0 \sin(\omega_A t)$

woraus zunächst die Gleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega_A t) \quad (1)$$

folgt. Mit den Abkürzungen  $2\lambda = \frac{r}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  und  $A = \frac{F_0}{m}$  erhält man die Normalform, welche ganz allgemein erzwungene gedämpfte harmonische Schwingungen beschreibt:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\omega_A t) \quad (2)$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösung  $x(t)$  die Bewegung des Systems charakterisiert.  $\omega_0$  ist die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung.

## 4. Fragen zur Vorbereitung

Sie werden nun Gl. (2) schrittweise lösen und anhand der folgenden Fragen diese Lösungen diskutieren und damit die Vorgänge bei einer erzwungenen Schwingung besser verstehen.

1. Betrachten Sie zunächst den Fall der freien Schwingung, d.h.  $A = 0$  in Gl. (2) (keine äußere Kraft). Finden und skizzieren Sie die allgemeine Lösung  $x_h(t)$  dieser homogenen Differentialgleichung! Machen Sie dabei die Fallunterscheidung
  - (a)  $\lambda^2 < \omega_0^2$  (kleine Dämpfung): Dies ist eine Schwingung mit der Frequenz  $\omega$ . Wie weicht  $\omega$  von  $\omega_0$  ab und was ist die Bedeutung von  $\omega_0$ ?
  - (b)  $\lambda^2 = \omega_0^2$  (aperiodischer Grenzfall): Diskutieren Sie die Besonderheiten dieser Lösung! Fallen Ihnen wichtige Anwendungen ein?
  - (c)  $\lambda^2 > \omega_0^2$  (große Dämpfung): Wie unterscheidet sich dieser Fall von den beiden anderen?

Die Lösung beinhaltet in allen drei Fällen zwei freie Konstanten. Wodurch werden diese festgelegt?

2. Wenden Sie sich nun der vollen Gl. (2) zu und finden Sie eine spezielle Lösung  $x_s(t)$  durch den Ansatz

$$x_s(t) = x_0 \sin(\omega_A t + \delta) \quad (3)$$

Bestimmen Sie die Amplitude  $x_0$  und die (zeitlich konstante) Phase  $\delta$ , um welche die Lösung gegenüber der treibenden Kraft verschoben ist!

(Lösungen:  $x_0 = \frac{x_A}{\sqrt{(1-a^2)^2+a^2c^2}}$  mit  $x_A = \frac{A}{\omega_0^2}$ ,  $a = \frac{\omega_A}{\omega_0}$  und  $c = \frac{2\lambda}{\omega_0}$ ;  $\tan \delta = \frac{2\lambda \omega_A}{\omega_A^2 - \omega_0^2}$ )

3. Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die allgemeine Lösung von Gl. (2) durch  $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$  gegeben ist! Warum genügt es in der Praxis meist dennoch, nur  $x_s(t)$  zu betrachten?
4. Die Amplitude  $x_0$  und die Phasenverschiebung  $\delta$  hängen von der antreibenden Frequenz  $\omega_A$  ab. Bestimmen Sie diese beiden Größen für  $\omega_A \rightarrow 0$  und für  $\omega_A \rightarrow \infty$  und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse!
5. Wie ist die Phasenverschiebung für  $\omega_A = \omega_0$ ? Für welche Frequenz  $\omega_A$  hat die Amplitude  $x_0$  ihr Maximum  $x_{\max}$  und wie verschiebt sich dieses mit der Dämpfung?
6. Berechnen Sie das Verhältnis  $\frac{x_{\max}}{x_A}$ ! Diese Größe heißt *Resonanzüberhöhung* oder *Güte* des Systems. Wie sind die Verhältnisse für kleine Dämpfung ( $\lambda \ll \omega_0$ ) und was passiert für  $\lambda = 0$ ? Skizzieren Sie  $x_0$  als Funktion von  $\omega_A$  für verschiedene Dämpfungen.
7. Welche physikalische Größe wird mit einem  $x$ - $t$ -Schreiber gemessen und dargestellt?

8. **Freiwillig:** Berechnen Sie die Amplituden  $v_0$  und  $a_0$  der Geschwindigkeit  $\dot{x}(t)$  und der Beschleunigung  $\ddot{x}(t)$ ! Wie verhalten sich diese Größen für  $\omega_A \rightarrow 0$  und für  $\omega_A \rightarrow \infty$  und bei welchen Frequenzen liegen deren Maxima?

## 5. Versuchsaufbau und Messtechniken

### 5.1 Das Pohlsche Rad

Als schwingendes System wird in diesem Versuch ein Drehpendel nach R.W. Pohl verwendet, das so genannte *Pohlsche Rad* (Abb. ES.1). Ein um seine Achse frei drehbares Kupferrad wird durch eine Schneckenfeder in der Ruhelage gehalten. Ein Ende der Feder ist am Rad befestigt, das andere Ende an einem Hebel, der über eine Kopplungsstange mit einem Gleichstrommotor mit Exzenter verbunden ist. Bei laufendem Motor wird der Hebel hin- und herbewegt, so dass durch das mitbewegte obere Ende der Feder ein periodisches Drehmoment auf das Rad ausgeübt wird, was zu erzwungenen Schwingungen des Rades führt. Die Drehzahl, und damit die Frequenz  $\omega_A$  mit der der Exzenter umläuft, wird sehr genau elektronisch geregelt und kann am Netzgerät eingestellt werden.

Die Dämpfung der Schwingung wird durch einen Elektromagneten bewirkt, zwischen dessen Polschuhen das Rad läuft. Bei der Bewegung des Rades werden im Kupfer Wirbelströme induziert, die zu einer Abbremsung führen. Der Dämpfungsstrom  $I_D$ , und damit die Stärke der Dämpfung, kann am Netzgerät von 0 bis 2 A eingestellt und mit einem Vielfachmessgerät gemessen werden.

### 5.2 Mathematische Beschreibung des Pohlschen Rades

Die Scheibe des Rades besitzt ein Trägheitsmoment  $J$ , auf das durch die Schneckenfeder das Rückstellmoment  $-D\varphi$  einwirkt. Dabei ist  $D$  das Direktionsmoment der Feder und  $\varphi$

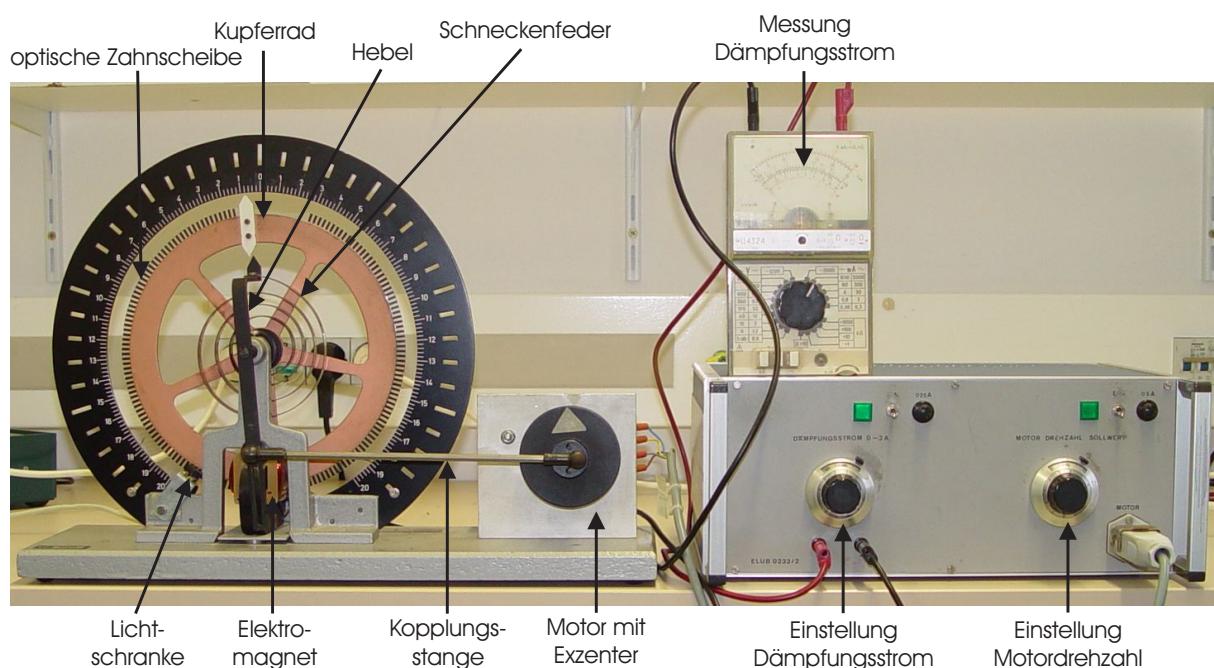


Abbildung ES.1: (a) Versuchsaufbau Pohlsches Rad. Der Schreiber ist im Bild nicht gezeigt.

der Auslenkwinkel. Das dämpfende Moment  $-\rho\dot{\varphi}$  wird durch die Wirbelstrombremse erzeugt und ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  (warum?). Die Konstante  $\rho$  heißt *Reibungs-* oder *Bremskoeffizient*. Das durch den Motor erzeugte Antriebsmoment auf das Rad hat in sehr guter Näherung die mathematische Form  $M_0 \sin(\omega_A t)$ . Die die Schwingung beschreibende Differentialgleichung folgt hier nicht wie Gl. (1) aus dem Impulssatz, sondern aus dem Drehimpulssatz und lautet (die Änderung des Drehimpulses ist  $J\ddot{\varphi}$ ):

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 \sin(\omega_A t) \quad (4)$$

Durch geeignete Umformung kann diese wieder in die Form von Gl. (2) gebracht werden, wobei anstelle von  $x$  nun  $\varphi$  tritt. Damit sind dann natürlich alle in den Fragen zur Vorbereitung erarbeiteten Lösungen und sonstigen Zusammenhänge auch für das Pohlsche Rad gültig.

### 5.3 Aufzeichnung der Schwingungen durch einen x-t-Schreiber

Die Auslenkung des Pendels kann mit einem *x-t*-Schreiber aufgezeichnet werden. Hierzu dient eine am Umfang des Rades angebrachte optische Zahnscheibe, auf der sich helle und dunkle Striche gleicher Breite abwechseln. Die Zahnscheibe bewegt sich durch zwei Lichtschranken, welche also jeweils ein Rechtecksignal registrieren. Bei bekanntem Abstand der Lichtschranken folgt aus der Phasenlage der beiden Signale die Drehrichtung des Pendels. Die momentane Position des Rades wird wie folgt bestimmt: Tritt an einer Lichtschranke ein Übergang hell-dunkel oder dunkel-hell auf, so wird je nach Drehrichtung ein Zähler um Eins hoch oder herunter gesetzt. Eine Drehung des Rades um ein hell-dunkel-Paar liefert also an beiden Lichtschranken zusammen vier Zählimpulse. Ein Digital-Analog-Wandler gibt eine dem Zählerstand proportionale Spannung aus, die mit dem Schreiber registriert wird. Zusammen mit einem geeigneten Zeitvorschub wird am Schreiber somit die Schwingung sichtbar gemacht. Der Zähler des Digital-Analog-Wandlers kann durch Drücken des Reset-Knopfes auf Null gesetzt werden (möglichst in der Ruhelage des Pendels).

Bitte nehmen Sie sich genügend Zeit um diese Messtechnik zu verstehen!

## 6. Versuchsdurchführung

**Gefährdungspotentiale:** Bananenstecker (4 mm–Federstecker) dürfen auf keinen Fall in die Steckdose gesteckt werden!

Bei schlechter Vorbereitung kann der Versuch u.U. sehr lange dauern, weshalb Sie ihn sich unbedingt vor dem Versuchstermin ansehen sollten!

Machen Sie sich in Ruhe mit dem Aufbau und insbesondere mit dem Schreiber und seinen Einstellungen vertraut. Finden Sie durch Ausprobieren den günstigsten Zeitvorschub für eine gute Wiedergabe der Schwingungen heraus. Nutzen Sie dazu ruhig das Schreiberpapier aus und sparen Sie nicht unnötig Papier! Verwenden Sie am Schreiber ausschließlich die Einstellungen “cal” für kalibrierten Messbereich, da nur so die verschiedenen Messungen vergleichbar sind. Ziehen Sie bei Unklarheiten die Bedienungsanleitung zurate.

**Achtung:** Der Dämpfungsstrom  $I_D$  für die Spule darf 1 A nur kurzzeitig überschreiten!

## 6.1 Freie Schwingungen (kein äußerer Antrieb, also $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ in Gl. 2)

Dieser Versuchsteil dient u.a. auch dazu, den  $x$ - $t$ -Schreiber zu verifizieren.

1. Ungedämpfte Schwingung: Bestimmen Sie  $\omega_0$  mit der Stoppuhr, und zwar mindestens 2 Mal für jeweils 50 Schwingungen. Nehmen Sie eine größere Anzahl von Schwingungen auch mit dem Schreiber auf und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse!
2. Gedämpfte Schwingung: Zeichnen Sie die Bewegung des Pendels für verschiedene Dämpfungsströme  $I_D = 0,3 \text{ A}, 0,5 \text{ A}$  und  $0,8 \text{ A}$  mit dem Schreiber auf!
3. Aperiodischer Grenzfall: Bestimmen Sie den Magnetstrom für den aperiodischen Grenzfall! Überlegen Sie sich vorher genau Ihre Vorgehensweise und dokumentieren Sie diese detailliert. Nehmen Sie auch entsprechende Diagramme auf!

## 6.2 Erzwungene Schwingungen: Bestimmung der Resonanzkurve $\varphi_0(\omega_A)$

1. Zunächst ist die Skala am Einstellknopf für die Motordrehzahl zu kalibrieren. Hierzu muss  $\omega_A$  sehr genau bekannt sein, da die Drehzahl auf etwa 2% linear von der Einstellung abhängt. Messen Sie  $\omega_A$  mit der Stoppuhr für 6 Punkte der Skala (0, 1, 2, 3, 4 und 5), wobei die Messdauer für jedes  $\omega_A$  mindestens 100 s betragen muss!  
Um Messfehler sofort zu erkennen und damit auszuschließen, erstellen Sie unmittelbar im Praktikum eine Kalibrierungskurve  $\omega_A/\omega_0$  gegen die Schalterstellung. Hierfür ist eine Seite Millimeterpapier (DIN A4) nötig. Beachten Sie, dass die Kalibrierungskurve für jeden Versuchsplatz anders ist!
2. Bestimmen Sie  $\varphi_A$ , also die Amplitude im quasi-statischen Fall, indem Sie bei starker Dämpfung ( $I_D = 0,8 \text{ A}$ ) und geeigneter Empfindlichkeit des Schreibers einige Perioden bei der kleinstmöglichen Motordrehzahl aufnehmen!
3. Nehmen Sie nun für die drei Dämpfungsströme  $I_D = 0,3 \text{ A}, 0,5 \text{ A}$  und  $0,8 \text{ A}$  die Resonanzkurven in mindestens 20 Schritten auf, d.h. registrieren Sie jeweils die Amplituden  $\varphi_0$  für verschiedene  $\omega_A$ . Schließen Sie dabei unbedingt jeweils das minimale und das maximale  $\omega_A$  mit ein. Um eine vernünftige Auflösung zu gewährleisten, sind in der Nähe der Resonanzfrequenz entsprechend kleinere Schritte zu wählen.

Vorgehensweise: Warten Sie nach jeder Änderung von  $\omega_A$  bei abgehobenem Schreiberstift den Einschwingvorgang ab. Die ungefähre Zeit hierfür kann aus den Messungen für freie Schwingungen abgeschätzt werden. Dann wird der Stift für einige Perioden abgesenkt. Die Messung erfolgt bei sehr kleinem Vorschub des Schreibers um das Ende des Einschwingvorganges zu kontrollieren. Zwischen den Messungen wird das Papier per Hand um etwa 5 mm weitergeschoben. Vergessen Sie nicht,  $\omega_A$  für jede Einzelmessung zu notieren!

## 7. Auswertung

### 7.1 Freie Schwingungen

Zeigen Sie zunächst, dass für die Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = A_0$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  (um  $A_0$  auslenken und dann loslassen) und für kleine Dämpfung ( $\lambda \ll \omega$ ) die Lösung lautet:

$$\varphi(t) \approx A_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t} \quad (5)$$

Die Einhüllende der Schwingung fällt also mit  $e^{-\lambda t}$  ab.

1. Bestimmen Sie aus Ihren Messungen die Frequenz  $\omega_0$  für das ungedämpfte System!
2. Bestimmen Sie die Frequenzen  $\omega$  und die Zeitkonstanten  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  für die verschiedenen Dämpfungsströme!  $\tau$  folgt aus der Geradensteigung, wenn die normierten Amplituden  $\frac{A}{A_0}$  auf halblogarithmischem Papier gegen die Zeit  $t$  aufgetragen werden. Wählen Sie für die 3 Kurven den gleichen Ursprung!

Inwieweit ist die Näherung von Gl. (5) gültig?

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für  $\omega$  mit den theoretisch erwarteten!

3. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse für den aperiodischen Grenzfall!

### 7.2 Erzwungene Schwingungen

1. Erstellen Sie ein Diagramm  $\varphi_0/\varphi_A$  gegen  $\omega_A/\omega_0$ ! Die Kurven für die verschiedenen Dämpfungsströme sollen alle ins gleiche Diagramm übereinander gezeichnet werden.
2. Erklären Sie den "Treppeneffekt" bei Aufgabe 6.2.2!
3. Entnehmen Sie aus der Zeichnung die Lage  $(\omega_A/\omega_0)_{\max}$  und Höhe  $(\varphi_0/\varphi_A)_{\max}$  der Maxima für die verschiedenen Dämpfungsströme! Diese Größen können mit den in Aufgabe 7.1 ermittelten Werten für  $\omega_0$  und  $\lambda$  zusammen mit den Lösungen der Fragen zur Vorbereitung 5 und 6 auch theoretisch berechnet werden. Vergleichen Sie die Ergebnisse!

# Versuch GP: Gekoppelte Pendel

## 1. Motivation und Versuchsziel

*Gekoppelte Schwingungen* treten in vielen physikalischen und technischen Systemen auf, so z. B. in gekoppelten elektrischen Schwingkreisen oder als Schwingungen von Atomen in Molekülen oder in einem Kristallgitter. In letzterem Fall hat man es typischerweise mit einer sehr großen Zahl von solchen *gekoppelten Oszillatoren* zu tun.

Während das mathematische Pendel eine Idealisierung in Form eines Massenpunktes darstellt, beschreibt das *physikalische Pendel* die Schwingung eines beliebigen realen starren Körpers. Anhand eines solchen Pendels werden Sie Ihr Wissen über Trägheitsmomente vertiefen, den Satz von Steiner in der Praxis anwenden und die Erdbeschleunigung messen. Im Hauptteil dieses Versuchs wird ein einfaches mechanisches System von zwei gekoppelten physikalischen Pendeln untersucht.<sup>1</sup> Sie vermessen die beiden Fundamentalschwingungen dieses Systems und deren Überlagerung, die Schwebung, für verschiedene Kopplungen. Außerdem bestimmen Sie den Kopplungsgrad der Pendel.

## 2. Literatur

Zur Vorbereitung muss mindestens eine der folgenden Quellen gelesen werden:

BS-1, Abschnitte 5.1–5.3 und 8.2

Gerthsen, Abschnitte 1.3.3, 2.3.2–2.3.4, 2.4.3, 4.2.1 und 4.5.1

EKS, Abschnitte 5 und 6

Berkeley 1, Abschnitte 7.1, 7.2, 8.3, 8.4 und Berkeley 3, Abschnitt 1

Tipler, Abschnitte 9.3, 14.1, 14.3 und 16.1

## 3. Theoretischer Hintergrund

### 3.1 Das physikalische Pendel

Wird ein um eine Achse drehbar aufgehängter starrer Körper um einen kleinen Winkel  $\varphi$  aus der Ruhelage ausgelenkt, so wirkt auf ihn das rücktreibende Drehmoment  $-D\varphi$ . Die *Winkelrichtgröße D* (auch *Direktionsmoment* oder *Richtmoment*) hängt von der Erdbeschleunigung  $g$ , von der Masse  $m$  und von der Lage des Körperschwerpunkts in Bezug auf die Drehachse ab. Da die Beschleunigung des Körpers durch sein *Trägheitsmoment J* bestimmt wird, gehorcht die resultierende Schwingung der Differentialgleichung<sup>2</sup>

$$J\ddot{\varphi} + D\varphi = 0 \quad (1)$$

### 3.1 Zwei gekoppelte Pendel

Verbindet man nun zwei unabhängige Pendel z.B. durch eine Feder miteinander, so werden sie zu einem gekoppelten System. Zwischen den Pendeln wirken dann zusätzliche Drehmomente, welche i. Allg. durch die Momentanwerte der beiden Auslenkungen bestimmt sind. In diesem Versuch ist die Kopplung dergestalt, dass die neuen Drehmomente nur

<sup>1</sup>Dies ist nicht zu verwechseln mit dem so genannten *Doppelpendel*, welches aus einem einfachen Pendel besteht, an dessen Ende z.B. ein weiteres Pendel schwingt.

<sup>2</sup>Hierbei wird jegliche Reibung vernachlässigt.

von der Relativauslenkung  $\Delta\varphi$  der Pendel abhängen. Ist also Pendel 1 um  $\varphi_1$  ausgelenkt und Pendel 2 um  $\varphi_2$ , so wirken zusätzlich zum rücktreibenden Moment aus Gl. (1) noch

$$M_1 = -D_k(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{auf Pendel 1 und} \quad M_2 = -D_k(\varphi_2 - \varphi_1) \quad \text{auf Pendel 2} \quad (2)$$

$D_k$  bestimmt dabei das Rückstellmoment aufgrund der Kopplung.

Nur im Fall gleicher Pendel, d.h. gleicher Trägheitsmomente  $J_1 = J_2 = J$  und gleicher Direktionsmomente  $D_1 = D_2 = D$ , ergeben sich einfache Schwingungen. Die Gleichungen für die beiden Pendel lauten dann also

$$J\ddot{\varphi}_1 + D\varphi_1 + D_k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (3)$$

$$J\ddot{\varphi}_2 + D\varphi_2 + D_k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (4)$$

Dies sind zwei gekoppelte homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösungen  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$  die Bewegungen der beiden Pendel beschreiben. Aufgrund der Kopplung können sie nicht mehr einzeln, sondern nur noch miteinander durch Überlagern der beiden Fundamentalschwingungen gelöst werden.

Es handelt sich hier um eine Art gegenseitig erzwungener Schwingungen, da ja ein Pendel das jeweils andere antreibt. Allerdings hat die antreibende Schwingung keinen beliebig großen Energievorrat, wie das etwa beim Versuch "ES" mit der äußeren Kraft der Fall ist. Deshalb kann z. B. auch die Amplitude eines Pendels nie größer werden als die Maximalamplitude des anderen (vorausgesetzt, die Pendel sind gleich).

#### 4. Fragen zur Vorbereitung

1. Was ist der Unterschied zwischen einem mathematischen und einem physikalischen Pendel? Wie führt man ein physikalisches Pendel (z.B. aus Stange und angehängter Schwungmasse) auf ein mathematisches Pendel zurück?
2. Geben Sie die Lösung von Gl. (1) an. Wie wird  $D$  bestimmt, was ergibt sich für die Frequenz  $\omega$  und wie können Sie also aus der Schwingungsdauer  $T$  des Pendels die Erdbeschleunigung  $g$  berechnen? (Ergebnis:  $g = \frac{4\pi^2 J}{mrT^2}$ ; was ist dabei  $r$ ?)

**Zusatz:** Wie lautet an Stelle von Gl. (1) die tatsächliche Differentialgleichung für das Pendel, wenn immer noch die Reibung vernachlässigt, aber beliebige Auslenkwinkel betrachtet werden? Diese Gleichung kann zwar nicht elementar gelöst, die Schwingungsdauer aber in Form eines Integrals angegeben werden (informieren Sie sich in der Literatur über die Vorgehensweise). Können Sie sich auch ohne diese Kenntnis überlegen, ob und wie die Schwingungsdauer vom Auslenkwinkel abhängt?

3. Informieren Sie sich, wie man die gekoppelten Gleichungen (3) und (4) löst und wie es durch die Kopplung zu zwei Eigenmoden und zwei Eigenfrequenzen kommt.

Wie sehen die beiden Eigenschwingungen aus? Erklären Sie anschaulich, welche der beiden die größere Frequenz hat und geben Sie die Schwingungsdauern  $T_a$  und  $T_b$  als Funktion der Systemparameter  $J$ ,  $D$  und  $D_k$  an.

4. Berechnen Sie die Summe von zwei Sinusschwingungen leicht unterschiedlicher Frequenz und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar. Diskutieren Sie dieses Phänomen der Schwebung. Wie ist die Schwingungsdauer definiert?

Was hat die Schwebung mit den gekoppelten Pendeln zu tun? Drücken Sie die Schwingungsdauer  $\tau$  und die Schwingungsdauer  $T_S$  eines Pendels bei der Schwebung durch  $T_a$  und  $T_b$  aus.

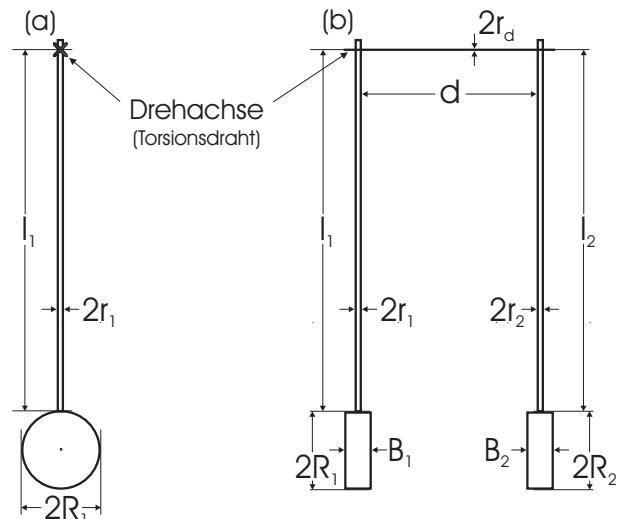
5. Was besagt der Satz von Steiner? Diskussion!
6. Wie ist die Erdbeschleunigung an den Polen im Vergleich zum Äquator? Erklären Sie die prinzipielle Funktionsweise eines Beschleunigungssensors im Smartphone!

## 5. Versuchsaufbau

An einer Wandkonsole hängen in verschiebbaren Lagerblöcken zwei kugelgelagerte physikalische Pendel, welche in Abb. GP.1 skizziert sind und nahezu ungedämpft schwingen. Die Bestandteile der Pendel bestehen alle aus dem gleichen Material der Dichte  $\rho = (7,944 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .

Die Pendel können sowohl unabhängig voneinander schwingen als auch über einen Torsionsdraht gekoppelt werden, wobei die effektive Kopplungslänge des Drahtes variabel ist. Das rücktreibende Moment der Kopplung wird durch  $D_k = \frac{\pi}{2} \frac{Gr_d^4}{d}$  (vgl. Versuch "Tor") bestimmt, mit dem Torsionsmodul  $G = (71,5 \pm 1,5) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ .

Abbildung GP.1: Schematische Darstellung der verwendeten Pendel und Bezeichnung der Messgrößen. (a) Frontansicht der Doppelpendel (die beiden Pendel befinden sich hintereinander). (b) Seitenansicht der beiden Pendel (nun nebeneinander).



## 6. Versuchsdurchführung

**Gefährdungspotentiale:** Die relativ schweren Pendel können bei unsachgemäßer Behandlung zu Quetschungen (Finger, Zehen) führen.

**Wichtig:** Achten Sie bei allen Schwingungsexperimenten auf kleine Amplituden für die Auslenkung! Warum?

Sie können für die Messungen die bereitliegenden Stoppuhren oder aber Ihr Smartphone verwenden. Bei Letzterem bieten sich die (Highspeed-) Kamera oder die Beschleunigungssensoren im Zusammenspiel mit einer geeigneten App bzw. Software (z. B. "phyphox"<sup>3</sup> oder "Tracker"<sup>4</sup>) an. Informieren Sie sich bitte vor dem Versuch über die jeweiligen Möglichkeiten und machen Sie sich Gedanken über die Bestimmung der Unsicherheiten.

<sup>3</sup><http://phyphox.org/de/home-de/>

<sup>4</sup><https://physlets.org/tracker/>

## 6.0 Justieren der Pendel

Justieren Sie zunächst im ungekoppelten Zustand die zwei Pendel so, dass ihre Schwingungsdauern auf mindestens 0,3 % gleich sind. Gehen Sie dabei sehr sorgfältig vor und dokumentieren Sie Ihre Arbeitsschritte!<sup>5</sup>

## 6.1 Vermessen der Pendel

Vermessen sie nun alle Größen, die zur Bestimmung von  $D$  und  $J$  benötigt werden. Hierzu soll das Pendel idealisiert als runde Stange (Länge  $l$ , Radius  $r$ ) mit einem scheibenförmigen Gewicht (Radius  $R$ , Dicke  $B$ ) am Ende angenommen werden (vgl. Abb. GP.1).

## 6.2 Schwingung des ungekoppelten physikalischen Pendels

Messen Sie die Schwingungsdauer eines einzelnen, ungekoppelten Pendels mindestens 6 Mal für jeweils 20 Schwingungen! Wiederholen Sie den Versuch, nun aber mit der für das Pendel möglichen Maximalauslenkung. Stellen Sie einen Unterschied fest?

**Achtung:** Große Amplituden dürfen nur bei ungekoppelten Pendeln eingestellt werden! Warum?

## 6.3 Gekoppelte Pendel: Fundamentalschwingungen und Schwebung

Die folgenden Messungen sind für verschiedene Kopplungslängen des Torsionsdrahtes durchzuführen, und zwar zuerst für 9 cm und dann für 6 cm, 4,5 cm und 3 cm. Vergessen Sie dabei nicht, alle für die Auswertung nötigen Größen zu messen!

Achten Sie beim Koppeln der Pendel auf festen Halt der Spannzangen, ohne diese dabei zu überziehen. Fixieren Sie zuerst den Torsionsdraht und dann die Lagerblöcke (warum?). Machen Sie erst alle Messungen für eine Kopplungslänge, dann für die nächste, usw.

1. Messen Sie die Dauer der ersten Fundamentalschwingung für 20 Schwingungen. Lenken Sie dazu die beiden Pendel mit gleicher Amplitude zur gleichen Seite aus. Machen Sie die Messung mindestens 3 Mal um etwaige grobe Fehler zu vermeiden.
2. Messen Sie die Dauer der zweiten Fundamentalschwingung für 20 Schwingungen. Lenken Sie dazu die beiden Pendel mit gleicher Amplitude entgegengesetzt aus. Als Hilfe dienen dabei die Markierungen an der Wand hinter den Pendeln. Machen Sie auch hier mindestens 3 Messungen.
3. Messen Sie die Schwingungsdauer, indem Sie die Zeit zwischen mindestens 5 Stillständen eines Pendels vermessen! Lenken Sie dazu ein Pendel aus während das andere in der Ruhelage festgehalten wird und lassen dann beide Pendel gleichzeitig los. Machen Sie mindestens 2 Messungen. Was bestimmt hier den Messfehler?
4. Messen Sie die Schwingungsdauer eines Pendels im gekoppelten Zustand, und zwar mindestens 3 Mal für etwa 10 Schwingungen! Dies ist nicht ganz einfach, da die Maxima der Schwingung durch die Einhüllende der Schwebung zeitlich etwas verschoben werden. Vermessen Sie die Schwingung eines Pendels deshalb dann, wenn die Schwebungsamplitude für dieses Pendel gerade maximal ist.

<sup>5</sup>Überlegen Sie sich, wie groß die Abweichung zwischen den beiden Pendeln bei einer bestimmten Beobachtungsdauer maximal sein darf.

## 7. Auswertung

### 7.1 Berechnen des Direktionsmomentes D und des Trägheitsmomentes J

1. Drücken Sie zunächst  $D$  und  $J$  durch die Messgrößen aus!

(Ergebnis:  $D = [\frac{l^2 \bar{d}^2}{8} + \frac{B}{4}(l\bar{D}^2 + \frac{\bar{D}^3}{2})]\pi\rho g$ ,  $J = [\frac{l^3 \bar{d}^2}{12} + \frac{B}{4}(\frac{3}{8}\bar{D}^4 + l\bar{D}^3 + l^2\bar{D}^2)]\pi\rho$  mit  $\bar{d} = 2r$  und  $\bar{D} = 2R$ )

2. Berechnen Sie nun  $J$  und die Hilfsgröße  $D^* = mr = D/g$  für Ihren Versuchsaufbau! Beachten Sie dabei die Hinweise zur Fehlerrechnung im Anhang.

### 7.2 Bestimmung der Erdbeschleunigung

Diskutieren Sie die für kleine und große Auslenkungen verschiedenen Schwingungsdauern. Berechnen Sie aus Ihren Messwerten die Erdbeschleunigung  $g$ .

Was zeigen die im Praktikumsraum aushängenden Schwerekarten und wie können Sie daraus die lokale Erdbeschleunigung bestimmen? Können Sie damit nun  $g$  für Bayreuth angeben (nicht googeln!)?

### 7.3 Gekoppelte Pendel: Schwebung und Kopplungsgrad

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben für alle Kopplungslängen. Dabei genügt es, die Fehlerrechnung exemplarisch für eine Kopplungslänge durchzuführen und dann die Fehler für die anderen Längen mit Hilfe dieser Werte abzuschätzen.

1. Bestimmen Sie die Schwingungsdauern  $T_a$  und  $T_b$  der Fundamentalschwingungen und vergleichen Sie diese mit den nach Frage 3 zur Vorbereitung erwarteten Werten.
2. Bestimmen Sie die Schwebungsdauer  $\tau$  und vergleichen Sie diese mit dem nach Frage 4 zur Vorbereitung erwarteten Wert.
3. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer  $T_s$  eines Pendels bei der Schwebung und vergleichen Sie diese mit dem nach Frage 4 zur Vorbereitung erwarteten Wert.

Der Kopplungsgrad  $K$  der beiden Pendel ist definiert als

$$K = \frac{D_k}{D + D_k} \quad (5)$$

Zeigen Sie, dass sich  $K$  auch schreiben lässt als

$$K = \frac{T_a^2 - T_b^2}{T_a^2 + T_b^2} \quad (6)$$

Berechnen Sie nun für alle Kopplungslängen den Kopplungsgrad nach Gl. (5) und aus den gemessenen Schwingungsdauern auch nach Gl. (6). Tragen Sie schließlich alle Werte gegen die Kopplungslänge  $d$  in ein Diagramm ein.

### Anhang: Hinweise zur Fehlerrechnung

Da die Fehlerrechnung für  $g$  etwas aufwändig ist, folgen einige Angaben, mit deren Hilfe Sie Ihre Berechnungen überprüfen können.

Aus  $g = \frac{4\pi^2 J}{T^2 D^*}$  folgt für den Fehler von  $g$ :

$$s_g = g \cdot \sqrt{\left(\frac{2s_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{s_J}{J}\right)^2 + \left(\frac{s_{D^*}}{D^*}\right)^2} \quad (7)$$

Die fehlerbehafteten Messgrößen zur Berechnung von  $s_J$  und  $s_{D^*}$  sind  $l$  und  $\bar{d}$  (Länge und Durchmesser der Stange),  $B$  und  $\bar{D}$  (Dicke und Durchmesser der Scheibe), sowie die Dichte  $\rho$ . Also sind folgende Ausdrücke zu bestimmen:

$$s_J = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{\partial J}{\partial X_i}\right)^2 s_{X_i}^2} \quad \text{und} \quad s_{D^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{\partial D^*}{\partial X_i}\right)^2 s_{X_i}^2} \quad \text{mit} \quad X_i = l, \bar{d}, B, \bar{D}, \rho \quad (8)$$

Für die Ableitungen ergeben sich in etwa die in Tab. GP.1 angegebenen Größenordnungen. Sollten Ihre Werte stark davon abweichen, haben Sie sich mit großer Wahrscheinlichkeit verrechnet oder vermessen.

Tabelle GP.1: Ungefährre Größenordnungen der Ableitungen bei der Fehlerrechnung.

$X_i$	$\frac{\partial J}{\partial X_i} / \text{kgm}$	$\frac{\partial D^*}{\partial X_i} / \text{kg}$
$l$	6,7	3,4
$\bar{d}$	42	60
$B$	160	150
$\bar{D}$	46	42
sowie		
$\frac{\partial J}{\partial \rho} = 0,44 \text{ kgm}^2 \cdot \text{cm}^3/\text{g}$		
$\frac{\partial D^*}{\partial \rho} = 0,42 \text{ kgm} \cdot \text{cm}^3/\text{g}$		

# Versuch Vis: Viskosität

## 1. Motivation und Versuchsziel

Eine Flüssigkeit hat zwar ein bestimmtes Volumen, im Gegensatz zu einem festen Körper kann sie aber jede durch ein Gefäß vorgegebene Gestalt annehmen. Die Moleküle in einer Flüssigkeit sind ungeordnet und können sich gegeneinander verschieben. Dabei treten Reibungskräfte auf, welche zur Geschwindigkeit der Verschiebung proportional sind. Die Reibung führt zur so genannten Zähigkeit oder Viskosität, eine für die jeweilige Flüssigkeit charakteristische Materialkonstante.

Bei einer laminaren Strömung ist die Reibung für die Form der Strömung verantwortlich. Wenn eine Flüssigkeit durch ein enges Rohr fließt, haftet an der Rohrwand eine dünne Flüssigkeitsschicht, während sich im Innern ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil ausbildet. Das Hagen–Poiseuille’sche Gesetz für die Flüssigkeits–Stromstärke ist dabei grundlegend für Strömungen in den unterschiedlichsten Systemen. Dieses Gesetz kann auch zur Bestimmung der Viskosität einer Flüssigkeit benutzt werden.

Ein hierauf basierendes sehr einfaches und dennoch leistungsfähiges Gerät ist das Viskosimeter nach Ostwald. In diesem Versuch werden Sie damit die Viskosität von Wasser und deren Temperaturabhängigkeit messen. Weiterhin werden Sie die Viskositäten von zwei unbekannten Flüssigkeiten bestimmen.

## 2. Literatur

Zur Vorbereitung muss mindestens eine der folgenden Quellen gelesen werden:

BS–1, Abschnitte 10.1, 10.2, 10.5, 11.5 und 11.6

Gerthsen, Abschnitte 3.2.1, 3.2.2, 3.3.5, 3.51, 3.52 und 3.4.1–3.4.4

EKS, Abschnitt 10

Tipler, Abschnitte 13.2 und 13.4

## 3. Theoretischer Hintergrund

### 3.1 Das Gesetz von Hagen und Poiseuille

Um eine Strömung durch eine Kapillare der Länge  $l$  mit Radius  $r$  aufrechtzuerhalten, muss die Reibungskraft

$$F_r = 8\pi\eta l \bar{v} \quad (1)$$

überwunden werden. Dabei ist  $\bar{v}$  die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit. Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  ist der *Koeffizient der inneren Reibung* und wird kurz *Zähigkeit* oder *Viskosität* der Flüssigkeit genannt.

In der Zeit  $\Delta t$  fließt das Flüssigkeitsvolumen  $\Delta V = A\bar{v}\Delta t$  durch den Kapillarenquerschnitt  $A = \pi r^2$ . Die Strömung wird z.B. durch den Druckunterschied  $\Delta p = p_1 - p_2$  an den Rohrenden angetrieben, was einer Kraft  $F_p = A\Delta p$  entspricht. Für eine stationäre Strömung müssen die beiden Kräfte gleich sein ( $F_r = F_p$ ), woraus das *Hagen–Poiseuille’sche Gesetz* für die Flüssigkeits–Stromstärke  $\frac{\Delta V}{\Delta t}$  folgt:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi\Delta p}{8\eta l} r^4 \quad (2)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann die Viskosität  $\eta$  der Flüssigkeit bestimmt werden, wenn alle anderen Parameter bekannt sind.  $\eta$  wird oft auch als *dynamische* Viskosität bezeichnet, im Gegensatz zur *kinematischen* Viskosität  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ . Hier ist  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit.

### 3.2 Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Typischerweise nimmt die Viskosität mit steigender Temperatur stark ab. Für viele Flüssigkeiten gilt näherungsweise ein Arrhenius-Gesetz (vgl. auch Versuch SK):

$$\nu = D \cdot e^{\frac{T^*}{T}} \quad (3)$$

$D$  und  $T^*$  sind empirische Konstanten und  $T$  ist die absolute Temperatur.

Bei Gasen verhält es sich übrigens genau umgekehrt: ihre (sehr viel geringere) Viskosität nimmt mit steigender Temperatur zu (warum?).

## 4. Fragen zur Vorbereitung

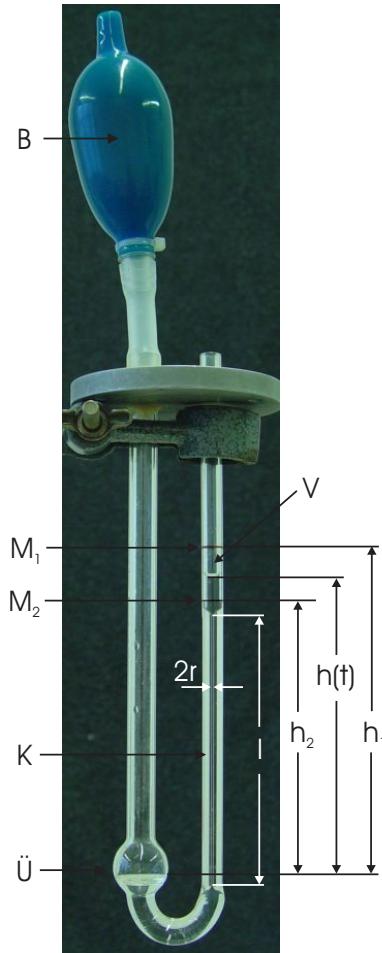
1. Welche alternative Möglichkeit zur Bestimmung der Viskosität unter Verwendung des Stokes'schen Gesetzes gibt es? Geben Sie eine kurze Beschreibung!
2. Erläutern Sie den Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung! Warum wird dieser Versuch unter laminaren Bedingungen durchgeführt?
3. Diskutieren Sie ausführlich das Hagen–Poiseuille'sche Gesetz bezüglich der darin enthaltenen Parameter! Geben Sie mindestens zwei Anwendungen aus unterschiedlichen Bereichen an! Worauf sollten Sie beim Wässern Ihres (großen) Gartens achten?
4. Kennen Sie andere Gesetze, welche von der 4. Potenz eines Parameters abhängen?
5. Was ist der Unterschied zwischen der dynamischen Viskosität und der kinematischen Viskosität? Erklären Sie dies auch anschaulich! Was wird hier im Versuch bestimmt?
6. Diskutieren Sie Gl. (3) als Funktion von  $\frac{1}{T}$  (Skizze, Kurvendiskussion)! Welche Bedeutung haben die Parameter  $D$  und  $T^*$ ? Wie können Sie diese am einfachsten bestimmen, wenn Sie  $\nu$  als Funktion der Temperatur gemessen haben?
7. Wenn Sie die Gln. (4) und (5) weiter unten in Gl. (2) einsetzen, erhalten Sie eine Differentialgleichung für  $h(t)$ . Lösen Sie diese und bestimmen Sie aus der Lösung zunächst die Durchlaufzeit  $\tau$  und daraus dann einen Ausdruck für  $\nu$ !  
(Ergebnis:  $\nu = K\tau$  mit  $K = \frac{\pi gr^4}{8lA' \ln(\frac{h_1}{h_2})}$ ;  $K$  ist also eine Apparatekonstante)
8. Skizzieren Sie  $\nu$  als Funktion von  $\tau$  einmal nach der eben abgeleiteten Beziehung und einmal nach Gl. (6) (ins gleiche Diagramm)! Nach welchem Kriterium sollten Sie also das Viskosimeter auswählen, um den Einfluss der Korrektur möglichst gering zu halten?
9. Überlegen Sie sich, in welcher Reihenfolge Sie die Messungen durchführen möchten und begründen Sie diese Reihenfolge!
10. **Freiwillig:** Wie sähe ein Versuchsaufbau aus, mit dem die dynamische Viskosität  $\eta$  gemessen wird?

## 5. Versuchsaufbau und Messtechniken

### 5.1 Das Viskosimeter nach Ostwald

Abbildung Vis.1: Zur Untersuchung des Gesetzes von Hagen–Poiseuille sowie zur Bestimmung der Viskositäten verschiedener Flüssigkeiten dient ein *Viskosimeter nach Ostwald*. Es besteht aus einem U-förmig gebogenen Glasrohr, an dessen einen Ende sich eine Kapillare K mit Länge  $l$  und Radius  $r$  anschließt, während sich am anderen Ende ein Überlaufgefäß Ü befindet. Mit dem Gummiballon B wird die zu untersuchende Flüssigkeit aus dem Überlaufgefäß in den anderen Rohrschenkel hochgedrückt, so dass sie nach dem Entfernen des Ballons unter dem Einfluss der Schwerkraft durch die Kapillare zurück nach unten strömt. Die Durchlaufzeit  $\tau$  des Messvolumens  $V$  zwischen den Marken  $M_1$  und  $M_2$  wird dabei durch die Viskosität der Flüssigkeit bestimmt.

Das Viskosimeter taucht in ein Wasserbad ein, dessen Temperatur durch einen Thermostaten konstant gehalten wird (hier nicht gezeigt). Damit können zum einen die Messungen bei einer definierten Temperatur durchgeführt werden, zum andern kann die Temperaturabhängigkeit der Viskosität im Bereich von etwa 5 °C bis 90 °C bestimmt werden.



### 5.2 Die Strömung im Viskosimeter

Zur Bestimmung der Strömungsverhältnisse wird angenommen, dass die Höhe des Wasserspiegels im Überlaufgefäß konstant bleibt. Der die Strömung antreibende Druckunterschied ist dann durch die aktuelle Höhe  $h(t)$  des Wassers bezogen auf diesen Spiegel gegeben:

$$\Delta p = \rho g h(t) \quad (4)$$

Die Änderung der Höhe wird durch das pro Zeiteinheit zwischen den Messmarken fließende Volumen bestimmt ( $A'$  ist der Rohrquerschnitt auf der Höhe der Messmarken):

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{A'} \frac{dV}{dt} \quad (5)$$

Mit Hilfe des Gesetzes von Hagen–Poiseuille konnten Sie hieraus in Frage 7 einen Ausdruck für  $\nu$  herleiten:  $\nu = K\tau$ . Die Apparatekonstante  $K$  hängt dabei nur vom verwendeten Gerät ab und muss experimentell bestimmt werden (Aufgabe 6.1).

Bei dieser Ableitung wurde allerdings nicht berücksichtigt, dass sich die Kapillarströmung erst ausbilden muss indem entlang einer Einlauflänge  $l_e$  die wandnahen Schichten verzögert und die achsnahen Schichten beschleunigt werden. Weiterhin herrscht in der Einlaufstrecke eine erhöhte Reibung, was zu einer Vergrößerung des Druckabfalls führt. Diese Effekte werden häufig in der so genannten *Hagenbach–Couette–Korrektur* zu einem zusätzlichen Term zusammengefasst, so dass folgt:

$$\nu = K\tau - \frac{C}{\tau} \quad (6)$$

Der Korrekturterm  $C$  ist wie  $K$  eine Apparatekonstante. Eine weitere Verbesserung erreicht man beim *Ubbelohde–Viskosimeter*, bei dem am unteren Ende der Kapillare ein Belüftungsrohr angebracht ist. Dadurch bleibt der Druck dort konstant und wird nicht durch den veränderlichen Wasserspiegel im Überlaufgefäß bestimmt.

Typischerweise werden die Konstanten  $K$  und  $C$  für das jeweilige Viskosimeter angeben, so dass  $\nu$  direkt aus der Durchlaufzeit  $\tau$  bestimmt werden kann. In diesem Versuch gehen Sie den umgekehrten Weg, indem Sie zunächst  $K$  bestimmen um die Kapillare zu kalibrieren und dann mit diesem Wert weitere Messungen vornehmen.

## 6. Versuchsdurchführung

**Gefährdungspotentiale:** Glasbruch (Kapillare) und heißes Wasser kann zu Verletzungen und Verbrühungen führen. Die verschiedenen Mischungen aus Wasser und Ethanol dürfen auf keinen Fall getrunken werden!

Es stehen 4 Viskosimeter mit verschiedenen Kapillardurchmessern zur Verfügung, wobei der jeweilige Durchmesser durch Aufschrift und/oder durch Farbkodierung angegeben ist: 0,3 mm (schwarze Kennzeichnung), 0,4 mm (blau), 0,5 mm (grün) und 0,6 mm (gelb). Die Genauigkeit der Durchmesser ist mit  $\pm 0,01$  mm angegeben. Der Korrekturfaktor  $C$  ist für alle Kapillaren gleich und beträgt  $C = 0,12 \text{ mm}^2$  für ein Füllvolumen von  $3 \text{ cm}^3$ .

Mit dem am Versuchsplatz ausliegenden Thermometer wird die Temperatur im Wasserbad direkt am Viskosimeter gemessen.

**Beachten Sie unbedingt die folgenden Hinweise zur Messung:**

1. Spülen Sie jede Kapillare vor der Befüllung erst mit Alkohol und dann mit VE-Wasser durch. Benutzen Sie dazu die Wasserstrahlpumpe im Waschbecken. Es arbeitet immer nur **eine Gruppe** am Waschbecken, wobei einer der beiden Teilnehmer die Kapillare festhält, während der andere mit der Pumpe hantiert!
2. Achten Sie beim Einbau der Kapillaren ins Temperiergefäß auf dichtes Schließen des Deckels, da die Pumpe des Thermostaten Wasser ins Gefäß drückt. Schalten Sie bei einer Undichtigkeit den Thermostaten sofort ab!  
Vergessen Sie nicht, den Thermostaten beim Wechseln der Kapillare abzuschalten!
3. Füllen Sie die  $3 \text{ cm}^3$  Flüssigkeit immer in das Rohrstück mit dem größeren Durchmesser, in dem sich auch das Überlaufgefäß befindet.
4. Warten Sie nach dem Ändern der Temperatur etwa 10 Minuten auf das Einstellen des neuen Gleichgewichtes. Notieren Sie für jede Messreihe die Startzeiten im Protokoll!
5. Zu Beginn der Messung muss sich der Flüssigkeitsmeniskus deutlich oberhalb der Messmarke  $M_1$  befinden. Warum?

6. Überlegen Sie sich während der Messungen, wodurch die Messunsicherheit wesentlich bestimmt wird!
7. Am Wasserbad wird ausschließlich die Temperatur verstellt, aber kein anderer Parameter! Stellen Sie am Ende des Versuchstages die Solltemperatur auf 20 °C, bevor Sie das Gerät ausschalten. Die nächste Praktikumsgruppe wird es Ihnen danken!

### 6.1 Kalibrierung der Kapillaren: Bestimmung von K

Messen Sie die Durchflusszeiten  $\tau$  für Wasser in allen 4 Kapillaren, und zwar jeweils bei einer Temperatur von 20 °C. Machen Sie jede Messung mindestens 3 Mal, um grobe Fehler auszuschließen.

### 6.2 Viskosität zweier unbekannter Flüssigkeiten

Verwenden Sie für diese Messung das Viskosimeter mit dem Kapillardurchmesser 0,5 mm. Es werden zwei mit Buchstaben gekennzeichnete Flüssigkeiten ausgegeben, wobei eine Flüssigkeit für jede Gruppe gleich ist, während die zweite für jede Gruppe unterschiedlich ist. Messen Sie für beide Flüssigkeiten die Durchflusszeiten bei einer Temperatur von 20 °C, und zwar wieder jeweils mindestens 3 Mal!

### 6.3 Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Verwenden Sie für diese Messung nur das Viskosimeter mit dem Kapillardurchmesser 0,4 mm. Führen Sie diesen Versuch mit abgekochtem Wasser durch. Warum?

1. Messen Sie die Durchflusszeiten bei etwa 6 Temperaturen im Bereich zwischen 25 °C und 70 °C, und zwar wieder jeweils mindestens 3 Mal!
2. Führen Sie dabei für eine der Temperaturänderungen folgenden Test durch:  
Stellen Sie den Thermostaten auf die nächste zu messende Temperatur ein, also z.B. von 40 °C nach 48 °C. Beginnen Sie dann **sofort** mit ständigen Durchlaufmessungen, bis mindestens 10 Minuten nachdem der Thermostat die neue Zieltemperatur erreicht hat. Notieren Sie dabei für jede Messung nicht nur die Durchlaufzeit, sondern auch die aktuelle Uhrzeit und die aktuelle Temperatur des Thermostaten! Dies dient dazu, die Dauer der Wartezeiten zu überprüfen.

## 7. Auswertung

Für die Fehlerrechnung kann der Fehler der Konstanten  $C$  in Gl. (6) vernachlässigt werden.

### 7.1 Bestimmung von K für die 4 Kapillaren

Berechnen Sie für die 4 Kapillaren die Apparatekonstanten  $K$  nach Gl. (6)! Verwenden Sie dazu die Dichte  $\rho_w = 0,9982 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  und die Viskosität  $\eta_w = 10,019 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$  von Wasser bei 20 °C.

Tragen Sie  $K$  gegen  $r$  auf doppeltlogarithmischem Papier auf (Ausgabe durch den Betreuer) und zeigen Sie, dass  $K \propto r^4$  gilt! Bestimmen Sie dazu die Steigung der Geraden und den Fehler der Steigung durch Ablesen der graphischen Darstellung (und nicht numerisch durch lineare Regression).

## 7.2 Viskosität zweier unbekannter Flüssigkeiten

Bei den unbekannten Flüssigkeiten handelt es sich um Mischungen aus Wasser und Ethanol. Schätzen Sie mit Hilfe der kinematischen Viskosität  $\nu$  die jeweilige Ethanol-Konzentration ab.<sup>1</sup> Welche Probleme können dabei auftreten und wie könnten diese im Prinzip gelöst werden?

Tauschen Sie sich über die Viskosität der gemeinsamen Flüssigkeit mit allen anderen Gruppen an diesem Versuchstag aus und diskutieren Sie jeweils getrennt in Ihren Auswertungen die Unterschiede.

## 7.3 Temperaturabhängigkeit der Viskosität

1. Berechnen Sie die kinematische Viskosität  $\nu$  aus Gl. (6) mit Hilfe der eben bestimmten Konstanten  $K$  für die von Ihnen eingestellten Temperaturen. Tragen Sie  $\nu$  gegen  $\frac{1}{T}$  auf halblogarithmischem Papier auf (Ausgabe durch den Betreuer) und diskutieren Sie anhand des Graphen, dass eine lineare Abhängigkeit besteht! Bestimmen Sie die Steigung der Geraden und den Fehler der Steigung durch lineare Regression. Bestimmen Sie nun die Konstante  $T^*$  aus Gl. (3) und das Verhältnis  $\frac{k_B T^*}{0,5 k_B T_0}$ , wenn  $T_0$  die Raumtemperatur ist.
2. Tragen Sie die Durchlaufzeiten, die Sie während des Wartens auf das Temperaturgleichgewicht aufgezeichnet haben, gegen die seit der Temperaturänderung vergangene Zeit auf! Ist die vorgegebene Wartezeit von 10 Minuten gerechtfertigt?

---

<sup>1</sup>Literaturwerte für die Viskositäten solcher Mischungen finden Sie z.B. im “Handbook of Chemistry and Physics”, welches auch auf der eLearning-Seite angegeben ist.

# Versuch Rad: Zählstatistik und $\beta$ -Spektrum

## 1. Motivation und Versuchsziel

Bei Kernreaktionen, insbesondere bei der Kernspaltung, entstehen zahlreiche instabile Atomkerne, wovon einige wenige auch in der Natur vorkommen. So sind die schwersten Kerne im Periodensystem der Elemente, wie z.B. Radium, Thorium oder Uran, nicht mehr stabil. Solche Kerne wandeln sich unter Aussendung von Strahlung in andere um, welche i.Allg. ebenfalls instabil sind und weiter zerfallen, bis die Reihe in einem stabilen Element endet. Der Zerfall erfolgt statistisch, d.h. man kann für einen einzelnen Kern nicht vorhersagen, wann er zerfällt. Die natürlichen radioaktiven Nuklide zerfallen sehr langsam, wobei allerdings unter ihren Folgeprodukten einige sehr kurzlebig sind.

Die wichtigsten Arten radioaktiver Strahlung sind die  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung. Sie unterscheiden sich sehr wesentlich in ihrer Durchdringungsfähigkeit von Materie, in ihrer ionisierenden Wirkung auf andere Teilchen sowie durch ihre Ablenkung in elektrischen und magnetischen Feldern.

In diesem Versuch werden Sie sich mit den radioaktiven Zerfall beschreibenden statistischen Verteilungen auseinandersetzen und diese Anhand der Strahlung eines Radium-präparats überprüfen. Dabei werden Sie mit dem Geiger-Müller-Zählrohr eines der wichtigsten Nachweisinstrumente für radioaktive Strahlung kennen lernen. Außerdem messen Sie das Energiespektrum der beim  $\beta$ -Zerfall emittierten schnellen Elektronen.

## 2. Literatur

*Zur Vorbereitung muss mindestens eine der folgenden Quellen gelesen werden:*

Gerthsen, Abschnitte 19.1, 19.2, 19.3.1, 19.3.2 und 19.3.4

EKS, Abschnitt 47–49

Berkeley 5, Abschnitte 2.1–2.4, Anhänge A.1, A.2; Berkeley 6, Abschnitte 11.2.1, 11.4.1

Tipler, Abschnitt 40

*weiterführend sind:* BS-4, Abschnitt 2

P. Huber, "Physik" (1972), Band III/2, Kapitel 5 und 6

H. Krieger, "Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlenschutzes" (2009)

L. Herforth, H. Koch, "Praktikum der Radioaktivität und Radiochemie", Kapitel 1–3, 6

## 3. Theoretischer Hintergrund

### 3.1 Das Zerfallsgesetz

Der Zerfall von instabilen Atomkernen erfolgt spontan und ist unbeeinflusst von äußeren Gegebenheiten wie Druck, Temperatur oder elektromagnetischen Feldern. Ist  $N_0$  die zur Zeit  $t = 0$  vorhandene Anzahl von unzerfallenen Kernen, so ist die Zahl  $N$  der zur Zeit  $t > 0$  noch übrigen Kerne durch das *radioaktive Zerfallsgesetz* gegeben:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1)$$

$\lambda$  heißt *Zerfallskonstante*. Nach der *Halbwertszeit*  $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$  ist genau die Hälfte der jeweils vorhandenen Kerne zerfallen. Die exponentielle Abhängigkeit von der Zeit gemäß Gl. (1) ist so streng, dass der radioaktive Zerfall zur Altersbestimmung von Stoffen verwendet

werden kann. Außerdem ist  $\lambda$  eine für den jeweiligen Kern charakteristische Konstante, aus deren Messung sich ein radioaktiver Kern identifizieren lässt.

### 3.2 Statistische Verteilungen

Der radioaktive Zerfall ist zeitlich und räumlich völlig ungeordnet, d.h. man kann für einen einzelnen Kern nicht vorhersagen, wann dieser zerfällt. Es lassen sich lediglich statistische Aussagen über die Gesamtheit der Kerne machen. So beobachtet man bei schwachen Präparaten Schwankungen in der Zerfallsrate, also der pro Zeiteinheit zerfallenen Kerne, deren genaue Zahl nur für lange Beobachtungszeiten durch Gl. (1) gegeben ist.

Die Wahrscheinlichkeit  $p$ , dass ein bestimmter Kern innerhalb der Zeit  $\Delta t$  zerfällt, ist für alle Kerne gleich. Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb dieser Zeit von  $N$  Kernen genau  $x$  zerfallen, ist dann durch die *Binomial-Verteilung* mit dem Erwartungswert (oder Mittelwert)  $\bar{x}$  und der Streuung (oder Standardabweichung)  $\sigma$  gegeben:

$$W_B(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} \cdot p^x (1-p)^{N-x} \quad (2)$$

$$\text{mit } \bar{x} = \sum_{x=0}^N x W_B(x) = Np, \quad \sigma^2 = \sum_{x=0}^N (x - \bar{x})^2 W_B(x) = Np(1-p) \quad (3)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass der Zerfall der Kerne unabhängig voneinander und unabhängig von der Vorgeschichte stattfindet.

Für große  $N$  wird die Binomial-Verteilung unpraktisch, da Fakultäten großer Zahlen vorkommen. Für den radioaktiven Zerfall lassen sich aber meist sehr gut Näherungsformeln anwenden. Hierzu wird angenommen, dass die Zahl  $x$  der zerfallenen Kerne klein gegen  $N$  ist:  $x \ll N$ , so dass während der Messdauer  $N$  etwa konstant ist. Damit ist dann auch die Zerfallswahrscheinlichkeit  $p$  sehr klein:  $p \ll 1$ , wobei aber der Mittelwert  $Np$  endlich bleibt, d.h. die Zerfallsrate ist immer gleich. In diesem Fall geht Gl. (2) in die *Poisson-Verteilung* über:<sup>1</sup>

$$W_P(x) = \frac{N^x p^x}{x!} \cdot e^{-Np} = \frac{\bar{x}^x}{x!} \cdot e^{-\bar{x}} \quad \text{mit } \bar{x} = Np, \sigma^2 = Np \quad (4)$$

Diese bezüglich des Mittelwerts  $\bar{x}$  asymmetrische Verteilung geht für große Zählraten  $x \gg 1$ , aber immer noch  $x \ll N$ , in eine symmetrische Glockenkurve, nämlich eine *Gauß-Verteilung* (vgl. auch Versuch Feh) über, mit natürlich weiterhin gleichen  $\bar{x}$  und  $\sigma$ :

$$W_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } \bar{x} = Np, \sigma^2 = Np \quad (5)$$

Wie bereits im Kapitel über Fehlerrechnung und im Versuch Feh gezeigt wurde, liegen die Zählergebnisse mit einer Wahrscheinlichkeit

- von 68,3% im Bereich zwischen  $(\bar{x} - \sigma)$  und  $(\bar{x} + \sigma)$ ,
- von 95,4% im Bereich zwischen  $(\bar{x} - 2\sigma)$  und  $(\bar{x} + 2\sigma)$
- und von 99,7% im Bereich zwischen  $(\bar{x} - 3\sigma)$  und  $(\bar{x} + 3\sigma)$ .

Die Unterschiede zwischen Poisson- und Gauß-Verteilung lassen sich experimentell nur bei sehr kleinen Zählraten, bei denen auch die Zerfallszahl  $x = 0$  des öfteren vorkommt, nachweisen.

---

<sup>1</sup>Mittelwert und Standardabweichung sind natürlich wie oben. Wegen  $p \ll 1$  folgt  $\sigma^2 = Np$ .

## 4. Fragen zur Vorbereitung

1. Beschreiben Sie die verschiedenen Arten des radioaktiven Zerfalls! Wieso beobachtet man beim  $\beta$ -Zerfall ein Spektrum für die Teilchenenergien, obwohl der Kern immer die gleiche Energie verliert? Was bestimmt die Energie der schnellsten Teilchen?
2. Welche natürlichen Zerfallsreihen gibt es, und wo enden diese? Wieso werden nicht alle beobachtet? Wozu gehört das hier verwendete Präparat?
3. Wie wird der radioaktive Zerfall zur Altersbestimmung benutzt ( $^{14}\text{C}$ -Methode)? Beispiel: Ein ausgegrabenes Holzstück, in dem der Kohlenstoff eine Masse von 50 g hat, zeigt eine Aktivität von 480 Zerfällen pro Minute. Wie viele  $^{14}\text{C}$ -Atome sind in dem Holzstück noch enthalten und vor wie vielen Jahren starb es ab?
4. Zeichnen Sie jeweils eine Poisson-Verteilung für die Mittelwerte  $\bar{x} = 1$ ,  $\bar{x} = 3$  und  $\bar{x} = 10$ . Zeichnen Sie die entsprechende Gauß-Verteilung für den Mittelwert  $\bar{x} = 10$ . Was fällt Ihnen auf?
5. Beschreiben Sie die Funktionsweise des Geiger–Müller–Zählrohrs!
6. Mit welchem Zählrohrtyp sind energieaufgelöste Messungen möglich und warum? Vergleichen Sie Geiger–Müller–Zähler, Proportional–Zählrohr und Ionisationskammer! Welche weiteren Nachweismethoden für radioaktiven Zerfall kennen Sie?
7. Warum ist bei einer Messung des  $\beta$ -Spektrums eine Untergrundmessung nötig und was wird dabei gemessen? Woher kommt diese Strahlung? (Überprüfen Sie während des Versuchs Ihre Hypothese!)

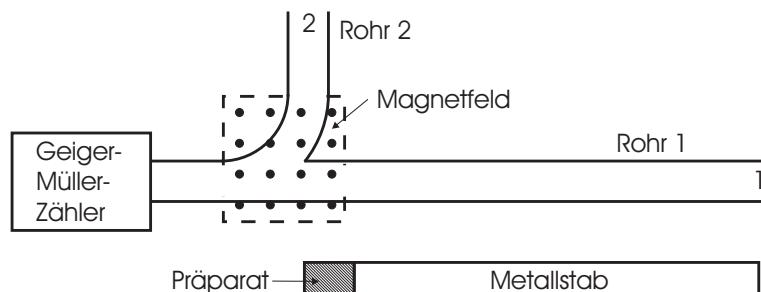
## 5. Versuchsaufbau und Messtechniken

### 5.1 Experimenteller Aufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abb. Rad.1 skizziert. Das radioaktive Präparat ist am Ende einer Metallstange angebracht und kann entweder an der Stelle 1 in Rohr 1 oder an der Stelle 2 in Rohr 2 eingeschoben werden. Die radioaktive Strahlung wird mit einem Geiger–Müller–Zählrohr gemessen, welches am anderen Ende von Rohr 1 befestigt ist.

Zähler und Spannungsversorgung für das Zählrohr sind in einem Steuergerät untergebracht ('LD–Digitalzähler 57548'), über dessen Funktionsweise Sie sich bitte anhand der ausliegenden Anleitung informieren. Es können verschiedene Größen (Knöpfe oben links) in unterschiedlichen Einheiten (Knöpfe rechts daneben) an den Eingängen A, B, E und F gemessen werden. Für diesen Versuch verwenden Sie immer das Ratemeter 'RATE' mit der Anzeige 'R' in 1/s. Das Zählrohr ist am Eingang 'A' angeschlossen und wird durch

Abbildung Rad.1:  
Schematischer Versuchsaufbau. Das Radiumpräparat sitzt am Ende eines Metallstabes und kann entweder in Rohr 1 oder in Rohr 2 eingesteckt werden.



Drücken der Taste ‘A’ ausgewählt. Die Zählrohrspannung wird durch den Drehknopf über dem ‘A’ eingestellt.

Eine Messung kann durch die ‘START/STOP’–Taste gestartet und beendet werden. In diesem Versuch werden die Messung jedoch in der Regel durch das Messprogramm am PC gesteuert, dessen Bedienung weitgehend selbsterklärend ist.

## 5.2 Messen und Auswerten mit dem PC

In diesem Versuch werden Sie mehr als 2000 einzelne Messungen mit Hilfe eines Computers durchführen. Machen Sie sich klar, dass eine solche Datenmenge besondere Anforderungen an Ihre Vorgehensweise, Ihr Messprotokoll und Ihre Auswertung stellt. Es müssen nicht alle Messdaten ins Heft übernommen werden, jedoch muss ihre Arbeit übersichtlich und nachvollziehbar bleiben. Ihr Heft muss so geschrieben sein, dass der Leser Ihren Ausführungen ohne Probleme folgen kann, wenn er im Besitz der Messdaten wäre. Hierfür ist es sinnvoll, Messdaten auszugsweise ins Heft zu übernehmen, Dateinamen zu notieren und Ihre Beobachtungen schriftlich festzuhalten. Das Messprogramm erlaubt es Ihnen weiterhin, Histogramme auszudrucken, die Sie noch während des Versuchs zur Verdeutlichung Ihrer Ergebnisse ins Heft kleben können.

Bitte bringen Sie einen USB–Stick zum Praktikum mit, so dass Sie Ihre Messdaten mit nach Hause nehmen können.

## 5.3 Das verwendete radioaktive Präparat

Es wird ein Radiumpräparat der Stärke  $A = 3 \cdot 10^5$  Bq verwendet, welches  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung aussendet.<sup>2</sup> Das Präparat besteht aus dem Isotop  $^{226}_{88}\text{Ra}$ , das mit einer Halbwertszeit von 1600 Jahren unter Aussendung von  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Strahlung in  $^{218}_{84}\text{Po}$  übergeht. Dieses wiederum zerfällt unter Aussendung von  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung über eine Zerfallskette in das schließlich stabile  $^{206}_{82}\text{Pb}$ .

Aufgrund der im Anhang diskutierten Absorption von  $\alpha$ -Strahlung misst man bei diesem Versuch praktisch nur  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung. Die  $\beta$ -Strahlung hat eine ausgeprägte Energieverteilung, da zum einen keine monoenergetischen  $\beta$ -Teilchen emittiert werden (vgl. Frage 1 zur Vorbereitung), und zum anderen durch Abbremsung der Teilchen im Präparatmaterial eine weitere Energieverschmierung stattfindet.

## 5.4 Messung der Geschwindigkeitsverteilung der $\beta$ –Strahlung

Das Rohr 2 in Abb. Rad.1 ist mit einem Radius von  $r = 3,5$  cm um  $90^\circ$  aus der Richtung zum Geiger–Müller–Zähler weggebogen. Wird das Präparat in dieses Rohr eingesetzt und ein homogenes Magnetfeld  $B$  angelegt, so können aufgrund der Ablenkung geladener Teilchen im Magnetfeld nur  $\beta$ –Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$  ins Zählrohr gelangen. Für die Ablenkung gilt

$$qvB = m \frac{v^2}{r} \quad \text{mit} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

---

<sup>2</sup>1 Bq = 1 Becquerel = 1  $\frac{\text{Zerfall}}{\text{s}}$ , s. auch Anhang.

da die Teilchen eventuell relativistisch zu behandeln sind. Dabei sind  $m_0$  die Ruhemasse und  $q$  die Ladung der Teilchen. Auf diese Weise kann also die Geschwindigkeitsverteilung der  $\beta$ -Strahlung gemessen werden.

Das Magnetfeld wird durch zwei auf einem Eisenkern sitzende Spulen erzeugt. Diese werden von einem Strom  $I$  durchflossen, welchen ein regelbares Netzgerät liefert. Es gilt der lineare Zusammenhang:

$$B = I \cdot 0,170 \frac{\text{T}}{\text{A}} \quad (7)$$

## 5.5 Verwendung des Wahrscheinlichkeitspapiers<sup>3</sup>

Die vom unteren Rand bis zu einem bestimmten Wert  $t$  aufintegrierte Gauß-Verteilung  $W_G(x)$  aus Gl. (5) ergibt die *Gauß'sche Fehlerfunktion*  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t W_G(x) \, dx$  (vgl. Versuch Feh).  $\Phi(t)$  ist die Wahrscheinlichkeit, eine Messung im Intervall zwischen  $-\infty$  und  $t$  zu finden, und es gilt  $\Phi(t \rightarrow \infty) = 1$ . Beim Wahrscheinlichkeitspapier ist die  $y$ -Achse so eingeteilt, dass  $\Phi(t)$  eine Gerade ergibt wenn die  $x$ -Achse linear in  $t$  ist. Verschiedene Gauß-Verteilungen entsprechen also Geraden mit verschiedenen Steigungen. Das Maximum der Gauß-Verteilung bei  $\bar{x}$ , und damit  $\Phi(t = \bar{x}) = 0,5$ , liegt genau in der Mitte der  $y$ -Achse.

Der rechnerisch aufwendige Fit der gemessenen Verteilung an eine Gauß-Funktion kann also durch grafische Auftragung auf Wahrscheinlichkeitspapier durchgeführt werden. Hierzu werden die jeweils aufsummierten relativen Häufigkeiten eines Histogramms gegen die rechte Intervallgrenze der zu dieser Summe gehörenden Histogrammbalken aufgetragen. Der Schnittpunkt der entstehenden Kurve mit dem  $y$ -Wert 50% ist dann  $t = \bar{x}$  und die Schnittpunkte mit den  $y$ -Werten (50 + 34,14)% und (50 - 34,14)% geben  $t = \bar{x} + \sigma$  und  $t = \bar{x} - \sigma$ . Auf diese Weise lassen sich  $\bar{x}$  und  $\sigma$  zeichnerisch bestimmen.

## 6. Aufgaben

### Gefährdungspotentiale

Beachten Sie unbedingt den Anhang und gehen Sie sehr vorsichtig mit dem radioaktiven Präparat um! Die vor allem gefährliche  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung tritt an der Stirnfläche der Kapsel aus und kann bei direkter Einstrahlung zu Augenschädigungen führen. Das Präparat darf beim Einsetzen nur am Metallstab angefasst werden!

Im unabgeschirmten Zustand misst man eine Dosisleistung von  $35 \frac{\mu\text{Sv}}{\text{h}}$ , man wird aber bei vorsichtigem Umgang mit dem Strahler nur einen Bruchteil dieses Wertes abbekommen. Die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung wird durch den experimentellen Aufbau praktisch komplett abgeschirmt, während die  $\gamma$ -Strahlung in einem Abstand von 25 cm auf etwa  $1,5 \frac{\mu\text{Sv}}{\text{h}}$  abgesunken ist. Die akkumulierte Dosis an einem Praktikumstag liegt dann bei unter  $10 \mu\text{Sv}$ , was mit der durchschnittlichen natürlichen Ganzkörperbelastung in Deutschland von etwa 1 mSv pro Jahr verglichen werden muss.

Bananenstecker (4 mm-Federstecker) dürfen nicht in die Steckdose gesteckt werden!

### Allgemeine Hinweise:

Die Erfassung der Messdaten erfolgt über einen PC. Schalten Sie diesen und das Steuergerät (Schalter auf der Rückseite) ein und starten Sie das auf dem Desktop befindliche

<sup>3</sup>Siehe auch J. Hartung, "Statistik", Abschnitt 1.7.2

“Messprogramm”. Nachdem Sie einen Gruppennamen angegeben haben, können Sie die unten beschriebenen Aufgaben durchführen. Sie finden alle Ihre Messdaten auf der Partition ‘D:’ in einem Ordner, der das aktuelle Datum als Namen hat und Ihren Gruppennamen als Unterordner beinhaltet. Sie sollten nach jeder Messung einen Blick in die entstandenen Dateien werfen, um die Funktionsweise des Programms zu verstehen. Sie können die Daten auf dem mitgebrachten USB-Stick speichern und mit nach Hause nehmen.  
Falls Sie das Messprogramm aus irgendeinem Grund beenden müssen, geben Sie beim Neustart wieder den gleichen Gruppennamen an!

## 6.0 Nachmittagsübergreifende Messung

An jedem Versuchsplatz liegt ein Strahlenmessgerät “GAMMA-SCOUT” aus, mit dem Sie die Äquivalentdosisleistung (s. Anhang) aber auch einzelne Zerfälle messen können. Dokumentieren Sie damit über den ganzen Nachmittag verteilt immer mal wieder die Strahlenbelastung an verschiedenen Orten im Raum, insbesondere direkt am Aufbau sowie an Ihrem Arbeitsplatz.

Diskutieren Sie Ihre Beobachtungen und ordnen Sie diese bezogen auf bestimmte gesetzliche Grenzwerte ein.

### 6.1 Zählrohrcharakteristik

Ermitteln Sie die für das Geiger–Müller–Zählrohr geeignete Spannung!

#### Hinweise zur Versuchsdurchführung und Auswertung

Stellen Sie in einer Testmessung den Abstand zwischen dem Präparat (in Rohr 1) und dem Zählrohr so ein, dass die Zählrate bei 400 V etwa  $100 \frac{1}{s}$  beträgt. Starten Sie mit Hilfe des Programms eine Messung, bei der für eine Zählzeit von 1 s die Zählrate als Funktion der Zählrohrspannung aufgenommen wird, und zwar mindestens 10 mal pro Spannungswert.

Stellen Sie für die folgenden Messungen die Zählrohrspannung etwa auf die Mitte des messbaren Plateaus ein.

#### Auswertung

Zeichnen Sie ein Diagramm der Zählrate als Funktion der Zählrohrspannung!

Die mit dem Geiger–Müller–Zähler ermittelte Impulszahl ergibt als Funktion der Zählrohrspannung ein Plateau. Innerhalb dieses Plateaus korrespondiert zu jedem einfallenden Teilchen ein Zählimpuls, so dass einzelne Kernzerfälle gezählt werden können.

### 6.2 Statistische Verteilung bei kleinen Zählraten

Überprüfen Sie die Gültigkeit der Poissonstatistik des radioaktiven Zerfalls bei kleinen Zählraten!

#### Hinweise zur Versuchsdurchführung

Stellen Sie in einer Testmessung den Abstand zwischen dem Präparat (in Rohr 1) und dem Zählrohr so ein, dass die mittlere Zählrate etwa 2 bis  $3 \frac{1}{s}$  beträgt. Starten Sie mit Hilfe des Programms eine Messung, bei der die Zählrate  $x$  bei 1 s Messzeit mindestens  $N = 500$  mal aufgenommen wird. Sie können dabei das Entstehen des Histogramms beobachten.

Beenden Sie die Messung wenn Sie glauben, genügend Messpunkte gesammelt zu haben und drucken Sie das Histogramm für Ihr Protokoll aus.

### **Auswertung**

Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten  $H(x_i) = \frac{n(x_i)}{N}$ , wobei  $n(x_i)$  die absolute Häufigkeit von  $x_i$  ist, und stellen Sie diese als Histogramm dar! Zeichnen Sie den Mittelwert  $\bar{x}$  und die zugehörige Streuung  $\sigma$  mit ein.

Zeichnen Sie nun auch noch die mit Hilfe des Mittelwerts berechnete Poissonverteilung ins Diagramm ein!

## **6.3 Statistische Verteilung bei großen Zählraten**

Zeigen Sie, dass die Häufigkeitsverteilung des radioaktiven Zerfalls bei großen Zählraten in guter Näherung durch eine Gauß–Verteilung gegeben ist!

### **Hinweise zur Versuchsdurchführung**

Stellen Sie in einer Testmessung den Abstand zwischen dem Präparat (in Rohr 1) und dem Zählrohr so ein, dass die Zählrate zwischen  $150 \frac{1}{\text{s}}$  und  $200 \frac{1}{\text{s}}$  liegt. Starten Sie mit Hilfe des Programms eine Messung, bei der die Zählrate  $x$  bei 1 s Messzeit mindestens  $N = 1000$  mal aufgenommen wird. Sie können dabei das Entstehen des Histogramms beobachten und auch schon während der Messung die Darstellungsoptionen (wie die Intervallbreite und die Grenzen der Achsen) anpassen. Beenden Sie die Messung wenn Sie glauben, genügend Messpunkte gesammelt zu haben und drucken Sie das Histogramm für Ihr Protokoll aus. Neben den Messdaten können Sie auch die Histogrammdaten abspeichern.

### **Auswertung**

Zeichnen Sie ein Histogramm der Messdaten und beachten Sie dabei die Faustregel für eine sinnvolle Anzahl von Intervallen! Zeichnen Sie auch den Mittelwert und die zugehörige Streuung mit ein!

Berechnen Sie für jedes Intervall die relative Häufigkeit  $H(x_i)$  und bis zur jeweiligen Intervallgrenze von  $x_i$  die Summe der relativen Häufigkeiten  $S_i = \sum \frac{n(x_i)}{N}$ . Zeichnen Sie die Daten auf Wahrscheinlichkeitspapier (s. Abschnitt 5.4).

Sind die Daten normalverteilt? Entnehmen Sie  $\bar{x}$  und  $\sigma$  der Zeichnung und vergleichen Sie diese Größen mit den berechneten Werten!

### **Streuung und Mittelwert beim radioaktiven Zerfall**

Für poissonverteilte Daten gilt nach Gl.(4):  $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$ , d.h. die Streuung der Messwerte ist durch den Mittelwert bestimmt. Dies gilt für normalverteilte Daten dann, und nur dann, wenn diese wie hier beim radioaktiven Zerfall auf einer Poisson–Verteilung beruhen.

Überprüfen Sie nun die Gültigkeit dieses Zusammenhangs anhand Ihrer Daten für die Aufgaben 6.2 und 6.3. Berechnen Sie für die Aufgabe 6.1 ebenfalls die jeweiligen Fehler nach dieser vereinfachten Methode. Warum gilt der Zusammenhang hier nicht für alle Daten?

## **6.4 Das $\beta$ –Spektrum**

Messen Sie die Geschwindigkeitsverteilung der  $\beta$ –Teilchen!

### **Hinweise zur Versuchsdurchführung**

Führen Sie das Präparat vorsichtig in Rohr 2 ein. Wählen Sie nun am Digitalzähler eine Messzeit von 10 s und machen Sie zunächst 20 Untergrundmessungen ohne Magnetfeld. Erhöhen Sie dann den Strom in sinnvollen Schritten und bestimmen Sie jeweils die Zählraten. Führen Sie dabei für jede Magnetfeldstärke mindestens 10 Messungen durch. Da beim Starten einer neuen Messung die zuvor aufgenommenen Daten verschwinden, übertragen Sie diese immer direkt in ihr Heft.

Überprüfen Sie Ihre Hypothese aus der Frage zur Vorbereitung 7 zum Ursprung der Untergrundstrahlung!

Höhere Ströme ( $I \gtrsim 0,5 \text{ A}$ ) bleiben während der Messzeit unter Umständen nicht konstant, sondern fallen leicht ab. Wie erklären Sie das?

### **Auswertung**

Erstellen Sie ein Diagramm der Zählraten als Funktion von  $\frac{v}{c}$  mit statistischem Fehler. Wie setzt sich der Fehler aus den Fehlern von Untergrund und Messung zusammen? Tragen sie auch die Fehler von  $\frac{v}{c}$  ins Diagramm ein!

## **Anhang: Bemerkungen zum Strahlenschutz**

### **A.1 Allgemeine Vorsichtsmaßnahmen**

Radioaktive Strahlung, sowie Röntgen- und Neutronenstrahlung, kann bei Absorption im Körper *Strahlenschäden* bewirken. Die Strahlung ionisiert in den Körperzellen direkt und indirekt Atome und Moleküle, wodurch chemisch sehr aggressive Stoffe entstehen. Dadurch werden in den Zellmolekülen Reaktionen eingeleitet, die zu schwerwiegenden Folgen für den Organismus führen können, wie Krebserkrankungen, genetische Schäden oder Vergiftungserscheinungen, in Extremfällen mit tödlichem Ausgang. Die Schäden machen sich meist nicht sofort nach der Belastung, sondern erst Tage oder sogar Jahre später bemerkbar, Erbschäden gar in der nächsten oder in folgenden Generationen.

Der Mensch besitzt kein Sinnesorgan für radioaktive Strahlung. Der Körper reagiert zwar, aber auf Umwegen und viel zu spät. Deshalb setzt der Umgang mit ionisierenden Strahlungsquellen äußerste Vorsicht und eine gute Kenntnis der jeweiligen Gefahren voraus. Generell ist ein großer Abstand von der Quelle einzuhalten und auf möglichst kurze Einwirkungszeiten zu achten.  $\alpha$ -Strahlung mit einer typischen Energie von einigen MeV wird in Luft nach einigen Zentimetern und in Metallen bereits in sehr dünnen Schichten völlig absorbiert.  $\beta$ -Strahlung mit typischen Endenergien bis in den MeV-Bereich wird meist durch Metallschichten im mm-Bereich absorbiert. Ihre Reichweite in Luft beträgt etwa 12 cm für 0,1 MeV und etwa 3,5 m für 1 MeV.  $\gamma$ -Strahlung ist hochenergetisch im Bereich von 0,1 bis 1 MeV und durchdringt fast ungeschwächt auch dicke Metallschichten. Hier ist zur Abschirmung viel Material mit einer hohen Ordungszahl nötig.

Bei Einstrahlung von außen werden also insbesondere  $\alpha$ - und teilweise auch  $\beta$ -Strahlen in den obersten Hautschichten absorbiert, so dass sie für den Körper unschädlich sind. Ihre Wirkung ist allerdings umso größer, wenn solche Strahler z.B. durch Nahrungsaufnahme in den Körper gelangen, da dann die Schutzwirkung der Oberhaut fehlt und die umgesetzte Energiedosis entsprechend Gl. (10) unten voll wirksam wird. Hierdurch wird der Körper einer Dauerstrahlenbelastung ausgesetzt, da manche radioaktiven Isotope nur sehr

langsam oder auch gar nicht ausgeschieden werden. Zur Vermeidung von  $\gamma$ -Bestrahlung sind aufwendige Vorsichtsmaßnahmen nötig.

## A.2 Messung der Strahlenbelastung

Die Stärke eines radioaktiven Präparates, oder seine *Aktivität*  $A$  mit der Einheit ‘Becquerel’, wird durch die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde ausgedrückt:

$$\text{Aktivität: } A = \frac{\text{Zerfälle}}{\text{Zeit}} \quad \text{Einheit: } [A] = 1 \text{ Bq} = \frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ Becquerel} \quad (8)$$

Für die meisten Strahlungswirkungen, so auch für die biologischen, ist aber nicht die Aktivität allein, sondern auch die Art der Strahlung und die daraus resultierende Gesamtwirkung auf den Organismus wesentlich. Als *Energiedosis*  $D$  mit der Einheit ‘Gray’ wird die einer Masseneinheit  $dm$  des Gewebes zugeführte Strahlungsenergie  $dW$  definiert. Wichtiger für den Strahlenschutz ist allerdings die *Äquivalentdosis* (oder *Organdosis*)  $H$  mit der Einheit ‘Sievert’, welche auch die biologische Schädlichkeit der verschiedenen Strahlenarten über den so genannten *Qualitätsfaktor*  $Q$  berücksichtigt:<sup>4</sup>

$$\text{Energiedosis: } D = \frac{dW}{dm} \quad \text{Einheit: } [D] = 1 \text{ Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Gray} \quad (9)$$

$$\text{Äquivalentdosis: } H = Q \cdot D \quad \text{Einheit: } [H] = 1 \text{ Sv} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Sievert} \quad (10)$$

$Q$  ist für  $\beta$ -,  $\gamma$ - und Röntgenstrahlung 1, für Neutronen 5 bis 10 und für  $\alpha$ -Strahlung 20. Die *Dosisleistung* ist die jeweilige Dosis pro Zeiteinheit, angegeben also in  $\frac{\text{Gy}}{\text{s}}$  oder  $\frac{\text{Sv}}{\text{s}}$ , bzw. bei Grenzwerten auch in  $\frac{\mu\text{Sv}}{\text{h}}$  oder  $\frac{\text{mSv}}{\text{a}}$ . Für Personen, die beruflich in der Nähe von Strahlungsquellen arbeiten, gilt als obere Grenze für die aufgenommene Dosis 6 mSv pro Jahr, was bei 2000 Arbeitsstunden eine durchschnittlichen Dosisleistung von  $3 \frac{\mu\text{Sv}}{\text{h}}$  ist.

Zur Bestimmung der beruflichen Strahlenbelastung stehen spezielle Messgeräte zur Verfügung, welche nicht ohne weiteres für andere Messprobleme benutzt werden dürfen. So sind *Dosisleistungs-Messgeräte* in der Regel für Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlung geeicht und somit zur energiemäßigen Bestimmung von  $\beta$ -Strahlung nicht geeignet. Andererseits geben *Kontaminations-Messgeräte* direkt die Zählraten, also die Aktivität, an. Diese müssen allerdings für die entsprechende Strahlungsart geeignet sein und für die jeweilige Nuklidsorte separat geeicht werden, da jedes Nuklid ein anderes Spektrum emittiert. Wegen des unterschiedlichen Ansprechverhaltens treten bei verschiedenen Nuklidsorten bei gleicher Aktivität Abweichungen von bis zu mehreren Größenordnungen in der Zählrate auf.

---

<sup>4</sup>Bei älteren Messgeräten findet man statt ‘Sievert’ oft die heute nicht mehr gebräuchliche Einheit ‘Rem’. Die Umrechnung ist  $1 \text{ Rem} = 0,01 \text{ Sv} = 10 \text{ mSv}$ .