

**WS2010**

---

**PPA1**

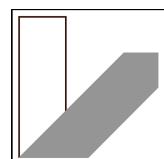
---

# Zählstatistik β-Spektrum

---

Achim Guckenberger - Markus Sesselmann

---



it's **CREATIVE SCHOOL.**



26

D

kariert  
mit Rand

PPAZ, Verusch Rad

Markus Gerselmann

Achim Guckenberger

Gruppe 17

[www.PaperZone.de](http://www.PaperZone.de)

DIN A4, 80g Papier aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff, 32 Blatt

# VERSUCH: ZÄHLSTATISTIK UND $\beta$ -SPEKTRUM

## 1. Allgemeines

- Teilnehmer: Markus Gersmann, Achim Guckenberg
- Datum: 9.12.10
- Titel des Versuchs: Versuch Rad
- Versuchsort: 2. von der Tür
- Gruppennummer: 17
- Betreuer: Dr. Wolfgang Schöpp

## 2. Einleitung und Ziel

Die Nutzung von Kernenergie war, ist und wird in Zukunft aufgrund der Gefahren der radioaktiven Strahlung ein sehr umstrittenes Thema bleiben.

Jedoch gibt es nicht nur künstliche Zerfallsspirale, wie in Kernkraftwerken, sondern auch in der Natur vorkommende Strahlungsquellen, wie z.B. Strahlung aus dem Weltall bzw. terrestrische Strahlung der Erdkruste.

Um aber zu verstehen, wie Kernenergie erzeugt wird oder wie man mit den Gefahren der dabei resultierenden Strahlung umzugehen ist, ist es unerlässlich, sich mit dem radioaktiven Zerfall auseinander zu setzen.

Im Folgenden werden die statistischen Verteilungen untersucht, die den radioaktiven Zerfall beschreiben, und überprüft, ob diese bei einem Radium-Präparat zutreffen. Weiterhin soll der Umgang mit dem Geiger-Müller-Zählrohr erlernt werden, um radioaktive Strahlung nachzuweisen, und das Energiespektrum der beim  $\beta$ -Zerfall emittierten schnellen Elektronen beobachtet werden. Hierzu ist es auch nötig und wichtig, sich mit dem Strahlenschutz auseinander zu setzen und anwenden zu können. ☺

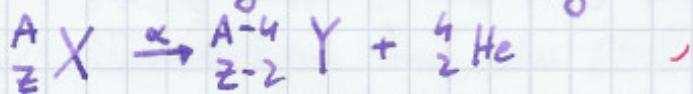
### 3. Fragen zur Vorbereitung

#### Aufgabe 1

Die drei wichtigsten und in der Natur am häufigsten vorkommenden Zerfallarten sind der  $\alpha$ -Zerfall, der  $\beta$ -Zerfall und der  $\gamma$ -Zerfall.

Bei der  $\alpha$ -Strahlung liegt der Fall vor, dass ein schwerer Atomkern oder ein Atomkern, der deutlich mehr Protonen als Neutronen besitzt, instabil ist und die Anziehung der starken Wechselwirkung überwunden werden kann, so dass ein  ${}^4\text{He}$ -Kern vom Mutterkern abgestoßen wird. Besitzt der Mutterkern X die Ordnungszahl  $Z$  und die Massenzahl  $A = Z + N$ , so ist ~~die~~ beim Tochterkern ~~des~~ Y A um 4

und  $Z$  um 2 kleiner als beim ursprünglichen Kern X. Folgende Bilanzergebnis fasst dies zusammen:



Das Element des Tochterkerns befindet sich dann 2 Stellen im Periodensystem links vom Ursprungselement. Weiterhin lässt sich feststellen, dass  $\alpha$ -Strahlung eine hohe ionisierende Wirkung aufweist, z.B. etwa einige hundert Ionen pro Zentimeter in atmosphärischer Luft. Auffällig ist auch, dass alle von einem bestimmten Kühlgut ausgerandeten  $\alpha$ -Teilchen dieselbe kinetische Energie  $E_{kin}$  besitzen. Nicht zu vergessen ist die Eigenschaft, dass  $\alpha$ -Strahlung schon mit einer "ausserst dünnen" Aluminium-Folie ( $d < 0,01\text{mm}$ ) oder einer einfachen Postkarte vollständig absorbiert wird.

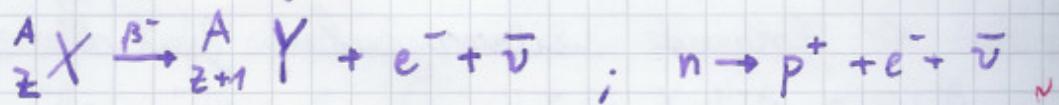
Hingegen bei  $\beta$ -Strahlung benötigt man einen dicken Absorber, wie etwa ein Aluminiumblech ( $d \geq 1\text{mm}$ ), um eine gute Abschirmung zu erhalten. Die ionisierende Wirkung beträgt hier nur einige Ionen pro Zentimeter in atmosphärischer Luft.

Der  $\beta$ -Zerfall lässt sich in  $\beta^-$ -Zerfall und  $\beta^+$ -Zerfall untergliedern:

-  $\beta^-$ -Zerfall:

Bei Anwendung von  $\beta^-$ -Strahlung entsteht ein Tochterkern, der im Periodensystem um eine Stelle nach rechts gerückt ist, da ein Neutron  $n$  in ein Proton  $p^+$ , ein Elektron  $e^-$  und ein Anti-Kettneutrino  $\bar{\nu}$  zerfällt.

Bilanzgleichungen:



-  $\beta^+$ -Zerfall:

Hier entsteht ein Tochterkern, der im Periodensystem um eine Stelle nach links gerückt ist, da ein Proton  $p^+$  in ein Neutron  $n$ , ein Positron  $e^+$  und ein Neutrino  $\nu$  umgewandelt wird.

Bilanzgleichungen:



Der Grund für das kontinuierliche Spektrum der Teilchenenergien beim  $\beta$ -Zerfall ist, dass drei Teilchen als Produkte auftreten:

Der Gesamtimpuls des Systems kann vor dem Zerfall als null angesehen werden (KOSY-Wall), so dass gilt:

$$0 = \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{\bar{\nu}} + \vec{p}_Y$$

$\vec{p}_{e^-}$ : Impuls des Elektrons

$\vec{p}_{\bar{\nu}}$ : Impuls des Antineutrinos

$\vec{p}_Y$ : Impuls des Tochterkerns

Beim Zerfall wird aufgrund des Massendefektes eine bestimmte Energie  $Q$  freigesetzt, welche sich auf die drei Teilchen verteilt:

$$Q = E_{\text{kin}e^-} + E_{\text{kin}\bar{\nu}} + E_{\text{kin}Y}$$

$E_{\text{kin}e^-}$ : kinetische Energie des Elektrons

$E_{\text{kin}\bar{\nu}}, E_{\text{kin}Y}$ : analoge Notation wie  $E_{\text{kin}e^-}$ , nur für  $\bar{\nu}$  und  $Y$

D.h. man hat zwei Gleichungen für drei Unbekannte (drei Teilchen-geschwindigkeiten) und damit 1 Freiheitsgrad,

wodurch sich eine kontinuierliche Verteilung ergeben kann.

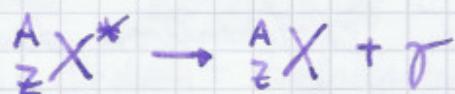
Der Tochterkern und das Elektron bereiten massive Energie, wenn die Energie des Antineutrinos null ist, und umgekehrt.

Die insgesamt zur Verfügung stehende Energie  $Q$  ergibt sich dabei, wie bereits erwähnt, aus dem Massendefekt, d.h. aus der Differenz der Summen der relativistischen Energien  $E=mc^2$  vor und nach dem Zerfall (z.B.  $\beta^-$ -Zerfall):

$$Q = (m(X) - m(Y) - m(e^-) - m(\bar{\nu}))c^2.$$

Beim  $\alpha$ -Zerfall entstehen nur 2 Produkte, womit sich 2 Gleichungen (Energie- und Impulserhaltung) für die 2 Teilchengeschwindigkeiten aufstellen lassen, weshalb sich ein diskretes Energiespektrum ergibt.

Der  $\gamma$ -Zerfall ist in dem Sinne einer Teilchenteilung kein Zerfall, sondern eine Zustandsänderung des Kerns. Folgende Gleichung beschreibt den  $\gamma$ -Zerfall:



Der angeregte Mutterkern (<sup>er</sup> entsteht häufig durch einen  $\alpha$ -Zerfall oder  $\beta^-$ -Zerfall) geht in einen niedrigeren Zustand über und sendet dabei ein hochenergetisches Photon aus, welches den  $\gamma$ -Zerfall darstellt. Im Gegensatz zu  $\alpha$ - und  $\beta^-$ -Strahlung wird  $\gamma$ -Strahlung selbst nach 100mm dicken Aluminiumblöcken nicht vollständig absorbiert, so dass ein Teil der Strahlung durch-

Sich!

dringt.

$\gamma$ -Strahlung besitzt nur eine sehr geringe ionisierende Wirkung.

Allgemein kann man sagen: Je stärker die ionisierende Wirkung der Strahlung ist, desto geringer ist die Eindringtiefe der Strahlung in Materie.

Die Photonen der  $\gamma$ -Strahlung haben einen betrachteten Zerfall eine charakteristische diskrete Energie  $h\nu$ , d.h. eine Spektrallinie im kurzweligen Bereich elektromagnetischer Strahlung.

Es gibt noch eine Eigenschaft, in der sich  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung unterscheiden.  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung kann durch ihre Ablenkung in transversalen elektrischen oder magnetischen Feldern identifiziert werden, da diese geladene Teilchen aussenden.

Die Richtung der Ablenkung hängt von der jeweiligen Strahlung ab (entgegengesetzt) und die Stärke ist abhängig von Ladung und Masse der Teilchen.

$\gamma$ -Strahlung, welcher einen Photonenstrom darstellt, wird natürlich nicht abgelenkt.  
Gibt es keine Zefallsrate??

## Aufgabe 2

Es gibt 3 natürliche Zerfallsreihen, nämlich die Thoriumreihe, die Uran - Radiumreihe und die Uran - Actiniumreihe.

Die Zerfallsreihen enden, sobald ein stabiler Kern erreicht wird. Thorium endet auf

$^{208}_{82}\text{Pb}$ , Uran - Radium endet auf  $^{206}_{82}\text{Pb}$  und

Uran - Actinium endet auf  $^{207}_{82}\text{Pb}$ .

Die vierte radioaktive Zerfallsreihe ist die  $\rightarrow ^{205}_{81}\text{Tl}$ !

Neptuniumreihe, welche auf  $^{203}_{83}\text{Bi}$  endet, wird  
in der Natur nicht beobachtet, da deren Elemente  
im Vergleich zum Alter der Erde eine geringe  
Halbwertszeit besitzen und somit alle natürlichen  
Zerfallsreihen zerfallen sind. (Alter der Erde etwa  
 $10^9$  Jahre; größte Halbwertszeit in der  
Neptuniumreihe, nämlich von Np, beträgt  
etwa  $10^6$  Jahre.)

Cupe kennt nun  
sie dann??

Die Massenzahlen A der Radionuklide aus den Zerfalls-  
reihen gehorchen folgenden Gesetzen:

Uran - Radium - Reihe :  $A = 4n + 2$  ,  $n \in \mathbb{N}$

Uran - Actinium - Reihe :  $A = 4n + 3$  ,  $n \in \mathbb{N}$

Thoriumreihe :  $A = 4n$  ,  $n \in \mathbb{N}$

Neptuniumreihe :  $A = 4n + 1$  ,  $n \in \mathbb{N}$

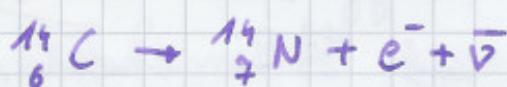
Das in diesem Versuch verwendete Präparat  
ist das Isotop  $^{226}_{88}\text{Ra}$  und gehört damit der  
Uran - Radium - Zerfallsreihe an.

### Aufgabe 3

Die  $^{14}\text{C}$ -Methode (Radiokarbonmethode) eignet  
sich für die <sup>Bestimmung</sup> des Alters von abgestorbenen, organischen  
Stoffen, wenn deren Alter zwischen 300 und 50.000  
Jahren liegt.

Hierbei wird ausgenutzt, dass durch körnische

Strahlung in der Atmosphäre  $^{14}_6\text{C}$  entsteht, welche ein  $\beta^-$ -Strahler mit einer Halbwertszeit  $T_{1/2} = 5730 \text{ a}$  ist:



Lebende Organismen lagern  $^{14}_6\text{C}$  ein, so dass die Konzentration im Organismus und in der Atmosphäre identisch ist. Sterben die Organismen, wird der Einlagerungsprozess gestoppt, wodurch deren Aktivität mit der Zeit abnimmt. Wird nun die Aktivität  $A(t)$  ( $t$ : Zeit des Abtodes bis zur Messung) bestimmt, so kann  $t$  mit Hilfe der Halbwertszeit wie folgt berechnet werden:

$$N(t) = \frac{A(t)}{\lambda} = \frac{A(0)}{\ln 2} \cdot e^{-\lambda t}$$

$N(t)$ : Anzahl der noch nicht zerfallenen  $^{14}_6\text{C}$ -Atome

$N(0)$  kann aus der Masse des Kohlenstoffs in der Probe und dem Verhältnis der Konzentrationen von  $^{14}_6\text{C}$  zu  $^{12}_6\text{C}$  in der Atmosphäre, welche in etwa  $10^{-12}$  beträgt, abgeschätzt werden.

Nach dem Zerfallsge setz gilt:

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t} \quad \text{mit } \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Und somit:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \left( \frac{N(0)}{N(t)} \right)$$

## Aufgabe 4

• Bernoulli - Verteilung:

$$W_B(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x} = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

- Erwartungswert  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{x=0}^N x W_B(x) = \sum_{x=1}^N x \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} + 0 = \\ &= \sum_{x=1}^N x \cdot \frac{N(N-1) \cdots (N-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{N-x} = \sum_{x=1}^N N \cdot \frac{(N-1) \cdots ((N-x)-(x-1)+1)}{(x-1)!} p^x (1-p)^{N-x} = \\ &= N \sum_{x=1}^N \binom{N-1}{x-1} p^x (1-p)^{N-x} = N p \sum_{x=0}^N \binom{N-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{N-1-(x-1)} = \\ &\stackrel{x-1=k}{=} N p \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} = \\ &\stackrel{\text{Binomischer Satz}}{=} N p (p + (1-p))^{N-1} = N p \cdot 1^{N-1} = \underline{\underline{Np}} \end{aligned}$$

- Standardabweichung  $\sigma$ :

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^N (x-\bar{x})^2 W_B(x) = \overline{(x^2)} - \bar{x}^2$$

Berechne  $\overline{(x^2)}$ :

$$\begin{aligned} \overline{(x^2)} &= \sum_{x=0}^N x^2 W_B(x) = \sum_{x=1}^N x^2 \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} = \\ &\stackrel{\text{s.d.}}{=} N \sum_{x=1}^N x \binom{N-1}{x-1} p^x (1-p)^{N-x} = \\ &= N \left( \sum_{x=1}^N x \binom{N-1}{x-1} p^x (1-p)^{N-x} + \sum_{x=1}^N \binom{N-1}{x-1} p^x (1-p)^{N-x} - \sum_{x=1}^N \binom{N-1}{x-1} p^x (1-p)^{N-x} \right) = \\ &= N \left[ \sum_{x=1}^N (x-1) \binom{N-1}{x-1} p^x (1-p)^{N-x} + \sum_{x=1}^N \binom{N-1}{x-1} p^x (1-p)^{N-x} \right] = \\ &= N \left[ \sum_{x=2}^N (x-1) \frac{N-2}{x-1} \binom{N-2}{x-2} p^x (1-p)^{N-x} + p \sum_{x=1}^N \binom{N-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{N-1-(x-1)} \right] = \\ &= N \left[ (N-1) p^2 \sum_{x=2}^N \binom{N-2}{x-2} p^{x-2} (1-p)^{N-2-(x-2)} + p \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= N \left[ (N-1)p^2 \sum_{i=0}^{N-2} \binom{N-2}{i} p^i (1-p)^{N-2-i} + p \cdot (p + (1-p))^{N-1} \right] = \\
 &= N \left[ (N-1)p^2 (p + (1-p))^{N-2} + p \cdot 1 \right] = N \left[ (N-1)p^2 + p \right] \\
 &= Np \left[ (N-1)p + 1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sigma^2 &= Np \left[ (N-1)p + 1 \right] - (Np)^2 = Np \left[ (N-1)p + 1 - Np \right] = \\
 &= Np (1-p)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{Np(1-p)}$$

### • Poisson - Verteilung

$$W_p(x) = \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np}$$

- Erwartungswert  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np} = Np e^{-Np} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{N^{x-1} p^{x-1}}{x!} = \\
 &= Np e^{-Np} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{N^{x-1} p^{x-1}}{(x-1)!} = Np e^{-Np} e^{Np} = \underline{Np}
 \end{aligned}$$

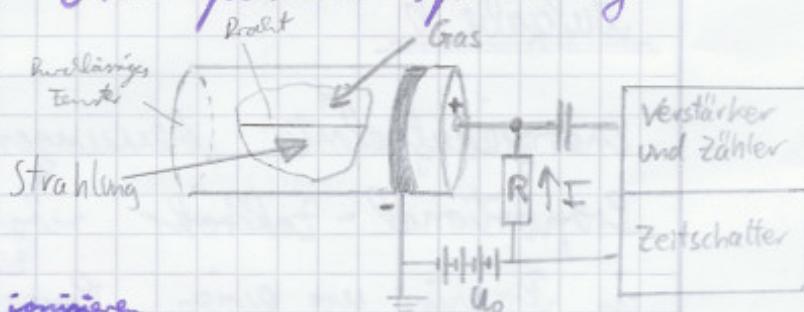
- Standardabweichung  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \sum_{x=0}^{\infty} (x - \bar{x})^2 W_p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (x - Np)^2 \cdot \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np} = \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} (x^2 - 2xNp + N^2 p^2) \cdot \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np} = \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} \left( x^2 \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np} - 2xNp \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np} + N^2 p^2 \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np} \right) = \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} (x(x-1) + x) \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np} - 2N^2 p^2 + N^2 p^2 = \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} (x(x-1) \frac{N^x p^x}{x!} e^{-Np} + Np - N^2 p^2) = \\
 &= Np \sum_{x=2}^N \frac{N^{x-2} p^{x-2}}{(x-2)!} e^{-Np} + Np - N^2 p^2 = Np
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{N_p}$$

## Aufgabe 5

Das Geiger-Müller-Zählrohr basiert auf der ionisierenden Wirkung radioaktiver Strahlung.  
Das Zählrohr besteht aus einem mit Gas gefüllten zylindrischen Rohr, in dem axial ein dünner Draht aufgezogen ist. An diesem Draht wird über einen hochohmigen Widerstand eine positive Spannung  $U$  ( $\approx 500$  V) angelegt.



Gelingt nun ein  $\alpha$ -,  $\beta$ - oder auch

Gamma-Teilchen in das Rohr, so ionisieren

diese ein Gasatom. Das positive Ion bewegt sich nun aufgrund des angelegten elektr. Feldes zur Wand (und zwar im Vergleich zum Elektron langsam, da die Masse und damit deren Trägheit größer ist), während das Elektron schnell beschleunigt und Richtung Draht gerissen wird.  
Auf dem Weg dorthin trifft es auf andere Gasatome und kann diese ebenfalls ionisieren, da das Elektron aufgrund des lokalen elektr. Feldes, (w.a. in Nähe des Draltes) schnell die hierfür nötige Energie erlangt.

Glücklos paartet mit den von ionisierten Atomen und den Elektronen, wodurch eine ganze Elektronenlawine und damit ein messbarer Spannungsstoß entsteht.

Durch Zählen dieser Spannungsstöße erhält man also die Zahl der in das Rohr eingeschossenen  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Teilchen, welche proportional zur Aktivität der Probe ist.

Weitere Informationen, wie etwa die Zerfallsrart, erhält man jedoch nicht.

Wichtig ist noch, dass die angelegte Spannung so groß ist, dass mehr. von der Energie der einfallenden Strahlung nicht der gleiche Spannungsstoß verzeichnet wird („Göttingungsfeind“).

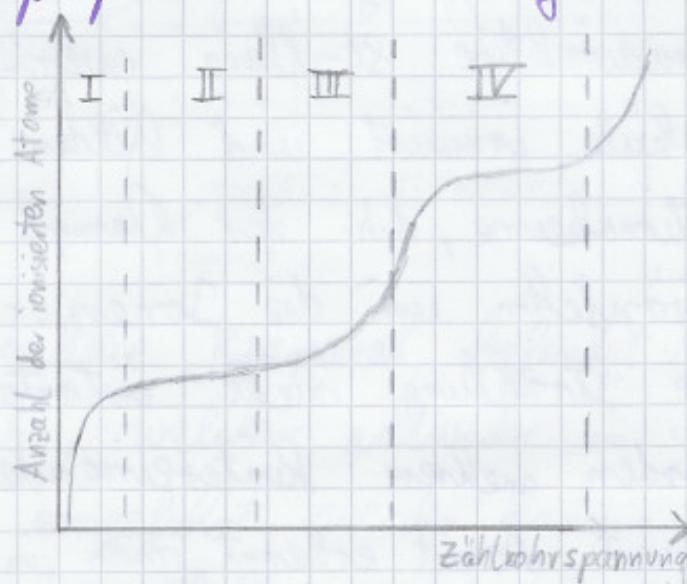
Der hochohmige Widerstand dient dazu, die Gasentladung zu unterbrechen, dann fließt aufgrund der Gasentladung ein Strom  $I$ , so fällt die angelegte Spannung nicht mehr ausschließlich am Zählrohr, sondern auch am Widerstand ab, wonit das elektr. Feld abgebaut wird und die Gasentladung erlischt.

### Aufgabe 6

Energieaufgelöste Messungen sind mit dem Proportional-Zählrohr möglich. Es handelt sich im Prinzip um einen Geiger-Müller-Zählrohr, das mit einer geringeren Spannung und damit im Proportionalitätsbereich betrieben wird. D.h. die Anzahl der ionisierenden Stöße hängt von der Energie der einfallenden Strahlung ab, und damit auch der gemessene Spannungsstoß. Damit eignet sich dieses Zählrohr vor allem zur Detektion von hochenergetischer Strahlung, da niedrigenergetische Strahlung nur eine geringe Spannung erzeugt, im Gegensatz zum Geiger-Müller-Zählrohr, welches eher für niedrig-energetische Strahlung geeignet ist.

Die Ionisationskammer ist im Großen und Ganzen ein Geiger-Müller-Zählrohr, welches mit geringerer Spannung als beim Proportional-

- Zählrohr betrieben wird, aber über dem Rekombinationsbereich. D.h. die Elektronen werden so beschleunigt, dass sie nicht wieder rekombinieren, aber auch keine anderen Strome ionisieren können. Der gemessene Strom, welcher im Rekombinationsbereich liegt, ist proportional zur Energie der einfallenden Strahlung.



I: Rekombinationsbereich

II: Betriebsbereich der Ionisationskammer

III: Betriebsbereich des Proportional-Zählrohrs

IV: Betriebsbereich des Geiger-Müller-Zählrohrs

Weitere Nachweismethoden von radioaktiver Strahlung:

- Halbleiterdetektor: Durch radioaktive Strahlung können Elektronen vom Valenzband ins Leitungsband gehoben werden, wodurch ein messbarer Stromfluss erzeugt wird.
- Scintillationszähler: Radioaktive Strahlung gelangt in eine dunkle Kammer, in der aufgrund der ionisierenden Wirkung ein schwacher Lichtblitz ausgelöst wird. Diese Photonen treffen auf eine Photoplatte und lösen dort aufgrund des Photoeffektes Elektronen aus, welche

im Folgenden durch einen sogenannten Photomultiplier vervielfacht werden, und dadurch ein Strom gemessen wird.

- Nebelkammer: In einer Kammer befindet sich ein Gemisch aus Luft und einem übersättigten Alkohol-Wasser dampf-Gemisch. Durch die einfallende radioaktive Strahlung werden einzelne Luftmoleküle ionisiert und bilden somit sog. Kondensationskeime, d.h. der Dampf bildet kleine Tropfen um die Ionen. Da die radioaktive Strahlung nicht instantan absorbiert wird, werden mehrere hintereinander liegende Atome ionisiert. Damit erkennt man in der Nebelkammer weiße Streifen.  $\alpha$ -Strahlung erzeugt dabei dicke und kurze Streifen,  $\beta$ -Strahlung lange und dünne Streifen.

SDÖK

### Aufgabe 7

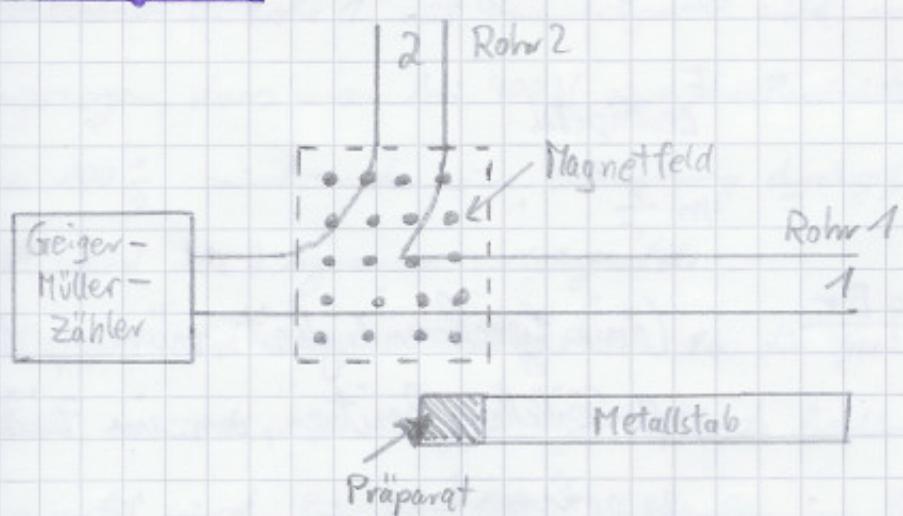
Das Geiger-Müller-Zählrohr befindet sich in einem metallischen Rohr. Hierdurch werden vor allem die  $\alpha$ -Teilchen der Untergrundstrahlung abgeschirmt, d.h. im Metall absorbiert. Die Untergrundmessung ist also nötig, um die  $\beta$ - und  $\gamma$ -Untergrundstrahlung aus den mit dem Präparat gemessenen  $\beta$ -Spektren herauszuteilen zu können.

gut und gut durchdacht!

4/4

## 4. Versuchsaufbau und Messtechniken

### 4.1 Aufbau



Das radioaktive Präparat befindet sich auf einen Metallstab, welcher entweder in Rohr 1 oder Rohr 2 eingeführt werden kann. Als Präparat wird hierbei  $^{226}\text{Ra}$  verwendet, welches eine Halbwertszeit von 1600 Jahren besitzt und unter Aussendung von  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Strahlung in  $^{218}\text{Po}$  übergeht. Dieses geht nach mehreren Zerfallsschritten unter Aussendung von  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen in das stabile  $^{206}\text{Pb}$  über.

Bei dem Versuch wird <sup>1</sup> hauptsächlich  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung gemessen, da  $\alpha$ -Strahlung nach einigen Zentimetern in Luft absorbiert wird.

Die Aktivität A des Radiumpräparats beträgt

$$A = 3 \cdot 10^5 \text{ Bq.} \quad (\text{Magnetfeld deaktiviert})$$

Rohr 1 dient zur [Messung der Aktivität]. Rohr 2 wird zur Messung der Geschwindigkeitsverteilung der  $\beta$ -Teilchen verwendet, indem diese durch ein homogenes Magnetfeld  $B$  geschleift und somit abgelenkt werden.

Nur  $\beta$ -Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$  gelangen in das Zählrohr, denn für die Ablenkung im Magnetfeld gilt:

$$F_{\text{Lorentz}} = F_{\text{Zentripetal}}$$
$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \frac{qBr}{m}$$

(diese Geschwindigkeit müssen die  $\beta$ -Teilchen besitzen, um ins Zählrohr zu gelangen).

Hierbei ist:

$$- r = 3,5 \text{ cm}$$

$$- q = e \text{ (Elementarladung)}$$

$$- m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ mit } m_0: \text{Ruhemasse eines Elektrons}$$

-  $B = I \cdot 0,170 \frac{T}{A}$  Hierbei wird das Magnetfeld durch zwei auf einem Eisenkern sitzende und einem variabel einstellbaren Strom  $I$  durchflossene Spulen erzeugt

Der Geiger-Müller-Zähler ist an einem Steuergesät ("LD-Digitalräbler 57548") angeschlossen, welches wiederum an einem Computer angeschlossen ist.

Bei diesem Versuch wird immer das Potentiometer "Rate" mit der Anzeige "R" in  $1/\text{s}$  benutzt. Hierbei ist das Zählrohr am Eingang "A" angeschlossen und wird durch Betätigen der Taste "A" ausgewählt wird. Die Zählrohrspannung wird durch den Drehschalter über "A" eingestellt.

## 4.2 Durchführung

### 4.2.1 Zählrohcharakteristik

- Der Metallstab in Rohr 1 mit dem Präparat wird so weit herausgezogen, dass man bei 400V eine durchschnittliche Zählrate von ca.  $100 \frac{1}{s}$  misst, in dem eine Testmessung durchgeführt wird. Danach wird das Diagramm vorbereitet.
- Anschließend wird bei einer Zählzeit von 1s die Spannung mehrfach variiert und die jeweilige Zählrate bestimmt, in dem 10s gewartet wird, bis das blaue Kreuzchen im Programm erscheint ( $\hat{=} 10$  Messungen).

*Messdaten?*

### 4.2.2 Statistische Verteilung bei kleinen Zählraten

- Die Spannung des Zählrohrs wird in etwa auf die Mitte des in den vorherigen Versuch erkanntlich gewordenen Plateaus des Zählrate-Spannungs-Diagramms eingestellt.
- Der Metallstab in Rohr 1 mit dem Präparat wird so weit herausgezogen bis eine mittlere Zählrate  $\bar{x}$  von etwa  $2\frac{1}{2}$  bis  $3\frac{1}{2}$  (bei 1s Messzeit) erreicht wird.
- Es wird für mind.  $N=500$  Messungen die Häufigkeiten  $n(x)$  der versch. Zählraten bei 1s Messzeit aufgenommen. Die Einstellungen des Histogramms im Programm werden so angepasst, dass dieses möglichst gut aufgelöst erscheint.

- Nach Beendigung des Prozesses wird das erhaltene Diagramm ausgedruckt.

#### 4.2.3 Statistische Verteilung bei großen Zählraten

- Programm einstellung wie unter 4.2.2 (S. 17) beschrieben.
- "Einstellung" Tastatustab wie unter 4.2.2 (S. 17) beschrieben, nur dass "eine mittlere Zählrate  $\times$  zw.  $150 \frac{1}{2}$  und  $200 \frac{1}{2}$  erreicht werden soll.
- Es wird für mind.  $N=1000$  Messungen die Häufigkeit  $n(x)$  der versch. Zählraten bei 1s Periode angenommen. Die Einstellungen des Programms werden so angepasst, dass dieser möglichst gut aufgelöst erscheint.
- Nach Beendigung: Ausdruck des Diagramms.

#### 4.2.4 Das $\beta$ -Spektrum

- Bei Metallstab mit Präparat wird aus Rohr 1 aufgezählt und in Rohr 2 eingebracht, wobei ein <sup>stet.</sup> möglichst großer Abstand zum Präparat gehalten wird.  
Der Stab wird so weit es geht hineingeschoben.
- Die Zählzeit beträgt stets 10s.  
Die Spannung wird wie unter 4.2.2 (S.17) beschrieben eingestellt.
- Das Magnetfeld ist zunächst deaktiviert ( $I=0\text{A}$ ). Es werden 20 Untergundmessungen durchgeführt.
- Schrittwise wird der Strom erhöht (Schrittwerte:  $0,05\text{A}$ ) und jeweils die Zählrate (bei 10s Zählzeit) für mind. 10 Nenngänge aufgenommen.  
Der Strom wird dabei über das Multimeter bestimmt.

#### 4.2.5 Fehler

- Ampermeter (Multimeter):

Berrfehler:  $\pm (1\% \text{ v. Messwert} + 1 \text{ Digit})$  (Gleichstrom)

Ablaufehler:  $0,0005 \text{ A}$  (Hälfte der kleinsten Einheit)

- Spannungseinstellung Steuergüt:

Ablaufehler:  $\pm 0,5 \text{ V}$

✓

## 5. Protokoll

### 5.1 Zählrohrzähler

- Testmessung:  $U = 400V$

Zählrate  $A \approx 30\frac{1}{3}$  bis  $120\frac{1}{3}$

Jeweils 15 Messungen pro Spannungswert durchgeführt.

Das Plateau beginnt bei ca.  $350V$  und die Messung hört bei  $640V$  auf und ist im Plateaubereich. Die Mitte des Plateaus wird auf  $450V$  geschätzt.

Die Werte werden digital gespeichert und werden bei der Auswertung bei 6.1 S. 2<sup>9</sup> ausgedruckt

Datenrate?  
Wo gespeichert?

## 5.2 Statistische Verteilung bei kleinen Zähldaten

- Benötigte Spannung: 448 V
- Schwankung der Rate zwischen  $10\frac{1}{3}$  und  $4\frac{1}{3}$
- Anzahl der Messungen  $N = 600$
- Beobachtungen zur Entstehung:  
Die häufigsten Zuwächse liegen bei  $1\frac{1}{3}$  und  $2\frac{1}{3}$  und nur selten finden Zuwächse bei höheren Raten statt.
- Plot Optionen:
  - x-Achse: 0 - 9
  - y-Achse: 0 - 190
  - Intervallweite: 1
- Die gesamte Messung wurde 2 mal wiederholt, da kein 1. mal wargen wurde, das Diagramm ausdrückt.  
Es liegen folglich 2 mal 600 Ressente vor, die einfach addiert werden können.

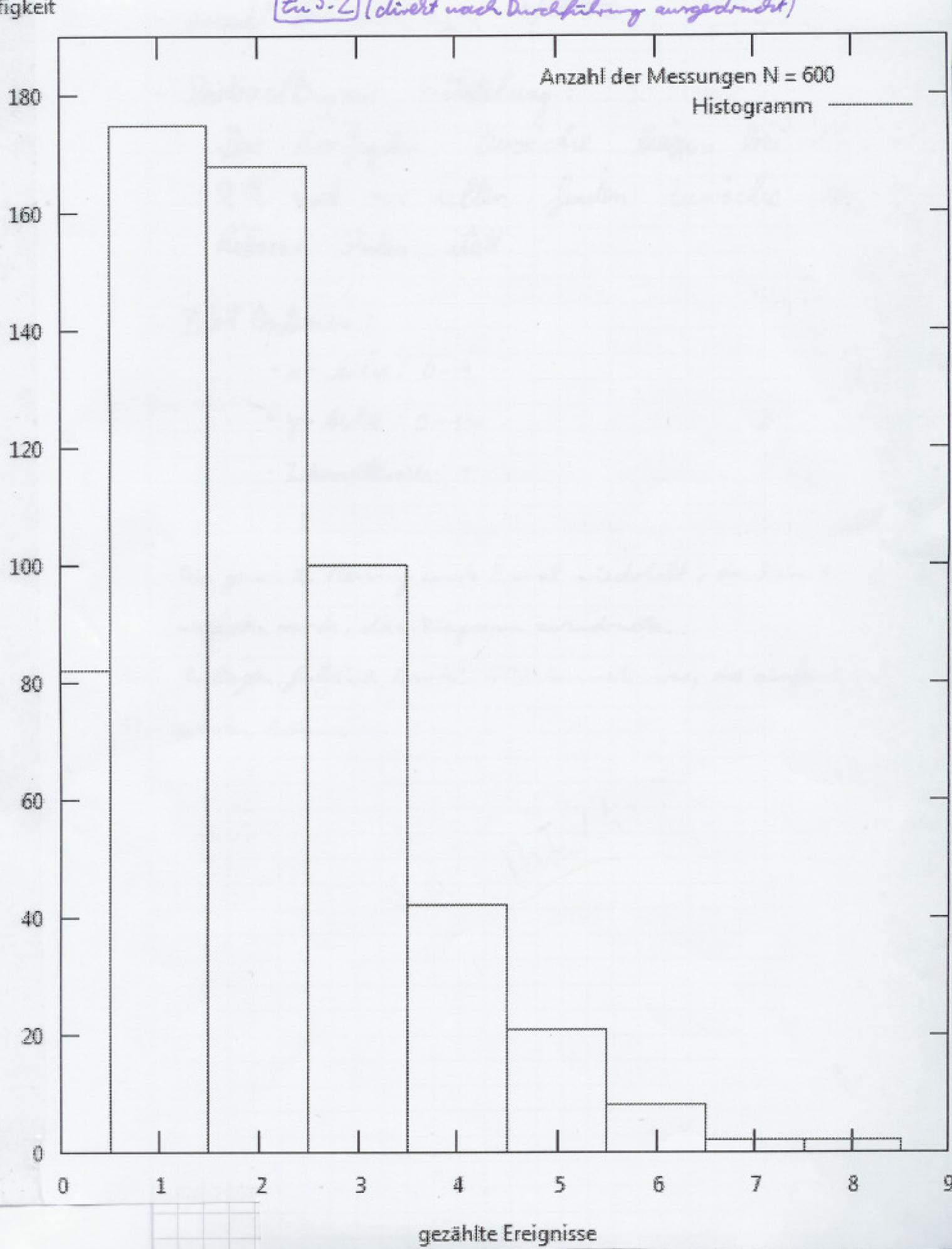
S.O. Daten ??

Häufigkeit

Zu 5.2 (diviert nach Durchführung ausgedruckt)

Anzahl der Messungen N = 600

Histogramm

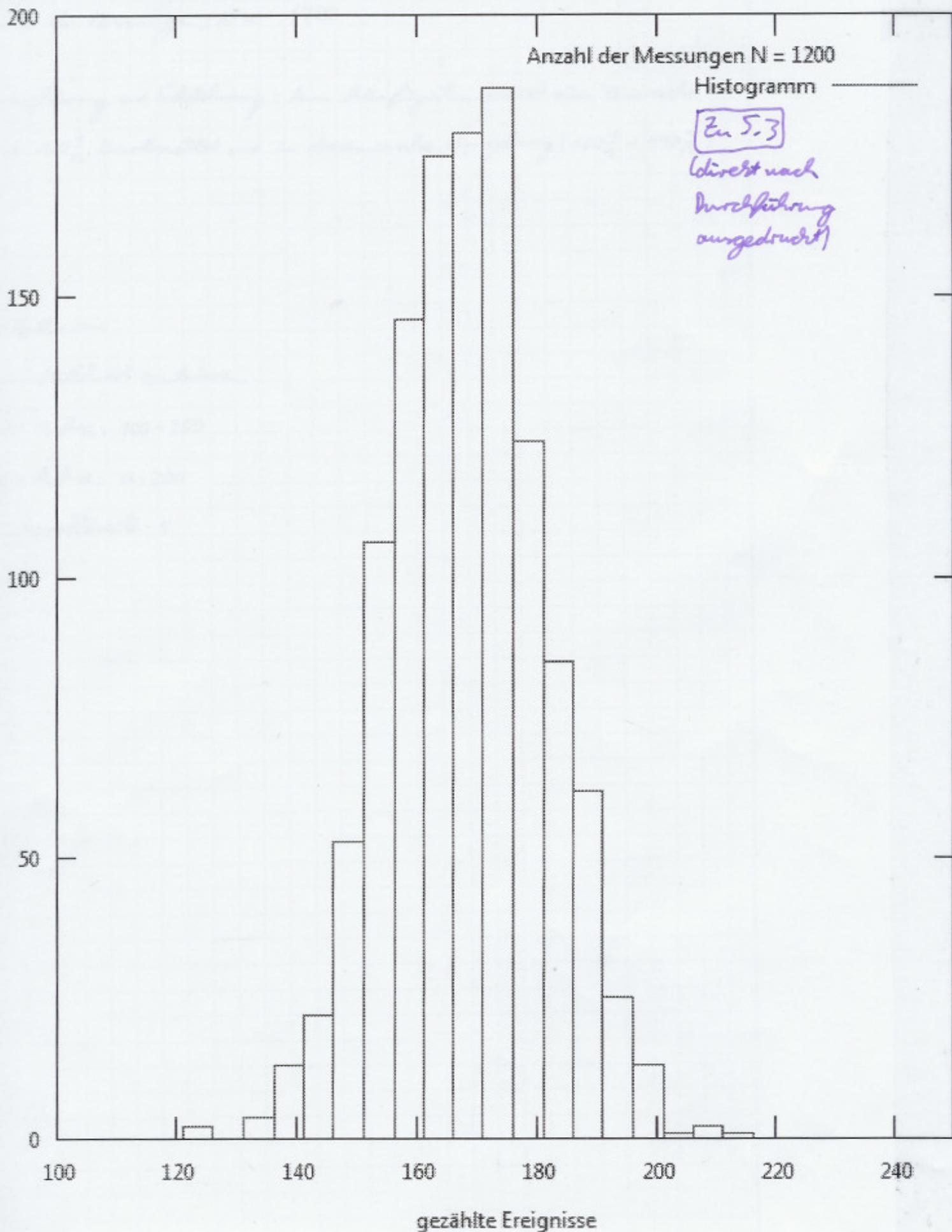


### 5.3 Statistische Verteilung bei großen Zählraten

- Beobachtete Spannweite: 448V
- Schwankung der Rate zw. ca.  $140\frac{1}{3}$  und  $200\frac{1}{3}$
- Anzahl der Vermessungen:  $N = 1700$
- Beobachtung zur Entstehung: Am häufigsten wird ein Einwachs bei ca.  $180\frac{1}{3}$  beobachtet und in deren Nähe Umgebung ( $160\frac{1}{3} - 190\frac{1}{3}$ )
- Plot-Optionen:
  - um Mittelpunkt zentriert
  - x-Achse: 100 - 250
  - y-Achse: 0 - 200
  - Intervallbreite: 5

100 0 L.D.tz ~ ca. 140° und 200°

Häufigkeit



## 5.4 Das $\beta$ -Spektrum

- Benötigte Spannung: 448 V
- Präparat wurde in Rohr 2 eingeführt

### 5.4.1 Untergrundmessung

Nr.	Rate in $\frac{1}{100}$
1	242
2	238
3	257
4	272
5	258
6	276
7	279
8	233
9	262
10	281
11	254
12	287
13	239
14	242
15	253
16	286
17	265
18	273
19	268
20	255

## 5.4.2 Messungen mit Magnetfeld

0,050A:

Nr. Plate in %

1	356
2	344
3	336
4	345
5	358
6	376
7	357
8	331
9	332
10	354
11	340
12	313

0,100A:

Nr. Plate in %

1	461
2	460
3	502
4	444
5	481
6	453
7	473
8	431
9	431
10	475
11	425
12	480

0,19A:

Nr. Plate in %

1	661
2	662
3	652
4	707
5	633
6	682
7	651
8	656
9	685
10	625
11	618
12	605

0,200 A:

Nr. Date in %os

- 1 864
- 2 964
- 3 919
- 4 939
- 5 943
- 6 892
- 7 918
- 8 902
- 9 909
- 10 886
- 11 953
- 12 895

0,243 A:

Nr. Date in %os

- 1 1277
- 2 1316
- 3 1255
- 4 1230
- 5 1289
- 6 1278
- 7 1304
- 8 1335
- 9 1261
- 10 1289
- 11 1260
- 12 1336

0,300 A:

Nr. Date in %os

- 1 1651
- 2 1595
- 3 1677
- 4 1628
- 5 1633
- 6 1624
- 7 1624
- 8 1635
- 9 1585
- 10 1624
- 11 1599
- 12 1708

0,343 A:

Nr. Date in %os

- 1 1854
- 2 1824
- 3 1806
- 4 1754
- 5 1768
- 6 1859
- 7 1848
- 8 1850
- 9 1821
- 10 1850
- 11 1817
- 12 1831

0,393 A:

Nr. Date in %os

- 1 1333
- 2 1898
- 3 1958
- 4 1940
- 5 1911
- 6 1914
- 7 1832
- 8 1856
- 9 1973
- 10 1919
- 11 1980
- 12 1881

0,443 A:

Nr. Date in %os

- 1 1831
- 2 1888
- 3 1840
- 4 1849
- 5 1981
- 6 1814
- 7 1855
- 8 1933
- 9 1931
- 10 1885
- 11 1869
- 12 1811

0,500 A:

Nr.	Dato in $\frac{1}{100}$
1	1731
2	1725
3	1659
4	1710
5	1708
6	1642
7	1743
8	1751
9	1744
10	1712
11	1754
12	1743

0,550 A:

Nr.	Dato in $\frac{1}{100}$
1	1564
2	1640
3	1605
4	1583
5	1526
6	1617
7	1667
8	1590
9	1603
10	1600
11	1567
12	1678

0,600 A:

Nr.	Dato in $\frac{1}{100}$
1	1423
2	1452
3	1460
4	1455
5	1387
6	1429
7	1427
8	1416
9	1417
10	1431
11	1448
12	1446

0,648 A:

Nr.	Dato in $\frac{1}{100}$
1	1286
2	1281
3	1283
4	1315
5	1260
6	1313
7	1294
8	1302
9	1270
10	1312
11	1309
12	1324

0,693 A:

Nr.	Dato in $\frac{1}{100}$
1	1136
2	1174
3	1142
4	1151
5	1137
6	1135
7	1216
8	1159
9	1195
10	1170
11	1134
12	1153

0,750 A:

Nr.	Dato in $\frac{1}{100}$
1	968
2	938
3	987
4	1000
5	9023
6	978
7	990
8	937
9	988
10	957
11	936
12	1046

Die Praktikate haben ein färbungsbasiertes Muster, welches immer in Rautenmuster ist.

0,798 A:

Nr. Date in %s

- 1 901
- 2 903
- 3 909
- 4 900
- 5 892
- 6 887
- 7 936
- 8 879
- 9 943
- 10 937
- 11 916
- 12 960

0,849 A:

Nr. Date in %s

- 1 978
- 2 966
- 3 810
- 4 815
- 5 748
- 6 804
- 7 773
- 8 824
- 9 854
- 10 783
- 11 823
- 12 856

0,898 A:

Nr. Date in %s

- 1 733
- 2 728
- 3 741
- 4 726
- 5 728
- 6 703
- 7 758
- 8 663
- 9 655
- 10 721
- 11 726
- 12 721

0,948 A:

Nr. Date in %s

- 1 680
- 2 693
- 3 682
- 4 695
- 5 686
- 6 672
- 7 715
- 8 663
- 9 676
- 10 626
- 11 693
- 12 667

1,000 A:

Nr. Date in %s

- 1 637
- 2 630
- 3 535
- 4 576
- 5 602
- 6 590
- 7 626
- 8 597
- 9 592
- 10 593
- 11 574
- 12 617

1,098 A:

Nr. Date in %s

- 1 532
- 2 575
- 3 535
- 4 583
- 5 513
- 6 513
- 7 588
- 8 555
- 9 558
- 10 595
- 11 509
- 12 557

2/3

## 6. Auswertung

### 6.1 Zählrohrcharakteristik

Berechnung der Werte über Statistik, da mehr als 6 Messwerte jeweils vorhanden sind:

- Mittelwert  $\bar{x}$  (bzw.  $E(X)$ ):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

- Varianz  $\sigma^2$  einer Messreihe:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

Setze:  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  ! Warum?

- Mittlerer Fehler der Einzelmessung  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

- Standardabweichung des Mittelwertes  $s$ :

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Da wir keinen Tertehler vorhanden haben, ist die Standardabweichung  $s$  der Fehler des Mittelwertes.

- Fehler der Spannung:

Hier nur Ablesefehler  $\pm 1$  digit

Die Größenordnung des Fehlerintervalls entspricht etwa der Größe der Markierungen im Diagramm, weshalb der Fehler der Spannung nicht eingerechnet wurde.

Das Aussondern von Messwerten nach dem Chauvenetischen Kriterium ist hier eher wenig sinnvoll, da das Kriterium dazu dient, Werte aus der Messreihe zu ermitteln, die aufgrund von groben Fehlern aus den Rahmen der Messreihe

fallen, und hier die Wahrscheinlichkeit eher hoch ist, dass keine grobe Fehler entstanden sind, da die Messwerte digital aufgenommen wurden und somit die Experimentatoren kaum Einfluss auf die Werte hatten.

jetzt!

Das Diagramm zeigt eine stark abweichende Kurve von der erwarteten (vgl. S. 13): So ist der Rekombinationsbereich nicht zu erkennen und die Zärtlrate ist auch im Ionisationskammerebereich konstant 0. Letzteres lässt sich der Proportionalitätsbereich nur erahnen, da die Kurve bei ca.  $> 300\text{V}$  nach ansteigt. D.h. der Vernehranfang ist für diese Bereiche nicht empfindlich genug (im Ion. Kammerebereich würde man z.B. nur einen Strom in der Größenordnung von  $\mu\text{A}$  messen).

Das Platen des Geiger-Züll-Zählrohrbereichs ist wie erwartet gut zu erkennen (erwartet, da es sich schließlich um ein Geiger-Züll-Zählrohr handelt) und größtenteils weichen die Messwerte von der Ausgleichsgerade nicht signifikant ab.

Höhere Spannungen als  $640\text{V}$  konnten nicht eingestellt werden.

v

Spannung in V	0	200	252	300	324	352	376	400	428	500	548	600	640
Nr.	Rate [1/s]												
1	0	0	0	5	94	121	109	73	115	96	106	92	82
2	0	0	0	2	99	109	117	111	100	100	93	102	94
3	0	0	0	1	89	99	112	128	102	120	119	92	96
4	0	0	0	6	90	95	92	103	85	93	97	100	96
5	0	0	0	0	77	98	121	95	99	109	107	93	100
6	0	0	0	0	110	110	108	131	123	102	105	103	128
7	0	0	0	0	96	93	94	121	93	117	105	91	119
8	0	0	0	0	99	108	103	100	115	83	109	101	106
9	0	0	0	0	89	97	112	102	96	105	121	106	86
10	0	0	0	2	94	104	93	107	99	100	91	87	117
11	0	0	0	0	101	106	99	98	96	102	112	109	111
12	0	0	0	0	104	124	116	120	114	113	106	115	91
13	0	0	0	0	89	93	95	106	102	106	108	98	105
14	0	0	0	3	93	97	104	122	109	88	96	106	105
15	0	0	0	0	97								

Mittelwert [1/s]	0	0	0	1,3	94,6	103,4	105,4	108,4	103,4	102,4	105,4	99,6	102,6
Varianz $\sigma^2$ [1/s <sup>2</sup> ]	0	0	0	3,9	64,3	92,5	93,6	236,1	108,3	109,5	78,1	63,2	170,6
Mittlerer Fehler $\sigma$ [1/s]	0	0	0	2,0	8	10	10	15	10	10	9	8	13
Fehler Mittelw. $\sigma / \sqrt{n}$ [1/s]	0	0	0	0,5	2,1	2,5	2,6	4,1	2,8	2,8	2,4	2,1	3,5

Zankrate in %

## 6.2 Statistische Verteilung bei kleinen Zählraten

- Es wurden die Häufigkeiten  $n(x_i)$  der Zählrate  $x_i$  gemessen, und zwar 2 mal (gesamt  $n_1(x_i)$  bzw.  $n_2(x_i)$ ).

Somit ergibt sich die Häufigkeit zu:  $n(x_i) = n_1(x_i) + n_2(x_i)$

- Die relativen Häufigkeiten ergeben sich zu:  $H(x_i) = \frac{n(x_i)}{N}$ , wobei  $N = 1200$  die Anzahl der Messungen bezeichnet.

Dabei wird die Intervallbreite des Histogramms auf  $\Delta x = 1\frac{1}{2}$  festgelegt, da nur 8 verschiedene Zählraten ( $[0\frac{1}{2}; 8\frac{1}{2}]$ ) gemessen wurden und sonst eine größere Intervallbreite wenig Sinn machen würde.

- Aus Versuch 1aS (Seite: 1aS-1) bekannt ist die Abschätzung für

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^M x_j \cdot H(x_j) \quad (\text{Mittelwert}) \quad \text{und}$$

$$s^2 = \sum_{j=1}^M (x_j - \bar{x})^2 \cdot H(x_j) \quad (\text{Varianz}).$$

$$s = \sqrt{\bar{x}} !$$

Hierbei bezeichnet  $M = 9$  die Anzahl der  $x_i$  (d.h. die Anzahl der unterschiedlichen gemessenen Zählraten).

- Aus den Erläuterungen zur Fehlberechnung im Praktikumsleitfaden

(Seiten F-9 f.) folgt für den mittleren Fehler der Einvalenzierung  $\underline{s} = \sqrt{\bar{x}}$  ??  
und für die Standardabweichung des Mittelwerts  $s = \frac{\bar{s}}{\sqrt{M}}$ .

Da die Zählrate als frei von Restfehlern ( $s_r = 0$ ) angenommen wird,  
ist die Normwidderheit des Mittelwerts:  $u = \sqrt{s_x^2 + s^2} = s = \frac{\bar{s}}{\sqrt{M}}$ .

- Nach Skript S. Rad-2 gilt für die Poisson-Verteilung:

$$W_p(x_i) = \frac{(\bar{x}_i)^{x_i} \cdot e^{-\bar{x}_i}}{(x_i \cdot n)!} \quad (x_i \text{ sind wieder die gemessenen Zählraten}).$$

Hiermit kann die Poisson-Verteilung zum Vergleich mit eingeschätzt werden.

Ersetzt man die Fakultät  $x_i!$  durch die Gammafunktion  $\Gamma(x_i + 1)$ , so erhält man eine kontinuierliche Poisson-Verteilung, welche ebenfalls mit eingeschätzt wird, da sie „Tendenzen“ gut veranschaulicht.

- Die Rechnung ergibt:

$$\bar{x} = (1,9 \pm 0,5) \frac{1}{s}$$

$$s = \sqrt{\frac{\lambda}{M}}$$

D.h. im Schnitt werden pro 10s ca. 19 Zerfälle gemessen.

- Die mittlere Fehler der Einsetzung  $\lambda$  ergibt sich zu:

$$\lambda = 1,4 \frac{1}{s}$$

Dies wird zu Gunsten der Übersicht nicht mit ins Diagramm eingezeichnet.

- Die rel. Häufigkeiten  $H(x_i)$  werden als fehlerfrei angenommen.

- Für die Werte der Poisson-Verteilung ergibt der Fehler wie folgt:

$$s_w = \left| \frac{\partial W_p}{\partial \bar{x}} \right| = \left| \left( \frac{x_i \cdot \bar{x}^{x_i-1}}{x_i!} \cdot e^{-\bar{x}} - \frac{\bar{x}^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\bar{x}} \right) \cdot s \right| \quad \text{für } x_i \neq 0$$

falls, nicht Gernode

und  $s_w = |(-e^{-\bar{x}}) \cdot s|$  für  $x_i = 0$ , wobei zu Gunsten der Übersicht die noch nötige Multiplikation mit der Einheit Gernode nicht hingeschrieben wurde (ersetze  $x_i \rightarrow x_i \cdot s$  und  $\bar{x} \rightarrow \bar{x} \cdot s$ ).

$W_p$  und damit  $s_w$  ist eindeutig.

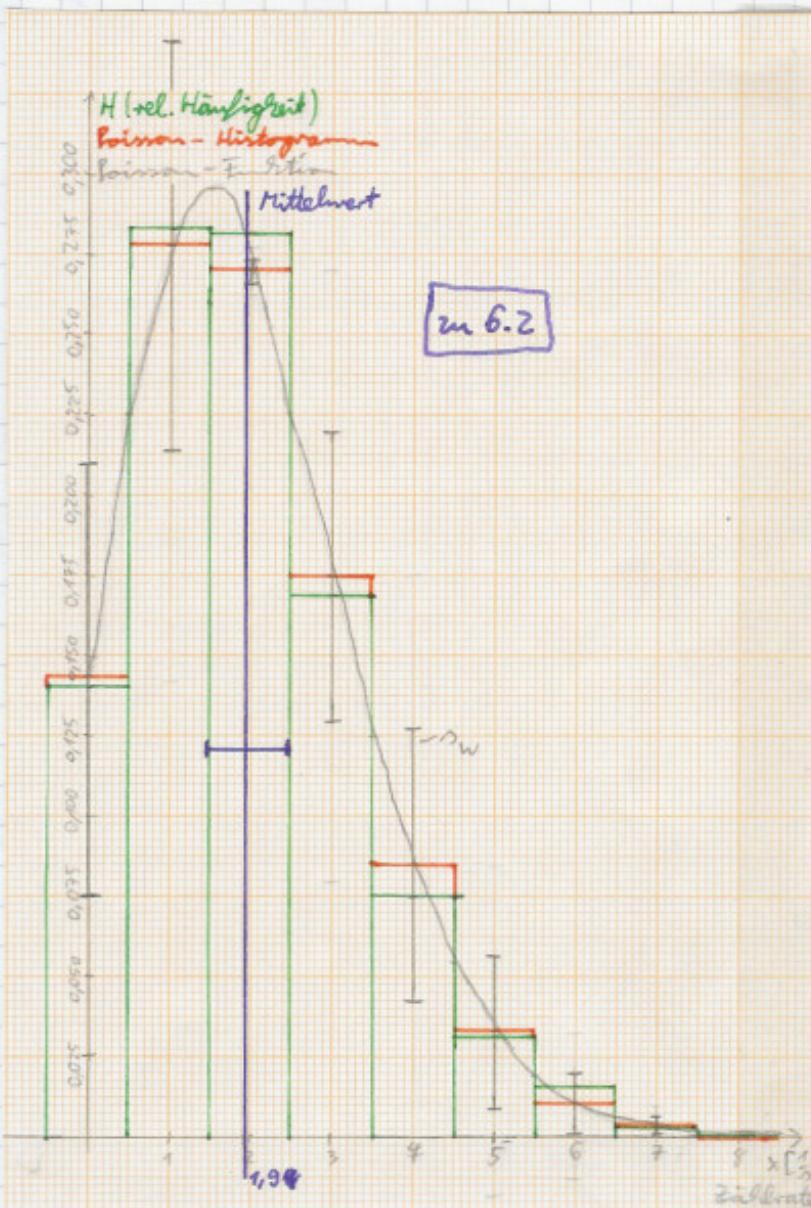
- Man erkennt, dass (insbes. im Hinblick auf 2) das Poisson-Histogramm und das Histogramm der rel. Häufigkeiten  $H$  nicht signifikant voneinander abweichen.

$\Rightarrow$  Es liegt eine Poisson-Verteilung vor.

Zählrate $x_i$ [1/s]	Häufigk. $n_1$	Häufigk. $n_2$	$n = n_1 + n_2$	$H(x_i)$	Poisson $W_P$	Fehler $s_w$
0	86	82	168	0,140	0,14	0,07
1	164	175	339	0,283	0,28	0,06
2	170	168	338	0,282	0,27	0,00
3	102	100	202	0,168	0,17	0,04
4	48	42	90	0,075	0,08	0,04
5	17	21	38	0,0317	0,033	0,024
6	11	8	19	0,0158	0,011	0,010
7	2	2	4	0,0033	0,0030	0,0036
8	0	2	2	0,0017	0,0007	0,0011

✓

Anzahl Werte N	1200
Mittelwert $\bar{x}$ [1/s]	1,9
Varianz [1/s <sup>2</sup> ]	2,0
Fehler Einzelm. $\sigma$ [1/s]	1,4
Fehler Mittelwert $s$ [1/s]	0,5



5 einreichen!

Die Fehlbatte  
wir-Pilot  
verstehe ich nicht!

## 6.3 Statistikische Verteilung bei großen Zählraten

### 6.3.1 Histogramm

- Die Anzahl der Messwerte ist  $N = 1200$
- Die Faustregel für die Breite  $\Delta x$  der Intervalle nach den Erläuterungen zur Fehlerrechnung im Skript, S. F-7 f. 1, lautet:

$$\tilde{N} = 5 \cdot \lg N \quad , \quad \Delta x \approx \frac{1}{\tilde{N}} \cdot (x_{\max} - x_{\min})$$

wobei die reine „Ausweitung“ nicht beachtet werden.

Für  $x_{\max} \approx 206 \frac{1}{2}$ ,  $x_{\min} \approx 132 \frac{1}{2}$ ,  $N' = 1200 - 3 - 2$  folgt:

$$\Delta x \approx 4,8 \frac{1}{2} \approx 5 \frac{1}{2}$$

⇒ Es wird eine Intervallbreite von  $\Delta x = 5 \frac{1}{2}$  verwendet (für das Histogramm).

- Die Histogramm-Daten stammen direkt vom Messprogramm.

### 6.3.2 Relative Häufigkeiten und deren Summe

- Die relativen Häufigkeiten  $H(x_i)$  ergeben sich zu:  $H(x_i) = \frac{n(x_i)}{N}$ , wobei  $N = 1200$  (Anzahl Messwerte) und  $n(x_i)$  die Häufigkeit der Zählrate  $x_i$  ist.  $x_i$  ist die obere Grenze des jeweiligen Zählrateintervalls.
- Die Summe  $S_i$  der relativen Häufigkeiten  $H(x_j)$  ist:

$$S_i = \sum_{j=1}^i H(x_j)$$

D.h.  $S_i$  sind alle rel. Häufigkeiten bis einschließlich  $H(x_i)$  aufsummiert.

### 6.3.3 Mittelwert und Standardabweichung der Zählerate

- Es wird nach der Annahme von Skript S. Rad. 3 vorgegangen, da die Zähleraten stets deutlich über  $20\frac{1}{2}$  liegen.
- Für den Mittelwert  $\bar{x}$  der Zähleraten gilt:  $\bar{x} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m x_k'$ . Hierbei ist:  $m = 71$  die Anzahl der gemessenen, unterschiedlichen Zähleraten.
  - $x_k'$ : die k-te gemessene Zählerate
- Beachte: Es wurde hierfür nicht die Histogramm-Daten, welche bereits in 5er Intervallen aufgenommen wurden, verwendet, sondern die einzelnen Messwerte.
- Die Standardabweichung der Einzelmessung ist geäquivalent (nach Annahme im Skript, s.o.):  $s = \sqrt{\bar{x}}$  ✓  
(auch mittlerer Fehler der Einzelmessung genannt.)
- Die Standardabweichung des Mittelwerts und damit auch deren Messunsicherheit (da Restfehler vernachlässigt, vgl. S. 31) ist:

$$s = \frac{s}{\sqrt{m}}$$

⇒ Die Rechnung liefert:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} \approx 169,18\frac{1}{2} \\ s \approx 1,544\frac{1}{2} \approx 1,5\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = (169,2 \pm 1,5)\frac{1}{2}}$$

$$\delta \approx 13,007\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\delta \approx 13\frac{1}{2}} \quad \text{J}$$

-  $\delta$  wird zu Gunsten der Übersicht nicht im Histogramm eingezeichnet.

Geineide!

Einzel-Daten			Histogramm-Daten						
Zählrate $x' [1/s]$	Häufigk.	Zählrate $x' [1/s]$	Häufigk.	Untere Interv. Grenze [1/s]	Obere Interv. Grenze $x_i [1/s]$	Häufigk. n	$H(x_i)$	$S_i$ (bis $x_i$ )	$S_i$ in % (bis $x_i$ )
125	2	170	30	122	126	2	0,0017	0,002	0,2
135	2	171	37	127	131	0	0	0,002	0,2
136	2	172	34	132	136	4	0,0033	0,005	0,5
137	1	173	45	137	141	13	0,0108	0,016	1,6
138	4	174	35	142	146	22	0,0183	0,034	3,4
139	4	175	32	147	151	53	0,044	0,078	7,8
140	2	176	41	152	156	106	0,088	0,167	16,7
141	2	177	20	157	161	146	0,122	0,288	28,8
142	2	178	32	162	166	175	0,146	0,434	43,4
143	6	179	24	167	171	179	0,149	0,583	58,3
144	3	180	23	172	176	187	0,156	0,739	73,9
145	9	181	25	177	181	124	0,103	0,843	84,3
146	2	182	18	182	186	85	0,071	0,913	91,3
147	5	183	21	187	191	62	0,052	0,965	96,5
148	10	184	18	192	196	25	0,021	0,986	98,6
149	12	185	16	197	201	13	0,0108	0,997	99,7
150	16	186	12	202	206	1	0,0008	0,998	99,8
151	10	187	22	207	211	2	0,0017	0,999	99,9
152	11	188	14	212	216	1	0,0008	1,000	100,0
153	18	189	6						
154	24	190	15						
155	31	191	5						
156	22	192	4						
157	22	193	7						
158	32	194	8						
159	29	195	2						
160	31	196	4						
161	32	197	6						
162	37	198	1						
163	37	200	3						
164	40	201	3						
165	28	202	1						
166	33	207	1						
167	36	208	1						
168	32	213	1						
169	44								

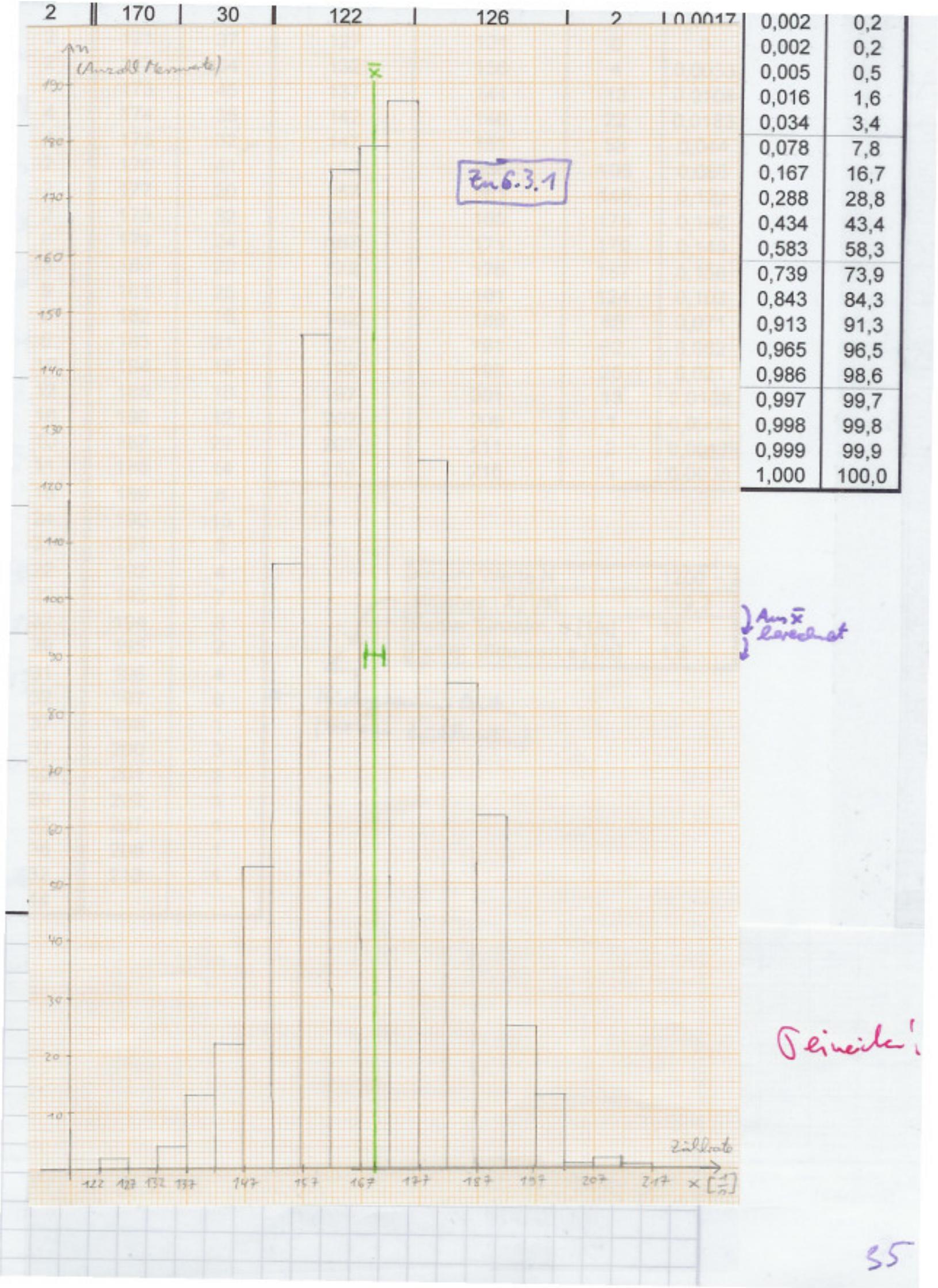
Anzahl Werte N	1200
Mittelwert $\bar{x} [1/s]$	169,2
Fehler Einzelm. $\sigma [1/s]$	13
Fehler Mittelwert s [1/s]	1,5

↗ Anz Histogramm-Daten  
 ↙ (71 = m Zählraten)

↗ aus  $\bar{x}$  berechnet

Seineide!

2	170	30	122	126	2	1.0.0017	0,002	0,2
							0,002	0,2
							0,005	0,5
							0,016	1,6
							0,034	3,4
							0,078	7,8
							0,167	16,7
							0,288	28,8
							0,434	43,4
							0,583	58,3
							0,739	73,9
							0,843	84,3
							0,913	91,3
							0,965	96,5
							0,986	98,6
							0,997	99,7
							0,998	99,8
							0,999	99,9
							1,000	100,0



### 6.3.4 Überprüfung der Normalverteilung

- Hierzu werden die  $s_i$  auf Wahrscheinlichkeitspapier gezeichnet, wobei auf der x-Achse die Grenzen der Histogrammintervalle und am Ende  $x_i$  der Intervalle auf der y-Achse jeweils die dazugehörige Summe  $s_i$  eingezeichnet wird (nach Skript S. Rad-6).

Allerdings sind dabei als Fehlerfrei angenommen.

- Wie man sieht, läßt sich gut eine Anpassungsgerade einzeichnen, d.h. die meisten Werte weichen nur gering von dieser ab.

Dies bedeutet, dass die Daten mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit normalverteilt sind (da sich oben eine Gerade ergibt), wie es für hohe Zählraten erwartet wurde.

- Nach Skript S. Rad-5 ist der x-Koordinatenschnittpunkt der Kurve mit der Geraden  $y = 50\%$  der Mittelwert  $\bar{x}$ . Es ergibt sich:  $\bar{x}_D = 168 \frac{1}{2}$  (das D steht für „aus dem Diagramm erhalten“)

- Weiterhin ist der x-Koordinatenschnittpunkt der Kurve mit der Geraden  $y = (50+34,14)\%$  der Wert  $\bar{x}+z$ , und der Schnittpunkt mit  $y = (50-34,14)\%$  hat einen x-Wert von  $\bar{x}-z$ .

Es ergibt sich:  $\bar{x}+z = 181 \frac{1}{2}$

$$\bar{x}-z = 155 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z_D = \frac{181 \frac{1}{2} - 155 \frac{1}{2}}{2} = 13 \frac{1}{2}$$

- Die Fehler von  $\bar{x}_D$  bzw.  $z_D$  werden durch  $\pm 1 \frac{1}{2}$  abgeschätzt, was 2 „ganz kleinen“ „Kästchen“ auf der x-Achse entspricht.

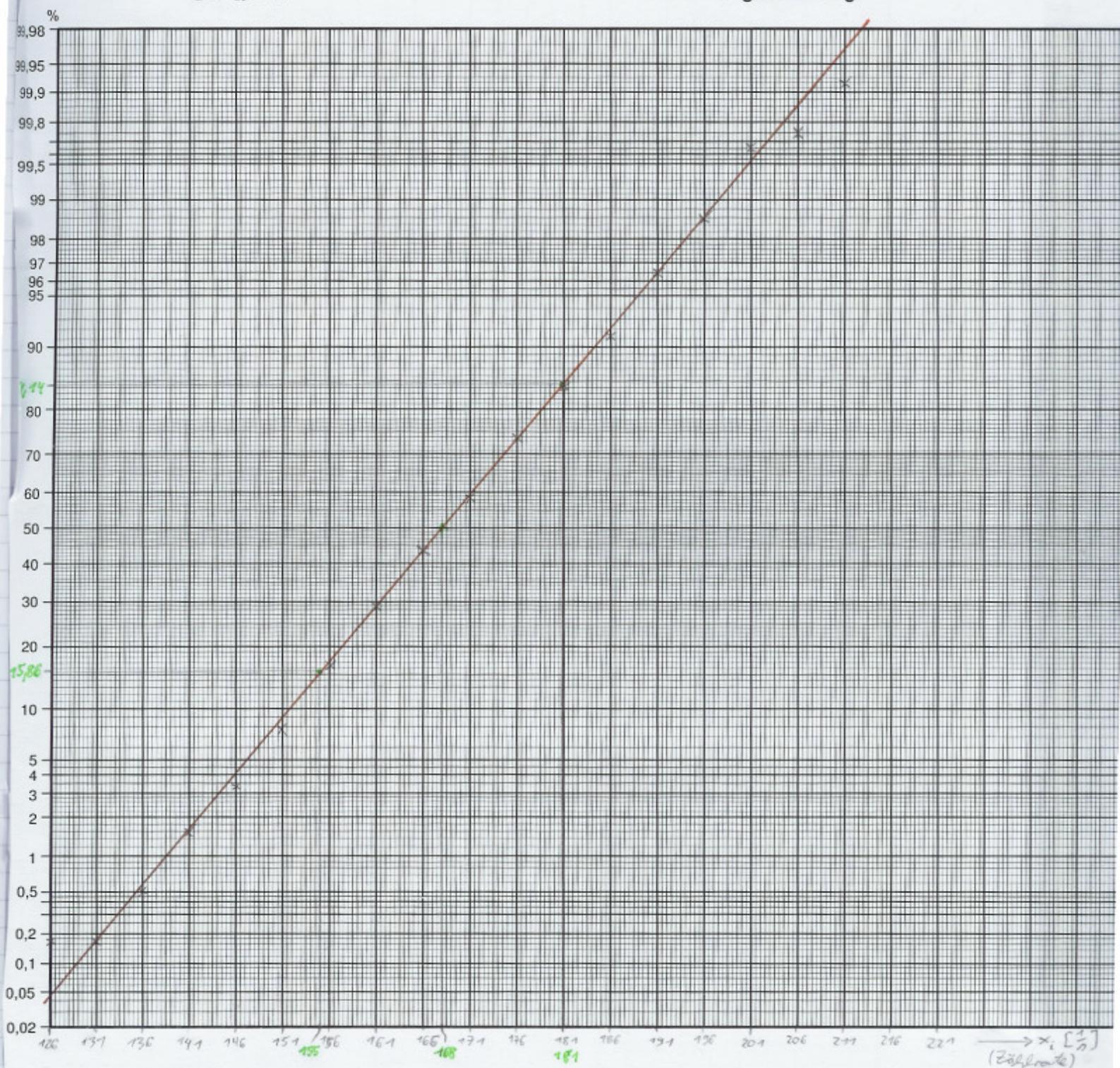
$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}_D = (168 \pm 1) \frac{1}{2}}, \quad \boxed{z_D = (13 \pm 1) \frac{1}{2}} \quad \checkmark$$

- Man sieht, dass sowohl  $\bar{x}_1$  als auch  $\bar{z}_1$  mit den berechneten Werten von 5.35 innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen. Insbesondere deutet dies darauf hin, dass die Näherungen (der Annäherung aus dem Skript, vgl. S.35) für die Berechnung dieser Werte hier zulässig waren.

Außerdem ist es eine weitere Verifikation der Annahme, dass ~~Werte~~  
radioaktive Zerfälle bei kleinen Zerfallsraten normalverteilt sind. ✓

Zu 6.3.4

Wahrscheinlichkeitsnetz  
Merkmalsgrenzwert g



## 6.4 Das $\beta$ -Spektrum

Berechnung der Werte:

- Strom  $I$  siehe S. 24ff

- Fehler  $s_I$ :

$$s_I = \sqrt{(0,0005 \text{ A})^2 + (0,01 \cdot I + 0,001)^2}$$

-  $v/c$ :

Entnehme von S. 16:

$$v = \frac{qBr}{m} \quad \text{mit } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$\Rightarrow v = \frac{qBr}{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} qBr}{m_0}$$

$$\Rightarrow m_0^2 v^2 = (1 - \frac{v^2}{c^2}) q^2 B^2 r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_0^2 v^2}{q^2 B^2 r^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} + \frac{m_0^2 v^2}{q^2 B^2 r^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} \left( 1 + \frac{m_0^2 c^2}{q^2 B^2 r^2} \right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1 + \frac{m_0^2 c^2}{q^2 B^2 r^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{q^2 B^2 r^2}}} \quad \text{U}$$

Definiere noch:  $B_0 = 0,170 \frac{T}{A} \Rightarrow B = I \cdot B_0 \quad \text{U}$

- Fehler von  $v/c$ :

$$s_v = \sqrt{\left( \frac{d(v/c)}{dI} s_I \right)^2} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{m_0^2 c^2}{q^2 B_0^2 I^2 r^2} \right)^{3/2}} \frac{q^2 2 m_0^2 c^2 B_0^2 J^2 r^2}{(q^2 B_0^2 I^2 r^2)^2}$$

Strom I [A]	Fehler s <sub>I</sub> [A ]	v/c	Fehler s <sub>v</sub>	Zählrate W [1/s]	Fehler s <sub>w</sub> in [1/s]
0,0000	0,0011	0,000	0,000	0,0	0,6
0,0500	0,0016	0,172	0,011	7,8	0,6
0,1000	0,0021	0,330	0,012	19,2	0,8
0,1510	0,0026	0,466	0,012	38,6	0,9
0,2000	0,0030	0,572	0,012	64,8	1,0
0,2490	0,0035	0,656	0,011	101,8	1,0
0,300	0,004	0,723	0,009	137,1	1,2
0,349	0,005	0,773	0,008	155,6	1,1
0,399	0,005	0,812	0,007	165,5	1,2
0,449	0,006	0,843	0,006	160,6	1,6
0,500	0,006	0,868	0,005	145,1	1,1
0,550	0,007	0,887	0,004	133,2	1,2
0,600	0,007	0,9024	0,0039	117,1	0,8
0,648	0,007	0,9146	0,0035	102,8	0,7
0,699	0,008	0,9253	0,0030	88,7	0,9
0,749	0,009	0,9340	0,0027	72,7	0,8
0,798	0,009	0,9412	0,0024	64,6	0,8
0,849	0,010	0,9475	0,0022	53,6	1,1
0,897	0,010	0,9526	0,0020	45,0	0,9
0,948	0,010	0,9572	0,0018	40,4	0,8
1,000	0,011	0,9613	0,0016	33,5	0,7
1,048	0,011	0,9646	0,0015	28,8	0,9

Strom	Untergr.mes. 0A	0,050 A	0,100 A	0,151 A	0,200 A	0,249 A	0,300 A	0,3
Nr	Rate [1/10s]	Rate [1/10s]	Rate [1/10s]	Rate [1/10s]	Rate [1/10s]	Rate [1/10s]	Rate [1/10s]	Rate
1	242	356	461	661	864	1277	1651	18
2	298	344	460	662	964	1316	1595	18
3	257	336	502	652	919	1255	1677	18
4	272	345	444	707	939	1230	1628	17
5	258	358	481	633	943	1289	1639	17
6	276	376	453	682	892	1278	1624	18
7	279	357	473	651	918	1304	1624	18
8	293	331	431	656	902	1335	1694	18
9	262	332	431	685	909	1261	1595	18
10	281	354	475	625	886	1289	1624	18
11	254	340	425	618	953	1260	1599	18
12	287	313	480	605	895	1336	1708	18
13	239							
14	242							
15	253							
16	296							
17	265							
18	273							
19	268							
20	255							

Strom:	Untergr.mes. 0A	0,050 A	0,100 A	0,151 A	0,200 A	0,249 A	0,300 A	0,3
Mittelwert [1/10s]	268	345	460	653	915	1286	1638	18
Varianz $\sigma^2$ [1/(10s) <sup>2</sup> ]	322	270	565	878	891	1062	1421	1
Mittlerer Fehler $\sigma$ [1/10s]	18	16	24	30	30	33	38	3
Fehler Mittelwert [1/10s]	4	5	7	9	9	9	11	1

$$= \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{q^2 B_0^2 I^2 r^2}}^{3/2} \cdot (q^2 B_0^2 I^2 r^2)^2$$

0,300 A	0,349 A	0,399 A	0,449 A	0,500 A	0,550 A	0,600 A	0,648 A	0,699 A	0,749 A	0,799 A
Rate [1/10s]										
1651	1854	1939	1831	1731	1564	1423	1286	1136	968	821
1595	1824	1898	1888	1725	1640	1452	1281	1174	998	851
1677	1806	1958	1840	1657	1605	1460	1283	1142	987	821
1628	1754	1940	1849	1710	1583	1455	1315	1151	1000	851
1639	1768	1911	1981	1708	1526	1397	1260	1137	1023	851
1624	1859	1917	1814	1642	1617	1429	1313	1135	978	851
1624	1848	1892	1855	1749	1667	1427	1294	1216	990	851
1694	1850	1856	1933	1751	1590	1416	1302	1157	997	851
1595	1821	1973	1931	1744	1603	1417	1270	1195	988	851
1624	1850	1919	1885	1712	1600	1491	1312	1120	957	851
1599	1812	1980	1869	1754	1567	1448	1309	1134	996	851
1708	1831	1881	1811	1743	1628	1446	1324	1153	1046	851

0,300 A	0,349 A	0,399 A	0,449 A	0,500 A	0,550 A	0,600 A	0,648 A	0,699 A	0,749 A	0,799 A
Rate [1/10s]										
1638	1823	1922	1874	1719	1599	1438	1296	1154	994	851
1421	1146	1413	2735	1323	1403	634	397	783	547	851
38	34	38	52	36	37	25	20	28	23	851
11	10	11	15	11	11	7	6	8	7	851

0,600 A	0,648 A	0,699 A	0,749 A	0,798 A	0,849 A	0,897 A	0,948 A	1,000 A	1,048 A
Rate [1/10s]									
1423	1286	1136	968	901	778	739	680	637	532
1452	1281	1174	998	903	766	728	649	630	575
1460	1283	1142	987	909	810	741	682	595	595
1455	1315	1151	1000	900	815	726	645	576	583
1397	1260	1137	1023	892	748	726	686	602	519
1429	1313	1135	978	887	804	703	672	590	519
1427	1294	1216	990	936	773	758	715	626	588
1416	1302	1157	997	879	824	669	663	597	555
1417	1270	1195	988	943	854	655	676	592	558
1491	1312	1120	957	937	789	721	626	593	575
1448	1309	1134	996	916	823	726	699	574	509
1446	1324	1153	1046	960	856	721	667	617	557

0,600 A	0,648 A	0,699 A	0,749 A	0,798 A	0,849 A	0,897 A	0,948 A	1,000 A	1,048 A
Rate [1/10s]									
1438	1296	1154	994	914	803	718	672	602	555
634	397	783	547	629	1142	861	585	424	866
25	20	28	23	25	34	29	24	21	29
7	6	8	7	7	10	8	7	6	8

$$= \frac{\lambda m_0^2 c^2}{q^2 B_0 I_r^2 r^2 \left(1 + \frac{m_0^2 c^2}{q^2 B_0^2 I_r^2 r^2}\right)^{3/2}} \quad \text{gelt sinnv!}$$

- Zählrate  $W$  mit korrigiertem Untergrund:
 

Sei  $Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$  der Mittelwert der gemessenen Zählraten  $z_i$  und  $U = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m u_k$  der Mittelwert der Untergrundmesswerte, dann ergibt sich für  $W$ :

$$W = Z - U \quad \checkmark$$

- Fehler  $s_W$  von  $W$ : Standardabweichung vom Mittelwert  $Z$ 

Sei  $s_Z = \frac{s_Z}{\sqrt{n}}$  mit  $s_Z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - Z)^2}$  und

$s_u = \frac{s_u}{\sqrt{m}}$  mit  $s_u = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (u_k - U)^2}$ , dann ergibt sich für  $s_W$ :

$$s_W = \sqrt{s_Z^2 + s_u^2} \quad \checkmark$$

Man erkennt sofort, dass nur sehr wenige  $\beta$ -Teilchen im nicht-relativistischen Energiebereich vorliegen, d.h. die meisten Teilchen haben eine Geschwindigkeit  $> 0.1c$ . Dies deckt sich mit der Tatsache, dass sehr große Energien bei radioaktiven Zerfällen frei werden.

Die größte Zählrate liegt a. bei  $0.82$ , d.h. relativ nahe bei der maximalen Geschwindigkeit  $c$ , und daher muss der Graph nach dem Maximum stark abfallen. Der Schnittpunkt des Graphen nahe bei  $\frac{k}{c} = 1.00$  wäre die maximale Geschwindigkeit

$v_{\max}$  der  $\beta$ -Teilchen, woraus sich die maximale kinetische Energie  $E_{kin,\max}$  der Teilchen und damit beim Zerfall frei werdende Energie berechnen ließe. Jedoch wäre dies hier ungenau, da der Schnittpunkt hier nur viel zu ungenau abgeschätzt werden könnte.

Im Ursprung (also bei  $\Sigma = 0$ ) wird aufgrund von  $I=0A$  und somit  $B=0T$  nur die Untergrundstrahlung gemessen. Da diese in der Zählrate  $W$  abgezogen wurde, geht der Graph durch den Ursprung.

Was Anschlape de Diagramme col Tabelle west etwas!  
Wieviel kann Sie daher nicht zum Test passen ein?

→ leicht lösbar!

Schr.  
Karte ✓ gute Auswertg!

Fragen zur Vorbereitung:

4 / 4

Protokoll/Durchführung:

2 / 3

Form:

1 / 1

Zählrohrcharakteristik:

1,5 / 2

Statistik bei kleinen Zählraten:

2,5 / 3

Statistik bei großen Zählraten:

4 / 4

$\beta$  - Spektrum:

3 / 3

Sonderpunkt

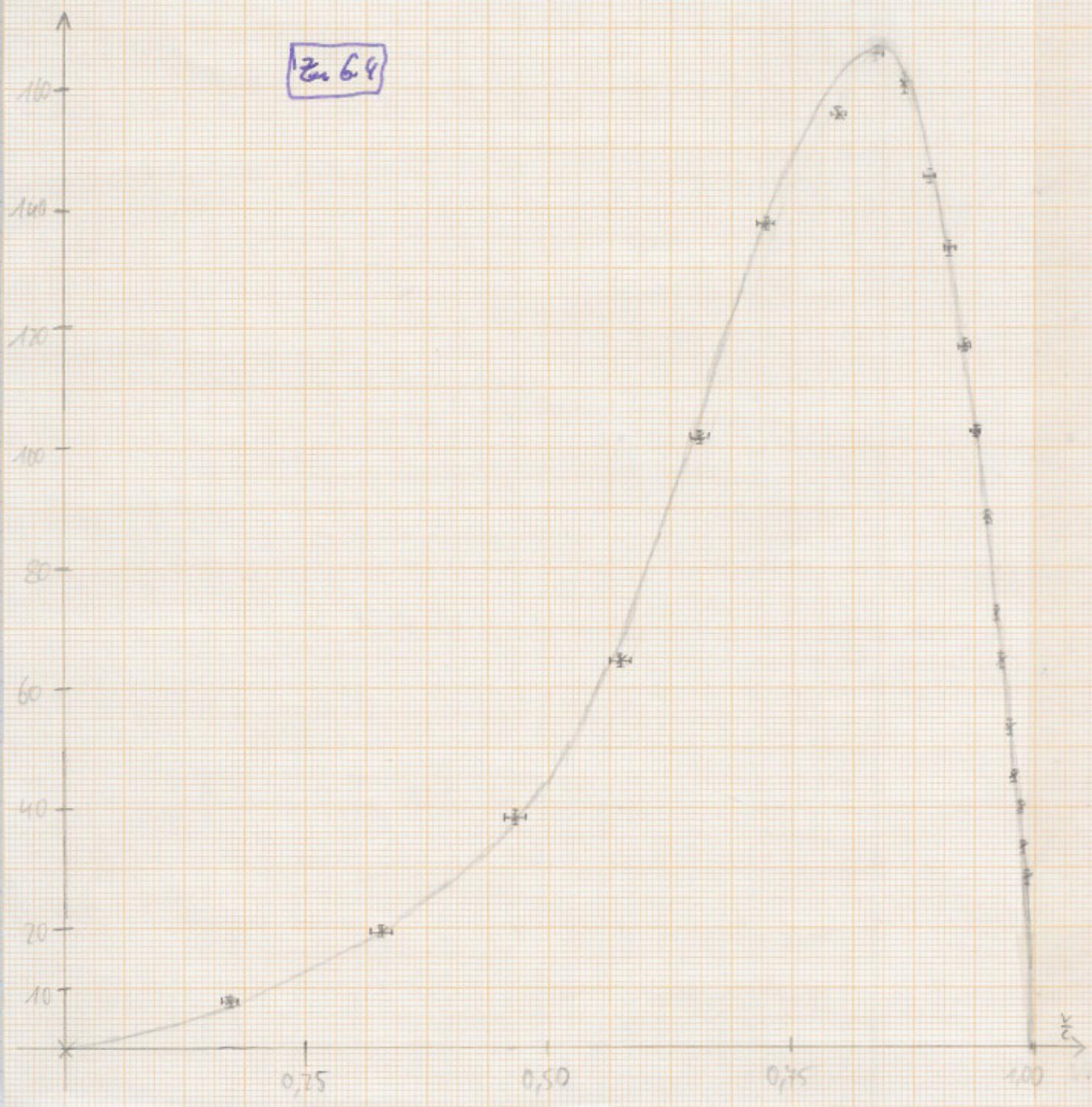
1 / 1

Gesamt:

19 / 20

Zahlreiche W von 115

Zu 6.4



## VRad: Besprechung:

- Neptunium keine gibt es nicht mehr,  
wurde künstlich hergestellt!
- typ. Bsp. der keine Plutonium
- Untergrundmessung: nötig, da  $\gamma$ -Strahlung des Präparates  
 ↳ nicht wegen Nullfehler / Hintergrundstrahlung  
 → ohne Präparat: keine Dächerlinie messen
- Messprotokoll: Aktion, Stütze, Erklärung der Durchführung,  
Messdaten  
 wichtig: Erklärung muss erkennbar sein  
 → Daten müssen wiederzufinden sein  
 → Dokumentation: Bei: Balken  
 ↳ File - Namen
- Auswertung:
  - Ergebnisse kurz/knapp dokumentieren,  
aber vollständig  
an Fragen orientieren
  - Bei Diagrammen wie Histogrammen:  
 ↳  $\bar{x}$ ,  $s_x$  einzeichnen
  - Wkst. papier: Gaußverteilung  $\rightarrow$  Gerade

### • Statistik:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

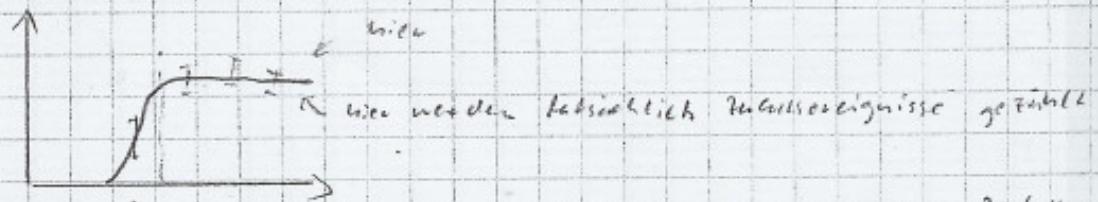
$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{gilt})$$

$$s_x = \sqrt{\bar{x}^2} \quad \rightarrow \text{für Gaußverteilung} \\ (\text{2 Parameter})$$

Bei radioaktiven Zählern für große  $(\bar{x}, s_x)$

Für viele ( $\rightarrow$  nur noch 1 Parameter:  $\propto \sqrt{\bar{x}}$ )

$\rightarrow$  solange Verfallsgesetz gilt, sollte  $s_x \approx s_c$



für radiale Schwingung  $\omega_0^2 = \frac{G}{r^3}$

$$\text{z.B. } r = 4000 \rightarrow \omega = 20$$

$$r = 4000 \rightarrow \omega = 20$$

(insbesondere die gegebenen Tabellen)

B-Spektrum:

zu Schallausbreitung:

$$\frac{v}{c} = \frac{q_B r}{\sin c \sqrt{1 + q_B^2 r^2}} = \sqrt{\frac{-q_B^2 G^2 r^2}{\sin c^2 + q_B^2 r^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{\sin c^2}{q_B^2 r^2}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sin c}{q_B r}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 2 \cdot 10^{-10} \cdot r}$$

$$a = \frac{1}{q_B r}$$

$$\frac{S}{r^2} = \frac{a^2}{B^2 (1 + (q_B r)^2)^2}$$