Fragen zur Vorbereitung

1) $A=0 \rightsquigarrow$ freie Schwingung

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

Ansatz: $x(t) = B e^{\alpha t}$, $B \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

charakteristisches Polynom

$$\overset{\text{In }(1)}{\rightsquigarrow} \quad B e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2 = 0 \rightsquigarrow \alpha_{1/2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_h(t) = B_1 e^{\alpha_1 t} + B_2 e^{\alpha_2 t}}$$

a) kleine Dämpfung ($\lambda^2 < \omega_0^2$) $\rightsquigarrow$ komplexe EW

$$\Rightarrow \alpha_{1/2} = -\lambda \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{\omega^2} = -\lambda \pm i\omega \rightsquigarrow x(t) = \underbrace{e^{-\lambda t}}_{\text{Dämpfung}} \overbrace{(B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t})}^{\text{Oszillation}}$$

$x_h(t)$ muss reell sein

$$x_h(t) = \mathrm{Re}(x(t)) + \mathrm{Im}(x(t)) = e^{-\lambda t}\left(\overbrace{(B_1 + B_2)}^{B_+}\cos\omega t + \overbrace{(B_1 - B_2)}^{B_-}\sin\omega t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_h(t) = e^{-\lambda t}(B_+ \cos\omega t + B_- \sin\omega t)}$$

Bei kleiner Dämpfung schwingt das System mit exponentiell abnehmender Amplitude. Dabei ist ω_0 die Eigenfrequenz des Systems und ω die Schwingfrequenz.

Abweichung wird durch die Dämpfung bestimmt $\rightsquigarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

b) Aperiodischer Grenzfall ($\lambda^2 = \omega_0^2$) $\rightsquigarrow$ reelle EW

$\Rightarrow \alpha_{1/2} = -\lambda \rightsquigarrow$ Lösungen sind entartet $\rightsquigarrow$ Variation der Konstanten

$$\Rightarrow x_h(t) = B(t)e^{-\lambda t} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{x}_h(t) = (\dot{B}(t) - \lambda B(t))e^{-\lambda t} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \ddot{x}_h(t) = (\ddot{B}(t) - 2\lambda\dot{B}(t) + \lambda^2 B(t))e^{-\lambda t}$$

$$\xrightarrow{\text{In }(1)} \ddot{B}(t) - 2\lambda\dot{B}(t) + \lambda^2 B(t) + 2\lambda(\dot{B}(t) - \lambda B(t)) + \omega_0^2 B(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{B}(t) - B(t)(\overbrace{\omega_0^2 - \lambda^2}^{=0}) = 0 \rightsquigarrow \ddot{B}(t) = 0 \rightsquigarrow B(t) = (B_1 + B_2 t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_h(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\lambda t}}$$

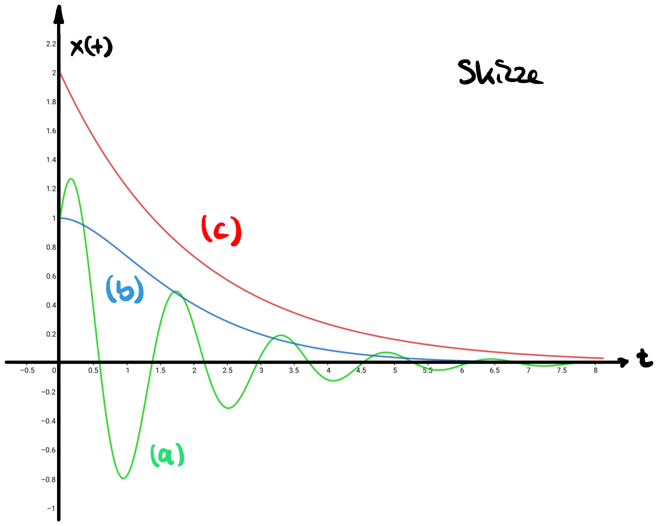
Hier liegt die Besonderheit, dass die Amplitude des System streng genommen nicht mehr sondern exponentiell abflacht.

Eine Anwendung des aperiodischen Grenzfalls ist die eines Stoßdämpfer.
Bei Stoßdämpfer wird eine externe Kraft abgedämpf, damit die Auswirkung der Kraft auf das dämpfte System minimal sind.

c) Große Dämpfung $(\lambda^2 > \omega_0^2)$ ⇝ reelle EW

$$\Rightarrow \alpha_{1/2} = -\lambda \pm \sqrt{\underbrace{\lambda^2 - \omega_0^2}_{\omega^2}} = -\lambda \pm \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{x_h(t) = e^{-\lambda t}\left(B_1 e^{\omega t} + B_2 e^{-\omega t}\right)}$$



Hier erfolgt keine Schwingung mehr.
Nach anfänglicher Auslenkung des Systems kehrt es in seine Ruhelage zurück.
Der Unterschied zu dem aperiodischen Grenzfall liegt darin, das der aperiodische Grenzfall als schnellster Fall in die Ruhelage übergeht.

Die Konstanten werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt

.2) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A\sin(\omega_A t) = \mathrm{Im}\left[A e^{i\omega_A t}\right]$ (II)

Ansatz in der Angabe: $x_s(t) = x_0 \sin(\omega_A t + \delta) = \mathrm{Im}\left[x_0 e^{i(\omega_A t + \delta)}\right]$

$$\Rightarrow x_s(t) = x_0 e^{i(\omega_A t+\delta)} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{x}_s(t) = i\omega_A x_0 e^{i(\omega_A t+\delta)} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \ddot{x}_s(t) = -\omega_A^2 x_0 e^{i(\omega_A t+\delta)}$$

$$\xrightarrow{\text{In (II)}} x_0 e^{i(\omega_A t+\delta)}\left(\omega_0^2 + i2\lambda\omega_A - \omega_A^2\right) = A e^{i\omega_A t}$$

$$\Leftrightarrow x_0 e^{i\delta}\left(\omega_0^2 + i2\lambda\omega_A - \omega_A^2\right) = A$$

$$\Leftrightarrow x_0 e^{i\delta}\Big(1 + i\underbrace{\frac{2\lambda}{\omega_0}}_{c}\underbrace{\frac{\omega_A}{\omega_0}}_{a} - \big(\underbrace{\frac{\omega_A}{\omega_0}}_{a}\big)^2\Big) = \underbrace{\frac{A}{\omega_0^2}}_{x_A} \Leftrightarrow x_0 e^{i\delta} = \frac{x_A}{(1 - a^2 + ica)} \cdot \frac{(1-a^2-ica)}{(1-a^2-ica)}$$

$$\Leftrightarrow x_0\left(\cos\delta + i\sin\delta\right) = \frac{x_A}{(1-a^2)^2 + c^2a^2}\left((1-a^2) - ica\right)$$

$$\Rightarrow x_0 = \left|\frac{x_A}{(1-a^2)^2 + c^2a^2}\left((1-a^2) - ica\right)\right| = \frac{x_A}{\sqrt{(1-a^2)^2 + a^2c^2}} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{x_A}{\sqrt{(1-a^2)^2 + a^2c^2}}}$$

$$\Rightarrow \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{ac}{1-a^2} = \frac{2\lambda\omega_A}{(\omega_A^2 - \omega_0^2)} \Rightarrow \boxed{\tan\delta = \frac{2\lambda\omega_A}{(\omega_A^2 - \omega_0^2)}}$$

$$\Rightarrow x_s(t) = \mathrm{Im}\left[x_0 \cdot e^{i(\omega_A t+\delta)}\right] \Rightarrow \boxed{x_s(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_A^2)^2 + 4\lambda^2\omega_A^2}}\sin\left(\omega_A t + \arctan\left(\frac{2\lambda\omega_A}{(\omega_A^2 - \omega_0^2)}\right)\right)}$$

.3)

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \dot{x}(t) = \dot{x}_h(t) + \dot{x}_s(t) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \ddot{x}(t) = \ddot{x}_h(t) + \ddot{x}_s(t)$$

$$\xrightarrow{\text{in (II)}} \quad \ddot{x}_h + \ddot{x}_s + 2\lambda(\dot{x}_h + \dot{x}_s) + \omega_0^2(x_h + x_s) = A\sin(\omega_A t)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\ddot{x}_h + 2\lambda\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h) + (\ddot{x}_s + 2\lambda\dot{x}_s + \omega_0^2 x_s - A\sin(\omega_A t)) = 0$$

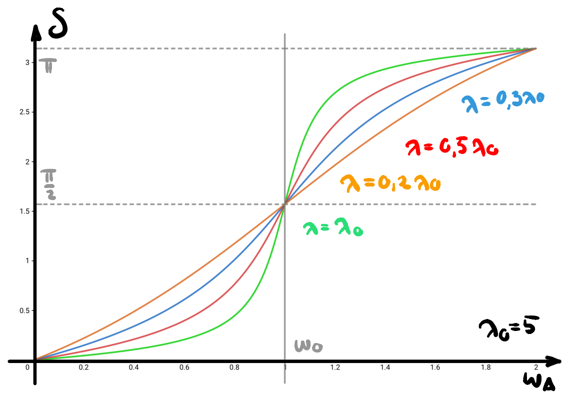
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \ddot{x}_h + 2\lambda\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h & = 0 \\ \ddot{x}_s + 2\lambda\dot{x}_s + \omega_0^2 x_s - A\sin(\omega_A t) & = 0 \end{array}\right\} \text{ Erfüllt durch Aufgabe (1), (2)}$$

Es reicht in der Praxis nur $x_s(t)$ zu betrachten, da alle homogene Lösungen von $x_h(t)$ mit $e^{-\lambda t}$ exponentiell in kurzer Zeit abklingen.

.4) Betrachte Limes von a : $\lim\limits_{\omega_A \to 0} a = 0 \qquad \lim\limits_{\omega_A \to \infty} a = \infty$

$$\lim_{a \to 0} x_0 = \lim_{a \to 0} \frac{x_A}{\sqrt{(1-a^2)^2 + a^2c^2}} = x_A$$

$$\lim_{a \to \infty} x_0 = \lim_{a \to \infty} \frac{x_A}{\sqrt{(1-a^2)^2 + a^2c^2}} = 0$$



$$\lim_{a \to 0} \tan\delta = \lim_{a \to 0} \frac{ac}{1-a^2} = 0 \quad \Rightarrow \delta = 0$$

$$\lim_{a \to \infty} \tan\delta = \lim_{a \to \infty} \frac{ac}{1-a^2} = \lim_{a \to \infty} \frac{c}{a(\frac{1}{a^2}-1)} = 0 \quad \Rightarrow \delta = \pi$$

Hier sieht man, dass wenn die Kreisfrequenz ω_A gegen Null geht kann das System nazu sofort auf die externe Schwingung reagieren und nimmt die maximale Amplitude an. Dabei schwingt das System gleichphasig mit der externen Schwingung

Wobei bei sehr hoher Kreisfrequenz kann das schwingende System nicht mehr auf die externe Schwingung antworten, wegen Trägheit und Reibung, und die Amplitude geht gegen Null. Dabei schwingt das System gegenphasig zur externen Schwingung

.5) $\omega_A = \omega_0 \quad \rightsquigarrow \quad a = 1$

$$\lim_{a \to 1} \delta = \lim_{a \to 1} \arctan\Big(\underbrace{\frac{ac}{1-a^2}}_{\to \infty}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Maximum für x_0 :

$$\rightsquigarrow x_0(a) = \frac{x_A}{\sqrt{(1-a^2)^2 + a^2c^2}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dx_0}{d\omega_A} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{Erinnerung} \quad a = \frac{\omega_A}{\omega_0}$$

$$\frac{dx_0}{d\omega_A} = \frac{dx_0}{da} \cdot \frac{da}{d\omega_A} = x_A \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{((1-a^2)^2 + a^2c^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(-2(1-a^2)\cdot 2a + 2ac^2\right) \cdot \frac{1}{\omega_0} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow \left(2a(1-a^2) - ac^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2a\left(a^2 + \frac{c^2}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 0 \quad \wedge \quad a_2 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \omega_A = 0 \quad , \quad \omega_A = (\pm)\sqrt{1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}}$$

Der Fall $a_1=0$ wurde in Aufgabe (4) schon diskutiert

$\lim_{h\to 0} x'(a_2 \pm h) \gtrless 0 \rightsquigarrow$ lokales Maximum bei $a_2 = \sqrt{1-\frac{c^2}{2}}$

$$\Rightarrow x_{max} = x(a_2) = \frac{x_A}{c\sqrt{1-\frac{c^2}{4}}} \Rightarrow \boxed{x_{max} = \frac{A}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}}$$

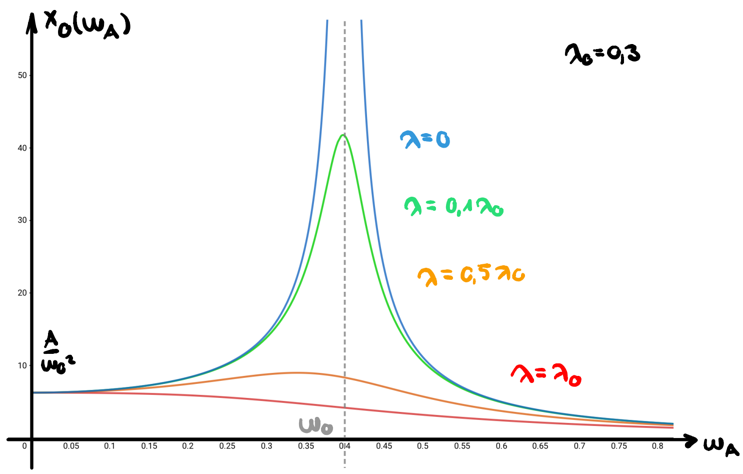
Die Dämpfung λ verschiebt das Maximum je nach nach links oder rechts. Bei Zunahme wird das Maximum der Amplitude immer kleiner, was zu erwarten war, da durch große Dämpfung die Schwingung des Systems nicht mehr gegeben ist.

.6) Resonanzüberhöhung

$$x_A = \frac{A}{\omega_0^2} \rightsquigarrow \boxed{\frac{x_{max}}{x_A} = \frac{\omega_0^2}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}}$$

$$\lambda \ll \omega_0 \rightsquigarrow \frac{x_{max}}{x_A} \approx \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} x_{max} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{A}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \infty$$



.7)

Mit dem x-t-Schreiber kann die Auslenkung eines Pendels aufgezeichnet werden. Die Schwingungen werden somit in Abhängigkeit der Zeit graphisch dargestellt.

Der Schreiber registriert eine Spannung, die von einen Digital-Analog-Wandler erzeugt wird. Der Wandler generiert eine zum Zählerstand der Lichtschranken proportionale Spannung. Der Zählerstand variiert je nach Wechsel der Markierungen der Zahnscheibe.

.8)

$$\dot{x}_S(t) = \frac{A\omega_A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_A^2)^2+4\lambda^2\omega_A^2}} \cos\left(\omega_A t + \arctan\left(\frac{2\lambda\omega_A}{(\omega_A^2-\omega_0^2)}\right)\right) \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{A\omega_A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_A^2)^2+4\lambda^2\omega_A^2}}}$$

$$\ddot{x}_S(t) = -\omega_A^2 x_S(t) \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{A\omega_A^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_A^2)^2+4\lambda^2\omega_A^2}}}$$

$$\lim_{\omega_A\to 0} v_0 = 0, \quad \lim_{\omega_A\to\infty} v_0 = \lim_{\omega_A\to\infty} \frac{A}{\omega_A\sqrt{\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega_A}\right)^2-1\right)^2+\frac{4\lambda^2}{\omega_A^2}}} = 0$$

$$\lim_{\omega_A\to 0} a_0 = 0, \quad \lim_{\omega_A\to\infty} a_0 = \lim_{\omega_A\to\infty} \frac{A}{\sqrt{\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega_A}\right)^2-1\right)^2+\frac{4\lambda^2}{\omega_A^2}}} = A$$

Maximas:

$$v_{max} = \omega_A \cdot x_{max} \Rightarrow \boxed{v_{max} = \frac{A\omega_A}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}}, \quad a_{max} = \omega_A^2 x_0 \Rightarrow \boxed{a_{max} = \frac{A\omega_A^2}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}}$$

Auswertung

.1) Freie Schwingung

Anfangsbdg: $\varphi(0) = A_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\lambda \ll \omega_0 \rightsquigarrow$ kleine Dämpfung 2.2 $\varphi(t) \approx A_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t}$

kleine Dämpfung $\Rightarrow$ (2.1 a) Erinnerung: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

$\rightsquigarrow \varphi(t) = e^{-\lambda t} (B_+ \cos\omega t + B_- \sin\omega t)$ (I) $\rightsquigarrow \varphi(0) = \boxed{B_+ = A_0}$

$\rightsquigarrow \dot{\varphi}(t) = -\lambda \varphi(t) + \omega e^{-\lambda t} (B_- \cos\omega t - B_+ \sin\omega t)$ (II) $\rightsquigarrow \dot{\varphi}(0) = -\lambda A_0 + \omega B_- = 0 \rightsquigarrow \boxed{B_- = \frac{\lambda A_0}{\omega}}$

B_-, B_+ in (I) $\rightsquigarrow \varphi(t) = e^{-\lambda t} (A_0 \cos\omega t + \frac{\lambda A_0}{\omega} \sin\omega t)$

Für $\lambda \ll \omega_0 \rightsquigarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \approx \omega_0$, $B_- = \frac{\lambda A_0}{\omega} \approx 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) \approx A_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\lambda t}}$

Vorbereitung und Checkliste

7.1.1) Ablesefehler Stoppuhr : 0,01 s ! $\rightsquigarrow$ Fehler der Einzelmessung ?

- [ ] Alles normal Berechnen und dann durch 50
- [ ] $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightsquigarrow s_{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{T^2} \cdot s_T\right)^2}$
- [ ] Auswertung aus x-t Schreiber

$\rightsquigarrow$ Viel gerechne mit Computer $\rightsquigarrow$ Vorbereitung