

SS2021

PPBphys1

# Protokoll KRE

Charlotte Geiger - Manuel Lippert - Leonard Schatt

Gruppe 4



# Informationen

<b>Versuchstag</b>	22. März 2021
<b>Versuchsplatz</b>	NWII   2.3.02.704
<b>Betreuer</b>	Michael Beckstein
<b>Gruppen Nr.</b>	4
<b>Auswertperson</b>	Manuel Lippert
<b>Messperson</b>	Leonard Schatt
<b>Protokollperson</b>	Charlotte Geiger

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Fragen zur Vorbereitung</b>	<b>6</b>
2.1	Trägheitsmoment $I$ eines Körpers . . . . .	6
2.2	Trägheitstensor $\underline{J}$ . . . . .	6
2.3	Trägheitstensor $\underline{J}_{\text{Rad}}$ eines Rades . . . . .	7
2.4	Lage der Achsen bei Nutation eines momentfreien Kreisels . . . . .	8
2.5	Präzessionsfrequenz eines Kreisels . . . . .	8
2.6	Kreiselkompass . . . . .	9
2.7	Senkrechte Ausrichtung eines rotierenden Bierfilzes . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Messprotokoll</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung und Diskussion</b>	<b>22</b>
4.1	Qualitative Beobachtung verschiedener Kreiselbewegungen . . . . .	22
4.2	Nutation . . . . .	24
4.3	Präzession . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>34</b>



# 1 Einleitung

Ein Kreisel ist ein starrer Körper welcher um eine beliebige kräfte- und momentfreie Achse rotiert mit fester Lage im Raum. Dies wird mit einer Unterstützung der Achse in zwei Punkten durch Lager, welche i. Allg. durch Kräfte beansprucht werden, verwirklicht. Kreisel werden häufig in der Technik und im Alltag bei rotierenden Bauteilen in Maschinen verwendet, wobei die Form der Kreisel dabei beliebig sein kann, es aber von Vorteil ist, wenn dieser die Form eines rotationssymmetrischen Körpers annimmt.

In diesem Versuch wird qualitativ das Verhalten eines luftgelagerten, symmetrischen Kreisel (ohne wesentliche Reibung) bei verschiedene Kreiselbewegungen sowie die Reaktion auf äußere Kräfte untersucht. Dabei werden besonders die Figurenachse, Drehimpulsachse und momentane Drehachse eine wichtige Rolle bei der Beobachtung spielen. Des Weiteren wird in diesem Versuch die Nutation und Präzession des Kreisels genauer betrachtet.

## 2 Fragen zur Vorbereitung

### 2.1 Trägheitsmoment $I$ eines Körpers

Das Trägheitsmoment  $I$  eines Körpers mit dem Volumen  $V$  wird im Kontinuum durch die Gleichung

$$I = \int_V \mathbf{r}_\perp^2 \rho(\mathbf{r}) dV \quad (2.1)$$

dargestellt und gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Winkelgeschwindigkeitsänderung bei einer Drehung um eine vorausgesetzte Achse an. Dabei ist  $\mathbf{r}_\perp$  der Ortsvektor, welcher senkrecht auf  $\omega$  steht und  $\rho(\mathbf{r})$  die Dichte des Körpers in Abhängigkeit zum Ortsvektor  $\mathbf{r}$ , wobei die Dichte  $\rho$  sich bei homogenen Körper aus dem Integral ziehen lässt, da diese in diesem Fall nicht mehr vom Ortsvektor  $\mathbf{r}$  abhängt.

Für einen starren Körper aus  $N$  Massepunkten der Masse  $m_i$  hat (2.1) die Form

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_{i,\perp}^2 \quad .^1 \quad (2.2)$$

### 2.2 Trägheitstensor $\underline{J}$

Der Drehimpuls eines Körpers der Masse  $m$  ausgehen vom Ursprung des Koordinatensystems mit Ortsvektor  $\mathbf{r}$  und Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  ist im Skript (Kre - 3, Frage 2) zum Versuch angegeben durch die Gleichung

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad . \quad (2.3)$$

Weiterhin gilt bei Rotation eines starren Körpers in einem beliebigen Koordinatensystem nach Skript (Kre - 1) der Zusammenhang zwischen Drehimpuls  $\mathbf{L}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Form

$$\mathbf{L} = \underline{J} \omega \quad . \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup><https://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4gheitsmoment>

### 2.3 Trägheitstensor $\underline{J}_{\text{Rad}}$ eines Rades

Betrachtet man nun einen starren Körper aus  $N$  Massepunkten der Masse  $m_i$  aus der Sicht des Schwerpunkts  $S$  (Ursprung des Koordinatensystems) und interpretiert die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  als Kreuzprodukt des Ortsvektor  $\mathbf{r}$  und der Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  wird Gleichung (2.3) zu

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) . \quad (2.5)$$

Auflösen der beiden Kreuzprodukte mit Hilfe des Gaußmann-Identität und Einsetzen der Vektoren  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  und  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \underline{J} \boldsymbol{\omega} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \underline{J} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Die Diagonalelemente von  $J$  sind dabei die Trägheitsmomente des Körpers bei Drehungen um die Hauptachsen (siehe Kapitel 2.1).

### 2.3 Trägheitstensor $\underline{J}_{\text{Rad}}$ eines Rades

Ist ein Rad bei der Rotation um seine Symmetrieachse ausgewuchtet nimmt der Trägheitstensor  $\underline{J}_{\text{Rad}}$  im Schwerpunkt des Rades die Form einer Diagonalmatrix an. Dabei sind die Diagonalelemente wie in Kapitel 2.2 erwähnt die Trägheitsmomente des Rades bei Drehung um seine Hauptachsen bzw. Symmetrieachsen.

Ist das Rad bei gleichartiger Bewegung nicht ausgewuchtet, ist der Trägheitstensor  $\underline{J}_{\text{Rad}}$  nicht immer diagonalisierbar, d.h. der Tensor hat nicht mehr die Form einer Diagonalmatrix. Diese Formänderung des Tensors wird durch zusätzliche Drehmomente, welche auf das Rad wirken, verursacht und beeinflussen das Rad bei seiner Bewegung um die Symmetrieachse.

Dies hat zur Folge, dass ein ausgewuchtetes Rad „rund“ läuft und ein unausgewuchtetes Rad „eiert“ (unregelmäßiges rotieren).

## 2.4 Lage der Achsen bei Nutation eines momentfreien Kreisel

Bei einem momentfreien Kreisel ist die Drehimpulsachse fest im Raum. Diese wird umschlossen von dem sogenannten „Raspolkegel“, welcher auch fest im Raum steht. Die Figurenachse bewegt sich mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit  $w_n$  um den Nutationskegel. Dabei ist die Figurenachse von dem sogenannten „Gangpolkegel“ umschlossen, welcher sich auf dem Raspolkegel „abrollt“ und somit den Nutationskegel entstehen lässt. Weiterhin ist die relative Lage des Raspolkegels und des Gangpolkegels zueinander festgelegt durch das Trägheitsmoment bzgl der Drehimpulsachse.<sup>2</sup>

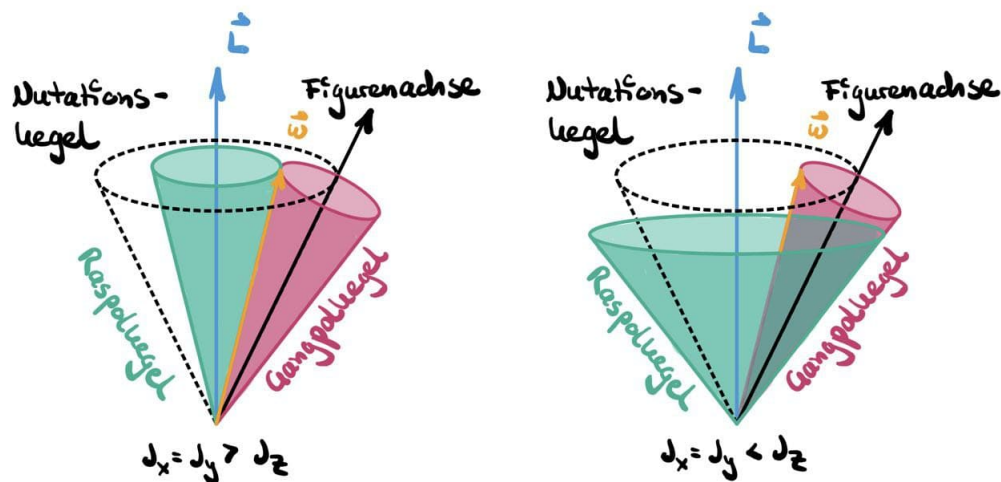


Abbildung 2.1: Nutationsbewegung für unterschiedliche Trägheitsmomente

## 2.5 Präzessionsfrequenz eines Kreisel

Die Präzessionswinkelgeschwindigkeit  $\omega_p$  lässt sich allgemein schreiben

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} . \quad (2.8)$$

Nun kann der infinitesimale Drehwinkel  $d\varphi$  in Beziehung zu der Drehimpulsänderung  $dL$  gesetzt werden

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{M}{L} dt , \text{ wobei } dL = M dt . \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \omega_p \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Demtröder, Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme, S.147



$M$  ist hierbei das äußere entstehende Drehmoment und  $L$  der Drehimpuls, welcher durch die Rotation um die 3. Hauptachse entsteht. Daraus folgt

$$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = |\mathbf{r}| |\mathbf{g}| m \sin(\alpha) = mgl, \text{ wobei } \sin(\alpha) = \frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{r}|} \quad (2.11)$$

$$L = J_3 \omega_3 \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \omega_p = \frac{mgl}{J_3 \omega_3} \quad (2.13)$$

Hieraus folgt, dass  $\omega_p$  unabhängig vom Neigungswinkel zwischen Figurenachse und der Horizontalen ist. Durch betrachten der Abbildung und (2.13) wird offensichtlich, dass die Richtung der Winkelgeschwindigkeit der Präzession  $\omega_p$  nur von der Richtung des Drehimpuls abhängt, da das Drehmoment  $M$  immer senkrecht auf die Vektoren  $\mathbf{l}, \mathbf{r}$  und  $\mathbf{g}$  steht. Daraus folgt für einen in positive Richtung zeigenden Drehimpuls auch eine positive Winkelgeschwindigkeit  $\omega_p$  und umgekehrt, wodurch klar wird das die Richtung von  $\omega_p$  gleich  $\omega_3$  der 3. Hauptachse ist.<sup>3</sup>

## 2.6 Kreiselkompass

Bei einem rotierenden Kreisel auf dem keine Drehmomente wirken, behält der Drehimpuls seine Richtung bei, weswegen ein Kreisel als Kompass geeignet ist, wobei ein Kreiselkompass auf den geographischen Nordpol zeigt. Für eine kräftefreien Kreisel wird eine sogenannte „Cardano-Aufhängung“ verwendet, welche verhindert, dass die Schwerkraft auf den Kreisel ein Drehmoment auswirken kann, was eine Drehimpulsänderung zur Folge hätte. In der Cardano Aufhängung wird dann der Kreisel möglichst reibungsfrei auf zwei sich im Schwerpunkt des Kreisels senkrecht schneidenden Achsen gelagert. Ein Kreiselkompass wird auch zur Navigation im Weltraum verwendet, was heutzutage schon in Satelliten und Sonden umgesetzt wird.<sup>4</sup>

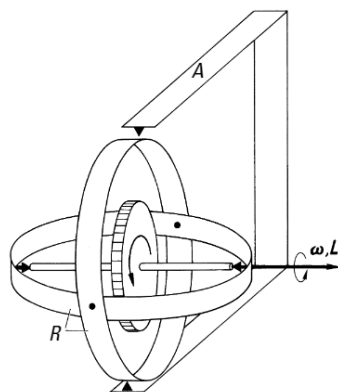


Abbildung 2.2: Kräftefreie Aufhängung eines Kreisels / Cardano-Aufhängung

<sup>3</sup>Demtröder, Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme, S.148

<sup>4</sup>Bergmann-Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik Band 1, S.278

## 2.7 Senkrechte Ausrichtung eines rotierenden Bierfilzes

Wird ein Bierfilz, welcher um seine Figurenachse rotiert, in die Luft geworfen, erfährt dieser ein Drehmoment. Dieses wird verursacht durch die Kraftwirkung des Luftwiderstand auf den Anteil der Fläche des Bierfilz, welche senkrecht zur Luftströmung steht. Dieser Umstand hat die Folge, dass sich der Drehimpuls des Bierfilzes ändert und sich dieser damit kippt bis die Richtung des Drehimpulses senkrecht zur Strömungsrichtung der Luft steht. Dabei hat der Bierfilz in dieser Position ein Minimum an Reibung durch die Luft, wodurch kein weiteres Drehmoment auf den Bierfilz ausgewirkt wird und damit die Bewegung sich stabilisiert.

Bei einem Diskus ändert sich dieser Vorgang, da dieser ein sehr großes Trägheitsmoment bzgl. seiner Figurenachse aufweist, was durch seine Konstruktion (Hauptmasse möglichst weit von der Figurenachse entfernt) bedingt ist. Durch diese Konstruktion muss auf einen Diskus hohe Drehmomente wirken, damit dieser seine Ausrichtung ändert. Die von der Luftströmung verursachten Drehmomente sind dafür aber zu schwach um eine signifikante Änderung zu verursachen, bevor der Diskus auf dem Boden aufschlägt.

## 3 Messprotokoll

Das Messprotokoll wurde am Versuchstag handschriftlich erstellt und hier als PDF-Datei eingefügt.

### Nachtrag

- Fehler der Waage:  $u_a = 0.05 \text{ kg}$
- Fehler Stoppuhr:  $u_t = 0.01 \text{ s}$

## Versuch 1re : Der Kreis

Versuchsplatz: 2.3.02704, Türplate

Datum: 22. März 2021

Teilnehmer: Gruppe 4

Leonhard Schall Menperson

Manuel Gippert Auswerteperson

Charlotte Greiser Tischhaltungsperson

### Messinstrumente + Messfehler

• Stroposkop  $u_a = 0,005$

• Kugel

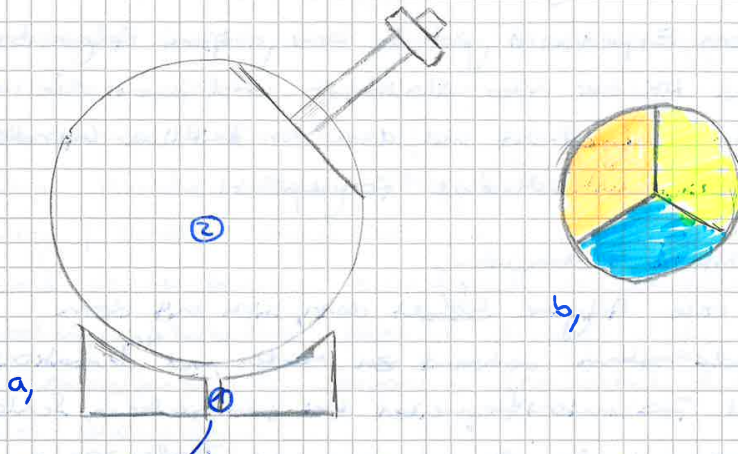
• Luftlagerung

• Gewichte

• Waage Nr. 29206  $u_a = 0,5$

• Stoppuhr  $u_a =$

## Versuchsaufbau



Man hat den Luftdruck (1) durch in einer Form einer negativen Kugel, in der eine Stahlkugel liegt. Diese Kugel ist an einer Seite abgeschnitten. Diese Fläche ist mit drei gleichgroßen Farben <sup>und mit quadratischem Linienmuster</sup> codiert. Aus der Fläche <sup>steigen</sup> ragt eine eigene Schraube raus. Diese kann man an einem Feststellmechanismus <sup>in der Horizontalen</sup> feststellen, sodass die Kugel <sup>sich</sup> um die Achse der Schraube dreht.

Zusätzlich zum unteren Luftdruck gibt es eine seitliche Luftdrüse, so dass der Wheel kontrolliert angetrieben <sup>abgebremst</sup> werden kann, oder auf konstanter Geschwindigkeit belassen werden. Zusätzlich hat man einen Holzstift zum Anschließen, verschiedene Gewichte zum Aufhängen auf die Kugelstange, eine Waage zum Abwiegen, eine Stoppuhr zum Zeitstoppen und ein Stoppuhr zum Frequenz messen, zur Laufzeit.



### Versuchsdurchführung

Bei diesem Experiment gibt es drei größere Aufgabenbereiche. Der Beginn ist bei allen ähnlich, so wird zuerst die vertikale Luftzufuhr aufgedreht und dann die seitliche Luftverteilung. Danach wird unterschiedlich fortgeführt.

#### 1. Qualitative Beobachtung

- Die erste Aufgabe besteht darin, sich mit dem Versuchsaufbau vertraut zu machen und  $\omega_0$  Mutations- und Präzessionsfrequenzen bei verschiedenen Schlegel-Schneidmethoden zu erkennen und Tendenzen zu sehen.

#### 2. Mutation

Durch Glatte Stops an den schnell drehenden Kreisel bringt man den rotierenden Kreisel zu Mutation. Man wird die Umstände der Figurenradre um die momentane Drehachse und damit die Mutationsfrequenz  $\omega_1$  gemessen. Für eine Kontrolle wird das Stroboskop genutzt.

#### 3. Präzession

Für diese Aufgabe werden beide Gewichte in einem bekannten Abstand vom Schwerpunkt gegeneinander verdrängt, die Figurenradre in die Feststellvorrichtung eingespannt und der Kreisel auf eine hohe Drehzahl gebracht. Dann wird der Kreisel aus der Vorrichtung ausgeklippt. Man wird die Kreisel Frequenz mit dem Stroboskop gemessen. Zusätzlich wird die Zeit  $t$  gemessen und somit auch die Präzessionsfrequenz als Funktion von  $\omega_3$ .

## 1. Qualitative Beobachtung

- Je schneller Kreisel wird immer im UZS angedreht
- Seitliche Luftstrom wurde komplett aufgedreht, wodurch die maximale Drehzahl (ca. 20 ~~U/min~~ <sup>Drehungen/s</sup>) erreicht wurde. Dann wurde durch Finger <sup>Drücken/Schlag</sup> ~~konstant~~ (nicht schlagartig) Kräfte ausgeübt → Kreisel weicht aus. Dann wurde Kreisel schrittweise abgebremst und vorherige Prozedur erneut durchgeführt.

Beobachtung: Je langsamer der Kreisel, desto schwächer die Auslenkung.

Wiederholt wurde die gleiche Prozedur mit Schläger gegen Metallstab (hierbei wurde Holzstab genutzt).

Diesmal ist die Beobachtung, dass je langsamer der Kreisel, desto größer die Auslenkung aus dem ursprünglichen Zustand und desto langsamer die Mutationsfrequenz.

Man sieht deutlich, dass sich Figurenachse und Rotationsachse weiter separieren, wenn die Drehfrequenz niedriger ist (der Kreis, den die Spitze des Metallstabes beschreibt, wird größer) außerdem ist zu beobachten, dass die Mutationsfrequenz nimmt zu mit höherer Drehzahl.

Jetzt werden Gewichte an die Stange gehängt <sup>wird dh</sup> und dann Kreisel wieder auf maximale Drehzahl beschleunigt.

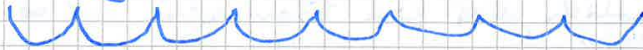


### Versuchsdurchführung

Bei diesem Versuch gibt es drei größere Aufgabenbereiche  
 1. Qualitative Beobachtung

Abhängig vom Winkel in dem man den Kreisel danach positioniert ist die Präzession unterschiedlich stark (Test 45 und 90 Grad) Wie vorher wird Kreisel langsam abgebremsst und Versuch wiederholt. Unterschiedliche ~~Präzessions-~~ Geschwindigkeiten sind bei verschiedenen Drehzahlen auffällig, was aber unter anderem an der graduellen Verringerung der Drehzahlen liegen kann.

~~Versucht~~ Der Kreisel wird wieder auf Maximalgeschwindigkeit angedreht. Versucht man dieses dann einen Schlag, kann man Nutation und Präzession gleichzeitig beobachten. Ein besonders schönes Phänomen stellt sich ein bei niedriger Drehzahl: die Spitze der Stange beschreibt eine solche Kurve:



kleine Ergänzung: Nutation und Präzession liegen so oben gesehen immer im UZS.

Mit geeignetem Strobooskop kann man die Nutationsbewegung "verlangsamend sichtbar machen" dabei wird das Strobooskop ungefähr auf Rotationsfrequenz gestellt.



2. Mutation [Hz]			
Nr.	Rotationsfrequenz	1. Messwert	2. Messwert
1	10,0	62,69 sec	59,96 sec
2	10,5	58,84 sec	59,50 sec
3	11,0	56,94 sec	59,69 sec
4	12,0	51,53 sec <sup>verzählt</sup>	51,135 sec
5	13,0	38,505 49,63 sec	48,87 sec
6	14,0	44,75 sec	45,56 sec
7	15,0	40,78 sec <sup>verzählt</sup>	40,53 sec
8	16,0	34,28 37,47 sec	38,28 sec
9	17,0	35,71 sec	36,31 sec
10	18,0	34,25 sec	34,65 sec
11	19,0	32,85 sec	33,06 sec
12	20,0	30,75 sec	31,19 sec

### Durchführung

Damit die Messperson beide Hände frei hat, um den Kreis <sup>und die Stopuhr zu bedienen</sup> zu präparieren, hilft die Auswerteperson, das Stroboskop zu halten. Dabei wird darauf geachtet, den Mindestkreis möglichst einzuhalten.

Gemein <sup>jeweils</sup> werden 10 Umläufe der Figurnachse ~~best~~ <sup>den Fig</sup> Die Luftdüse wird ~~schuell~~ <sup>schuell</sup> stärker gedreht, als es gebraucht wird und mit den Fingern so weit abgebrummt, bis es so schnell ist wie benötigt.

Die Umläufe werden jeweils unten gemessen und gezählt.

Zusatzbeobachtung: Frequenz erhöht sich <sup>leicht</sup>, wenn man <sup>den Kreis</sup> Schlag versetzt.

### 3. Präzision

- Zuerst werden die beiden Gewichte gezogen  
Masse: Gewicht: 48,2 g

- Dann wird die große Kugel vermessen + Gewichte:

Durchmesser: 100 mm

Durchmesser bis zur flachen Seite: 96 mm

Gewicht 1,2: Höhe: 10 mm (beides Mal)

Höhe Schraube: 87 mm

Länge <sup>Endschraube</sup> Kugel - Gewicht: 15 mm

- Durchführung:

Schraube wird eingespannt, Kreisel wird auf 18 Umdrehungen/Sekunde eingedreht dann wird der

Kreisel ausgebalanciert (am horizontalen Halterung (Winkel zu Erdmittelpunkt = 90°)). Der Kreisel

beginnt zu präzessieren, es werden 10 Umdrehungen beobachtet, wobei mit der Rundfunktion der

Stoppuhr jeweils die Zeit für eine Umdrehung

genommen wird und mit dem Stroboskop die Drehgeschwindigkeit zu Anfang <sup>und</sup> Ende ermittelt

wird. Die Auswertperson schaltet Stoppuhr,\*

die Messperson das Stroboskop. Bei diesem Versuch

ist die antreibende Düse nach der Beschleunigungsphase abgeschaltet.

Gemessen werden Rotationsfrequenz (wobei <sup>Endfrequenz von Anfangs-</sup> und Messung  $n$  gleich der Anfangsfrequenz von Messung  $n$  ist) und Rotationszeit.

\* aus praktischen Gründen wird das Handy statt einer normalen Stoppuhr genommen



Messung 1:

Nr	Rotationsfrequenz [Hz]		gemessene Zeit bei Umdrehung [sec]
	Anfangs-	End-	
1	19,00	15,79	56,66
2		13,27	46,69
3		11,78	41,21
4		10,48	36,16
5		9,28	32,24
6		8,48	29,09
7		7,78	26,55
8		7,30	24,65
9		6,68	22,58
10		6,12	21,10

Anmerkung: Die Pfeile ↗ bedeuten, dass Endfrequenz von Messung n gleich Anfangsfrequenz von Messung n+1 ist

Nr	Rotationsfrequenz [Hz]		gemessene Zeit bei Umdrehung [sec]
	Anfangs-	End-	
1	20,00	16,40	58,48
2		14,00	49,35
3		12,10	42,64
4		10,71	37,33
5		9,58	33,12
6			Abbruch der Messung, da Schraube aus Vertikale gerückt ist. Grund ist evtl. äußere Einwirkung
7			
8			
9			
10			

### 3 Messprotokoll

Nr	Rotationsfrequenz [Hz]		gemessene Zeit Se. Verlauf
	Anfangs-	End-	
1	13,00	15,30	55,78
2		13,40	47,73
3		11,70	40,61
4		10,40	36,46
5		9,30	31,53
6		8,41	29,04
7		7,73	26,58
8		<del>7,86</del> 7,86	<div> <div>nur halbe Frequenz</div> <div>24,21 s</div> </div>
9		↳ 5,72	
10			

Erreichte Messung ab 6 Hz

Nr	Rotationsfrequenz [Hz]		gemessene Zeit pro Umlauf
	Anfangs-	End	
1	6,00	5,64	→ Abbruch, da kein neuer Start ab 6,00 Hz
1	6,00	5,38	17,08
2		5,09	16,12
3		4,89	15,49
4		4,63	14,47
		→ ab hier zu langsam	→ Abbruch

Charlotte Schlott Lippert

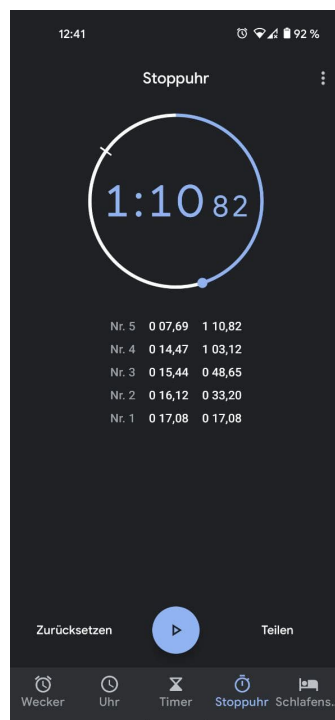
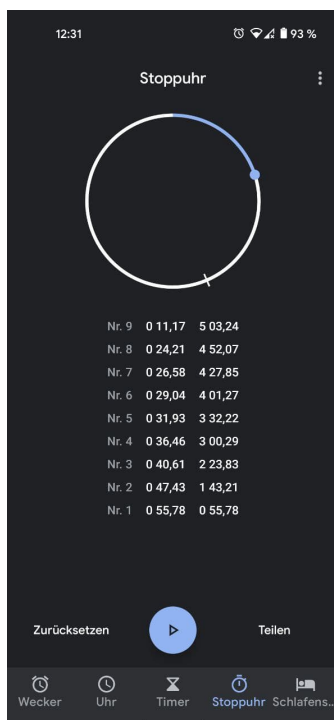
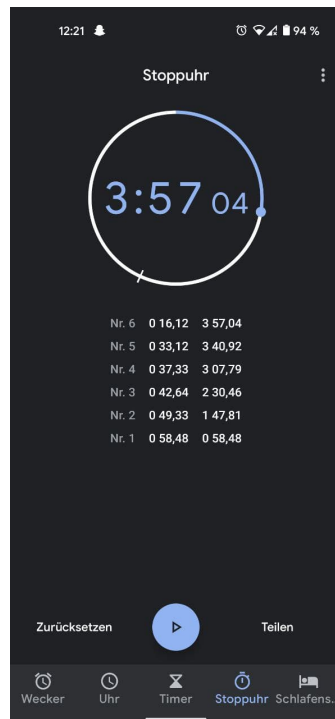
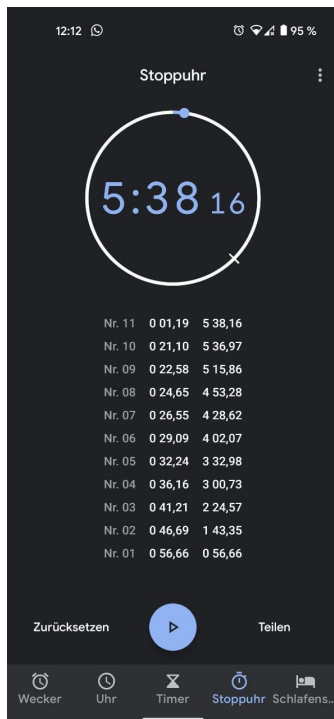


Abbildung 3.1: Zu Präzession: Messung 1, 2, 3, 4

## 4 Auswertung und Diskussion

### 4.1 Qualitative Beobachtung verschiedener Kreiselbewegungen

Im Nachhinein wurde uns bewusst, dass wir einige Fehler bei der in der quantitativen Beobachtung gemacht haben. Dazu muss erstmal ein Fehler im Protokoll ausgebessert werden. Die Nutation ist nicht wie in Teil 1 fälschlicherweise behauptet, sondern gegen den Uhrzeigersinn, was später in der qualitativen Beobachtung auffiel. Nun zu den Beobachtungen.

- Grundzustand:

Der Kreisel wird nur angedreht. Alles verhält sich wie erwartet. Bei hohen Umdrehungszahlen ist eine kleine Nutation zu erkennen. Dies liegt vermutlich daran, dass der Kreisel leicht unsymmetrisch ist. Der Effekt ist jedoch nur minimal und daher vernachlässigbar.

- Ohne Stroboskop:

Nach dem Andrehen wurden auf den Kreisel mit den Fingern Kräfte ausgeübt. Dabei war auffällig, dass je schneller der Kreisel sich dreht, desto stärker waren die Gegenkraft und Gefühl war die Ausweichbewegung stärker. Dies stimmt jedoch nicht mit den Fragen zur Vorbereitung und auch nicht mit der quantitativen Beobachtung überein. Diese Beobachtung kann daher kommen, dass der kräftigere Gegendruck und die heftigere Reibung auf der Haut einem fälschlicherweise ein Gefühl des stärkeren Ausweichens geben. Die auftretende Ausweichbewegung war immer senkrecht zu Rotationsachse und der Richtung in die die Kraft wirkt.

Im Folgenden wurde das Gewicht an der Achse des Kreisels angebracht. Dabei konnte beobachtet werden, dass, wenn der Kreisel geneigt war und das Gewicht an ihm zieht, er auch wieder eine Ausweichbewegung startet. In diesem Fall kann man sehr schön die Richtung der einwirkenden Kraft mit den Richtungen des Drehimpulses und der resultierenden Kraft beobachten. Diese lässt sich anhand der Drei-Finger-Regel herleiten.

Die durch die Gravitation entstehende Kraft  $F_{\text{Grav}}$  kann aufgespalten werden in einen Anteil  $F_{\perp}$ , der senkrecht zur Figurenachse ist, und einen der parallel Anteil  $F_{\parallel}$ . Die Verhältnisse, in der sich die Gewichtskraft aufteilt, werden durch den Winkel der Drehachse und der Horizontalen. Wir haben zwei Ausrichtungen ausprobiert. Auffällig war, dass die Kreisbewegung schneller zu sein schien, wenn die Drehachse parallel zu Horizont war als wenn der Kreisel in der  $45^{\circ}$ -Position stand. Dafür die auf den Kreisel wirkende Kraft  $F_{\perp}$  gilt:

$$F_{\perp} = F_{\text{Grav}} \cdot \cos(\phi)$$

#### 4.1 Qualitative Beobachtung verschiedener Kreiselbewegungen

wobei  $\phi$  der Winkel zwischen der Horizontalen und Drehachse ist. Daran ist klar zu erkennen, dass die Stärke der Präzision von der Größe der auf den Kreisel wirkenden Kraft abhängt.

- Mit Stroboskop:

Die Nutation kann dadurch beobachtet werden, dass man das Stroboskop auf die Eigenfrequenz des Kreisels stellt. In der Praxis achtet man darauf, dass die Farbskala gleich bleibt. Nun betrachtet man, wie sich die Stange mit der Zeit bewegt. Hier als Beispiel die beobachtete Nutation aus dem Versuch:

Der Mittelpunkt des von der Stange beschriebenen Kreises ist der Punkt durch den

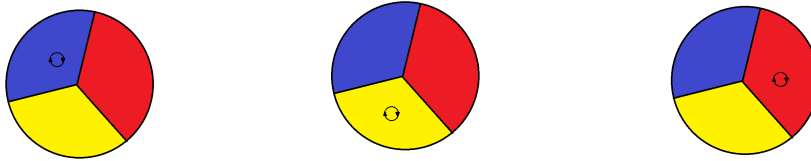


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Kreisels von oben

die momentane Drehachse verläuft. Die Gangpolkegel rollt, wie in den Abbildung 4.2 oder in Kapitel 2.4 dargelegt, außen am Raspolkegel ab, da  $J_3 < J_1 = J_2$ .

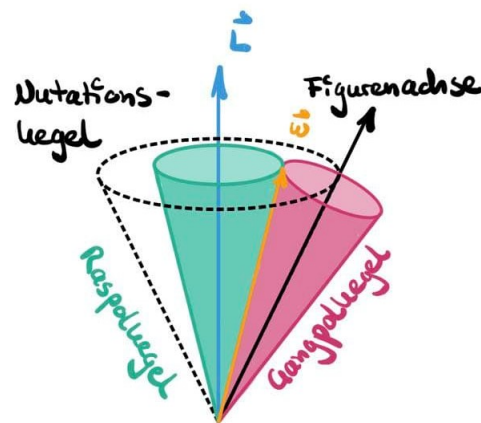


Abbildung 4.2: Abrollen des Gangpolkegel außen am Raspolkegel

## 4.2 Nutation

Bei genauer Beobachtung des Kreisels kann man neben der Präzessionsbewegung erkennen, dass die Kreiselachse nicht komplett ruhig um die Senkrechte läuft, sondern viel mehr kleine Rotationen auf der Bahn der Präzession vollführt. Das ist das Phänomen der Nutation.

Um diese Nutation des Kreisels zu untersuchen, bestimmt man die Nutationsfrequenz des momentfreien Kreisels als Funktion von  $\omega_3$ . Damit es gut darzustellen und auszuwerten ist, betrachtet man  $w_3$  im Bezug zu dem Quotienten  $\frac{w_n}{w_3}$ , wobei dieser fortan als  $\omega_N$  bezeichnet wird.

Um die Frequenz in die Winkelgeschwindigkeit umzurechnen, muss man die Frequenz mit  $2\pi$  multiplizieren ( $w = 2\pi \cdot f$ ).

Der Fehler des Stroboskops wird abgeschätzt mit  $u_{f_3} = 0.25$  Hz, da der Ablesefehler für die verwendete Messmethode zu optimistisch ist.

Auch bei der Zeitmessung muss der Fehler mitbetrachtet werden, dabei ist einmal der Ablesefehler  $u_a = 0.01$  s der Stoppuhr und die Reaktionszeit der Messperson. Aus dem Versuch MES aus dem Sommersemester 2020 wissen wir, dass die Messperson eine Reaktion von  $t_{\text{react}} = (0.188 \pm 0.013)$  s besitzt. Damit können wir den Fehler der Zeitmessung mit  $u_t = 0.20$  s angeben.

Des Weiteren wird der Mittelwert der Zeiten aus den beiden Messreihen gebildet und dieser durch 10 geteilt (wegen 10 Umdrehungen) wird, um die Rotationsdauer  $T_n$  zu erhalten. Daraus folgen die Formeln der Fehler mit dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$\omega_3^i = 2\pi \cdot f_3^i \quad \omega_n^i = \frac{2\pi}{T_n^i} \quad (4.1)$$

$$t_n^i = \frac{t_{n1}^i + t_{n2}^i}{2} \quad u_{t_n} = \frac{1}{2} \sqrt{u_t^2 + u_t^2} = \frac{u_t}{\sqrt{2}} \quad (4.2)$$

$$T_n^i = \frac{t_n^i}{10} \quad u_{T_n} = \frac{1}{10} \sqrt{10 u_{t_n}^2} = \frac{u_{t_n}}{\sqrt{10}} \quad (4.3)$$

$$\omega_N^i = \frac{\omega_n^i}{\omega_3^i} = \frac{1}{T_n^i f_3^i} \quad u_{\omega_N^i} = \sqrt{\left(\frac{u_{T_n}}{T_n^i f_3^i}\right)^2 + \left(\frac{u_{f_3}}{T_n^i f_3^{i2}}\right)^2} \quad (4.4)$$

Um das Verhältnis von  $\omega_3$  im Bezug zu  $\omega_N$  tabellarisch aufzutragen, muss man auf das Vorzeichen achten. Aus den Eulerschen Gleichungen für den momentfreien, symmetrischen Kreisel wurde folgendes im Skript angegeben:

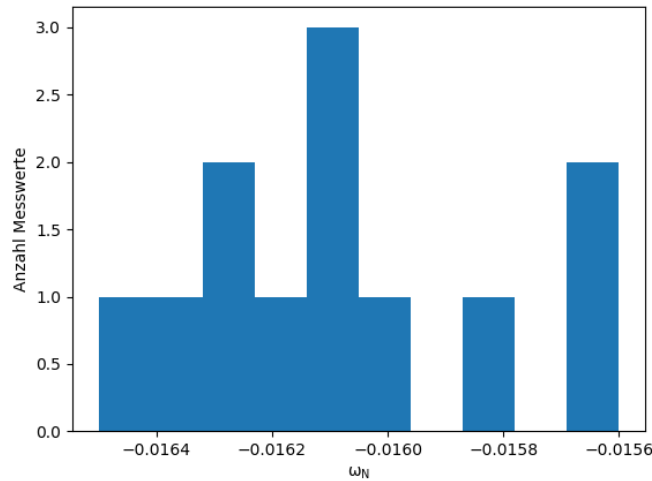
$$\omega_N^i = \frac{J_3 - J_1}{J_1} = \text{konstant} \quad (4.5)$$

Da wir aber nur noch einen symmetrischen Kreisel mit  $J_1 = J_2$  und  $J_3 < J_1$  betrachten, ist das konstante Verhältnis negativ, was mit einem - Zeichen bei  $\omega_N$  verdeutlicht wird.



Tabelle 4.1: Nutationswerte

	$t_n/s$	$u_{t_n}/s$	$T_n/s$	$u_{T_n}/s$	$\omega_3/\frac{1}{s}$	$\omega_n/\frac{1}{s}$	$\omega_N$	$u_{\omega_N}$
1	61.33	0.14	6.13	0.04	62.83	1.02	-0.0163	0.0004
2	59.17	0.14	5.92	0.04	65.97	1.06	-0.0161	0.0004
3	58.32	0.14	5.83	0.04	69.12	1.08	-0.0156	0.0004
4	51.33	0.14	5.13	0.04	75.40	1.22	-0.0162	0.0004
5	49.25	0.14	4.92	0.04	81.68	1.28	-0.0156	0.0003
6	45.16	0.14	4.52	0.04	87.96	1.39	-0.0158	0.0003
7	40.66	0.14	4.07	0.04	94.25	1.55	-0.0164	0.0003
8	37.88	0.14	3.79	0.04	100.53	1.66	-0.0165	0.0003
9	36.01	0.14	3.60	0.04	106.81	1.74	-0.0163	0.0003
10	34.45	0.14	3.44	0.04	113.10	1.82	-0.0161	0.0003
11	32.96	0.14	3.30	0.04	119.38	1.91	-0.0160	0.0003
12	30.97	0.14	3.10	0.04	125.66	2.03	-0.0161	0.0003

Abbildung 4.3:  $w_N$  Histogramm

Nun wird die Konstante durch den Mittelwert der berechneten Verhältnisse berechnet.

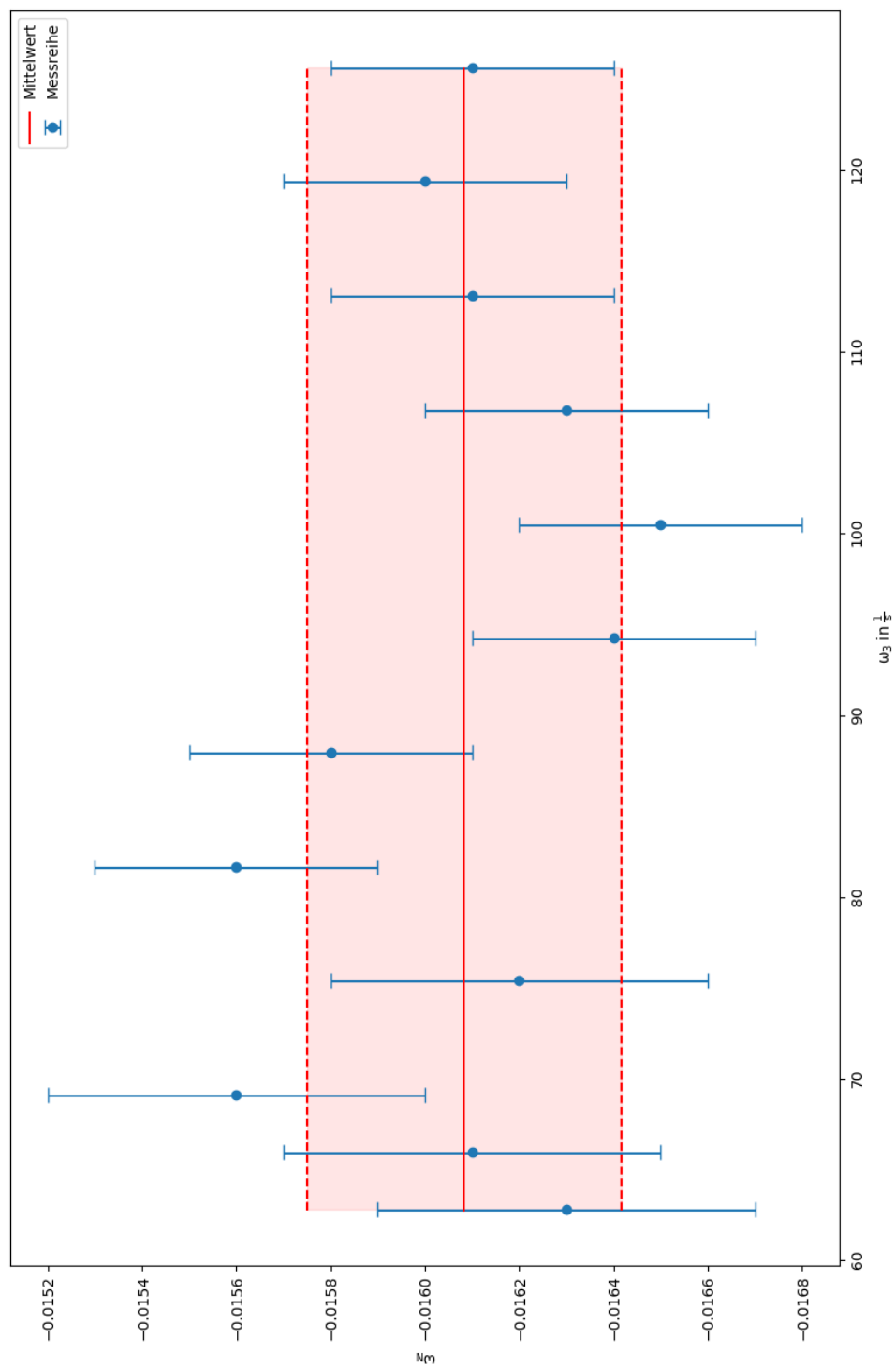
$$\overline{\omega_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \omega_N^i \quad u_{\overline{\omega_N}} = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{i=1}^M u_{\omega_N^i}^2} \quad M : \text{Anzahl der Werte} \quad (4.6)$$

Da aber die Werte von  $\omega_N$  sehr nah beieinanderliegen wird der Fehler des Mittelwerts vernachlässigt und der Fehler von  $\overline{\omega_N}$  als Mittelwert der Fehler von  $\omega_N$  abgeschätzt.

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\omega_N} = (-0.01608 \pm 0.00097)}$$

#### 4 Auswertung und Diskussion

Abbildung 4.4:  $\omega_3 - \omega_N$  Diagramm

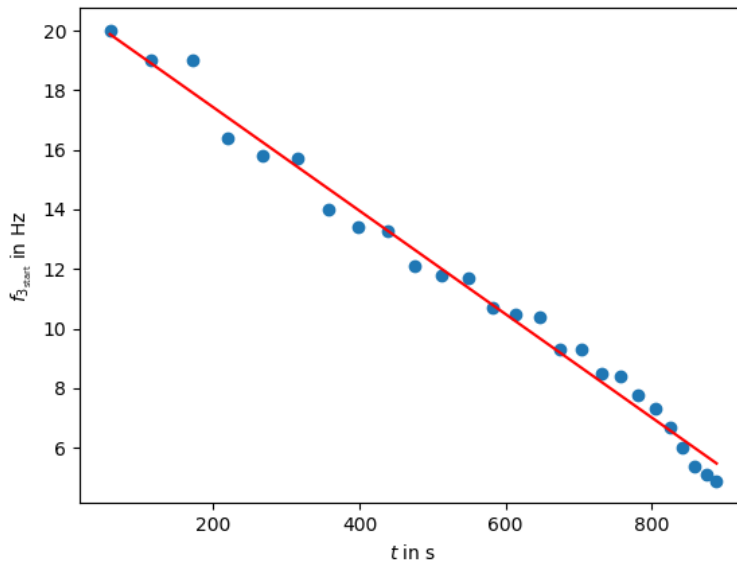


## 4.3 Präzession

Bei der Untersuchung der Präzession ist es wichtig zu erwähnen, dass bei der Versuchsdurchführung nur Frequenzintervalle gemessen werden konnten, heißt Anfangsfrequenz  $f_{3\text{start}}$  und Endfrequenz  $f_{3\text{end}}$  der dritten Hauptachse. Dabei werden die Messwerte Nr.6 aus der Messreihe 2 und Nr.8 aus Messreihe 3 nicht verwendet, da diese unvollständig und ungenau gemessen wurden.

Um die durchschnittliche Frequenz in einem Intervall  $i$  und damit die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_3^i$  in diesem Intervall zu ermitteln, wird das arithmetische Mittel gebildet. Dies kann damit begründet werden, dass man bei der Auftragung Anfangsfrequenz  $f_{3\text{start}}$  gegen die verstrichene Zeit  $t$  einen klaren linearen Zusammenhang erkennen kann (siehe Abb). Hier ist noch anzumerken, dass in den Daten der Anfangsfrequenz  $f_{3\text{start}}$  die Endfrequenz  $f_{3\text{end}}$  als darauffolgenden Datenpunkt enthalten ist und die Daten der verstrichene Zeit  $t$  einfach die Summe der Rotationsdauern  $T^i$  bis zum jeweiligen Messwert im Intervall  $i$  ist. Damit ist die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_3^i$  im jeweiligen Intervall  $i$  gegeben durch

Abbildung 4.5:  $f_3$ - $t$  Diagramm



$$\omega_3^i = 2\pi \frac{f_{3\text{start}}^i + f_{3\text{end}}^i}{2} = \pi(f_{3\text{start}}^i + f_{3\text{end}}^i) . \quad (4.7)$$

Der Fehler des Stroboskop wird abgeschätzt mit  $u_{f_3} = 0.25$  Hz. Zwar liegt der Ablesefehler des Stroboskop  $u_a = 0.005$  Hz, aber durch die verwendete Messmethode wäre dies eine zu optimistische Fehler, da die Messperson immer nur ein kleines Zeitfenster hatte um ungefähr die richtige Frequenz am Stroboskop einzustellen. Mit dem

#### 4 Auswertung und Diskussion

Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich dann der Fehler  $u_{\omega_3^i}$  mit

$$u_{\omega_3^i} = \sqrt{2\pi} u_{f_3} . \quad (4.8)$$

Weiterhin ist die Präzessionswinkelgeschwindigkeit  $\omega_p^i$  mit dem Fehler  $u_{\omega_p^i}$  für die jeweiligen Intervalle  $i$  gegeben durch

$$\omega_p^i = \frac{2\pi}{T^i} , \quad u_{\omega_p^i} = \frac{2\pi}{(T^i)^2} u_T , \quad (4.9)$$

wobei der Fehler der Zeitmessung wie in Kapitel 4.2 erläutert mit  $u_T = 0.20$  ss angesetzt wird. Das Produkt aus  $\omega_3^i$  und  $\omega_p^i$  wird abgekürzt mit  $\omega_*^i$ . Den Fehler  $u_{\omega_*^i}$  des Produkts erhält aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz und ist gegeben durch

$$u_{\omega_*^i} = \sqrt{(w_3^i u_{w_p^i})^2 + (w_p^i u_{w_3^i})^2} \quad (4.10)$$

Tabelle 4.2: Messreihe 1

	$\omega_3/\frac{1}{s}$	$u_{\omega_3}/\frac{1}{s}$	$\omega_p/\frac{1}{s}$	$u_{\omega_p}/\frac{1}{s}$	$\omega_*/\frac{1}{s^2}$	$u_{\omega_*}/\frac{1}{s^2}$
1	109.30	1.11	0.11	0.00040	12.31	0.13
2	91.29	1.11	0.13	0.00058	12.29	0.16
3	78.70	1.11	0.15	0.00074	12.00	0.18
4	69.93	1.11	0.17	0.00096	12.15	0.20
5	62.08	1.11	0.19	0.00121	12.10	0.23
6	55.79	1.11	0.22	0.00148	12.05	0.25
7	51.08	1.11	0.24	0.00178	12.09	0.28
8	47.38	1.11	0.25	0.00207	12.08	0.30
9	43.92	1.11	0.28	0.00246	12.22	0.33
10	40.21	1.11	0.30	0.00282	11.97	0.35

Tabelle 4.3: Messreihe 2

	$\omega_3/\frac{1}{s}$	$u_{\omega_3}/\frac{1}{s}$	$\omega_p/\frac{1}{s}$	$u_{\omega_p}/\frac{1}{s}$	$\omega_*/\frac{1}{s^2}$	$u_{\omega_*}/\frac{1}{s^2}$
1	114.35	1.11	0.11	0.00037	12.29	0.13
2	95.50	1.11	0.13	0.00052	12.16	0.15
3	82.00	1.11	0.15	0.00069	12.08	0.17
4	71.66	1.11	0.17	0.00090	12.06	0.20
5	63.74	1.11	0.19	0.00115	12.09	0.22

Tabelle 4.4: Messreihe 3

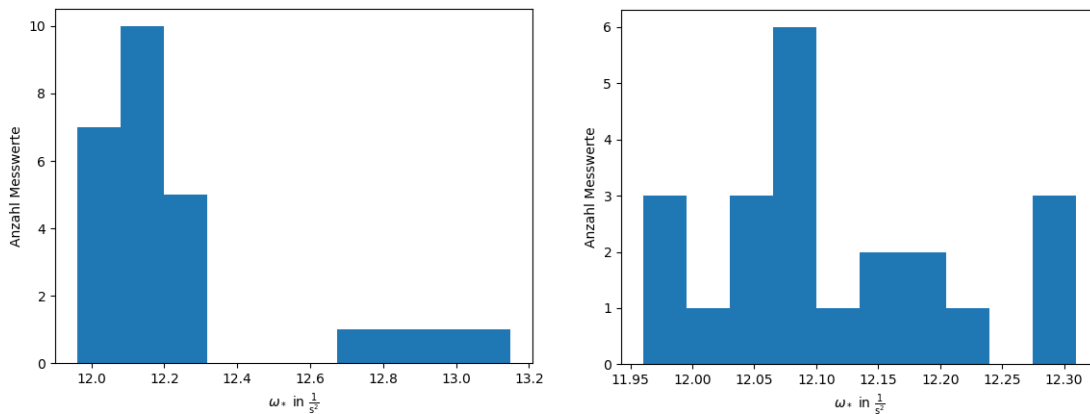
	$\omega_3/\frac{1}{s}$	$u_{\omega_3}/\frac{1}{s}$	$\omega_p/\frac{1}{s}$	$u_{\omega_p}/\frac{1}{s}$	$\omega_*/\frac{1}{s^2}$	$u_{\omega_*}/\frac{1}{s^2}$
1	109.01	1.11	0.11	0.00039	12.09	0.13
2	91.42	1.11	0.13	0.00056	12.11	0.16
3	78.85	1.11	0.15	0.00076	12.20	0.18
4	69.43	1.11	0.17	0.00095	11.96	0.20
5	61.89	1.11	0.20	0.00123	12.18	0.23
6	55.64	1.11	0.22	0.00149	12.04	0.25
7	50.71	1.11	0.24	0.00178	11.99	0.28

Bei der Messreihe 4 kann man deutlich erkennen, dass das Produkt  $\omega_*$  weit von dem Wert der anderen Messreihen abweicht. Es wird vermutet, dass hier ein systematischer Fehler vorliegt, was man auch schön an dem linken Histogramm in Abb. 4.6 erkennen kann. Das rechte Histogramm sind dabei nur die Messreihen 1-3 enthalten, was noch stärker verdeutlicht, dass hier ein systematischer Fehler vorliegen muss. Aufgrund dessen wird die Messreihe 4 aus der weiteren Auswertung ausgeschlossen wird.

Tabelle 4.5: Messreihe 4

	$\omega_3/\frac{1}{s}$	$u_{\omega_3}/\frac{1}{s}$	$\omega_p/\frac{1}{s}$	$u_{\omega_p}/\frac{1}{s}$	$\omega_*/\frac{1}{s^2}$	$u_{\omega_*}/\frac{1}{s^2}$
1	35.75	1.11	0.37	0.00431	13.15	0.44
2	32.89	1.11	0.39	0.00484	12.82	0.46
3	31.35	1.11	0.41	0.00527	12.76	0.48
4	29.91	1.11	0.43	0.00600	12.99	0.51

Durch die Auswertung wird deutlich, dass  $\omega_*$  um einen bestimmten Wert gestreut ist.

Abbildung 4.6:  $\omega_*$  Histogramme

#### 4 Auswertung und Diskussion

Weswegen wir hier den Mittelwert über alle Messreihen bilden. Der Fehler der Mittelwertbildung wird mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt und ist gegeben durch

$$u_{\omega_*} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N u_{\omega_*^i}^2} \quad N : \text{Anzahl der Intervalle} \quad (4.11)$$

Somit folgt das Ergebnis:

$$\Rightarrow \overline{w_*} = (12.11 \pm 0.05) \frac{1}{s^2}$$

In Abb 4.5 lässt sich auch die Schwankung der Messwerte der einzelnen Messreihen gut erkennen. Dabei ist anzumerken, dass für ähnliche Werte von  $w_3$  der Unterschied von  $\omega_*$  zwischen den Messreihen stark schwankt, aber im Rahmen der Messgenauigkeit bleibt.

Um das Trägheitsmoment  $J_3$  zu berechnen, wird Gleichung (2.13) aus Kapitel 2.5 umgeformt

$$\omega_p = \frac{mgl}{J_3 \omega_3} \Leftrightarrow \omega_p \omega_3 = \omega_* = \frac{mgl}{J_3} \Leftrightarrow J_3 = \frac{mgl}{\omega_*} . \quad (4.12)$$

Da die Massestückchen beide um einiges weniger wiegen als die gesamte Kugel mit Stab wird von einer neuen Berechnung des Schwerpunkts abgesehen. Dafür wird aber aufgrund der ähnlichen Masse der einzelnen Massestückchen Schwerpunkt in der Mitte der Massenstückchen angenommen. Die Erdbeschleunigung wird als fehlerfrei mit  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  angenommen.

Der Fehler der Masse  $m$  wird mit dem Ablesefehler  $u_a = 0.5$  g, welcher zugleich auch als Restfehler  $u_r$  angenommen wird, angeben als

$$u_m = \sqrt{u_a^2 + u_r^2} = \sqrt{2} u_a = 0.70710678 \text{ g} \quad (4.13)$$

Weiterhin wird die Länge  $l$  bestimmt mit der Formel und den Werten  $s_s = 87.00$  mm,  $s_m = 15.00$  mm,  $h_m = 10.00$  mm,  $d_k = 100.00$  mm,  $d_f = 96.00$  mm.

$$l = d_f - \left( \frac{d_k}{2} \right) + s_s - s_m - h_m = 108.00 \text{ mm} \quad (4.14)$$

Die Längen wurden mit einem Messschieber vermessen, dessen Restfehler  $u_r = 0.05$  mm +  $1 \cdot 10^{-4} l$  im Praktikumsskript auf S. (F-5) zu finden ist. Der Ablesefehler liegt bei  $u_a = 0.05$  mm und es wird die selbe Formel wie in (4.14) angewendet.

$u_s/\text{mm}$	$u_{s_m}/\text{mm}$	$u_{h_m}/\text{mm}$	$u_{d_k}/\text{mm}$	$u_{d_f}/\text{mm}$
0.07710830	0.07142128	0.07177917	0.07779562	0.078102496

Womit der Fehler der Länge  $l$  mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz angeben werden kann

$$u_l = \sqrt{u_s^2 + u_{s_m}^2 + u_{h_m}^2 + \left( \frac{u_{d_k}}{2} \right)^2 + u_{d_f}^2} = 0.16740370 \text{ mm} . \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \boxed{m = (48.2 \pm 0.7) \text{ g} \quad l = (108,00 \pm 0.17) \text{ mm}}$$

Daraus folgt für die Berechnung des Trägheitsmoments  $J_3$  und dessen Fehler, wobei für  $\omega_*$  der gebildete Mittelwert  $\overline{\omega}_*$  verwendet wird.

$$J_3 = 4.21692287 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad (4.16)$$

$$s_{J_3} = \sqrt{\left(\frac{gl}{\overline{\omega}_*} u_m\right)^2 + \left(\frac{mg}{\overline{\omega}_*} u_l\right)^2 + \left(\frac{mgl}{\overline{\omega}_*^2} u_{\overline{\omega}_*}\right)^2} = 0.063255404 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow \boxed{J_3 = (4.21 \pm 0.06) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2}$$

Mit dem Trägheitsmoment  $J_3$  wird nun mit Gleichung (4.4) das Trägheitsmoment  $J_1$  bzgl. der 1. Hauptachse berechnet, wobei auch hier für  $\omega_N$  der errechnete Mittelwert verwendet wird.

$$\overline{\omega}_N = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \Leftrightarrow J_1 = \frac{J_3}{1 + \overline{\omega}_N} = 4.27889013 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad (4.18)$$

$$u_{J_1} = \sqrt{\left(\frac{u_{J_3}}{1 + \overline{\omega}_N}\right)^2 + \left(\frac{J_3 u_{\overline{\omega}_N}}{(1 + \overline{\omega}_N)^2}\right)^2} = 0.069957618 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow \boxed{J_1 = (4.28 \pm 0.06) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2}$$

Prinzipiell entspricht das Ergebnis unseren Erwartungen, da  $J_3 < J_1$  erfüllt wurde. Ist das Trägheitsmoment und seine Dimension bekannt kann man damit die Dichte des Körpers errechnen. In diesem Fall handelt es sich um eine Stahlkugel der Dichte  $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ <sup>5</sup>. Für das Trägheitsmoment einer Kugel gilt folgender Zusammenhang:

$$J = \frac{8}{15} \rho \pi r^5 \Leftrightarrow \rho = \frac{15J}{8\pi r^5} = \frac{15J}{8\pi \left(\frac{d}{2}\right)^5} = \frac{60J}{\pi d^5} \quad (4.20)$$

Setzt man nun für  $J$  das Trägheitsmoment  $J_3$  ein und für  $d$   $d_k$  und nimmt an, dass der Kreisel näherungsweise eine Kugel ist, ergibt sich durch Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$u_\rho = \frac{60}{\pi} \sqrt{\left(\frac{u_{J_3}}{d_k^5}\right)^2 + \left(\frac{J_3 u_{d_k}}{d_k^6}\right)^2} \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = (8040 \pm 115) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$$

Damit wird ersichtlich, dass  $\rho$  in den richtigen Größenordnung liegt, was für die Richtigkeit des Ergebnisses spricht.

<sup>5</sup><https://www.chemie.de/lexikon/Stahl.html#:~:text=Die%20Dichte%20von%20Stahl%20bzw.,zu%201530%C2%B0C%20betragen.>

Abbildung 4.7:  $w_3$ - $w_*$  Diagramm

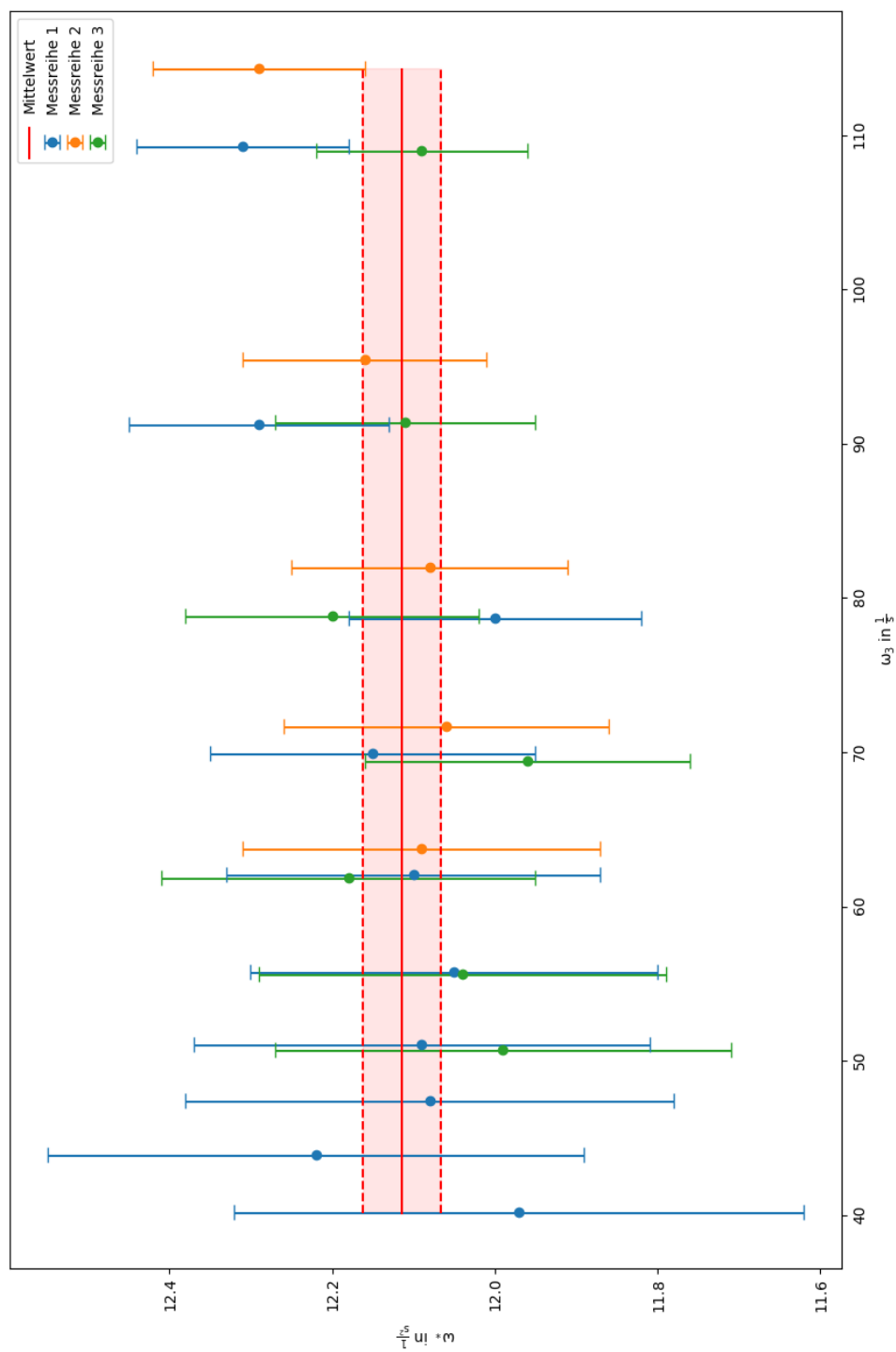
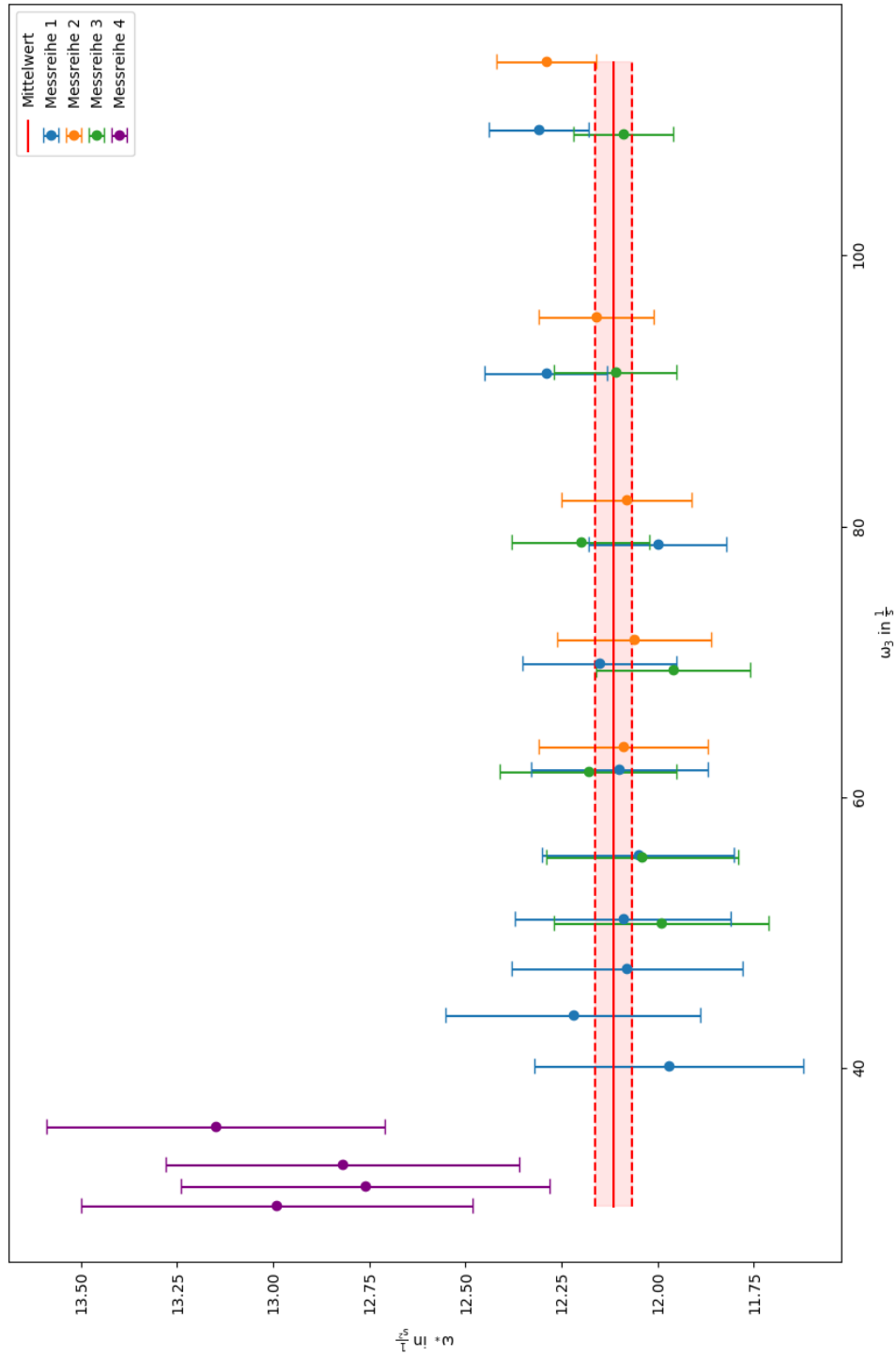




Abbildung 4.8:  $w_3$ - $w_*$  Diagramm mit Messreihe 4

## 5 Fazit

Der Versuch Kreisel hat uns demonstrativ gezeigt, wie sich die einzelnen Formen der Bewegung Rotation verhalten. Dabei wurde das Verständnis für die Präzession und Nutation noch einmal stark verfestigt. Abschließend lässt es sich sagen das dieser Versuch für seine Einfachheit sehr viel Wissen für Theorie und Praxis geliefert und den Studenten gut im Gedächtnis bleiben wird.