

Physikalisches Praktikum B

Sommersemester 2021

Versuch Kre

Der Kreisel

Gruppe: 6

Versuchstag: 22.03.2021

Betreuer: Michael Beckstein

Auswerteperson

Messperson

Protokollperson

Dominik Müller

Anna-Maria Pleyer

Paul Schwanitz



UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Fragen zur Vorbereitung	6
2.1	Anschauliche Festlegung des Trägheitsmoment	6
2.2	Bestimmung der Komponenten des Trägheitstensor	6
2.3	Trägheitstensor eines ungewuchteten Rades	7
2.4	Nutation des momentenfreien Kreisel	8
2.5	Präzessionsfrequenz und Präzessionsrichtung des Kreisels	9
2.6	Funktionsprinzip eines Kreiselkompasses	10
2.7	Bierfilz-Wurf	10
3	Auswertung	11
3.1	Qualitative Beobachtung verschiedener Kreiselbewegung	11
3.2	Nutation	13
3.3	Präzession	17
4	Fazit	20
A	Messprotokoll	21
	Literaturverzeichnis	29

1 Einleitung

Ein Kreisel kann ein einfaches Holzspielzeug oder ein komplexes Bauteil zur Navigation sein. Die grundlegenden physikalischen Prinzipien sind beiden Beispielen gleich. Die Prinzipien werden durch die Rotation beschrieben. Wichtige Begriffe sind hierbei das Trägheitsmoment, Drehimpuls und Drehmoment, welche Äquivalente in der Translation haben.

In diesem Versuch werden Nutation und Präzession anhand eines Kreisels untersucht. Diese sind meistens nicht ganz so intuitiv wie Auswirkungen der Translation.

2 Fragen zur Vorbereitung

2.1 Anschauliche Festlegung des Trägheitsmoment

Wodurch wird das Trägheitsmoment eines Körpers anschaulich festgelegt?

Das Trägheitsmoment wird festgelegt durch: $J = \sum dm_i (r_i^\perp)^2 = \int (r^\perp)^2 \rho dV$.

Das Trägheitsmoment ist bei der Rotation das Äquivalent zur Masse bei der Translation.

„[Dieses] berücksichtigt, dass sich die einzelnen Massenteile in der Rotation um so mehr auswirken, je weiter sie von der Achse entfernt sind.“ (Meschede, 2015, S. 80)

2.2 Bestimmung der Komponenten des Trägheitstensor

Der Drehimpuls eines Punktes der Masse m mit Ortsvektor \vec{r} und Geschwindigkeit \vec{v} bezogen auf den Koordinatenursprung ist gegeben durch $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Der Drehimpuls eines rotierenden starren Körpers kann durch Summation über viele kleine Massenelemente ausgedrückt werden. Bestimmen Sie durch komponentenweisen Vergleich dieses Ausdrucks mit Gl. (1) die Komponenten des Trägheitstensor \mathbf{J} ! Was drücken die Diagonalelemente aus?

Es werde ein starrer Körper mit i Massenelementen m_i betrachtet. Somit beträgt der Gesamtdrehimpuls \vec{L} :

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{L}_i \quad (2.1)$$

Der Drehimpuls \vec{L}_i ist gegeben durch:

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \quad (2.2)$$

Die Geschwindigkeit \vec{v}_i kann mithilfe der Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt werden:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] \quad (2.3)$$

Das doppelte Kreuzprodukt kann mit Hilfe der Graßmann-Identität¹ umgeschrieben werden:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i] \quad (2.4)$$

$$= \sum_i m_i [r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i] \quad (2.5)$$

¹ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

Nun betrachtet man die einzelnen Komponenten:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \right] \quad (2.6)$$

$$= \sum_i m_i \cdot \left[\begin{pmatrix} r_{i1}^2 + r_{i2}^2 + r_{i3}^2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} - (r_{i1}\omega_1 + r_{i2}\omega_2 + r_{i3}\omega_3) \cdot \begin{pmatrix} r_{i1} \\ r_{i2} \\ r_{i3} \end{pmatrix} \right] \quad (2.7)$$

$$= \sum_i m_i \cdot \left[\begin{pmatrix} r_{i1}^2 \cdot \omega_1 + r_{i2}^2 \cdot \omega_1 + r_{i3}^2 \cdot \omega_1 \\ r_{i1}^2 \cdot \omega_2 + r_{i2}^2 \cdot \omega_2 + r_{i3}^2 \cdot \omega_2 \\ r_{i1}^2 \cdot \omega_3 + r_{i2}^2 \cdot \omega_3 + r_{i3}^2 \cdot \omega_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{i1} \cdot r_{i2} \cdot \omega_1 + r_{i2}^2 \cdot \omega_2 + r_{i2} \cdot r_{i3} \cdot \omega_3 \\ r_{i1} \cdot r_{i3} \cdot \omega_1 + r_{i2} \cdot r_{i3} \cdot \omega_2 + r_{i3}^2 \cdot \omega_3 \end{pmatrix} \right] \quad (2.8)$$

$$= \sum_i m_i \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \cdot (r_{i2}^2 + r_{i3}^2) - \omega_2 \cdot (r_{i1}r_{i2}) - \omega_3 \cdot (r_{i1}r_{i3}) \\ -\omega_1 \cdot (r_{i1}r_{i2}) + \omega_2 \cdot (r_{i1}^2 + r_{i3}^2) - \omega_3 \cdot (r_{i2}r_{i3}) \\ -\omega_1 \cdot (r_{i1}r_{i3}) - \omega_2 \cdot (r_{i2}r_{i3}) + \omega_3 \cdot (r_{i1}^2 + r_{i2}^2) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$= \sum_i m_i \cdot \begin{pmatrix} r_{i2}^2 + r_{i3}^2 & -r_{i1} \cdot r_{i2} & -r_{i1} \cdot r_{i3} \\ -r_{i1} \cdot r_{i2} & r_{i1}^2 + r_{i3}^2 & -r_{i2} \cdot r_{i3} \\ -r_{i1} \cdot r_{i3} & -r_{i2} \cdot r_{i3} & r_{i1}^2 + r_{i2}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$= \left[\sum_i m_i \cdot \begin{pmatrix} r_{i2}^2 + r_{i3}^2 & -r_{i1} \cdot r_{i2} & -r_{i1} \cdot r_{i3} \\ -r_{i1} \cdot r_{i2} & r_{i1}^2 + r_{i3}^2 & -r_{i2} \cdot r_{i3} \\ -r_{i1} \cdot r_{i3} & -r_{i2} \cdot r_{i3} & r_{i1}^2 + r_{i2}^2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$= \underline{J} \cdot \vec{\omega} \quad (2.12)$$

Der Trägheitstensor \underline{J} ist ein Tensor 2. Stufe und hat eine 3x3 Form.

$$\underline{J} = \sum_i m_i \cdot \begin{pmatrix} r_{i2}^2 + r_{i3}^2 & -r_{i1} \cdot r_{i2} & -r_{i1} \cdot r_{i3} \\ -r_{i1} \cdot r_{i2} & r_{i1}^2 + r_{i3}^2 & -r_{i2} \cdot r_{i3} \\ -r_{i1} \cdot r_{i3} & -r_{i2} \cdot r_{i3} & r_{i1}^2 + r_{i2}^2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Somit folgt für eine Komponente des Drehimpulses:

$$L_a = \sum_{\beta} J_{a\beta} \omega_{\beta} \quad (2.14)$$

Der Koeffizient kann (durch eine äquivalente Schreibweise) wie folgt berechnet werden, wobei $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 = r^2$ gilt:

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i \left[m_i \left(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha i} x_{\beta i} \right) \right] \quad (2.15)$$

Die Diagonalelemente sind die Hauptträgheitsmomente des Körpers, bei Drehung an den Hauptträgheitsachsen.

2.3 Trägheitstensor eines ungewuchteten Rades

Welche Gestalt hat der Trägheitstensor eines Rades bei Rotation um seine Achse qualitativ, wenn das Rad nicht ausgewuchtet ist, und was hat dies zur Folge? Was passiert beim Auswuchten des Rades?

Bei einem ausgewuchten Rades, ist die Rotationsachse parallel zur Radachse. Somit hat der Trägheitstensor die Gestalt eines Diagonaltensors.

Der Trägheitstensor eines ungewuchteten Rades ist nicht zwangsläufig diagonalisiert. Anschaulich heißt dies, dass weitere kleine Rotationen auftreten, welche die Rotation des Rades beeinflusst.

Beim wuchten werden kleine Gewichte am Rad angebracht und gleichen so die vorhandenen Drehmomente des ungewuchteten aus.

2.4 Nutation des momentenfreien Kreisel

Beschreiben Sie anhand von Skizzen die Rotationsverhältnisse und die Lage der verschiedenen Achsen bei der Nutation des momentefreien Kreisels!

Wird ein momentefreier (drehender) Kreisel, bspw. durch einen kleinen Schlag aus der Gleichgewichtslage herausgebracht, so fängt dieser das nutieren an. Die Richtung des Drehimpulses verändert sich dabei nicht. Die Figuren- und Rotationsachse sind nicht mehr parallel zu dem Drehimpuls. Dadurch entsteht ein Drehmoment und die Dreh- und Figurenachse nutieren um den Drehimpuls.

Skizze:

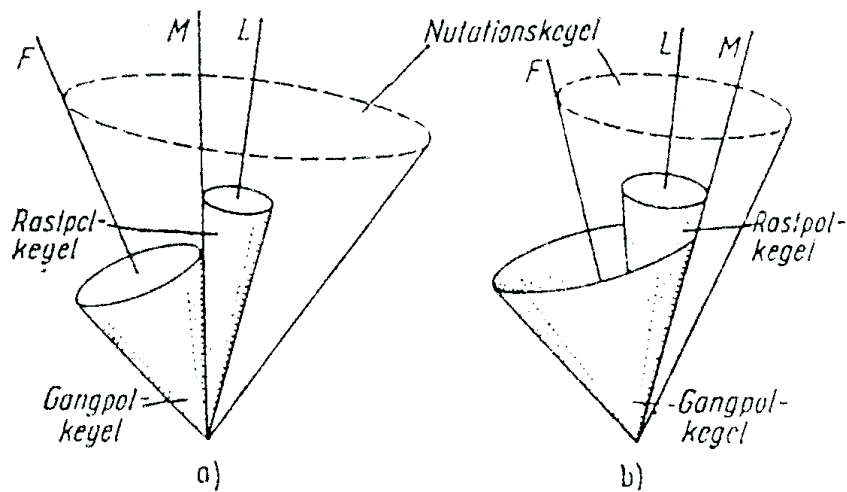


Abbildung 2.1: Nutationsbewegung eines Kreisel (vgl. Universität-Aachen, 2003)

Im Fall a) spricht man von einem verlängerten Kreisel, da die Figurenachte die Hauptträgheitsachse mit dem kleinsten Trägheitsmoment ist.

Im Fall b) spricht man von einem abgeplatteten Kreisel, da die Figurenachte die Hauptträgheitsachse mit dem größten Trägheitsmoment ist. (vgl. Universität-Aachen, 2003)

Die Rotation kommt dadurch zustande, dass der Raspolkegel den Gangpolkegel abrollt. Der Nutationskegel beschreibt die so entstandene Bewegung, der Rotationsachse um den ortsfesten Drehimpuls.

2.5 Präzessionsfrequenz und Präzessionsrichtung des Kreisels

Zeigen Sie, dass die Präzessionsfrequenz durch Gl. (12) gegeben ist! Wie hängt diese vom Winkel zwischen der Figurenachse und der Horizontalen ab? Wie hängt die Präzessionsrichtung von der Drehrichtung des Kreisels ab?

Ein Kreisel, welcher um den Winkel α zu seiner Figurenachse gedreht ist, übt folgendes Drehmoment aus:

$$M = m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha) \quad (2.16)$$

Der präzessierende Kreisel, dessen Drehimpuls und Rotationsachse nicht zusammen fallen, übt auch ein Drehmoment aus.

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{L} \quad (2.17)$$

$$M = \omega_P \cdot L \cdot \sin(\alpha) \quad (2.18)$$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$M = \omega_P \cdot L \cdot \sin(\alpha) \quad (2.19)$$

$$m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha) = \omega_P \cdot L \cdot \sin(\alpha) \quad (2.20)$$

$$\omega_P = \frac{m \cdot g \cdot r}{L} \quad (2.21)$$

2 Fragen zur Vorbereitung

Da sich der Kreisel um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment dreht, folgt für den Drehimpuls: $L = J_3 \cdot \omega_3$. Somit folgt für die Präzessionsfrequenz:

$$\omega_P = \frac{m \cdot g \cdot r}{L} \quad (2.22)$$

$$= \frac{m \cdot g \cdot r}{J_3 \cdot \omega_3} \quad (2.23)$$

2.6 Funktionsprinzip eines Kreiselkompasses

Beschreiben Sie das Funktionsprinzip eines Kreiselkompasses!

Ein Kreiselkompass besteht aus einem schnell drehenden Kreisel, welcher an einer Kardanischen Aufhängung aufgehängt wird. An einer Kardanischen Aufhängung kann sich der Kreisel um jede Achse frei drehen. Sein Drehimpuls zeigt nach Norden. Es wird ein Drehmoment erzeugt, wenn dieser nun nicht mehr nach Norden zeigt. Dieser versucht jedoch sich wieder nach Norden auszurichten um die Drehimpulserhaltung nicht zu verletzen.

Ein Kreiselkompass hat den entscheidenden Vorteil zu einem konventionellen Kompass, dass dieser unabhängig von Erdmagnetfeld ist.

2.7 Bierfilz-Wurf

Wirft man einen Bierfilz schräg nach oben, und gibt ihm gleichzeitig eine Drehung um seine Figurenachse wie einem Diskus, so richtet er sich senkrecht auf (Probieren Sie es ruhig aus!). Warum? In welche Richtung geschieht das Aufrichten und wie rotiert der senkrecht stehende Bierfilz? Warum passiert dies nicht beim Diskus?

Wirft man ein Bierfilz oder Spielkarte schräg nach oben, während sich dieses um seine Figurenachse dreht, richtet sich seine Figurenachse horizontal aus. Hierbei ist es egal, wie schräg es nach oben geworfen wurde, es ist immer das gleiche zu beobachten. Bei einer stärkeren Drehung um seine eigene Achse tritt das Ergebnis schneller ein.

Die Beobachtung kann erklärt werden, dass sowohl durch den Luftwiderstand als auch die Gravitation eine Kraft auf den Bierfilz wirkt. Diese Kraft bewirkt ein Drehmoment, welches der Filz kippt. Somit "kippt" der Filz in die Horizontale, damit die angreifenden Kräfte minimal werden (Gravitationskraft parallel zum Drehimpuls).

Der Diskus ist so konzipiert, dass einen sehr großen Abstand zum Mittelpunkt hat. Dies führt zu einem sehr großen Trägheitsmoment. Somit reichen die angreifenden Kräfte nicht aus ein so großes Drehmoment zu erzeugen. Dieser würde eher auf dem Boden ankommen bevor er in die Horizontale kippt.

3 Auswertung

3.1 Qualitative Beobachtung verschiedener Kreiselbewegung

Bei diesem Teil des Versuches wurde ein nutationsfreier Kreisel beobachtet. Es wurde bei verschiedenen Drehzahlen mit dem Finger Kräfte auf die Figurenachse ausgeübt. Es wurde zwei Fälle betrachtet.

1. Fall: keine Kraftausübung

- Zuerst wurde der Kreisel auf die entsprechende niedrige Frequenz gebracht (ca. $f = 1,1 \text{ Hz}$) und anschließend ohne den Einsatz von äußeren Einflüssen, d.h. es wurde keine zusätzliche Kraft auf hin ausgeübt, beobachtet. Der Kreisel rotierte wie erwartet und man konnte lediglich die Rotationsachse sehen. Die Rotationsachse fällt mit der Figurenachse zusammen, sie können nicht voneinander unterschieden werden.
- Nun wurde die Frequenz erhöht. Die ungefähr eingestellte Drehfrequenz betrug in etwa $f = 25 \text{ Hz}$. Auch hier wurde quantitativ beobachtet, dass die Drehimpulsachse, Figurenachse und die Rotationsachse übereinander lagen.

2. Fall: geringe Kraftausübung

- Der Kreisel wurde wieder auf die niedrig Drehfrequenz gebracht. Diesmal wurde jedoch auf den Kreisel eine Kraft ausgeübt. Bei leichter Kraftausübung mit dem Finger konnte man beobachten, dass der Kreisel versucht dieser Kraft entgegenzuwirken. Wenn diese Kraft nun senkrecht zur Drehachse ausgeübt wurde, kam es zur einer leichten Präzessionsbewegung. Wie bereits in den Fragen zur Vorbereitung diskutiert (2.5), präzediert ein Kreisel immer in die Richtung des Drehimpulses, dies wurde auch bei dem Versuch beobachtet. Die ausgeübte Kraft lenkte die Figurenachse aus, woraufhin sich diese Achse in die selbe Richtung bewegt, wie der Drehimpuls.
- Es wurde auch hier die Drehfrequenz erhöht. Hier kam es auch zur einer Präzessionsbewegung, allerdings war diese hier stärker ausgeprägt. Aber qualitativ wurde beobachtet, dass auch hier der Kreisel in Richtung des Drehimpulses präzediert.

3 Auswertung

Als nächstes wurde nun die Nutation genauer beobachtet. Nutation ruft man hervor, indem man den Kreisel mit einer Stange einen Schlag versetzt, dadurch trennen sich die Figurenachse, Drehimpulsvektor und momentane Drehachse voneinander.

- Zuerst wurde die Nutation ohne Stoboskop beobachtet. Wenn man nun von oben auf den rotierenden Kreisel sieht, kann man einen formstabilen Punkt erkennen, der eine Kreisbewegung ausführt. Auf dem Kreisel sind 3 verschiedene Farben angebracht, somit erkennt man das der Punkt die Farbe "wechselt". Zur Verdeutlichung wird das in Abbildung 3.1 schematisch dargestellt.

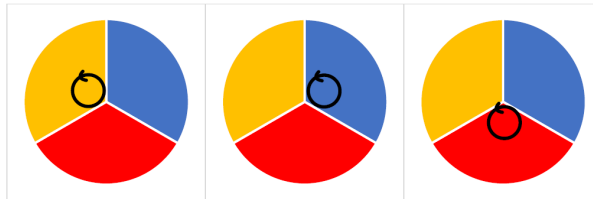


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Nutation

- Als letztes wurde der Kreisel noch mit dem Stroboskop beleuchtet. Das Stroboskoplicht wurde auf die Drehfrequenz des Kreisels eingestellt. So erkennt man, dass die Gewindestange eine Kegelförmige Bewegung ausführt und somit einen Nutationskegel bildet. Zur genaueren Erläuterung wurde während dem Versuch ein Bild aufgenommen und der entstehende Kegel nach skizziert, dies ist in der folgenden Abbildung 3.2 zu erkennen.

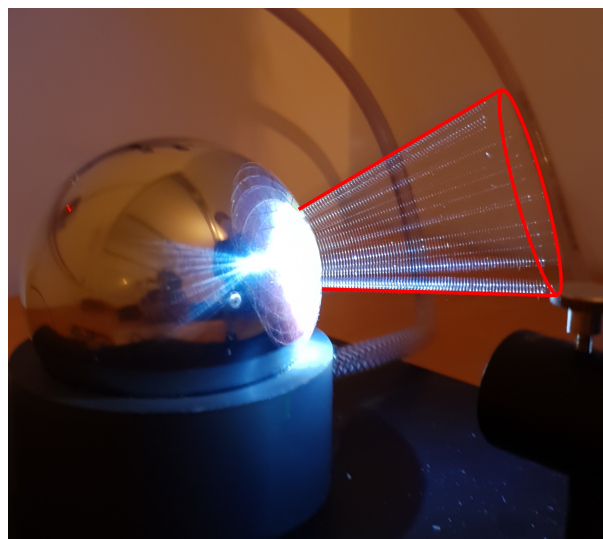


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Nutation

3.2 Nutation

Bei diesem Teil des Versuches wurde ein Kreisel bei bekannter Rotationsfrequenz in eine Nutationsbewegung gebracht. Anschließend wurde die Nutationsdauer für 10 Umdrehungen bestimmt. Diese Messung wurde jeweils zwei mal für 11 Frequenzen (10 Hz – 20 Hz) durchgeführt. Es ergibt sich folgende Wertetabelle: Bei manchen Rotationsfrequenzen wurde ein drittes mal gemessen, da die vorangegangenen

Rotationsfrequenz ω_3 in Hz	Messung 1 T_{n10} in s	Messung 2 T_{n10} in s	Messung 3 T_{n10} in s
10	57,88	57,54	57,62
11	52,16	54,29	53,10
12	50,78	50,38	-
13	47,31	47,40	-
14	46,03	43,22	44,63
15	40,59	40,60	-
16	36,66	36,63	-
17	34,07	34,63	-
18	30,75	30,88	-
19	29,18	29,41	-
20	27,31	27,16	-

Tabelle 3.1: Wertetabelle: Nutation

Messungen etwas auseinander lagen.

Nun wird jeweils der Mittelwert aus den Nutationsdauern (T_{n10}) bestimmt.

Somit folgt diese Wertetabelle:

f_3 in Hz	$\overline{T_{n10}}$ in s
10	57,680
11	53,183
12	50,580
13	47,355
14	44,627
15	40,595
16	36,645
17	34,350
18	30,815
19	29,295
20	27,235

Der Fehler von $\overline{T_{n10}}$ ist der Ablesefehler der Stoppuhr. Da jeweils 10 Umdrehungen gemessen wurden, beträgt der Fehler für eine Umdrehung nur $\frac{1}{10}$ des Ablesefehlers. Dieser wurde etwas größer abgeschätzt, da man noch die Reaktionszeit der Messperson und den ungenauen Nulldurchgang nicht genau festmachen kann. Der Fehler für die Rotationsfrequenz ist gleich dem Ablesefehler des Stroposkops:

$$s_{\overline{T_{n10}}} = 0,5 \text{ s}$$

$$s_{\omega_3} = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \text{ Hz}$$

3 Auswertung

Nun wird jeweils ω_n für eine Rotationsfrequenz bestimmt:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\overline{T_{n10}}} \cdot 10$$

$$s_{\omega_n} = \frac{20\pi}{\left(\overline{T_{n10}}\right)^2} \cdot s_{\overline{T_{n10}}}$$

Es ergibt sich folgende Tabelle:

$\overline{T_{n10}}$ in s	ω_n in Hz	s_{ω_n}
57,680	1,0893178	0,0094428
53,183	1,1814274	0,0111072
50,580	1,2422272	0,0122798
47,355	1,3268262	0,0140094
44,627	1,4079336	0,0157745
40,595	1,5477732	0,0190636
36,645	1,7146092	0,0233949
34,350	1,8291660	0,0266254
30,815	2,0390022	0,0330846
29,295	2,1447979	0,0366069
27,235	2,3070260	0,0423541

Nun soll das Verhältnis aus ω_n und ω_3 gegen ω_3 in einem Diagramm gegen ω_3 aufgetragen werden. Desweiteren ist folgendes gegeben:

$$\frac{\omega_n}{\omega_3} = \frac{J_3 - J_1}{J_1}$$

Da $J_1 > J_3$ ist, muss das Verhältnis negativ sein. Für die Berechnung des Fehler des Verhältnisses folgt:

$$V = \frac{\omega_n}{\omega_3}$$

$$s_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \omega_3} \cdot s_{\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega_n} \cdot s_{\omega_n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\omega_n}{(\omega_3)^2} \cdot s_{\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{s_{\omega_n}}{\omega_3}\right)^2}$$

Es folgt die Wertetabelle mit den berechneten Werten:

$\frac{\omega_n}{\omega_3}$	$s \frac{\omega_n}{\omega_3}$	ω_3 in Hz	s_{ω_3} in Hz
-0,017337032	0,0008797827	62,83185307	3,141592654
-0,017093637	0,0007934291	69,11503838	3,141592654
-0,016475550	0,0007055366	75,39822369	3,141592654
-0,016243919	0,0006478805	81,68140899	3,141592654
-0,016005685	0,0005991002	87,96459430	3,141592654
-0,016422384	0,0005835875	94,24777961	3,141592654
-0,017055533	0,0005815744	100,5309649	3,141592654
-0,017124754	0,0005619765	106,8141502	3,141592654
-0,018028738	0,0005799774	113,0973355	3,141592654
-0,017966062	0,0005635244	119,3805208	3,141592654
-0,018358730	0,0005694294	125,6637061	3,141592654

Tabelle 3.2: Wertetabelle: Nutationsfrequenz

Somit ergibt sich folgender Plot:

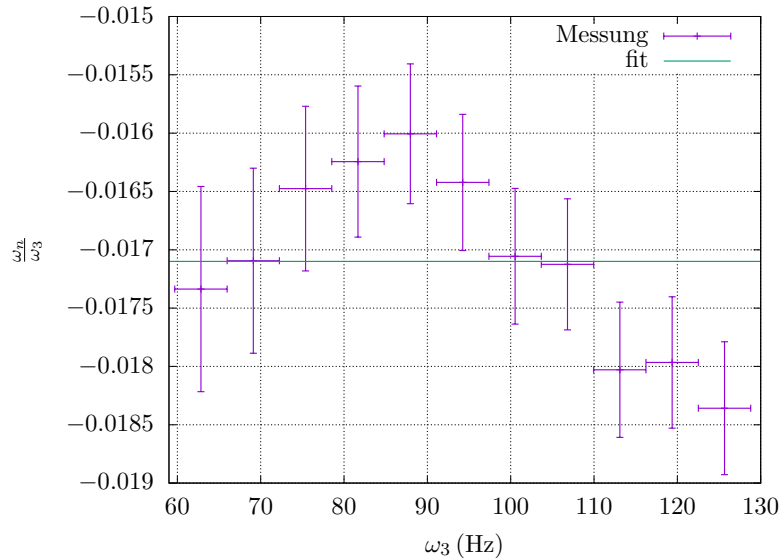


Abbildung 3.3: Nutation

Es ist zu erkennen, dass die gefittete Linie ($f(x) = ax + b$; $a = (-2,32 \pm 0,97) \cdot 10^{-5}$; $b = (17,1 \pm 0,9) \cdot 10^{-3}$) beinahe eine Parallele zur x-Achse ist. Dies ist auch richtig, da das Verhältnis von ω_n zu ω_3 durch die Trägheitsmomente des Kreisel gegeben sind und sich diese während der Nutation nicht ändern können.

3 Auswertung

Nun wird der Mittelwert des Verhältnisses und sein Fehler berechnet:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\omega_n}}{\omega_3} &= \frac{1}{11} \cdot \sum_{i=1}^{11} \left(\frac{\omega_n}{\omega_3} \right)_i \\ &= -0,017101093\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{\frac{\omega_n}{\omega_3}} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{11} \left(\frac{\partial \overline{\omega_n}}{\partial \left(\frac{\omega_n}{\omega_3} \right)_i} \cdot \left(s_{\frac{\omega_n}{\omega_3}} \right)_i \right)^2} \\ &= \frac{1}{11} \sqrt{\sum_{i=1}^{11} \left(s_{\frac{\omega_n}{\omega_3}} \right)_i^2} \\ &= 0,0001960942\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\frac{J_3 - J_1}{J_3} = -0,01710 \pm 0,00020$$

3.3 Präzession

Zuerst soll das Produkt der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_3 \cdot \omega_p$ gegen ω_3 aufgetragen werden. Es gilt:

$$\omega_3 = 2\pi f_3 \quad (3.1)$$

$$\omega_3 \cdot \omega_p = 4\pi^2 \frac{f_3}{T_p} \quad (3.2)$$

Wobei f_3 die Rotationsfrequenz ist, die im Messprotokoll fälschlicherweise mit ω_3 benannt wurde, und T_p die Zeit für eine Präzessionsumdrehung ist. Es ergeben sich folgende Werte:

Messreihe 2:

f_3 in Hz	T_p in s	ω_3 in 1/s	$\omega_3 \cdot \omega_p$ in 1/s ²	$s_{\omega_3 \cdot \omega_p}$ in 1/s ²
16,72	57,53	105,054858	11,473651	0,357309
14,61	49,58	91,797337	11,633313	0,415054
12,89	43,78	80,990259	11,623499	0,470009
11,52	39,62	72,382295	11,478833	0,518846
10,41	36,00	65,407959	11,415842	0,570775
9,50	32,98	59,690260	11,371891	0,622857
8,66	30,96	54,412385	11,042736	0,662044
8,09	28,12	50,830969	11,357767	0,730436
7,60	25,13	47,752208	11,939354	0,820619
7,02	24,48	44,107961	11,321017	0,838840

Tabelle 3.3: Wertetabelle: Präzession - Messreihe 2

Messreihe 3:

f_3 in Hz	T_p in s	ω_3 in 1/s	$\omega_3 \cdot \omega_p$ in 1/s ²	$s_{\omega_3 \cdot \omega_p}$ in 1/s ²
16,86	57,19	105,934504	11,638505	0,359838
14,52	49,15	91,231851	11,662800	0,418770
12,77	44,19	80,236276	11,408450	0,464967
11,43	37,96	71,816808	11,887205	0,543062
10,23	35,70	64,276986	11,312723	0,575172
9,36	32,00	58,810614	11,547437	0,642696
8,49	29,95	53,344243	11,191044	0,685041
7,90	28,03	49,637164	11,126632	0,731652
7,40	25,71	46,495571	11,362905	0,798933
6,94	24,02	43,605306	11,406337	0,855395

Tabelle 3.4: Wertetabelle: Präzession - Messreihe 3

Für die Fehler gilt:

$$s_{f_3} = 0,5 \text{ Hz} \quad (3.3)$$

$$s_{T_p} = 0,5 \text{ s} \quad (3.4)$$

$$s_{\omega_3 \cdot \omega_p} = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{s_{f_3}}{T_p}\right)^2 + \left(\frac{f_3}{T_p^2} s_{T_p}\right)^2} \quad (3.5)$$

3 Auswertung

Trägt man nun $\omega_3 \cdot \omega_p$ gegen ω_3 auf, so ergibt sich folgendes Grafik:

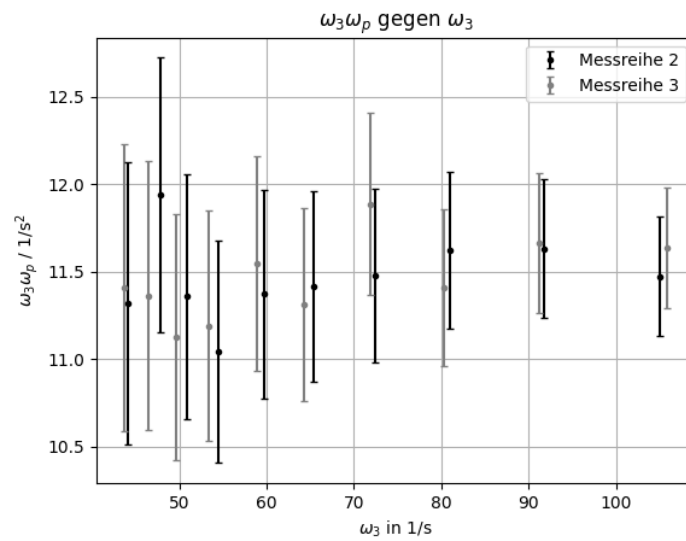


Abbildung 3.4: Präzession

Da es sich bei $\omega_3 \cdot \omega_p$ um eine Konstante handelt bedienen wir uns der Statistik um einen genaueren Wert zu ermitteln.

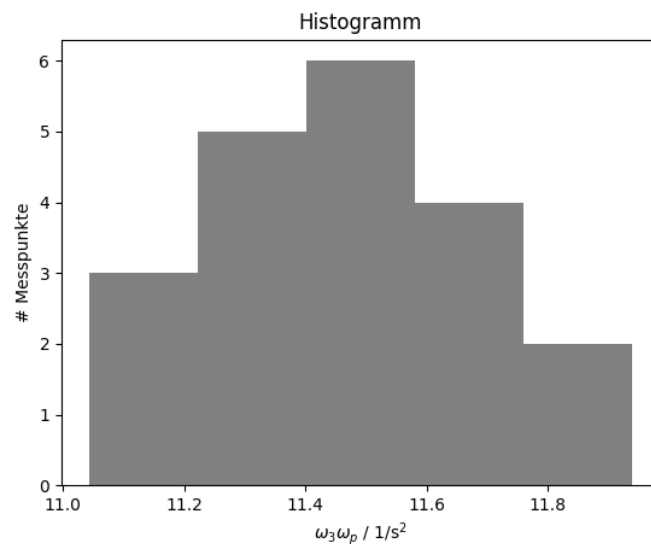


Abbildung 3.5: Histogramm der errechneten Werte

Somit ergibt sich als Mittelwert und die Standardabweichung des Mittelwerts:

$$\omega_3 \cdot \omega_p = (11,46 \pm 0,05) \frac{1}{s^2} \quad (3.6)$$

Für diese Berechnung wurden folgende Formeln verwendet:

$$\omega_3 \cdot \omega_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\omega_3 \cdot \omega_p)_{(i)} \quad (3.7)$$

$$s_{\omega_3 \cdot \omega_p} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((\omega_3 \cdot \omega_p)_{(i)} - \overline{(\omega_3 \cdot \omega_p)})^2} \quad (3.8)$$

Wobei n die Anzahl der Messwerte ist.

Mit Hilfe der Gleichung (12) aus der Versuchsanleitung lässt sich folgende Formel für das Trägheitsmoment herleiten:

$$J_3 = \frac{mgl}{\omega_3 \cdot \omega_p} \quad (3.9)$$

$$s_{J_3} = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{s_{f_3}}{T_p}\right)^2 + \left(\frac{f_3}{T_p^2} s_{T_p}\right)^2} \quad (3.10)$$

Der Fehler der Frequenz wurde, aufgrund der Messmethode, mit $s_{f_3} = 0,5$ Hz veranschlagt. Durch einsetzen der Werte:

$$m = (48,3 \pm 0,02) \text{ g} \quad (3.11)$$

$$l = (96,2 \pm 0,1) \text{ mm} \quad (3.12)$$

folgt

$$J_3 = (3,98 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (3.13)$$

Aus der vorherigen Aufgabe wissen wir:

$$J_1 = \frac{J_3}{\frac{\omega_n}{\omega_3} + 1} \quad (3.14)$$

Für den Fehler gilt also:

$$s_{J_1} = \frac{1}{\frac{\omega_n}{\omega_3} + 1} \sqrt{s_{J_3}^2 + \left(\frac{J_3}{\frac{\omega_n}{\omega_3} + 1} s_{\frac{\omega_n}{\omega_3}}\right)^2} \quad (3.15)$$

Somit ergibt sich:

$$J_1 = (4,05 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (3.16)$$

Wie zu erwarten war gilt $J_3 < J_1$ und sie unterscheiden sich nur geringfügig, da der Kreisel näherungsweise eine Kugel ist.

Um nun besser einschätzen zu können ob die Werte plausibel sind vergleichen wir sie mit denen einer ähnlich dimensionierten Stahlkugel.

Für das Trägheitsmoment einer Kugel gilt:

$$J = \frac{8}{15} \pi \rho r^5 \quad (3.17)$$

Für den Radius setzen wir $r = 0,05 \text{ m}$ an und für die Dichte von Stahl gilt $\rho \approx 7700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Mit diesen Werten ergibt sich ein Trägheitsmoment von $J \approx 4,03 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, welcher sehr gut zu den von uns ermittelten passt.

4 Fazit

Durch diesen Versuch haben wir ein tiefes Verständnis von der Rotation erhalten. Es konnten die durch Nutation oder Präzession hergerufenen Bewegungen gemessen und erklärt werden. Es wurde auch der Umgang mit einem Stroposkop geübt, um Rotationsfrequenzen zu messen. Außerdem wurde anhand der gemessenen Frequenzen das Trägheitsmoment bestimmt. Alle Messungen stimmten mit der Theorie überein, da keine großen Abweichungen aufgetreten sind.

A Messprotokoll

Versuch Kre: Der Kreisel

1. Allgemeines

Ort: Universität Bayreuth, NW II

Raum: 2.2.02.699 (Kre)

Datum: 22.03.2021

Start: 09:30 Uhr

Ende:

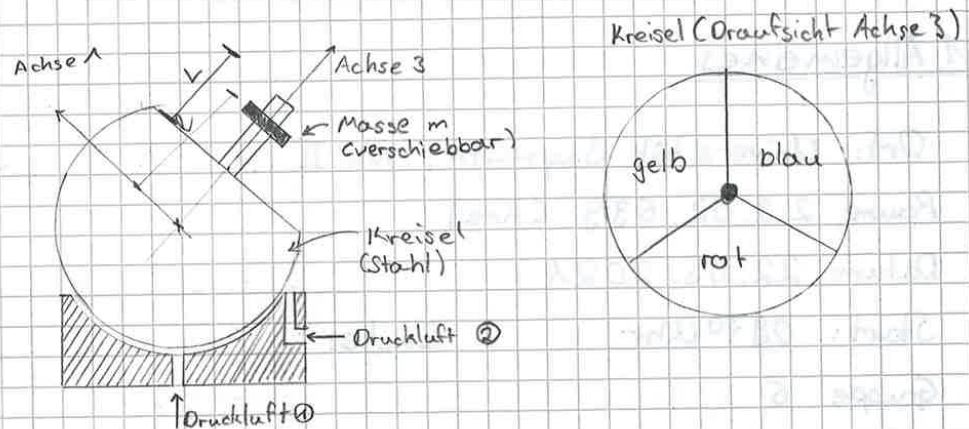
Gruppe: 6

Messperson: Anna-Maria Pleyer

Auswerteperson: Dominik Müller

Protokollperson: Paul Schwanitz

2. Versuchsaufbau



Kreisel: Besteht aus einer Stahlkugel mit abgeschnittenen Kreisfläche, welche in drei gleich großen Bereiche aufgeteilt ist (oben rechts).

Außerdem ragt aus der Mitte dieser Fläche eine Gewindestange, mit deren Hilfe ein Massestück m in einem variablen Abstand l vom Mittelpunkt befestigt werden kann.

Der Kreisel selbst liegt in einer Schale und kann unter Zuhilfenahme von Druckluft annähernd reibungsfrei gedreht werden (oben links) (Druckluft 1).

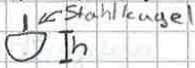
Mithilfe der Düse (Druckluft 2) kann der Kreisel ebenfalls in seiner Rotation beeinflusst werden.

Die Drehfrequenz wird mithilfe eines Stroboskop und der Markierten Flächen bestimmt.

3.1. Maße

Durchmesser der Stahlkugel $D = 100 \text{ mm}$ (Messschieber Gr.)

Durchmesser der Abgeschnittenen Kreisfläche $\bar{D} = 43,8 \text{ mm}$ (Messschieber Kl.)

Höhe von der Kreisfläche $h = 96,2 \text{ mm}$ (Messschieber Gr.) 

Länge der Gewindestange $L = 81,9 \text{ mm}$ (Messschieber Kl.)

Durchmesser der Gewindestange $d = 6 \text{ mm}$ (Messschieber Kl.)

Gewichte (beide gleich) $m = 24,15 \text{ g}$ (Balkenwaage)

Durchmesser der Gewichte $d_m = 20 \text{ mm}$ (Messschieber Kl.)

Höhe der Gewichte $h_m = 10 \text{ mm}$ (Messschieber Kl.)

3.2. Verwendete Geräte

Messschieber Gr. Serien Nr.: Ca 102971

Messschieber Kl. Serien Nr.: 41220497

$s_a = 0,05 \text{ mm}$ $s_r = 0,05 \text{ mm} + 1 \cdot 10^{-4} \cdot L$

Balkenwaage Serien Nr.: 31505

$s_a = 10 \text{ mg}$ $s_r = 10 \text{ mg}$

Stoppuhr CG501

~~$s_a = 0,05 \text{ s}$~~ ~~$s_r =$~~

$s_a = 0,01 \text{ s}$

Stroboskop

Serien Nr.: ELUB 820-3

$s_a = 0,01 \text{ Hz}$

4. Qualitative Beobachtungen verschiedener Kreiselbewegungen

4.1 Nutationsfrei

Es wird bei verschiedenen Drehzahlen Kraft auf die Figurenachse ausgeübt (nutationsfrei rotierender Kreisel).

Drehfrequenz: $f = 1,1 \text{ Hz}$

Keine Kraftausübung: Trivialer Fall, Drehung bei ruhender Dreh- bzw. Figurenachse.

Kleine / Schwache Kraftausübung:

- Kreisel versucht der Kraft entgegen zu wirken.
- Bei Kraftkomponente senkrecht zur Drehachse kommt es zu einer Präzessionsbewegung (in Richtung des Drehimpulses).

Drehfrequenz: $f = 25,25 \text{ Hz}$

Die Erde dreht

Es treten die gleichen Effekte wie bei $f = 1,1 \text{ Hz}$ auf nur stärker. (bei gleicher Krafteinwirkung).

4.2 Kreisel mit Nutation

Durch einen Stoß an der Gewindestange wird eine Nutationsbewegung verursacht, dies lässt sich mittels Drehimpulserhaltung erklären (genauer siehe Fragen zur Vorbereitung).

Ohne Stroboskop:

Es ist ein Kreis / Punkt zu sehen, welcher Form stabil ist und die Farbe wechselt. Dieser Punkt führt kleine Kreisbewegungen aus.

Mit Stroboskop:

Durch das Stroboskop ist sichtbar, dass die Gewindestange den Nutationskegel bildet. (Gewindestange führt eine kegelförmige Bewegung aus.)

5. Nutation

Bestimmung der Nutationsfrequenz abh. von ω_3 .

1. Bringe Kreisel auf ω_3
2. Versetze Kreisel in Nutation
3. Vermesse Zeit für 10 Nutationszyklen T_{10}

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ω_3 in Hz	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a) T_{10} in s	57,88	26,25	50,78	47,31	46,08	40,59	36,66	34,07	30,75	29,18	27,31
b) T_{10} in s	53,05	52,16	50,38	47,40	43,22	40,60	36,63	34,63	30,88	29,11	27,16
c) Ersatzmessung T_{10} in s	57,34	54,29			44,63						
d) Ersatzmessung T_{10} in s	57,62	53,10									

Bemerkungen:

Messung Nr. 1 a und b: Drehzahl wurde nicht konstant gehalten
deshalb wurden 2 Ersatzmessungen
durchgeführt.

6. Präzession

Abstand Kreisfläche - Unterseite Gewicht 40mm (Messschieber Kl.)

Beide Gewichte montiert (gegeneinander verschraubt)

Runde Nr.	ω_3/H_2	T/s
1	18,23	63,17
2	16,69	57,83
3	15,47	53,32
4	14,39	50,34
5	13,46	47,10
6	12,66	42,93
7	11,95	41,96
8	11,27	36,09
9	10,62	37,23
10	10,20	35,86

Messreihe 1/
Testmessung

Runde Nr.	ω_3/H_2	T/s
1	16,72	57,53
2	14,61	49,59
3	12,89	43,78
4	11,52	39,62
5	10,41	36,00
6	9,50	32,98
7	8,66	30,96
8	8,09	28,12
9	7,60	25,13
10	7,02	24,48

Messreihe 2

Runde Nr.	ω_3/H_2	T/s
1	16,86	57,19
2	14,52	49,15
3	12,77	44,19
4	11,43	39,96
5	10,23	35,70
6	9,36	32,00
7	8,49	29,95
8	7,90	28,03
9	7,40	25,71
10	6,94	24,02

Messreihe 3

T: Präzessionsumdrehungszeit

7. Unterschriften

Dominik Mülle

Dominik Müller

Anna-Maria Pleyer

Anna-Maria Pleyer

Paul Schwanitz

Paul Schwanitz

Literaturverzeichnis

MESCHEDE, D. 2015 *Gerthsen Physik*, 25. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

UNIVERSITÄT-AACHEN 2003 Zusammenfassung der Kreiselbewegungen. URL <https://web.physik.rwth-aachen.de/~fluegge/Vorlesung/PhysIpub/Exscript/6Kapitel/VI12Kapitel.html> – Zugriffsdatum: 10.04.2021.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Nutationsbewegung eines Kreisel (vgl. Universität-Aachen, 2003)	9
3.1	Schematische Darstellung der Nutation	12
3.2	Schematische Darstellung der Nutation	12
3.3	Nutation	15
3.4	Präzession	18
3.5	Histogramm der errechneten Werte	18