Physikalisches Praktikum B
Sommersemester 2021

Versuch Kre
Der Kreisel

Gruppe: 6
Versuchstag: 22.03.2021
Betreuer: Michael Beckstein

Auswerteperson	Messperson	Protokollperson
Dominik Müller	**Anna-Maria Pleyer**	**Paul Schwanitz**

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Fragen zur Vorbereitung **6**
- 2.1 Anschauliche Festlegung des Trägheitsmoment . . . 6
- 2.2 Bestimmung der Komponenten des Trägheitstensor . . . 6
- 2.3 Trägheitstensor eines ungewuchteten Rades . . . 7
- 2.4 Nutation des momentenfreien Kreisel . . . 8
- 2.5 Präzessionsfrequenz und Präzessionsrichtung des Kreisels . . . 9
- 2.6 Funktionsprinzip eines Kreiselkompasses . . . 10
- 2.7 Bierfilz-Wurf . . . 10

3 Auswertung **11**
- 3.1 Qualitative Beobachtung verschiedener Kreiselbewegung . . . 11
- 3.2 Nutation . . . 13
- 3.3 Präzession . . . 16

4 Fazit **19**

A Messprotokoll **20**

Literaturverzeichnis **29**

1 Einleitung

in

Ein Kreisel kann ein einfaches Holzspielzeug oder ein komplexes Bauteil zur Navigation sein. Die grundlegenden physikalischen Prinzipien sind beiden Beispielen gleich. Die Prinzipien werden durch die Rotation beschrieben. Wichtige Begriffe sind hierbei das Trägheitsmoment, Drehimpuls und Drehmoment, welche Äquivalente in der Translation haben.

In diesem Versuch werden Nutation und Präzession anhand eines Kreisel untersucht. Diese sind meistens nicht ganz so intuitiv wie Auswirkungen der Translation.

2 Fragen zur Vorbereitung

2.1 Anschauliche Festlegung des Trägheitsmoment

d unkursiv

Wodurch wird das Trägheitsmoment eines Körpers anschaulich festgelegt?
Das Trägheitsmoment wird festgelegt durch: $J = \sum dm_\mathrm{i}(r_\mathrm{i}^\perp)^2 = \int (r^\perp)^2 \rho dV$.
Das Trägheitsmoment ist bei der Rotation das Äquivalent zur Masse bei der Translation.
„[Dieses] berücksichtigt, dass sich die einzelnen Massenteile in der Rotation um so mehr auswirken, je weiter sie von der Achse enternt sind.“ (Meschede, 2015, S. 80) ✓

2.2 Bestimmung der Komponenten des Trägheitstensor

Der Drehimpuls eines Punktes der Masse m mit Ortsvektor $\vec{r}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ bezogen auf den Koordinatenursprung ist gegeben durch $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Der Drehimpuls eines rotierenden starren Körpers kann durch Summation über viele kleine Massenelemente ausgedrückt werden. Bestimmen Sie durch komponentenweisen Vergleich dieses Ausdrucks mit Gl. (1) die Komponenten des Trägheitstensor J! Was drücken die Diagonalelemente aus?
Es werde ein starrer Körper mit i Massenelementen m_i betrachtet. Somit beträgt der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \sum_\mathrm{i} m_\mathrm{i} \vec{L}_\mathrm{i} . \tag{2.1}$$

(Lauf-) Indizies kursiv

Der Drehimpuls $\vec{L}_\mathrm{i}$ ist gegeben druch:

$$\vec{L} = \sum_\mathrm{i} m_\mathrm{i} \left(\vec{r}_\mathrm{i} \times \vec{v}_\mathrm{i}\right) . \tag{2.2}$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}_\mathrm{i}$ kann mithilfe der Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt werden:

$$\vec{L} = \sum_\mathrm{i} m_\mathrm{i} \left[\vec{r}_\mathrm{i} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\mathrm{i}\right)\right] . \tag{2.3}$$

Das doppelte Kreuzprodukt kann mit Hilfe der Graßmann-Identität[1] umgeschrieben werden:

$$\vec{L} = \sum_\mathrm{i} m_\mathrm{i} \left[\left(\vec{r}_\mathrm{i} \cdot \vec{r}_\mathrm{i}\right) \vec{\omega} - \left(\vec{r}_\mathrm{i} \cdot \vec{\omega}\right) \vec{r}_\mathrm{i}\right] \tag{2.4}$$

$$= \sum_\mathrm{i} m_\mathrm{i} \left[r_\mathrm{i}^2 \vec{\omega} - \left(\vec{r}_\mathrm{i} \cdot \vec{\omega}\right) \vec{r}_\mathrm{i}\right] . \tag{2.5}$$

[1] $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c}$

Formeln gehören zum Satz
→ Punkt (oder Komma, falls passend) beim Satzende dahinter

Nun betrachtet man die einzelnen Komponenten:

$$\vec{L} = \sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \left[r_{\mathrm{i}}^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_{\mathrm{i}} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}_{\mathrm{i}} \right] \tag{2.6}$$

$$= \sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \cdot \left[\left(r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i2}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} - (r_{\mathrm{i1}}\omega_1 + r_{\mathrm{i2}}\omega_2 + r_{\mathrm{i3}}\omega_3) \cdot \begin{pmatrix} r_{\mathrm{i1}} \\ r_{\mathrm{i2}} \\ r_{\mathrm{i3}} \end{pmatrix} \right] \tag{2.7}$$

$$= \sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \cdot \left[\begin{pmatrix} r_{\mathrm{i1}}^2 \cdot \omega_1 + r_{\mathrm{i2}}^2 \cdot \omega_1 + r_{\mathrm{i3}}^2 \cdot \omega_1 \\ r_{\mathrm{i1}}^2 \cdot \omega_2 + r_{\mathrm{i2}}^2 \cdot \omega_2 + r_{\mathrm{i3}}^2 \cdot \omega_2 \\ r_{\mathrm{i1}}^2 \cdot \omega_3 + r_{\mathrm{i2}}^2 \cdot \omega_3 + r_{\mathrm{i3}}^2 \cdot \omega_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{\mathrm{i1}}^2 \cdot \omega_1 + r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i2}} \cdot \omega_2 + r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \cdot \omega_3 \\ r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i2}} \cdot \omega_1 + r_{\mathrm{i2}}^2 \cdot \omega_2 + r_{\mathrm{i2}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \cdot \omega_3 \\ r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \cdot \omega_1 + r_{\mathrm{i2}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \cdot \omega_2 + r_{\mathrm{i3}}^2 \cdot \omega_3 \end{pmatrix} \right] \tag{2.8}$$

$$= \sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \cdot (r_{\mathrm{i2}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2) - \omega_2 \cdot (r_{\mathrm{i1}} r_{\mathrm{i2}}) - \omega_3 \cdot (r_{\mathrm{i1}} r_{\mathrm{i3}}) \\ -\omega_1 \cdot (r_{\mathrm{i1}} r_{\mathrm{i2}}) + \omega_2 \cdot (r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2) - \omega_3 \cdot (r_{\mathrm{i2}} r_{\mathrm{i3}}) \\ -\omega_1 \cdot (r_{\mathrm{i1}} r_{31}) - \omega_2 \cdot (r_{\mathrm{i2}} r_{\mathrm{i3}}) + \omega_3 \cdot (r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i2}}^2) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$= \sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \cdot \begin{pmatrix} r_{\mathrm{i2}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2 & -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i2}} & -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \\ -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i2}} & r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2 & -r_{\mathrm{i2}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \\ -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{31} & -r_{\mathrm{i2}} \cdot r_{\mathrm{i3}} & r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i2}}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$= \left[\sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \cdot \begin{pmatrix} r_{\mathrm{i2}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2 & -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i2}} & -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \\ -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i2}} & r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2 & -r_{\mathrm{i2}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \\ -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{31} & -r_{\mathrm{i2}} \cdot r_{\mathrm{i3}} & r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i2}}^2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$= \underline{J} \cdot \vec{\omega}. \tag{2.12}$$

Der Trägheitstensor $\underline{J}$ ist ein Tensor 2. Stufe und hat eine 3x3 Form.

$$\underline{J} = \sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \cdot \begin{pmatrix} r_{\mathrm{i2}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2 & -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i2}} & -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \\ -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{\mathrm{i2}} & r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i3}}^2 & -r_{\mathrm{i2}} \cdot r_{\mathrm{i3}} \\ -r_{\mathrm{i1}} \cdot r_{31} & -r_{\mathrm{i2}} \cdot r_{\mathrm{i3}} & r_{\mathrm{i1}}^2 + r_{\mathrm{i2}}^2 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Somit folgt für eine Komponente des Drehimpulses:

$$L_a = \sum_{\beta} J_{\alpha\beta} \omega_{\beta} . \tag{2.14}$$

Der Koeffizient kann (durch eine äquivaltene Schreibweiße) wie folgt berechnet werden, wobei $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\sum_\alpha x_\alpha^2 = r^2$ gilt:

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{\mathrm{i}} \left[m_{\mathrm{i}} \left(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha i} x_{\beta i} \right) \right]. \tag{2.15}$$

Die Diagonalelemente sind die Hauptträgheitsmomente des Körpers, bei Drehung an den Hauptträgheitsachsen.

2.3 Trägheitstensor eines ungewuchteten Rades

Welche Gestalt hat der Trägheitstensor eines Rades bei Rotation um seine Achse qualitativ, wenn das Rad nicht ausgewuchtet ist, und was hat dies zur Folge? Was passiert beim Auswuchten des Rades?

Bei einem ausgewuchteten Rades, ist die Rotationsachse parallel zur Radachse. Somit hat der Trägheitstensor die Gestalt eines Diagonaltensors.

Der Trägheitstensor eines ungewuchteten Rades ist nicht zwangsläufig diagonalisiert. Anschaulich heißt dies, dass weitere kleine Rotationen auftreten, welche die Rotation des Rades beeinflusst.

Beim wuchten werden kleine Gewichte am Rad angebracht und gleichen so die vorhandenen Drehmomente des ungewuchteten aus.

2.4 Nutation des momentenfreien Kreisel

Beschreiben Sie anhand von Skizzen die Rotationsverhältnisse und die Lage der verschieden Achsen bei der Nutation des momentefreien Kreisels!

Wird ein momentefreier (drehender) Kreisel, bspw. durch einen kleinen Schlag aus der Gleichgewichtslage herausgebracht, so fängt dieser das N nutieren an. Die Richtung des Drehimpulses verändert sich dabei nicht. Die Figuren- und Rotationsachse sind nicht mehr parallel zu dem Drehimpuls. Dadurch entsteht ein Drehmoment und die Dreh- und Figurenachse nutieren um den Drehimpuls.

Skizze:

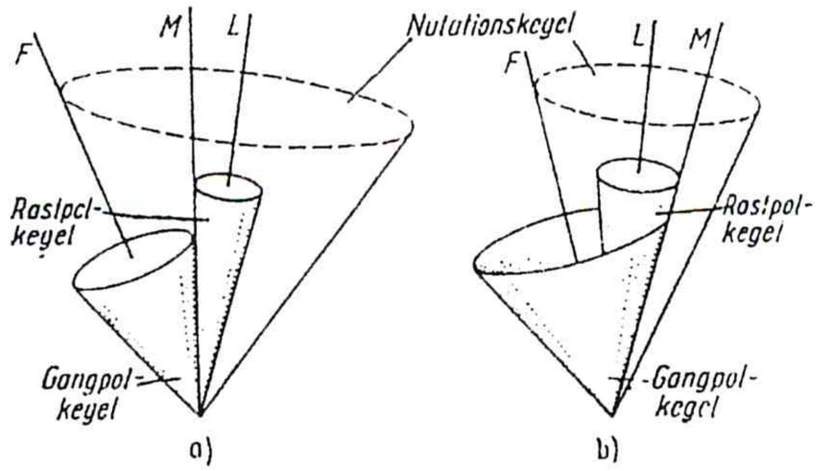


Abbildung 2.1: Nutationsbewegung eines Kreisel (vgl. Universität-Aachen, 2003)

Im Fall a) spricht man von einem verlängerten Kreisel, da die Figurenachte die Hauptträgheitsachse mit dem kleinsten Trägheitsmoment ist.
Im Fall b) spricht man von einem abgeplatteten Kreisel, da die Figurenachte die Hauptträgheitsachse mit dem größten Trägheitsmoment ist. (vgl. Universität-Aachen, 2003)
Die Rotation kommt dadurch zustande, dass der Raspolkegel den Gangpolkegel abrollt. Der Nutationskegel beschreibt die so entstandene Bewegung, der Rotationsachse um den ortsfesten Drehimpuls. ✓

2.5 Präzessionsfrequenz und Präzessionsrichtung des Kreisels

Zeigen Sie, dass die Präzessionsfrequenz durch Gl. (12) gegeben ist! Wie hängt diese vom Winkel zwischen der Figurenachse und der Horizontalen ab? Wie hängt die Präzessionsrichtung von der Drehrichtung des Kreisels ab?
Ein Kreisel, welcher um den Winkel α zu seiner Figurenachse gedreht ist, übt folgendes Drehmoment aus:

$$M = m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha). \tag{2.16}$$

Der präzendirende Kreisel, dessen Drehimpuls und Rotationsachse nicht zusammen fallen, übt auch ein Drehmoment aus.

$$\vec{M} = \vec{\omega}_{\mathrm{P}} \times \vec{L} \tag{2.17}$$
$$M = \omega_{\mathrm{P}} \cdot L \cdot \sin(\alpha) \tag{2.18}$$

hier unkursiv passt

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$M = \omega_{\mathrm{P}} \cdot L \cdot \sin(\alpha) \tag{2.19}$$
$$m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha) = \omega_P \cdot L \cdot \sin(\alpha) \tag{2.20}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_{\mathrm{P}} = \frac{m \cdot g \cdot r}{L}. \tag{2.21}$$

Da sich der Kreisel um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment dreht, folgt für den Drehimpuls: $L = J_3 \cdot \omega_3$. Somit folgt für die Präzessionsfrequenz:

$$\omega_P = \frac{m \cdot g \cdot r}{L} \tag{2.22}$$
$$= \frac{m \cdot g \cdot r}{J_3 \cdot \omega_3} \tag{2.23}$$

2.6 Funktionsprinzip eines Kreiselkompasses

Beschreiben Sie das Funktionsprinzip eines Kreiselkompasses!
Ein Kreiselkompass besteht aus einem schnell drehenden Kreisel, welcher an einer Kardanischen Aufhängung aufgehangen wird. An einer Kardanischen Aufhängung kann sich der Kreisel um jede Achse frei drehen. Sein Drehimpuls zeigt nach Norden. Es wird ein Drehmoment erzeugt, wenn dieser nun nicht mehr nach Norden zeigt. Dieser versucht jedoch sich wieder nach Norden auszurichten um die Drehimpulserhaltung nicht zu verletzen.
Ein Kreiselkompasses hat den entscheidenden Vorteil zu einem konventionellen Kompass, dass dieser unabhängig von Erdmagnetfeld ist. und vorallem auch auf den geographischen Nordpol zeigt (und nicht auf den magnetischen)

2.7 Bierfilz-Wurf

Wirft man einen Bierfilz schräg nach oben, und gibt ihm gleichzeitig eine Drehung um seine Figurenachse wie einem Diskus, so richtet er sich senkrecht auf (Probieren Sie es ruhig aus!). Warum? In welche Richtung geschieht das Aufrichten und wie rotiert der senkrecht stehende Bierfilz? Warum passiert dies nicht beim Diskus?
Wirft man ein Bierfilz oder Spielkarte schräg nach oben, während sich dieses um seine Figurenachse dreht, richtet sich seine Figurenachse horizontal aus. Hierbei ist es egal, wie schräg es nach oben gewurfen wurde, es ist immer das gleiche zu beobachten. Bei einer stärkteren Drehung um seine eigene Achse tritt das Ergebnis schneller ein.
Die Beobachtung kann erklärt werden, dass sowohl durch den Luftwiderstand als auch die Gravitation eine Kraft auf den Bierfilz wirkt. Diese Kraft bewirkt ein Drehmoment, welches der Filz kippt. Somit "kippt"der Filz in die Horizontale, damit die angreifenden Kräft minimal werden (Gravitationskraft parallel zum Drehimpuls).
Der Diskus ist so konzipert, dass einen sehr großen Abstand zum Mittelpunkt hat. Dies führt zu einen sehr großen Trägheitsmoment. Somit reichen die angreifenden Kräft nicht aus ein so großes Drehmoment zu erzeugen. Dieser würde eher auf dem Boden ankommen bevor er in die Horizontale kippt.

3 Auswertung

3.1 Qualitative Beobachtung verschiedener Kreiselbewegung

Bei diesem Teil des Versuches wurde ein nutationsfreier Kreisel beobachtet. Es wurde bei verschiedenen Drehzahlen mit dem Finger Kräfte auf die Figurenachse ausgeübt. Es wurde zwei Fälle betrachtet.

1. Fall: keine Kraftausübung

- Zuerst wurde der Kreisel auf die entsprechende niedrige Frequenz gebracht (ca. $f = 1,1\,\text{Hz}$) und anschließend ohne den Einsatz von äußeren Einflüssen, d.h. es wurde keine zusätzliche Kraft auf hin ausgeübt, beobachtet. Der Kreisel rotierte wie erwartet und man konnte lediglich die Rotationsachse sehen. Die Rotationsachse fällt mit der Figurenachse zusammen, sie können nicht voneinander unterschieden werden.
- Nun wurde die Frequenz erhöht. Die ungefähr eingestellte Drehfrequenz betrug in etwa $f = 25\,\text{Hz}$. Auch hier wurde quantitativ beobachtet, dass die Drehimpulsachse, Figurenachse und die Rotationsachse übereinander lagen.

2. Fall: geringe Kraftausübung

- Der Kreisel wurde wieder auf die niedrig Drehfrequenz gebracht. Diesmal wurde jedoch auf den Kreisel eine Kraft ausgeübt. Bei leichter Kraftausübung mit dem Finger konnte man beobachten, dass der Kreisel versucht dieser Kraft entgegenzuwirken. Wenn diese Kraft nun senkrecht zur Drehachse ausgeübt wurde, kam es zur einer leichten Präzessionsbewegung. Wie bereits in den Fragen zur Vorbereitung diskutiert (2.5), präzediert ein Kreisel immer in die Richtung des Drehimpulses, dies wurde auch bei dem Versuch beobachtet. Die ausgeübte Kraft lenkte die Figurenachse aus, woraufhin sich diese Achse in die selbe Richtung bewegt, wie der Drehimpuls.
- Es wurde auch hier die Drehfrequenz erhöht. Hier kam es auch zur einer Präzessionsbewegung, allerdings war diese hier stärker ausgeprägt. Aber qualitativ wurde beobachtet, dass auch hier der Kreisel in Richtung des Drehimpulses präzediert.

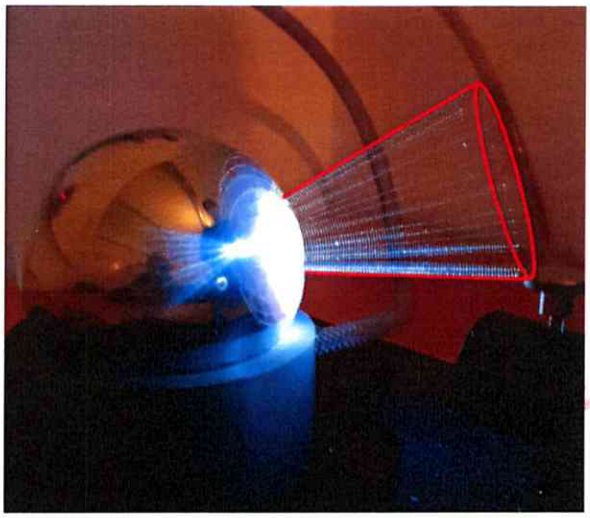
wo wurde das diskutiert?

Als nächstes wurde nun die Nutation genauer beobachtet. Nutation ruft man hervor, indem man den Kreisel mit einer Stange einen Schlag versetzt, dadurch trennen sich die Figurenachse, Drehimpulsvektor und momentane Drehachse voneinander.

- Zuerst wurde die Nutation ohne Stoboskop beobachtet. Wenn man nun von oben auf den rotierenden Kreisel sieht, kann man einen formstabilen Punkt erkennen, der eine Kreisbewegung ausführt. Auf dem Kreisel sind 3 verschiedene Farben angebracht, somit erkennt man das der Punkt die Farbe "wechselt". Zur Verdeutlichung wird das in Abbildung 3.1 schematisch dargestellt.

Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Nutation

- Als letztes wurde der Kreisel noch mit dem Stroboskop beleuchtet. Das Stroboskoplicht wurde auf die Drehfrequenz des Kreisels eingestellt. So erkennt man, dass die Gewindestange eine Kegelförmige Bewegung ausführt und somit einen Nutationskegel bildet. Zur genaueren Erläuterung wurde während dem Versuch ein Bild aufgenommen und der entstehende Kegel nach skizziert, dies ist in der folgenden Abbildung 3.2 zu erkennen.



Kitsch

Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Nutation

3.2 Nutation

Bei diesem Teil des Versuches wurde ein Kreisel bei bekannter Rotationsfrequenz in eine Nutationsbewegung gebracht. Anschließend wurde die Nutationsdauer für 10 Umdrehungen bestimmt. Diese Messung wurde jeweils zwei mal für 11 Frequenzen (10 Hz – 20 Hz) durchgeführt. Es ergibt sich folgende Wertetabelle: Bei manchen Rotationsfrequenzen wurde ein drittes mal gemessen, da die vorangeganenen

Rotationsfrequenz $\cancel{\omega_3}$ f in Hz	Messung 1 $T_{n_{10}}$ in s	Messung 2 $T_{n_{10}}$ in s	Messung 3 $T_{n_{10}}$ in s
10,00	57,88	57,54	57,62
11,00	52,16	54,29	53,10
12	50,78	50,38	-
13	47,31	47,40	-
14	46,03	43,22	44,63
15	40,59	40,60	-
16	36,66	36,63	-
17	34,07	34,63	-
18	30,75	30,88	-
19	29,18	29,41	-
20	27,31	27,16	-

immer so genau angeben wie ihr auch gemessen habt!

Tabelle 3.1: Wertetabelle: Nutation

Messungen etwas auseinander lagen.
Nun wird jeweils der Mittelwert aus den Nutationsdauern ($T_{n_{10}}$) bestimmt.
Somit folgt diese Wertetabelle:

f_3 in Hz	$\overline{T_{n_{10}}}$ in s
10,00	57,680
11,00	53,183
12	50,580
13	47,355
14	44,627
15	40,595
16	36,645
17	34,350
18	30,815
19	29,295
20	27,235

Der Fehler von $\overline{T_{n_{10}}}$ ist der Ablesefehler der Stoppuhr. Da jeweils 10 Umdrehungen gemessen wurden, beträgt der Fehler für eine Umdrehung nur $\frac{1}{10}$ des Ablesefehlers. Der Fehler für die Rotationsfrequenz ist gleich dem Ablesefehler des Stroposkops:

$$s_{\overline{T_{n_{10}}}} = 0,01\,\mathrm{s}$$
$$s_{\omega_3} = 2 \cdot \pi \cdot 0,01\,\mathrm{Hz} \quad \frac{1}{s}$$

und Euer Messfehler!
→ „Reaktionszeit", etc..

Nun wird jeweils ω_n für eine Rotationsfrequenz bestimmt:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\overline{T_{n_{10}}}} \cdot 10$$
$$s_{\omega_n} = \frac{20\pi}{\left(\overline{T_{n_{10}}}\right)^2} \cdot s_{\overline{T_{n_{10}}}}$$

f in Hz
ω in 1/s

Es ergibt sich folgende Tabelle:

$\overline{T_{n_{10}}}$ in s	ω_n in Hz	s_{ω_n}
57,680	1,0893178	0,0001889
53,183	1,1814274	0,0002221
50,580	1,2422272	0,0002456
47,355	1,3268262	0,0002802
44,627	1,4079336	0,0003155
40,595	1,5477732	0,0003813
36,645	1,7146092	0,0004679
34,350	1,8291660	0,0005325
30,815	2,0390022	0,0006617
29,295	2,1447979	0,0007321
27,235	2,3070260	0,0008471

Nun soll das Verhältnis aus ω_n und ω_3 gegen ω_3 in einem Diagramm gegen ω_3 aufgetragen werden. Desweiteren ist folgendes gegeben:

$$\frac{\omega_n}{\omega_3} = \frac{J_3 - J_1}{J_1}$$

Da $J_1 > J_3$ ist, muss das Verhältnis negativ sein. Für die Berechung des Fehler des Verhältnisses folgt:

$$V = \frac{\omega_n}{\omega_3}$$

$$s_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \omega_3} \cdot s_{\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega_n} \cdot s_{\omega_n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\omega_n}{(\omega_3)^2} \cdot s_{\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{s_{\omega_n}}{\omega_3}\right)^2}$$

✓

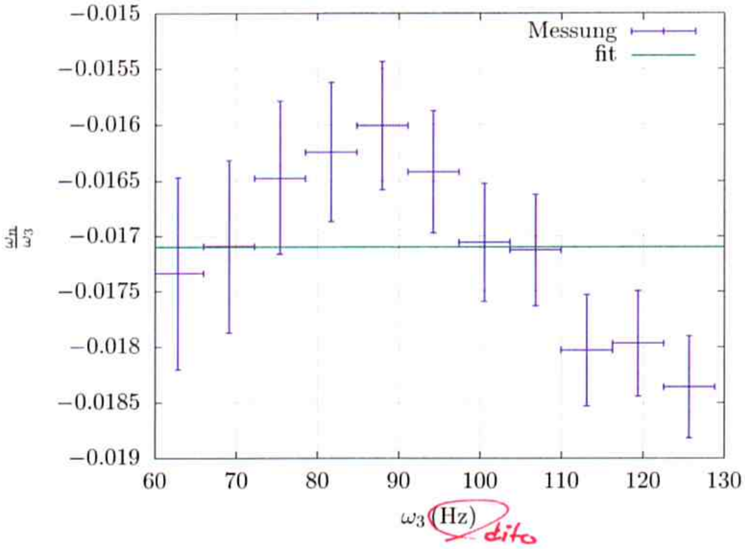
Es folgt die Wertetabelle mit den berechneten Werten:

dito

$\frac{\omega_n}{\omega_3}$	$s_{\frac{\omega_n}{\omega_3}}$	ω_3 in Hz	s_{ω_3} in Hz
-0,017337031	0,0008668568	62,83185307	3,141592654
-0,017093637	0,0007769902	69,11503838	3,141592654
-0,016475550	0,0006864890	75,39822369	3,141592654
-0,016243919	0,0006247755	81,68140899	3,141592654
-0,016005685	0,0005716429	87,96459430	3,141592654
-0,016422384	0,0005474277	94,24777961	3,141592654
-0,017055533	0,0005330057	100,5309649	3,141592654
-0,017124754	0,0005036939	106,8141502	3,141592654
-0,018028738	0,0005008324	113,0973355	3,141592654
-0,017966063	0,0004728309	119,3805208	3,141592654
-0,018358730	0,0004590177	125,6637061	3,141592654

Tabelle 3.2: Wertetabelle: Nutationsfrequenz

Somit ergibt sich folgender Plot:



dennoch liegen über die Hälfte der Datenpunkte nicht auf dem Fit!

was sind denn die Fitparameter?

Abbildung 3.3: Nutation

Gerade

Es ist zu erkennen, dass die gefittete Linie beinahe eine Parallele zur x-Achse ist. Dies ist auch richtig, da das Verhältnis von ω_n zu ω_3 druch die Trägheitsmomente des Kreisels gegeben sind und sich diese während der Nutation nicht ändern können.
Nun wird der Mittelwert des Verhältnisses uns sein Fehler berechnet:

$$\overline{\frac{\omega_n}{\omega_3}} = \frac{1}{11} \cdot \sum_{i=1}^{11} \left(\frac{\omega_n}{\omega_3}\right)_i$$
$$= -0,017101093$$

welche Funktion habt Ihr gefittet?
$f(x) = ax + b$
oder $f(x) = a$?

$$s_{\overline{\frac{\omega_n}{\omega_3}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{11} \left(\frac{\partial \overline{\frac{\omega_n}{\omega_3}}}{\partial \left(\frac{\omega_n}{\omega_3}\right)_i} \cdot \left(s_{\frac{\omega_n}{\omega_3}}\right)_i \right)^2}$$
$$= \frac{1}{11} \sqrt{\sum_{i=1}^{11} \left(s_{\frac{\omega_n}{\omega_3}}\right)_i^2}$$
$$= 0,0001833148$$

Somit folgt:

(✓)

$$\frac{J_3 - J_1}{J_3} = -0,01710 \pm 0,00018$$

Fehler ist „zu klein“

3.3 Präzession

Zuerst soll das Produkt der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p}$ gegen ω_3 aufgetragen werden. Es gilt:

$$\omega_3 = 2\pi f_3 \tag{3.1}$$

$$\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p} = 4\pi^2 \frac{f_3}{T_\mathrm{p}} \tag{3.2}$$

Wobei f_3 die Rotationsfrequenz ist, die im Messprotokoll fälschlicherweise mit ω_3 benannt wurde, und T_p die Zeit für eine Präzessionsumdrehung ist. Es ergeben sich folgende Werte:
Messreihe 2:

f_3 in Hz	T_p in s	ω_3 in 1/s	$\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p}$ in 1/s^2	$s_{\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p}}$ in 1/s^2
16,72	57,53	105,054858	11,473651	0,343117
14,61	49,58	91,797337	11,633313	0,398135
12,89	43,78	80,990259	11,623499	0,450881
11,52	39,62	72,382295	11,478833	0,498222
10,41	36,00	65,407959	11,415842	0,548321
9,50	32,98	59,690260	11,371891	0,598531
8,66	30,96	54,412385	11,042736	0,637581
8,09	28,12	50,830969	11,357767	0,701975
7,60	25,13	47,752208	11,939354	0,785498
7,02	24,48	44,107961	11,321017	0,806353

Tabelle 3.3: Wertetabelle: Präzession - Messreihe 2

Messreihe 3:

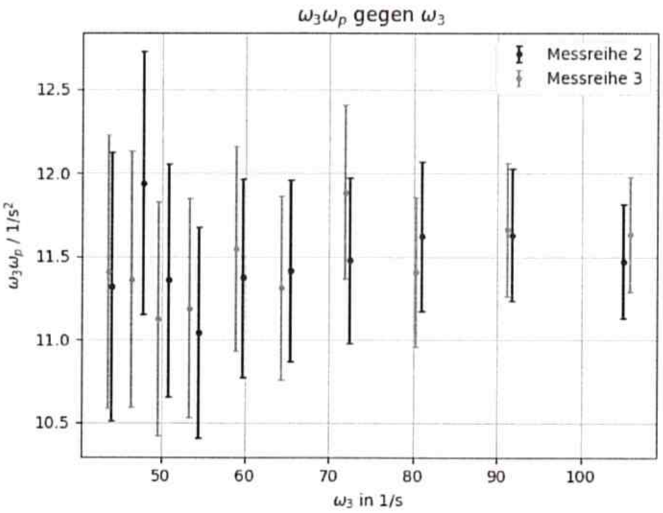
f_3 in Hz	T_p in s	ω_3 in 1/s	$\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p}$ in 1/s^2	$s_{\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p}}$ in 1/s^2
16,86	57,19	105,934504	11,638505	0,345157
14,52	49,15	91,231851	11,662800	0,401619
12,77	44,19	80,236276	11,408450	0,446697
11,43	37,96	71,816808	11,887205	0,520010
10,23	35,70	64,276986	11,312723	0,552928
9,36	32,00	58,810614	11,547437	0,616861
8,49	29,95	53,344243	11,191044	0,659083
7,90	28,03	49,637164	11,126632	0,704228
7,40	25,71	46,495571	11,362905	0,767777
6,94	24,02	43,605306	11,406337	0,821796

Tabelle 3.4: Wertetabelle: Präzession - Messreihe 3

+ Fehlerangaben für f_3 und T_p

Berechnung für $s_{\omega_3 \cdot \omega_p}$

Trägt man nun $\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p}$ gegen ω_3 auf, so ergibt sich folgendes Grafik:



hier habt Ihr die verschiedenen Messreihen auf- getragen, bei 3. nicht. Wieso?

Abbildung 3.4: Präzession

Da es sich bei $\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p}$ um eine Konstante handelt bedinen wir uns der Statistik um einen genaueren Wert zu ermitteln.

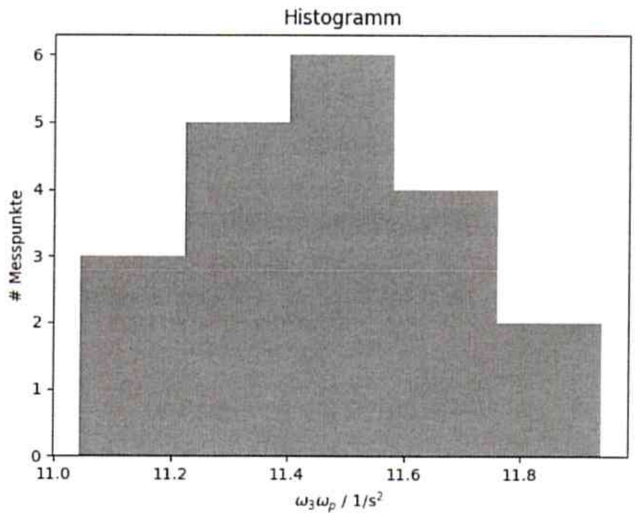


Abbildung 3.5: Histogramm der errechneten Werte

Somit ergibt sich als Mittelwert:

$$\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p} = (11,46 \pm 0,05)\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \tag{3.3}$$

woher?

Mit hilfe der Gleichung (12) aus der Versuchsanleitung lässt sich folgende Formel für das Trägheitsmoment herleiten:

$$J_3 = \frac{mgl}{\omega_3 \cdot \omega_\mathrm{p}} \tag{3.4}$$

$$s_{J_3} = 4\pi^2 \sqrt{(\frac{s_{f_3}}{T_\mathrm{p}})^2 + (\frac{f_3}{T_\mathrm{p}^2} s_{T_\mathrm{p}})^2} \tag{3.5}$$

Der Fehler der Frequenz wurde, aufgrund der Messmethode, mit $s_{f_3} = 0,5$ Hz veranschlagt. Durch einsetzen der Werte:

$$m = (48,3 \pm 0,02)\,\mathrm{g} \tag{3.6}$$

$$l = (96,2 \pm 0,1)\,\mathrm{mm} \tag{3.7}$$

folgt

$$J_3 = (3,98 \pm 0,03) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\ m}^2 \tag{3.8}$$

Aus der voherigen Aufgabe wissen wir:

$$J_1 = \frac{J_3}{\frac{\omega_\mathrm{n}}{\omega_3} + 1} \tag{3.9}$$

Für den Fehler gilt also:

$$s_{J_1} = \frac{1}{\frac{\omega_\mathrm{n}}{\omega_3} + 1} \sqrt{s_{J_3}^2 + (\frac{J_3}{\frac{\omega_\mathrm{n}}{\omega_3} + 1} s_{\frac{\omega_\mathrm{n}}{\omega_3}})^2} \tag{3.10}$$

Somit ergibt sich:

$$J_1 = (4,05 \pm 0,03) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\ m}^2 \tag{3.11}$$

Wie zu erwarten war gilt $J_3 < J_1$ und sie unterscheiden sich nur geringfügig, da der Kreisel näherungsweise eine Kugel ist. ✓

Um nun besser einschätzen zu können ob die Werte plausibel sind vergleichen wir sie mit denen einer ähnlich dimensionierten Stahlkugel.

Für das Trägheitsmoment einer Kugel gilt:

$$J = \frac{8}{15} \pi \varrho r^5 \tag{3.12}$$

Für den Radius setzen wir $r = 0,05$m an und für die Dichte von Stahl gilt $\varrho \approx 7700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Mit diesen Werten ergibt sich ein Trägheitsmoment von $J \approx 4,03 \cdot 10^{-3}$ kg m^2, welcher sehr gut zu den von uns ermittelten passt. ✓

4 Fazit

Durch diesen Versuch haben wir ein tiefes Verständnis von der Rotation erhalten. Es konnten die durch Nutation oder Präzession hergerufenen Bewegungen gemessen und erklärt werden. Es wurde auch der Umgang mit einem Stroposkop geübt, um Rotationsfrequenzen zu messen. Außerdem wurde anhand der gemessen Frequenzen das Trägheitsmoment bestimmt. Alle Messungen stimmten mit der Theorie überein, da keine großen Abweichungen aufgetreten sind.

A Messprotokoll

Versuch Kre: Der Kreisel

1. Allgemeines

Ort: Universität Bayreuth, NW II

Raum: 2.2.02.699 (Kre)

Datum: 22.03.2021

Start: 09^{30} Uhr   Ende:

Gruppe: 6

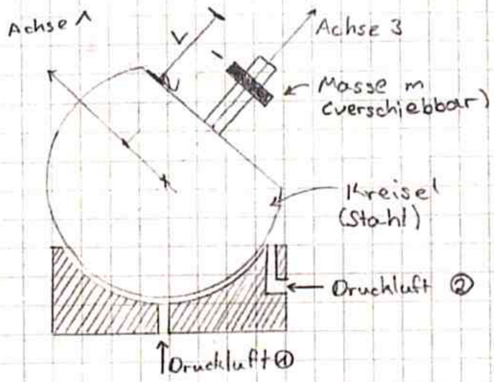
Messperson: Anna-Maria Pleyer

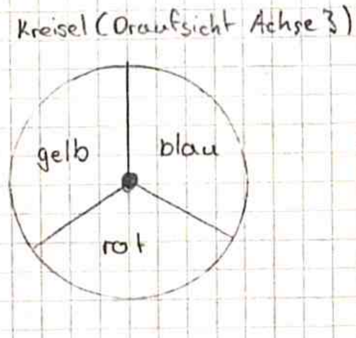
Auswerteperson: Dominik Müller

Protokollperson: Paul Schwanitz

1

2. Versuchsaufbau





Kreisel: Besteht aus einer Stahlkugel mit Abgeschnittenen Kreisfläche, welche in drei gleich großen Bereiche aufgeteilt ist (oben rechts).
Auserdem ragt aus der Mitte dieser Fläche eine Gewindestange, mit deren Hilfe ein Massestück m in einem Variablen Abstand l vom Mittelpunkt befestigt werden kann.

Der Kreisel selbst liegt in einer Schale und kann unter zuhilfe nahme von Druckluft annähernd reibungsfrei gedreht werden (oben links) (Druckluft ①).
Mithilfe der Düse (Druckluft ②) kann der Kreisel ebenfalls in seiner Rotation beinflusst werden.
Die Drehfrequenz wird mithilfe eines Stroboskop und der Makierten Flächen bestimmt.

2

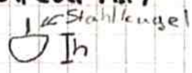
gleich Toleranzen/ Fehler mit angeben

3.1 Maße

Durchmesser der Stahlkugel $D = 100\,mm \pm$ (Messschieber Gr.)

Durchmesser der Abgeschnittenen Kreisfläche $D' = 43,8\,mm \pm$ (Messschieber Kl.)

Höhe von der Kreisfläche $h = 96,2\,mm$ (Messschieber Gr.)



Länge der Gewindestange $L = 81,9\,mm$ (Messschieber Kl.)

Durchmesser der Gewindestange $d = 6\,mm$ (Messchieber Kl.)

Gewichte (beide Gleich) $m = 24,15\,g$ (Balkenwaage)

Durchmesser der Gewichte $d_m = 20\,mm$ (Messschieber Kl.)

Höhe der Gewichte $h_m = 10\,mm$ (Messschieber Kl.)

3.2. Verwendete Geräte

Messchieber Gr. Serien Nr.: Ca 102 971

Messchieber Kl. Serien Nr.: 41220497

$s_a = 0,05\,mm$ $s_r = 0,05\,mm + 1 \cdot 10^{-4} \cdot \ell$

Balkenwaage Serien Nr.: 31505

$s_a = 10\,mg$ $s_r = 10\,mg$

Stoppuhr CG501

~~$s_a = 0,06\,s$~~ ~~$s_r =$~~

$s_a = 0,01\,s$

Stroboskop Serien Nr.: ELUB 820-3

$s_a = 0,01\,Hz$

3

4. Qualitative Beobachtungen verschiedener Kreisel bewegungen

4.1 Nutationsfrei

Es wird bei Verschiedenen Drehzalen Kraft auf die Figurenachse ausgeübt (nutationsfrei rotierender Kreisel).

Drehfrequenz: $f = 1{,}1\,Hz$

Keine Kraftausübung: Trivialer Fall, Drehung bei ruhender Dreh- bzw. Figurenachse.

Kleine/Schwache Kraftausübung:

- Kreisel versucht der Kraft entgegen zu wirken.
- Bei Kraft komponente senkrecht zur Drehachse kommt es zu einer Präzessionsbewegung (in Richtung des Drehimpulses).

Drehfrequenz: $f = 25{,}25\,Hz$

~~Die Es drehte~~

Es treten die gleichen Effekte wie bei $f = 1{,}1\,Hz$ auf nur stärker. (bei gleicher Krafteinwirkung).

4.2 Keisel mit Nutation

Durch einen Stoß an der Gewindestange wird eine Nutationsbewegun verursacht, dies lässt sich mittels Drehimpulserhaltung erklären (genauer siehe Fragen zur Vorbereitung).

Ohne Stroboskop:

Es ist ein Kreis/Punkt zu sehen, welcher Form stabiel ist und die Farbe wechselt. Dieser Punkt fährt kleine Kreisbewegungen aus.

4

Mit Stroboskop:

Durch das Stroboskop ist sichtbar, dass die Gewindestange den Nutationskegel bildet. (Gewindestang führt eine kegelförmige Bewegung aus.)

5

5. Nutation

Bestimmung der Nutationsfrequenz abh. von ω_3.

1. Brige Kreisel auf ω_3
2. Versetze Kreisel in Nutation
3. Vermesse Zeit für 10 Nutationszyklen T_{10}

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ω_3 in Hz	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a) T_{10} in s	57,88	~~26,25~~	50,78	47,31	46,03	40,59	36,66	34,07	30,75	29,18	27,31
b) T_{10} in s	~~53,03~~	52,16	50,38	47,40	43,22	40,60	36,63	34,63	30,88	29,41	27,16
c) Ersatzmessung T_{10} in s	57,34	54,29			44,63						
d) Ersatzmessung T_{10} in s	57,62	53,10									

Bemerkungen:

Messung Nr. 1 a und b: Drehzahl wurde nicht konstant gehalt deshalb wurden 2 Ersatzmessungen durchgeführt.

6

6. Präzession

Abstannd Kreisfläche - Unterseite Gewicht 40mm (Messschieber Kl.)

Beide Gewichte montiert (gegeneinander verschraubt)

Messreihe 1 / Testmessung

Runde Nr.	ω_3/Hz	T/s
1	18,23	63,17
2	16,69	57,83
3	15,47	53,32
4	14,39	50,34
5	13,46	47,10
6	12,66	42,93
7	11,95	41,96
8	11,27	36,09
9	10,62	37,23
10	10,20	35,86

Messreihe 2

Runde Nr.	ω_3/Hz	T/s
1	16,72	57,53
2	14,61	49,59
3	12,89	43,78
4	11,52	39,62
5	10,41	36,00
6	9,50	32,98
7	8,66	30,96
8	8,09	28,12
9	7,60	25,13
10	7,02	24,48

Messreihe 3

Rund Nr	ω_3/Hz	T/s
1	16,86	57,19
2	14,52	49,15
3	12,77	44,19
4	11,43	37,96
5	10,23	35,70
6	9,36	32,00
7	8,49	29,95
8	7,90	28,03
9	7,40	25,71
10	6,94	24,02

T: Präzessionsumdrehungszeit

7

7. Unterschriften

Dominik Mülle

Dominik Müller

Anna-Maria Pleyer

Anna-Maria Pleyer

Paul Schwanitz

Paul Schwanitz

8

Literaturverzeichnis

MESCHEDE, D. 2015 *Gerthsen Physik*, 25. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

UNIVERSITÄT-AACHEN 2003 Zusammenfassung der Kreiselbewegungen. URL `https://web.physik.rwth-aachen.de/~fluegge/Vorlesung/PhysIpub/Exscript/6Kapitel/VI12Kapitel.html` – Zugriffsdatum: 10.04.2021.

Abbildungsverzeichnis

2.1 Nutationsbewegung eines Kreisel (vgl. Universität-Aachen, 2003) 9

3.1 Schematische Darstellung der Nutation 12
3.2 Schematische Darstellung der Nutation 12
3.3 Nutation 15
3.4 Präzession 17
3.5 Histogramm der errechneten Werte 17