

WS2021/22

---

PPBphys2

---

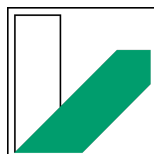
# Signal-Rausch Verbesserung

---

Manuel Lippert - Paul Schwanitz

---

Gruppe 11



# Informationen

<b>Versuchstag</b>	05.10.2021
<b>Versuchsplatz</b>	B11   0.03
<b>Betreuer</b>	Daniel Sommermann
<b>Gruppen Nr.</b>	11
<b>Teilnehmer</b>	Manuel Lippert (Manuel.Lippert@uni-bayreuth.de) Paul Schwanitz (Paul.Schwanitz@uni-bayreuth.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theoretischer Hintergrund</b>	<b>5</b>
2.1	Rauschen . . . . .	5
2.1.1	Thermisches Rauschen . . . . .	5
2.1.2	Schrotrauschen . . . . .	5
2.1.3	Funkelrauschen . . . . .	6
2.2	Umwelteinflüsse . . . . .	7
2.3	Erdschleifen . . . . .	8
2.4	Möglichkeiten der Signal-Rausch Verbesserung . . . . .	9
2.4.1	Filter . . . . .	9
2.4.2	Signalmittelung . . . . .	11
2.4.3	Lock-In Verstärker . . . . .	12
2.5	Leistungspegel . . . . .	15
2.6	Theorem von Nyquist . . . . .	16
2.7	Fouriertransformation und Schnelle Fouriertransformation . . . . .	16
2.8	Fourier-Reihe und Effektivspannung . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Messprotokoll</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung und Diskussion</b>	<b>25</b>
4.1	Mittelung und Fouriertransformation . . . . .	25
4.2	Theorem von Nyquist . . . . .	35
4.3	Signalfilterung . . . . .	38
4.3.1	Verschiedene Tiefpassfilterkurven . . . . .	38
4.3.2	Filterwirkung auf Rechtecksignal . . . . .	40
4.3.3	Bandpass 4. Ordnung . . . . .	44
4.3.4	Einfluss der Ordnung . . . . .	46
4.3.5	Vergleich: Analoge und digitale Filterung . . . . .	47
4.3.6	Vergleich Filterung und Mittelung . . . . .	48
4.4	Lock-In Verstärker . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>54</b>
<b>A</b>	<b>Berechnungen Fourier-Reihenoeffizient und Effektivspannung</b>	<b>55</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>58</b>

# 1 Einleitung

Durch elektronische Messung ist jede Messung eines Signals mit einem gewissen Anteil von Rauschen behaftet. Um die Messung so präzise wie möglich durchführen zu können muss man zu den Mitteln der Signal/Rausch-Verbesserung greifen. Dafür ist wichtig die jeweiligen Störquellen zu identifizieren und diese bestenfalls zu eliminieren oder in praktischsten Fall zu unterdrücken.

Unter Rauschen versteht man unerwünschte statische Störungen, welche sich über das eigentliche Messsignal legt und dieses verrauscht.

In diesem Versuch werden die Methoden und die Auswirkung der Signal/Rausch-Verbesserung diskutiert. Dabei werden unterschiedliche zeitliche Signalformen mit überlagertem Rauschen über die „Fast Fourier Transformationsmethode“ (FFT) und der Mittlung des Signals diskutiert. Zudem werden die grundlegenden Arten von elektronischen Filter und deren Effekt in der Praxis angewendet und analysiert. Auch das Lock-In Verfahren wird anhand eines Lock-In Verstärkers näher betrachtet.

## 2 Theoretischer Hintergrund

### 2.1 Rauschen

Dieser Abschnitt soll einen groben Überblick über die verschiedenen Arten von Rauschen und ihre Ursachen liefern.

#### 2.1.1 Thermisches Rauschen

Das thermische Rauschen wird von den statistischen Bewegungen der freien Ladungsträger, meist Elektronen, verursacht. Das thermische Rauschen ist weiterhin von der Frequenz unabhängig, weshalb es oft als weißes Rauschen bezeichnet wird. Die Rauschspannung  $u_R$ , an einem Widerstand  $R$ , kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$u_R = \sqrt{4kTRB} \quad \text{mit} \quad B = f_{\max} - f_{\min} \quad (2.1)$$

Wobei  $T$  die absolute Temperatur ist und  $k$  die Boltzmannkonstante.  $B$  bezeichnet die Bandbreite des Messgerätes. Da es sich um statistische Schwankungen handelt, ergibt eine Mittelung von  $u_R$  über die Zeit Null.

Aus obiger Formel 2.1 kann durch die Division durch  $R$  eine Formel für die Rauschleistung hergeleitet werden.

$$P_R = 4kTB \quad (2.2)$$

Es geht klar hervor, dass die Rauschleistung nur von Temperatur und Frequenz abhängt. Somit wäre es also theoretisch möglich das thermische Rauschen, durch Kühlung des Versuchsaufbaus auf den absoluten Nullpunkt, abzustellen. Dies ist jedoch nicht praktikabel, da es mit enormen Kosten und Aufwand verbunden wäre [5].

#### 2.1.2 Schrotrauschen

Wie das thermische Rauschen ist auch das Schrotrauschen ein statisches und von der Frequenz unabhängiges Rauschen, weshalb es ebenfalls ein weißes Rauschen ist. Die Ursache ist jedoch die Quantelung der elektrischen Ladung, welche sich ebenfalls stochastisch bewegen und somit das Schrotrauschen verursachen. Der Effektivwert des Rauschstroms  $i_R$  kann durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$i_R^2 = 2eIB \quad (2.3)$$

Wobei  $B$  wieder die Bandbreite des Messgerätes ist,  $e$  die Elektronenladung und  $I$  der fließende Gleichstrom. Für die Rauschleistung  $P_R$ , über einen Übergang mit Widerstand  $R$ , gilt:

$$P_R = i_R^2 R = 2eIRB \quad (2.4)$$

Aus dieser Formel ist ableitbar, dass das Schrotrauschen durch die Erniedrigung des Gleichstroms, der durch den Übergang fließt, erreicht werden kann [5].

### 2.1.3 Funkelrauschen

Durch Störstellen im Material kann es zu Funkelrauschen kommen, welches mit zunehmender Frequenz abnimmt. Deshalb wird es auch als  $\frac{1}{f}$  Rauschen bezeichnet. Abhilfe schafft hier, die Messungen bei hohen Frequenzen durchzuführen [5].

## 2.2 Umwelteinflüsse

Häufig ist bei Messungen jedoch nicht nur Rauschen ein Problem, sondern störende Umwelteinflüsse. Unsere Umwelt ist voll von Störquellen wie elektromagnetischen Wellen, beispielsweise von Radiosendern, welche die Messungen verfälschen, da Kabel im Versuchsaufbau für diese als Antenne fungieren können. Eines der stärksten Störeinflüsse ist wohl das Netzbrummen, was durch die öffentliche Stromversorgung bei 50 Hz verursacht wird. Ebenso können diverse elektrische Geräte wie Elektromotoren oder alte Röhrenmonitore Störungen verursachen [5].

Um die Einstrahlung von störenden elektromagnetischen Wellen zu vermeiden ist eine gute Abschirmung von diesen vonnöten. Darum werden die Messgeräte abgeschirmt und Koaxialkabel verwendet. Ein Koaxialkabel besteht aus einem Draht, welche von einer Isolierschicht umgeben ist, welche wiederum durch ein Drahtgeflecht umgeben ist. Als letztes umgibt das Kabel noch eine weitere Isolierung. Der Aufbau wird in Abbildung 2.1 veranschaulicht. Das Drahtgeflecht dient hierbei als Schirm und verhindert somit die Einstrahlung von Störeinflüssen. Des Weiteren dient der Schirm auch dazu, um ein gemeinsames Erdpotential bereitzustellen, was eine Störung durch Erdschleifen verhindert. Erdschleifen werden im nächsten Kapitel genauer erklärt.



Abbildung 2.1: Aufbau eines Koaxialkabels und Schaltsymbol (unten rechts) [5]

## 2.3 Erdschleifen

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits der Begriff Erdschleifen genannt, welcher nun genauer erklärt werden soll. Wenn die Abschirmungen verschiedener Apparaturen nicht miteinander verbunden sind, sondern jede einzeln geerdet ist, dann existieren dennoch kleine Potenzialunterschiede, die elektrostatisch in das System eingekoppelt werden und somit Störungen verursachen. Um Erdschleifen zu vermeiden, sollten alle Abschirmungen verbunden sein und an einem einzigen Erdungspunkt geerdet werden [5]. In Abbildung 2.2 wird dies schematisch dargestellt.

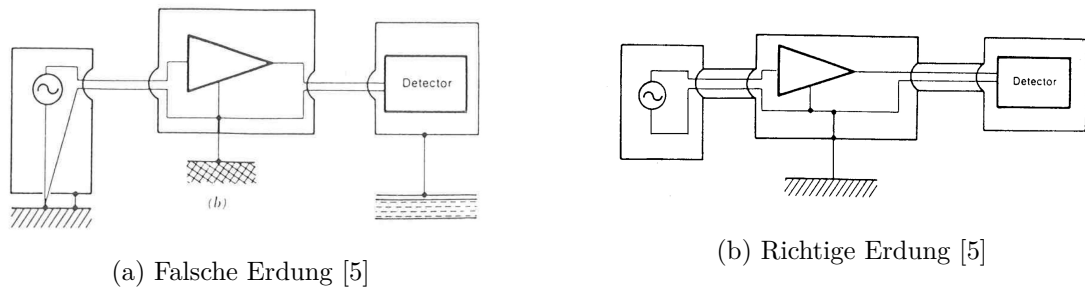


Abbildung 2.2: Beispiele für falsche und richtige Erdung



## 2.4 Möglichkeiten der Signal-Rausch Verbesserung

Dieser Abschnitt behandelt die Methoden zur Signal/Rausch-Verbesserung und dessen Umsetzung.

### 2.4.1 Filter

Eine Möglichkeit zur Signal/Rausch-Verbesserung ist der Einsatz eines Filters. Die Aufgabe des Filters ist hierbei die Unterdrückung bestimmter Frequenzen. Dabei ist zu beachten, dass das Signal bei einer anderen Frequenz auftritt als das Rauschen, sonst würden man nämlich das Signal mit filtern. Bei der Filterung wird die Bandbreite des Rauschen stark reduziert (Zu sehen an Gleichung (2.1) und (2.3)), aber auch Störstrahlen aus der Umgebung werden minimiert [5].

#### Filtertypen

1) **Tiefpass**

Ein Tiefpassfilter filtert Frequenzen **oberhalb** der Grenzfrequenz heraus und lassen Frequenzen unterhalb nahezu ungedämpft durch. Die Grenzfrequenz ist dadurch charakterisiert, dass das Ausgangssignal zu dieser Frequenz um 3dB kleiner ist (ab dort beginnt der Durchlassbereich) [3].

2) **Hochpass**

Ein Hochpassfilter filtert Frequenzen **unterhalb** der Grenzfrequenz heraus und lassen Frequenzen oberhalb nahezu ungedämpft durch. Ein Hochpassfilter ist das Gegenstück zum Tiefpassfilter [3]. Ein Hochpassfilter kann dazu verwendet werden, die 50Hz Brummspannung aus dem Messsignal zu filtern [5].

3) **Bandpass**

Ein Bandpass sperrt Frequenzen **unter- und oberhalb** eines definierten Frequenzbandes. Das Frequenzband ist durch die 3dB-Bandbreite um die Mittenfrequenz charakterisiert. Diese Art des Filters ist eine Reihenschaltung aus Tiefpass- und Hochpassfilter und die Bandbreite wird durch die Grenzfrequenzen der jeweiligen Filter festgelegt [3]. Der Bandpass findet hierbei Einsatz bei der Filterung von breitbandigen Rauschen [5].

4) **Bandsperre/Notch-Filter**

Ein Bandsperre sperrt einen schmalen Frequenzbereich innerhalb eines breiten Frequenzbandes und kann wie das Gegenstück zu einem Bandpass angesehen werden [3].

In Abbildung 2.3 ist der generelle Verlauf der jeweiligen Filtertypen im Frequenzbereich dargestellt.

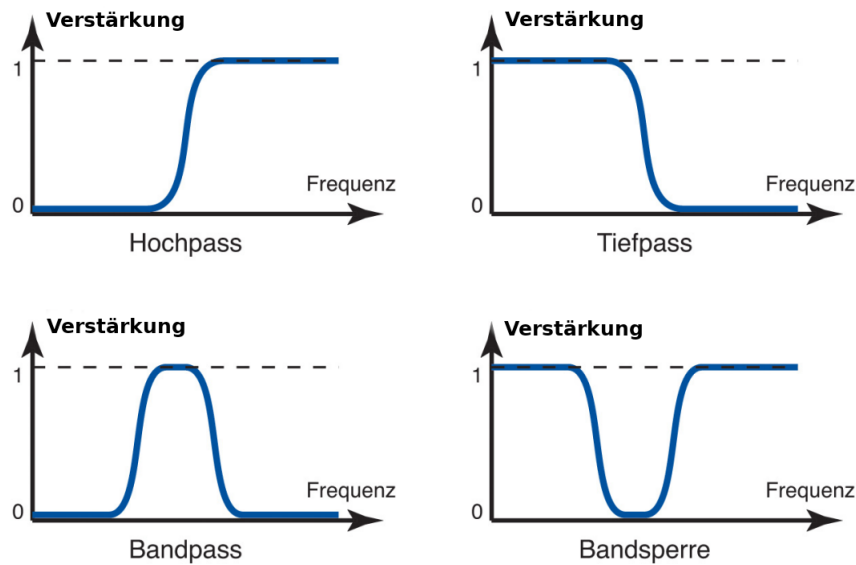


Abbildung 2.3: Verlauf der jeweiligen Filtertypen im Frequenzbereich [2]

### Ordnung eines Filters

Die Ordnung eines Filters gibt an wie oft ein Filter hintereinander in Reihe geschaltet wurde. Somit wären zwei Tiefpassfilter in Reihe geschaltet ein Tiefpassfilter 2.Ordnung. Je höher die Ordnung eines Filters ist, desto steiler ist die sogenannte Flankensteilheit (Steigung der Flanken in Abbildung 2.3). Es ist aber zu beachten, dass sich durch die Ordnung die Phase in der Nähe der Grenzfrequenz verändern kann [3].

### Arten der Filterimplementierung

#### 1) Butterworth-Tiefpassfilter

Der Butterworth-Tiefpassfilter besitzt einen lagen horizontalen Frequenzgang, welcher erst kurz vor der Grenzfrequenz scharf abknickt. In der Sprungantwort lässt sich ein kräftiges Überschwingen (abhängig von der Ordnung) registrieren [5].

#### 2) Tschebyscheff-Tiefpassfilter

Ein Tschebyscheff-Tiefpassfilter besitzt oberhalb der Grenzfrequenz einen noch steileren Abfall als der Butterworthfilter, womit das Überschwingen der Sprungantwort im Vergleich noch stärker ist. Im Durchlassbereich verläuft die Verstärkung aber nicht monoton, sondern wellig mit konstanter Amplitude [5].

#### 3) Bessel-Tiefpassfilter

Der Bessel-Tiefpassfilter besitzt unter der Voraussetzung, dass die Phasenverschiebung in einem bestimmten Frequenzbereich proportional zur Frequenz ist, ein optimales Rechteck-Übertragungsverhalten. Der Frequenzgang knickt aber nicht so stark ein, wie bei den zwei vorher genannten Filter [5].

#### 4) Tschebyscheff-Tiefpass

Der Tschebyscheff-Tiefpass besitzt nach der Grenzfrequenz einen steilen Knick im Frequenzgang, wodurch auch dieser Filter eine Überschwingerung der Sprungantwort aufweist. Dies hat zur Folge, dass der Frequenzgang im Durchlassbereich eine Welligkeit besitzt. Durch Verminderung dieser Welligkeit geht der Tschebyscheff kontinuierlich in den Butterworth über [5].

### 2.4.2 Signalmittelung

Bei stark verrauschten Signalen wird die Signalmittelung verwendet. Zu beachten ist aber, dass die Bandbreiten des Signals und des Rauschens in derselben Größenordnung liegen, was die Anwendung eines Filters ausschließen würde. Eine weitere Voraussetzung ist, dass das Signal wiederholbar und dessen Phase bekannt ist. Bei der Signalmittelung wird das Signal mit Rauschen in  $n$  Segmente unterteilt und in  $n$  Kanälen gespeichert. Dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt und jeder neue Durchgang zum vorhandenen Speicherinhalt addiert, was ein Anwachsen des Signals proportional zu den Wiederholungen verursacht. Beim Rauschen aufgrund seiner statischen Natur wird nur der quadratischen Mittelwert auf das vorhandene Messsignal addiert. Allgemein erhält man für  $N$  Wiederholungen eine Signal/Rausch-Verbesserung von  $\sqrt{N}$  [5]. In Abbildung 2.4 wird die erzielte Signal/Rausch-Verbesserung durch ein Vorher-Nachher-Bild gezeigt.

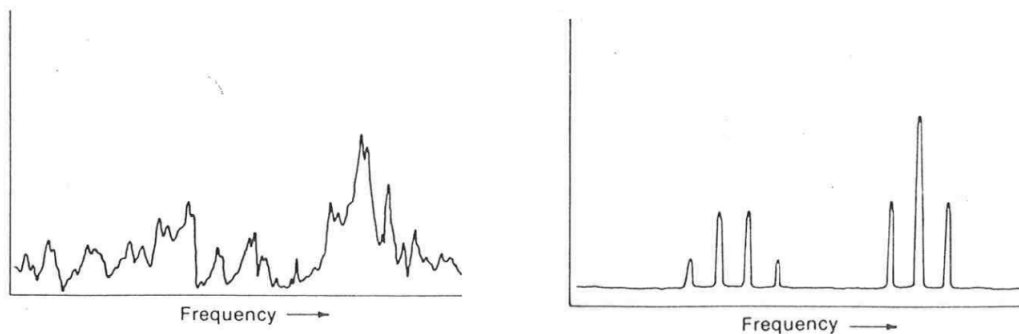


Abbildung 2.4: Anwendung Signalmittelung: Links Signalmessung und Rechts Mehrfachmessung [5]

### 2.4.3 Lock-In Verstärker

Ein Lock-In Verstärker ist ein Detektor zum Auflösen von kleinen Wechselspannungssignalen bis zu ein paar nV. Dabei ist eine akkurate Messung des Signals, welches 1000 fach stärkeres Rauschen besitzt, möglich. Es kommt dafür eine sogenannte phasensensitive Detektion zum Einsatz, um eine bestimmte Komponente des Signals bei einer bestimmten Referenzfrequenz  $f_r$  und Phase  $\Theta_r$  zu bestimmen. Dabei wird Rauschen, welches nicht auf der Referenzfrequenz liegt, herausgefiltert und trägt nicht mehr zum Signal bei.

#### Phasensensitive Detektion

Beim Lock-In wird wie oben erwähnt eine Referenzfrequenz benötigt. Diese Frequenz wird meistens durch das Experiment vorgegeben (z.B. Funktionsgenerator) und der Lock-In detektiert die Antwort des Experiments bei dieser Referenzfrequenz. In Abbildung 2.5 sind schematisch die jeweiligen Signale gezeigt. Als Referenzsignal wird eine Rechteckschwingung mit  $f_r$  verwendet und das Experiment selbst wird von einer Sinusschwingung (Input-Signal) mit Funktion  $s(t) = U_s \sin(\omega_r t + \Theta_s)$  mit  $\omega_r = 2\pi f_r$ , Amplitude  $U_s$  und Phasenverschiebung  $\Theta_s$  angeregt. Der Lock-In Verstärker erzeugt dann selbst eine Sinusschwingung mit Frequenz  $f_l$  und der Funktion  $l(t) = \sin(\omega_l t + \Theta_r)$  mit  $\omega_l = 2\pi f_l$  als Signal, das Lock-In-Signal.

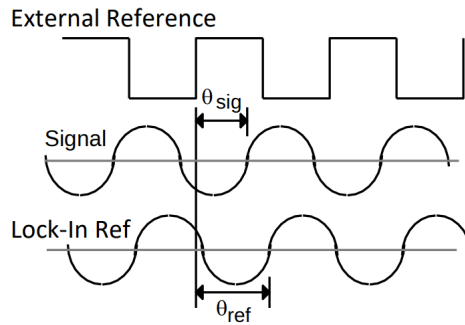


Abbildung 2.5: Signale bei einem Lock-In Verstärker [6]

Nun multipliziert der Lock-In Verstärker das Input-Signal und das Lock-In-Signal mit einem phasensensitiven Detektor (PSD) oder einem Multiplikator. Daraus folgt mit Anwendung des Additionstheorems des Sinus:

$$\begin{aligned} s_x &= s(t) \cdot l(t) = U_s \sin(\omega_r t + \Theta_s) \cdot \sin(\omega_l t + \Theta_r) \\ &= \frac{U_s}{2} [\cos((\omega_r - \omega_l) + (\Theta_s - \Theta_r)) + \cos((\omega_r + \omega_l) + (\Theta_s + \Theta_r))] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Damit ist das Output-Signal  $s_x$  zwei Wechselspannungssignale mit unterschiedlichen Frequenzen. Dieses Signal wird durch einen Tiefpassfilter geschickt, welcher alle Wechselspannungssignale ab der Grenzfrequenz  $f_g$  eliminiert. Die Grenzfrequenz  $f_g$  wird dabei am Lock-In Verstärker über die Zeitkonstante  $\tau$  eingestellt mit der Beziehung:  $f_g \sim \frac{1}{\tau}$

Wenn  $\omega_r = \omega_l$  ist, ist das Signal mit der Differenz der Frequenz ein Gleichspannungssignal und wird somit nicht gefiltert. Der neue PSD Output ist dann:

$$s_x = \frac{U_s}{2} \cos(\Theta_s - \Theta_r) = \frac{U_s}{2} \cos(\Delta\Theta) \quad (2.6)$$

Bei einem Phasenunterschied von  $\Delta\Theta = 0$  lässt sich hierbei das Maximum der Amplitude messen ( $\frac{U_s}{2}$ ) und bei  $\Delta\Theta = \frac{\pi}{2}$  misst man überhaupt kein Output-Signal mehr. Solche Lock-In Verstärker mit nur einem PSD werden auch Einphasen-Lock-In genannt. Man kann aber auch ein zweites Lock-In-Signal mit Cosinusschwinung verwenden und dieses mit einem zweiten PSD mit dem Input-Signal multiplizieren. Mit demselben Prozess wie zuvor erhält man die Beziehung:

$$s_y = \frac{U_s}{2} \sin(\Delta\Theta) \quad (2.7)$$

Das Output  $s_x$  heißt „in Phase“-Komponente und  $s_y$  die „Quadratur“-Komponente, weil bei  $\Delta\Theta = 0$  ist  $s_y = 0$  und  $s_x$  misst das Input-Signal.

Weiterhin kann man mit  $s_x$  und  $s_y$  wie folgt die Amplitude des Output-Signals bestimmen:

$$A = (s_x^2 + s_y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{U_s}{2} \quad (2.8)$$

### Was wird mit einem Lock-In gemessen?

Ein Lock-In Verstärker misst aufgrund der Multiplikation mit einer Sinusschwingung (Cosinusschwingung) den ersten Term der Fourier-Reihe des Input-Signals bei der Referenzfrequenz  $f_r$ . Dabei ist aber zu beachten, dass auch Rauschen, welches bei der Referenzfrequenz auftritt, mit gemessen wird und gegebenenfalls abgezogen werden muss. Dies erkennt man daran, dass das Messsignal am Lock-In Verstärker Schwankungen aufweist.

In Abbildung 2.6 ist zusätzlich der Aufbau des Lock-In Verstärkers dargestellt [6].

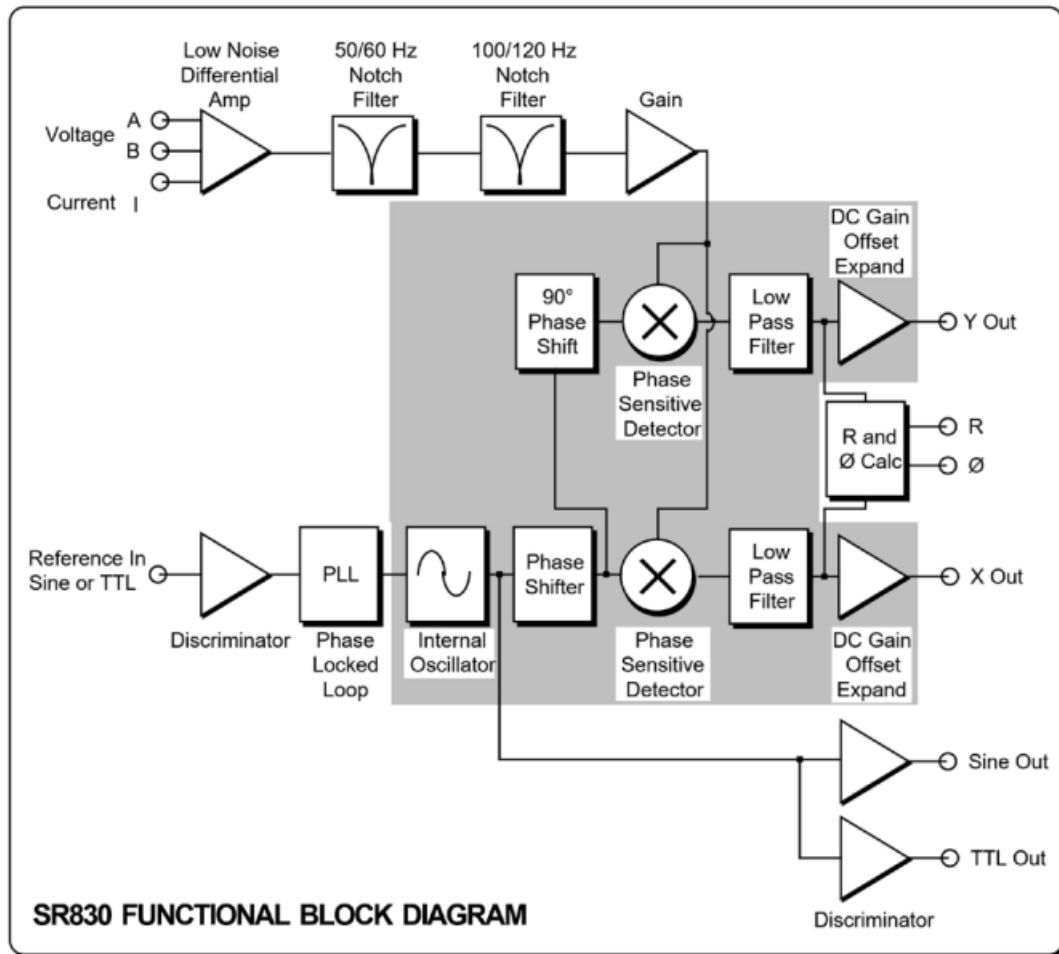


Abbildung 2.6: Blockdiagramm Lock-In Verstärker [6]

## 2.5 Leistungspegel

Der Leistungspegel  $L_P$  gibt das 10fache logarithmische Verhältnis zwischen Nutzleistung  $P$  und Bezugsleistung  $P_0$  in dB an und ist definiert als:

$$L_P = 10 \log_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad (2.9)$$

In diesem Versuch ist vom Interesse den Leistungspegel der Spannungen  $L_U$  anzugeben. Dafür wird die Formel  $P = U \cdot I$  mit dem ohmschen Gesetz  $R = \frac{U}{I}$  umgestellt zu  $P = \frac{U^2}{R}$  und in Gleichung (2.9) eingesetzt. Somit erhält man:

$$L_U = 10 \log_{10} \left( \frac{U^2}{U_0^2} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{U}{U_0} \right) \quad (2.10)$$

Damit entspricht der Leistungspegel der Spannungen das doppelte des herkömmlich definierten Leistungspegel [3].

Um das Verständnis zu vertiefen werden noch einige bestimmte Verhältnisse zu charakteristischen dB angegeben:

$L/\text{dB}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{U}{U_0}$
$-n \cdot 10$	$1 \cdot 10^{-n}$	$1 \cdot 10^{-n/2}$
-20	1/100	1/10
-10	1/10	$1/\sqrt{10}$
-6	1/4	1/2
-3	1/2	$1/\sqrt{2}$
0	1	1
3	2	$\sqrt{2}$
6	4	2
10	10	$\sqrt{10}$
20	100	10
$n \cdot 10$	$1 \cdot 10^n$	$1 \cdot 10^{n/2}$

Tabelle 2.1: Leistungspegel und zugehörige Verhältnisse

In Tabelle 2.1 lässt sich sehr gut die Verdopplungsregel des Leistungspegels erkennen. Dabei steigt der Pegel um 3 dB an (bei  $L_U$  um 6 dB), wenn man das Verhältnis verdoppelt. Dies hat damit zu tun, dass der 10er-Logarithmus von 2 ungefähr 0.3 ist und dieser mit der Multiplikation von 10 nach der Gleichung (2.9) dann 3 dB ergibt.

## 2.6 Theorem von Nyquist

Das Theorem von Nyquist oder auch Abtasttheorem besagt, dass aus den Abtastwerten das ursprüngliche Signal (kontinuierlich) fehlerfrei rekonstruiert werden kann, wenn die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß ist wie die höchste Signalfrequenz  $f_{\max}$ .

$$f \geq 2 \cdot f_{\max} \quad (2.11)$$

Die Frequenz  $2 \cdot f_{\max}$  wird als *Nyquist-Frequenz* bezeichnet. Aus dem Abtasttheorem folgt auch, dass das Spektrum des Signals *bandbegrenzt* ist, d.h. das Signal im Spektrum muss ab der maximalen Frequenz  $f_{\max}$  gleich 0 sein [7].

## 2.7 Fouriertransformation und Schnelle Fouriertransformation

Bei einer Fouriertransformation wird ein gegebenes Signal (ggf. eine Funktion) komplett in den Frequenzraum transformiert, dabei wird ein Integral von  $-\infty$  bis  $\infty$  ausgewertet. Der Rechenaufwand einer Fouriertransformation ist in der Regel in der Praxis sehr hoch, weswegen meist eine Schnelle Fouriertransformation (engl. Fast Fourier Transformation (FFT)) durchgeführt wird. Unter einer FFT versteht man eine effiziente Realisierung der Diskrete Fouriertransformation (DFT), mit der redundante Rechenschritte vermieden werden. Bei einer DFT wird nur ein abgetastetes Signal in den Frequenzraum überführt. Der Rechenaufwand von  $N^2$  bei einer DFT verringert sich dann bei einer FFT zu etwa  $N \log_2(N)$  [7].

## 2.8 Fourier-Reihe und Effektivspannung

### Allgemeines zur Fourier-Reihe und Effektivspannungen

Eine Fourier-Reihe zerlegt eine gegebene periodische Funktion in ihre jeweiligen Sinus und Cosinusanteile. Die reelle Fourier-Reihe einer bestimmten  $T$ -periodischen Funktion lässt sich mit den folgenden Formeln berechnen:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + b_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right] \quad (2.12)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2.13)$$

Dabei sind die Grenzen der Integrale von  $-\frac{T}{2}$  bis  $\frac{T}{2}$  nicht fest, sie können verschoben werden. Es ist aber wichtig, dass über eine Periode integriert wird in diesem Fall über eine komplette Periodendauer  $T$  [7].



Um die effektiven Spannungswerte der jeweiligen Schwingungsform zu bestimmen, bildet man das sogenannte „Quadratische Mittel“. Dieses ist wie folgt definiert:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt} \quad (2.14)$$

Hierbei ist es wieder zu erwähnen, dass die Grenzen der Integration nicht fest sind, aber die Integration über eine Periodenlänge erfolgen muss [1].

Die detaillierteren Berechnungen zu jeder Schwingungsform lassen sich in Anhang A nachlesen.

### Sinusschwingung

Der Fall der Sinusschwingung ist besonders einfach, da wie vorangegangen erwähnt, die Fourier-Reihe eine periodische Funktion in ihre Sinus und Cosinusanteile zerlegt. Daraus folgt die Fourier-Reihe der Sinusschwingung ist die Sinusschwingung selbst und kann somit trivial angegeben werden als:

$$f(t) = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.15)$$

Die Effektivspannungen der Sinusschwingung:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \approx 0,70711 \cdot U_0 \quad (2.16)$$

### Rechteckschwingung

Als Nächstes wird die Fourier-Reihe der Rechteckschwingung bestimmt. Diese hat die Form:

$$f(t) = \begin{cases} +U_0, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -U_0, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.17)$$

Da die Funktion der Rechteckschwingung punktsymmetrisch zum Ursprung ist, fallen alle Cosinusanteile weg, da  $a_k = 0$ . Somit muss nur  $b_k$  wie folgt berechnet werden:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4U_0}{\pi} \frac{1}{k}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.18)$$

Es werden nur noch Terme mit ungeraden  $k$  betrachtet und man erhält:

$$f(t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left((2k-1)\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.19)$$

Die Effektivspannungen der Rechteckschwingung:

$$U_{\text{eff}} = U_0 \quad (2.20)$$

## Dreiecksspannung

Als Letztes wollen wir die Dreiecksschwingung betrachtet. Die Form dieser ist definiert wie folgt:

$$f(t) = \begin{cases} at, & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ a\left(\frac{T}{2} - t\right), & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases} \quad \text{mit } U_0 = \frac{aT}{4} \quad (2.21)$$

Die Funktion ist erneut punktsymmetrisch zum Ursprung, wodurch wieder alle  $a_k$ -Koeffizienten 0 sind.  $b_k$  ergibt sich dann durch wie folgt:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{8U_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.22)$$

Es werden wieder nur die Terme mit ungeraden  $k$  betrachtet. Somit erhält man:

$$f(t) = \frac{8U_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin\left((2k-1)\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.23)$$

Die Effektivspannungen der Dreiecksschwingung:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}} \approx 0,57735 \cdot U_0 \quad (2.24)$$

## Gemeinsamkeiten von Rechteck und Dreiecksschwingung

Vergleicht man die Fourierreihe der Rechteck und Dreiecksschwingung erkennt man, dass beide Reihen nur aus Sinusschwingungen bestehen mit den selben Argumenten. Weiterhin ist zu erwähnen, dass die Reihen nur ungerade  $k$  besitzen. Die einzigen Unterschiede treten auf bei den Vorfaktoren und den Summenkoeffizienten. Bei den Summenkoeffizienten besitzt die Rechteckschwingung eine  $\frac{1}{k}$ -Faktor, während die Dreiecksschwingung einen  $\frac{1}{k^2}$ -Faktor, welcher alterniert, aufweist. Dieser Vergleich zeigt deutlich, dass zwischen den beiden Schwingungsformen in ihrem Aufbau kein großer Unterschied in der Fourierreihe besteht, obwohl die Signal verschiedene Eigenschaften und Formen besitzen.

# 3 Messprotokoll

## Aufbau

Messgeräte & Bauelemente:

- Funktionsgenerator (Keysight Technologies 33210A)
- Lock-In Verstärker (SR830 DSP)
- Analog Filter (Ithaco 4302)
- Digitale Filterkarte des Praktikums
- PC mit Lab-View Messprogramm
- Oszilloskop
- Koaxialkabel

Zu jeder dat-File wird auch eine bmp-File des Fourierspektrums abgespeichert mit selben Dateinamen.

## Mittelung der Fouriertransformation

Dateibeginn: *Zeit\_Datum\_G11\_averaging\_*

### a) Fourierentwicklung Sinus, Rechteck und Dreieck

Dateinamen:

*41a\_Sinus\_A1V\_F1kHz\_n10.dat*

*41a\_Dreieck\_A1V\_F1kHz\_n10.dat*

*41a\_Rechteck\_A1V\_F1kHz\_n10.dat*

A, F, n = Amplitude, Eingestellte Frequenz (später f), Anzahl der Mittelungen

### b) Fourierspektrum Sinus-Signal

Dateinamen:

*41b\_Sinus\_A1V\_F1kHz\_n100.dat*

### c) Mittelung und Rauschen

Dateinamen:

*41c\_Rechteck\_A1V\_F1kHz\_nX\_Rau\_BW20MHz\_AMD120pc.dat*

X = 0, 10, 50, 100

Rau, BW, AMD = mit Rauschen, Bandbreite, AM Depth (pc = %)

### **d)+e) Oberwellen-Abstand + Bandbreite des Rauschens**

Dateinamen:

*41d\_Rechteck\_A1V\_F1kHz\_n0\_Rau\_BW20MHz\_AMDn.dat*

$N = 120\text{pc}, 100\text{pc}, 50\text{pc}, 10\text{pc}$

*41d\_Rechteck\_A1V\_F1kHz\_n0\_Rau\_BWN\_AMD100pc.dat*

$N = 20\text{MHz}, 10\text{MHz}, 5\text{MHz}, 100\text{kHz}, 10\text{kHz}, 1\text{kHz}$

## **Abtasttheorem**

Dateibeginn: *Zeit\_Datum\_G11\_sampling\_*

### **a) Variation Abtastrate + Frequenz**

Dateinamen:

*42a\_Sinus\_f20kHz\_A1V\_fsN.dat*       $N = 1\text{kHz bis } 100\text{kHz}$

*42a\_Sinus\_fN\_A1V\_fs20kHz.dat*       $N = 1\text{kHz bis } 50\text{kHz}$

### **b) Fourierspektrum bei verschiedenen Abtastraten**

Dateinamen:

*42b\_Dreieck\_f3kHz\_A1V\_fsN.dat*       $N = 6\text{kHz bis } 9\text{kHz}$

## **Signalfilterung**

Dateibeginn: *Zeit\_Datum\_G11\_filtering\_*

### **a) Frequenzgang von Tiefpassfilter**

Dateinamen:

*43a\_Sinus\_f100Hz\_A1V\_Rau\_BW20MHz\_AMD120pc\_Fil\_X\_Lopa\_OrN\_Uf1k.dat*

$X = \text{Bu (Butterworth), Ch (Chebyshev), InCh (Chebyshev}^{-1}\text{), El (Elliptic), Be (Bessel)}$

$N = 1, 2, 5, 10$  (Ordnung des Filters)

Lopa, Hipa, Bapa, Fil, Or = Lowpass, Highpass, Bandpass, Filter, Ordnung

Lf, Uf = Lower Frequency, Upper Frequency (1k bedeutet 1kHz)

### **b) Sprungantwort**

Dateinamen:

*43b\_Rechteck\_f100Hz\_A1V\_Fil\_X\_Y\_OrN\_Uf1k.dat*

$X, Y, N = (\text{Bu, Ch, InCh, El, Be}); (\text{Lopa, Hipa}); (1, 2, 5, 10)$

### c) Vergleich Analog zu Digital

Filterbeschreibung: Ithaco 4302



Abbildung 3.1: Einstellungen des Analogfilters als Bandpass

Dateinamen:

*43c\_Sinus\_f2kHz\_A1V\_AnalFil\_Bu\_Bapa\_Or1\_Lf1kHz\_Uf4kHz.dat*

*43c\_Sinus\_f2kHz\_A1V\_DigiFil\_Bu\_Bapa\_Or1\_Lf1kHz\_Uf4kHz.dat*

*43c\_Rechteck\_f2kHz\_A1V\_AnalFil\_Bu\_Bapa\_Or1\_Lf1kHz\_Uf4kHz.dat*

*43c\_Rechteck\_f2kHz\_A1V\_DigiFil\_Bu\_Bapa\_Or1\_Lf1kHz\_Uf4kHz.dat*

AnalFil, DigiFil = Analog Filter, Digital Filter

### d) Verbesserung mit Bandpass 4.Ordnung

Formel für Spannungsverhältnis in dB:

$$L = 20 \log_{10} \left( \frac{U}{U_0} \right) \quad (3.1)$$

Daraus folgt für ein Signal-Rausch-Verhältnis von  $L = 10\text{dB}$ :  $\frac{U}{U_0} = 3,16$

$\Rightarrow \text{AMD} \approx 70\%$  (Eingestellt nach Gefühl am Oszilloskop). Bester Kompromiss bei einer Lower Frequency von 10 mHz und einer Upper Frequency von 55 kHz.

Dateinamen:

*43d\_Rechteck\_f1kHz\_A1V\_Rau\_BW20MHz\_AMD70pc\_DigiFil\_Bu\_Bapa\_Or4*

*\_Lf10mHz\_Uf55kHz*

## Lock-In Technik

Modell Lock-In: SR830 DSP Messfehler Lock-In:

- Amplitude = 0,0001 (V, mV,  $\mu$ V, nV, pV) (Rest- und Ablesefehler)
- Frequenz = 0,0001 (kHz, Hz) (Rest- und Ablesefehler)

Einstellung der dB: Steilheit der Flankensteilheit der Tiefpassfilter

### a) Lock-In als Filter

Amplitude = 1,000 V

f/kHz	1	3	5	7	9	11	13
$U_{\text{eff,sin}}/\text{V}$	0,7072	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$U_{\text{eff,square}}/\text{V}$	0,9003	0.3000	0.1800	0.1285	0.1000	0.0817	0.0692
$U_{\text{eff,tri}}/\text{V}$	0,5733	0.0636	0.0229	0.0117	0.0070	0.0047	0.0034

### b) Bandbreite Lock-In

Sinusschwingung Amplitude = 100 mV

Schwankungen von  $\pm 0,0005$  V

$\tau = 30\text{ms}$		$\tau = 30\text{ms}$	
Slope = 6dB		Slope = 18dB	
f/Hz	$U_{\text{eff}}/\text{V}$	f/Hz	$U_{\text{eff}}/\text{V}$
800	0,0017	950	0,0001
820	0,0020	955	0,0001
840	0,0020	960	0,0001
860	0,0020	965	0,0002
880	0,0030	970	0,0004
900	0,0033	975	0,0006
920	0,0040	980	0,0012
940	0,0060	985	0,0026
960	0,0090	990	0,0070
980	0,0180	995	0,0270
1000	0,0700	1000	0,0706
1020	0,0180	1005	0,0270
1040	0,0090	1010	0,0073
1060	0,0060	1015	0,0026
1080	0,0040	1020	0,0012
1100	0,0033	1025	0,0006
1120	0,0030	1030	0,0004
1140	0,0020	1035	0,0002
1160	0,0020	1040	0,0001
1180	0,0020	1045	0,0001
1200	0,0020	1050	0,0001

### c) Lock-In in der Praxis

Starke Schwankungen bei offener Klappe der Diode. Schwankungen beruhigen sich, wenn die Klappe geschlossen ist.

Je höher die Zeitkonstante und je höher dB, desto genauer die Auflösung des Lock-Ins.

Niedrigster Wert der mit Lock-In aufgelöst werden kann:  $(255 \pm 5) \text{ nV}$

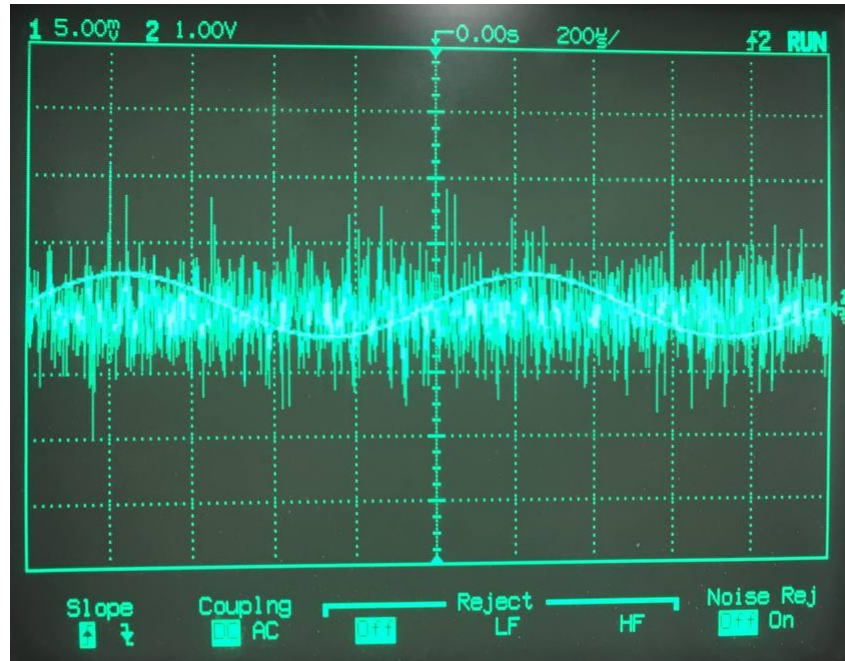


Abbildung 3.2: Signal des Oszilloskops



Abbildung 3.3: Einstellungen Lock-In-verstärker

## Aufzeichnungen während Versuch

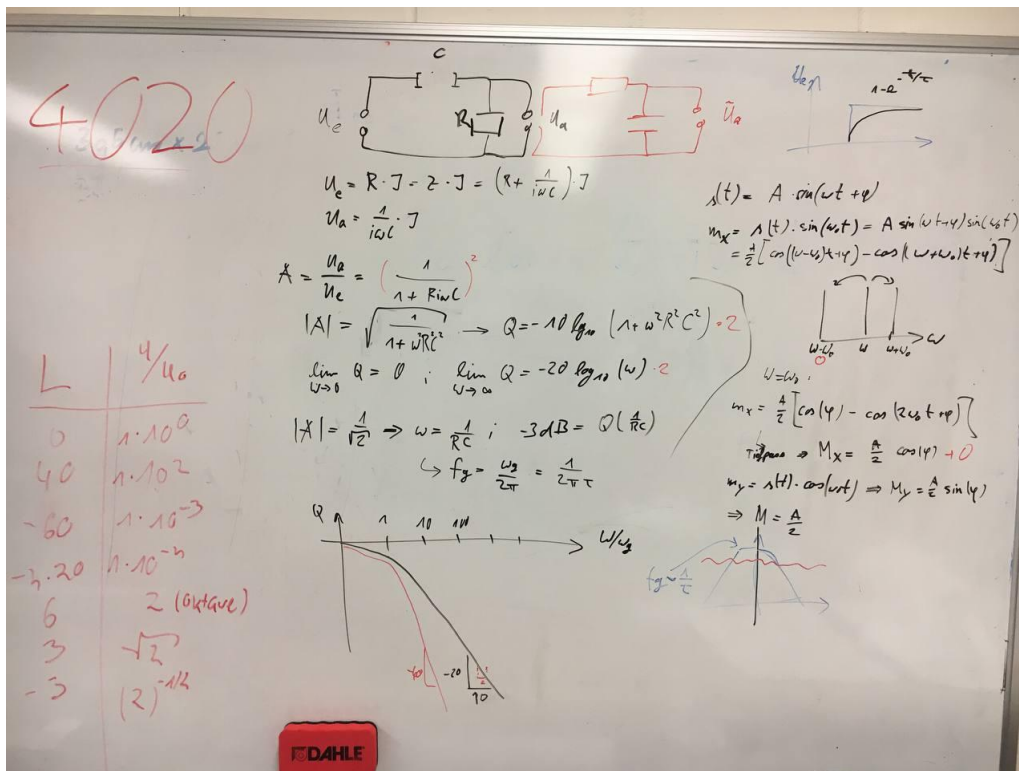


Abbildung 3.4: Aufzeichnungen

## Bestimmung Uhrzeit mit Oszilloskop

Mit einem Kabel, welches aus dem Fenster um einen Baum gewickelt wurde und an das Oszilloskop angeschlossen ist, konnte auf dem Oszilloskop eine Art Morse-Signal empfangen werden. Dieses Signal nutzen Digitaluhren, um die Uhrzeit richtig zustellen.

**Signal:**

.....  
 - - - - -

**Decodierung:**

Zum Decodieren benutzen wir die Vorlage des Betreuers und beginnen mit dem 21. Stelle des Signals und erhalten: 51min 19h 5.Day 2.Weekday 10.Month 21.Year

$\Rightarrow$  **Di 5.10.21 19:51**



## 4 Auswertung und Diskussion

### 4.1 Mittelung und Fouriertransformation

#### a) Experimentelle Bestimmung der Fourierentwicklungskoeffizienten

Im Folgenden wird die Fourierentwicklungskoeffizienten der Sinus, Rechteck und Dreiecksschwingung experimentell bestimmt. Dazu werden die einzelnen Peaks im Fourierpektrum mithilfe von einem Python-Skript (aralextrma Modul aus scipy.signal Paket ermittelt, welche dann den Wert der Fourierentwicklungskoeffizienten für diese Frequenz darstellen. Beachtet werden nur ungerade Vielfache der eingestellten Frequenz. Dies folgt aus Kapitel 2.8 bei der nur ungerade Vielfache in der Reihenentwicklung von Rechteck und Dreieckschwingung vorkommen. Die Daten der Amplitude  $A$  wurden dabei in dB aufgenommen. Für die Umrechnung der Amplitude in dB zu Volt wird die Gleichung (2.10) aus Kapitel 2.5 nach der Spannung  $U$  aufgelöst und erhält:

$$L_U = 20 \log_{10} \left( \frac{U}{U_0} \right) \Leftrightarrow U = U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}} \quad (4.1)$$

Zu beachten ist noch, dass die Spannung  $U$  die gemessene Effektivspannung ist. Diese Effektivspannung muss mit dem Faktor für die Sinusschwingung aus Kapitel 2.8 umgewandelt werden, da die Fourierreihe der jeweiligen Schwingung aus Sinusschwingungen besteht. Die verwendeten Formeln sind dann:

$$U = U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}} \cdot \sqrt{2} \text{ mit } U_0 = 1 \text{ V} \quad (4.2)$$

Die Auswertung ergibt dann Tabelle 4.1, in welcher man gut erkennen kann, dass die gemessenen Werte nicht weit von der Theorie abweichen. Dafür wurde die betragsmässige Differenz  $\Delta A = |A_{\text{Mess}} - A_{\text{Theo}}|$  zusätzlich berechnet und graphisch in Abbildung 4.1 mit den Fourierspektren der Schwingungen dargestellt. Dabei wurden die theoretischen Werte mit Gleichung (4.1) umgerechnet mit  $U = U_{\text{Theo}}/\sqrt{2}$ . Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass die Kurven für die Rechteckschwingung und der Dreieckschwingung bis zu einer Frequenz  $f = 9 \text{ kHz}$  einen ähnlichen Verlauf haben. Danach steigt  $\Delta A$  für die Rechteckschwingung stetig bis zu einem Maximum bei  $100 \text{ kHz}$  an währenddessen die Dreieckschwingung weiterhin nahe bei  $0 \mu\text{V}$  bleibt. Dies kann durch Rauschen in der Messapparatur verursacht worden sein.

$k$	$f/\text{kHz}$	Rechteck			Dreieck		
		$A_{\text{Mess}}/\text{V}$	$A_{\text{Theo}}/\text{V}$	$\Delta A/\mu\text{V}$	$A_{\text{Mess}}/\text{V}$	$A_{\text{Theo}}/\text{V}$	$\Delta A/\mu\text{V}$
1	1	1,276204	1,273240	2964,00	0,812606	0,810569	2036,48
2	3	0,425216	0,424413	803,00	0,090246	0,090063	183,15
3	5	0,254976	0,254648	328,00	0,032489	0,032423	66,12
4	7	0,181976	0,181891	85,00	0,016573	0,016542	31,10
5	9	0,141379	0,141471	92,00	0,009979	0,010007	27,96
6	11	0,115513	0,115749	236,00	0,006700	0,006699	1,16
7	13	0,097574	0,097942	367,00	0,004805	0,004796	8,75
8	15	0,084397	0,084883	486,00	0,003604	0,003603	1,51
9	17	0,074300	0,074896	596,00	0,002806	0,002805	1,31
10	19	0,066309	0,067013	704,00	0,002247	0,002245	1,82
11	21	0,059820	0,060630	811,00	0,001853	0,001838	1,48
12	23	0,054445	0,055358	913,00	0,001530	0,001532	2,60
13	25	0,049915	0,050930	1014,00	0,001298	0,001297	1,31
14	27	0,046045	0,047157	1112,00	0,001116	0,001112	4,53
15	29	0,042696	0,043905	1209,00	0,000963	0,000964	1,13
16	31	0,039764	0,041072	1308,00	0,000846	0,000843	2,17
17	33	0,037185	0,038583	1398,00	0,000737	0,000744	7,77
18	35	0,034885	0,036378	1493,00	0,000654	0,000662	8,18
19	37	0,032824	0,034412	1588,00	0,000591	0,000592	0,72
20	39	0,030967	0,032647	1680,00	0,000521	0,000533	12,02
21	41	0,029284	0,031055	1771,00	0,000480	0,000482	1,84
22	43	0,027747	0,029610	1863,00	0,000433	0,000438	5,67
23	45	0,026338	0,028294	1956,00	0,000395	0,000400	4,88
24	47	0,025044	0,027090	2046,00	0,000362	0,000367	4,84
25	49	0,023854	0,025984	2130,00	0,000335	0,000338	2,90
26	51	0,022747	0,024965	2218,00	0,000312	0,000312	0,68
27	53	0,021718	0,024023	2305,00	0,000280	0,000289	8,32
28	55	0,020760	0,023150	2390,00	0,000264	0,000268	4,02
29	57	0,019863	0,022338	2475,00	0,000255	0,000249	5,43
30	59	0,019024	0,021580	2557,00	0,000237	0,000233	3,97
31	61	0,018230	0,020873	2642,00	0,000218	0,000218	0,44
32	63	0,017489	0,020210	2721,00	0,000205	0,000204	0,45
33	65	0,016786	0,019588	2802,00	0,000194	0,000192	1,69
34	67	0,016126	0,019004	2878,00	0,000181	0,000181	0,39
35	69	0,015501	0,018453	2951,00	0,000170	0,000170	0,61

$k$	$f/\text{kHz}$	Rechteck			Dreieck		
		$A_{\text{Mess}}/\text{V}$	$A_{\text{Theo}}/\text{V}$	$\Delta A/\mu\text{V}$	$A_{\text{Mess}}/\text{V}$	$A_{\text{Theo}}/\text{V}$	$\Delta A/\mu\text{V}$
36	71	0,014909	0,017933	3024,00	0,000164	0,000161	3.33
37	73	0,014344	0,017442	3097,00	0,000156	0,000152	4.20
38	75	0,013814	0,016977	3163,00	0,000145	0,000144	1.37
39	77	0,013305	0,016536	3230,00	0,000134	0,000137	3.04
40	79	0,012825	0,016117	3292,00	0,000133	0,000130	3.28
41	81	0,012368	0,015719	3351,00	0,000129	0,000124	5.11
42	83	0,011932	0,015340	3408,00	0,000122	0,000118	4.17
43	85	0,011522	0,014979	3457,00	0,000116	0,000112	4.29
44	87	0,011128	0,014635	3506,00	0,000111	0,000107	4.24
45	89	0,010757	0,014306	3549,00	0,000100	0,000102	2.13
46	91	0,010407	0,013992	3585,00	0,000106	0,000098	8.08
47	93	0,010077	0,013691	3614,00	0,000098	0,000094	4.35
48	95	0,009761	0,013403	3641,00	0,000090	0,000090	0.64
49	97	0,009467	0,013126	3659,00	0,000089	0,000086	2.70
50	99	0,009193	0,012861	3668,00	0,000088	0,000083	5.51
51	101	0,008936	0,012606	3671,00	0,000087	0,000079	7.23
52	103	0,008699	0,012362	3662,00	0,000089	0,000076	13,00
53	105	0,008479	0,012126	3647,00	0,000079	0,000074	5.97
54	107	0,008283	0,011899	3617,00	0,000084	0,000071	13,70
55	109	0,008101	0,011681	3580,00	0,000081	0,000068	13,08
56	111	0,007937	0,011471	3534,00	0,000080	0,000066	13,76
57	113	0,007803	0,011268	3465,00	0,000077	0,000063	13,08
58	115	0,007687	0,011072	3385,00	0,000076	0,000061	15,02
59	117	0,007586	0,010882	3297,00	0,000080	0,000059	20,31
60	119	0,007514	0,010699	3186,00	0,000076	0,000057	18,57
61	121	0,007456	0,010523	3066,00	0,000075	0,000055	19,14
62	123	0,007423	0,010352	2929,00	0,000078	0,000054	24,34

Tabelle 4.1: Vergleich Fourierentwicklungskoeffizienten in Theorie und Praxis

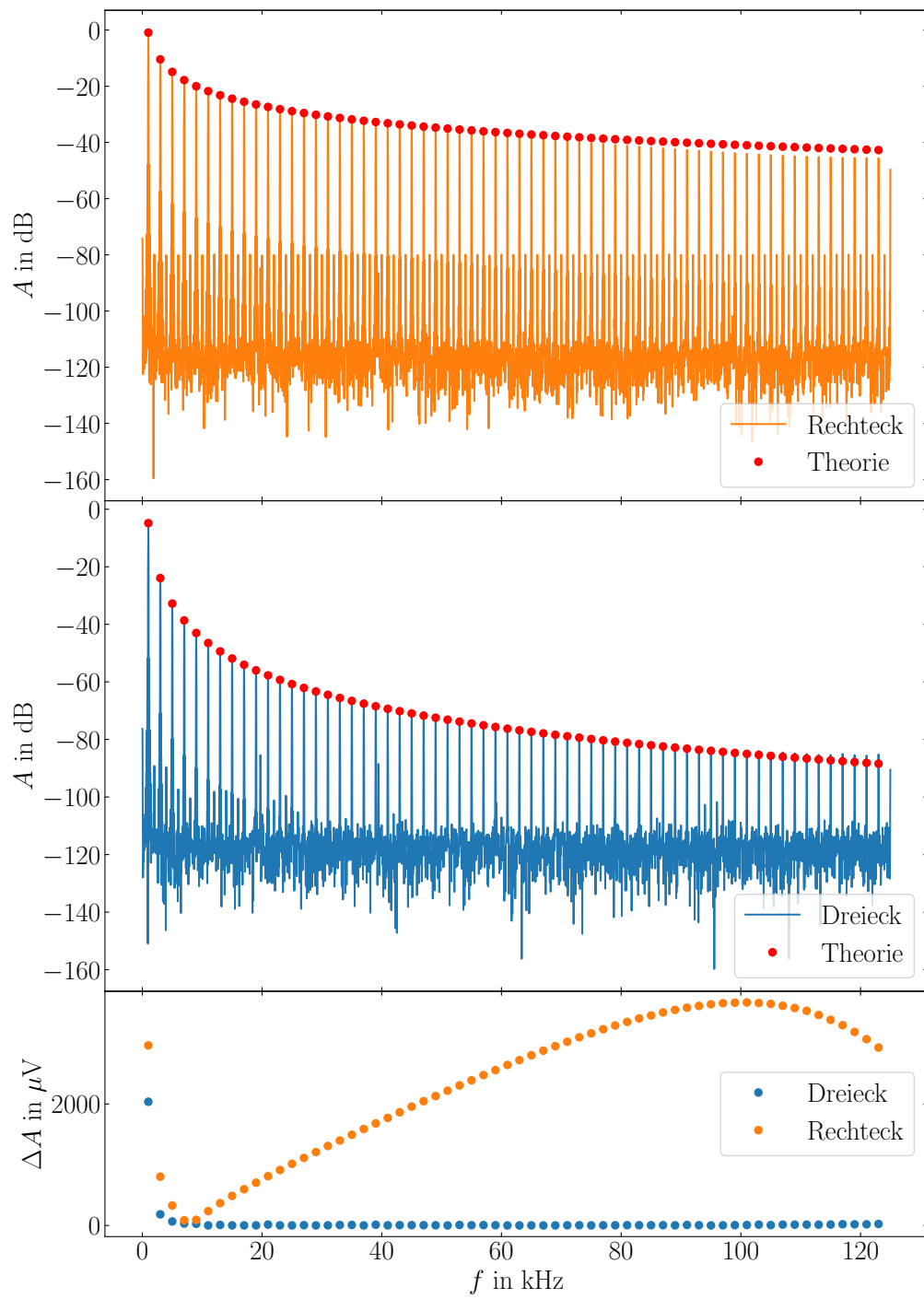


Abbildung 4.1: Betragsmässige Differenz der Messwerte und Theorie mit den jeweiligen Fourierspektrum der Schwingungsform mit Theorie

**b) Fourierspektrum Sinusschwingung**

Dieser Teil behandelt das Fourierspektrum der Sinusschwingung bei 1 V Amplitude.

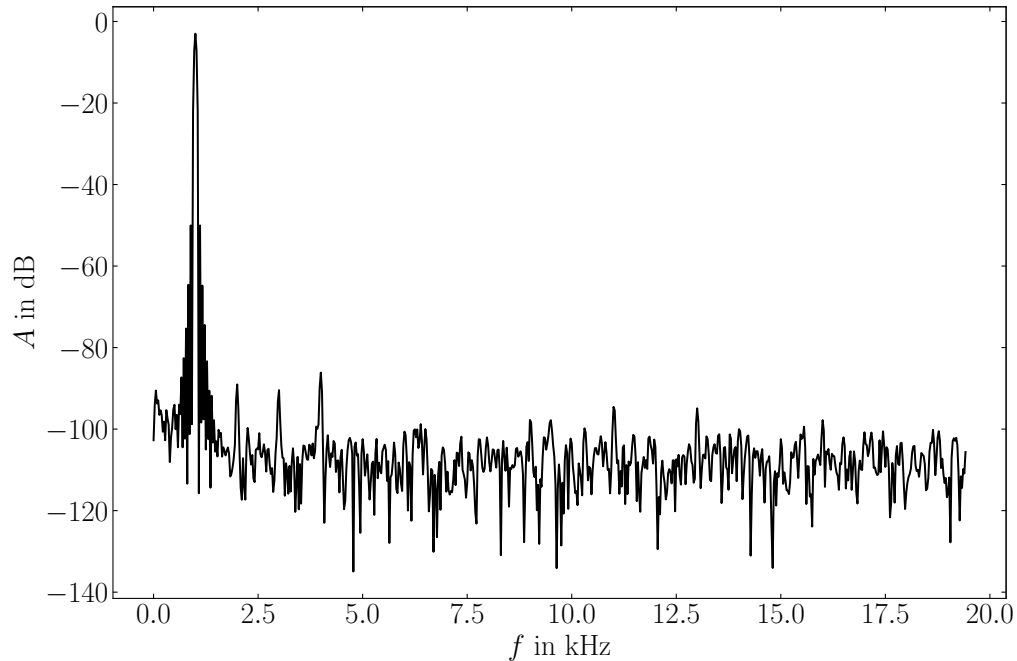


Abbildung 4.2: Fourierspektrum der Sinusschwingung

Wie in Abbildung 4.2 zu sehen, ist ein deutlich ausgeprägter Peak bei einer Frequenz von 1 kHz zu erkennen. Nach Kapitel 2.8 sollte aber das Fourierspektrum nur einen Peak in Form einer Delta-Funktion bei der eingestellten Frequenz besitzen. Dies ist in der realen Welt aufgrund von Rauschen nicht möglich, wodurch der Hauptpeak bei 1 kHz als eine breite Delta-Funktion gemessen wird. Weiterhin ist in Abbildung 4.2 neben dem Hauptpeak deutlich noch weiter kleinere Peaks zu erkennen, welche selbst in einem Abstand von 1 kHz auftreten. Diese Peaks werden durch die Umgebungseinflüsse aus Kapitel 2.2 und durch die Netzspannungsquelle selbst verursacht.

### c) Einfluss Mittelung auf Rechteckschwingung

Nun wird der Einfluss der Anzahl der Mittelung  $N$  auf eine Rechteckschwingung mit einer Amplitude  $U_0 = 1\text{ V}$  mit einem Rauschen der Bandbreite  $f_{\text{Band}} = 20\text{ MHz}$  und einer AM Depth = 120 % betrachtet. In Abbildung 4.3 ist zu erkennen, dass sich mit der Zunahme der Anzahl der Mittelungen  $N$  der Signal/Rausch-Abstand  $d$  zunimmt. Dies war zu erwarten, da schon wie in Kapitel 2.4.2 erklärt, bei der Mittelung das Signal des Rauschens nur um den Faktor  $\sqrt{N}$  zunimmt, während das Signal der Rechteckschwingung proportional zur Wiederholung anwächst. Um diesen Umstand graphisch darzustellen werden zuerst die Peaks der Rechteckschwingung und der Median bei jeder Mittelung mit einem Python-Skript bestimmt. Der Median jeder Mittelung ist in Abbildung 2.4 als *gestrichelte Linie* in zugehöriger Farbe mit eingezeichnet. Der Signal/Rausch-Abstand  $d$  wird dann mit der folgenden Formel bestimmt:

$$d = |\text{Median} - \text{Maxima}| \quad (4.3)$$

Als Maxima wird der Wert des ersten Peaks verwendet, welcher -6.91 dB beträgt. Die Berechnung ergibt dann folgende Tabelle:

$N$	$d/\text{dB}$
0	60,28
10	70,61
50	77,65
100	80,39

Da die Werte in dB angegeben sind, muss die Fit-Funktion logarithmisch sein. Der Fit wird mit dem Modul `curve_fit` aus dem `scipy.optimize` Paket erstellt. Die Funktion hat dabei die Form:

$$d(N) = a \cdot \ln(\sqrt{N+1}) + t \xrightarrow{\text{Fit}} d(N) = 8,77\text{ dB} \cdot \ln(\sqrt{N+1}) + 60.24\text{ dB} \quad (4.4)$$

In Abbildung 4.4 erkennt man deutlich, dass der Fit mit der Theorie gut übereinstimmt, was diese wiederum bestätigt. Womit sich sagen lässt, dass sich der Signal/Rausch-Abstand  $d$  mit zunehmender Mittelung  $N$  vergrößert und es somit möglich ist, das Signal besser aufzulösen.

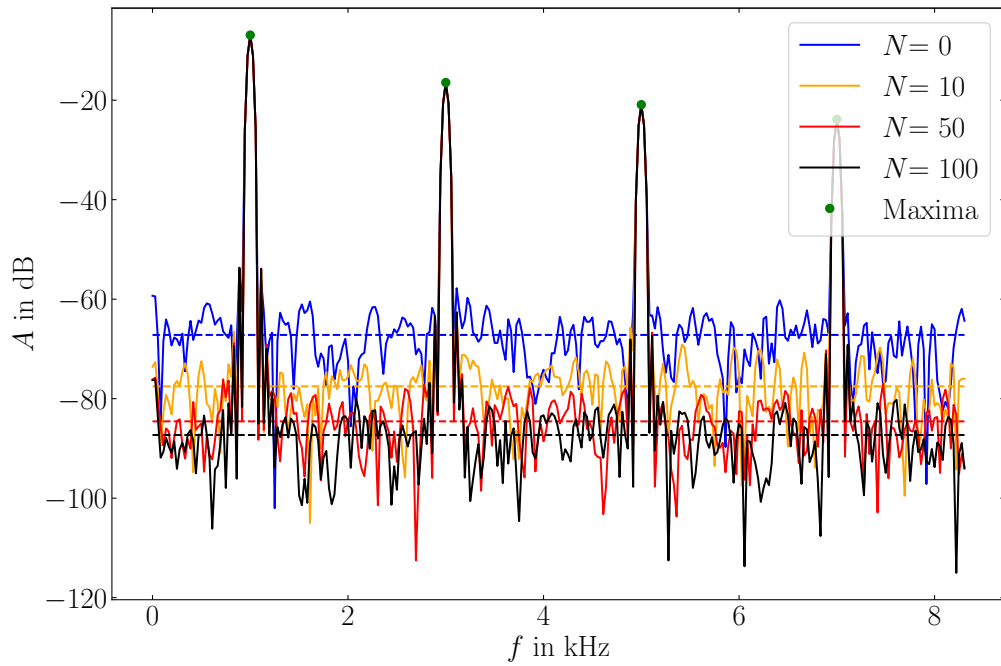


Abbildung 4.3: Einfluss der Mittelung auf Fourierspektrum einer Rechteckschwingung

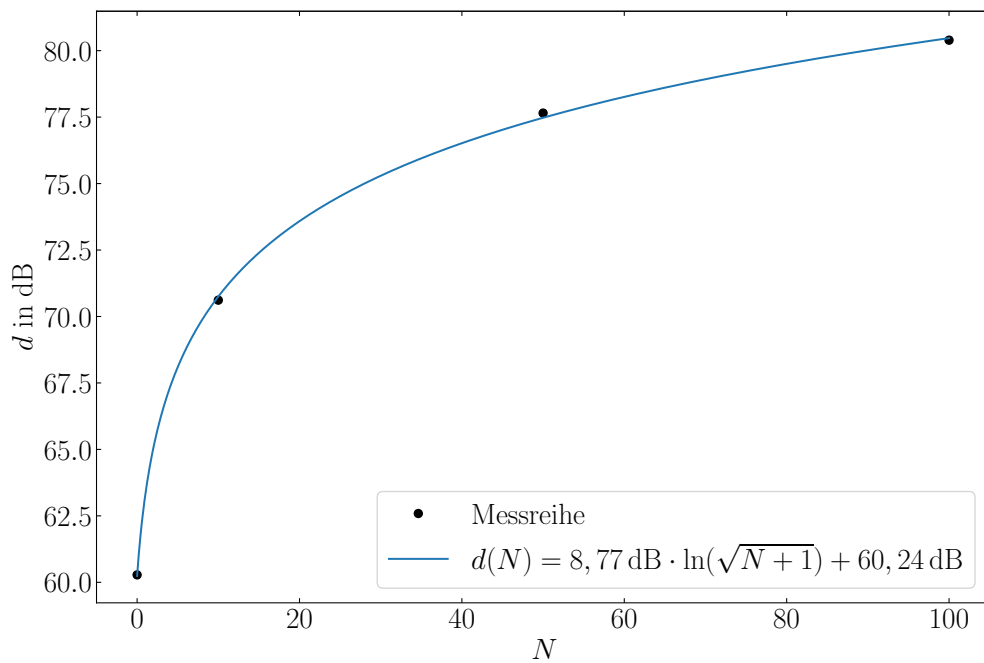


Abbildung 4.4: Signal-Rausch Abstand in Abhängigkeit der Mittelungen  $N$

#### d) Einfluss Signal/Rausch-Abstand auf zeitliche Signalform

Als weiteres wird der Einfluss des Signal/Rausch-Verhältnis  $V_{SR}$  auf die Signalform einer Rechteckschwingung mit einer Amplitude  $U_0 = 1$  V und einer Bandbreite  $f_{\text{Band}} = 20$  MHz betrachtet. In Abbildung 4.5 ist zuerst der Einfluss des Signal/Rausch-Abstands auf die komplette Rechteckschwingung dargestellt. Schon hier erkennt man, dass mit höherem Signal/Rausch-Verhältnis das „Ausschlagen“ der Amplitude des Rauschens zunimmt. Noch deutlich ist dies im Ausschnitt des oberen Umkehrpunkts der Rechteckschwingung in Abbildung 4.5 zu erkennen. Dies bedeutet, dass für kleine  $V_{SR}$  das Verhältnis aus Nutzsignal und Störsignal (Rauschen) abnimmt, aber der Signal/Rausch-Abstand  $d$  zunimmt und somit das Rauschen weniger Anteil am eigentlichen Signal hat. Die Änderung des Signal/Rausch-Verhältnis  $V_{SR}$  hat aber keinen generellen Einfluss auf den Verlauf der Signalform der Rechteckschwingung.

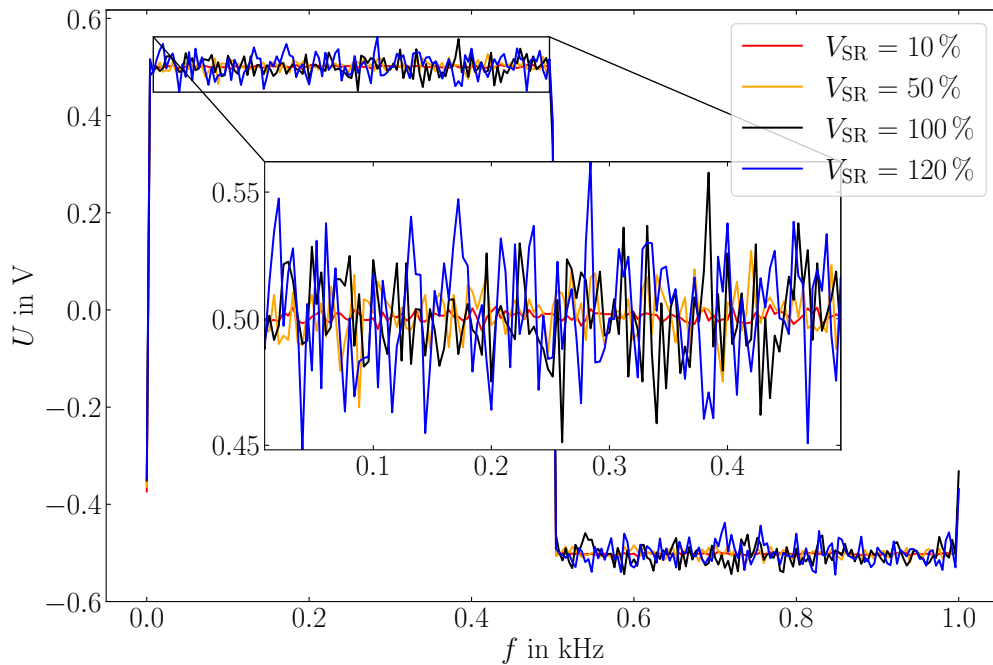


Abbildung 4.5: Einfluss Signal/Rausch-Abstand mit Ausschnitt vom oberen Umkehrpunkt der Rechteckschwingung



**e) Einfluss Bandbreite auf zeitliche Signalform**

Zuletzt in diesem Kapitel wird der Einfluss der Bandbreite auf die zeitliche Signalform besprochen. Dabei wird wieder eine Rechteckschwingung mit einer Amplitude  $U_0 = 1\text{ V}$  und einem Signal/Rausch-Abstand  $d = 100\%$  verwendet. In Abbildung 4.7 wird erneut eine komplette Rechteckschwingung gezeigt. Darauf erkennt man, dass der Funktionsgenerator die Form des Rechtecksignals mit kleineren Bandbreiten  $f_{\text{Band}}$  nicht mehr erzeugen kann. Vor allem bei Frequenzen unter  $100\text{ kHz}$ . Aber auch eine Zunahme des Rauschens ist zu erkennen, wenn die Bandbreite kontinuierlich abnimmt. Dies bestätigt auch das Fourierspektrum (Abb. 4.6). Darin ist eine Zunahme des Signal/Rausch-Abstands  $d$  zu erkennen, was bedeutet, dass bei höheren Bandbreiten das Rauschen auf dem Rechtecksignal abnimmt. In Abbildung 4.8 kann man dies noch genauer betrachten.

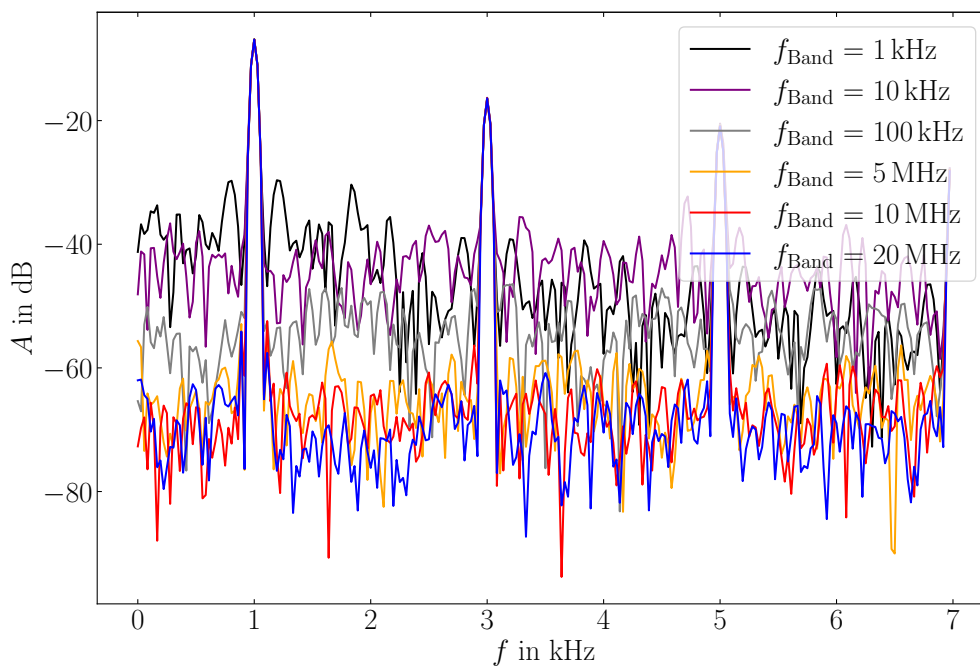


Abbildung 4.6: Einfluss Bandbreite auf Rechteckschwingung im Fourierspektrum

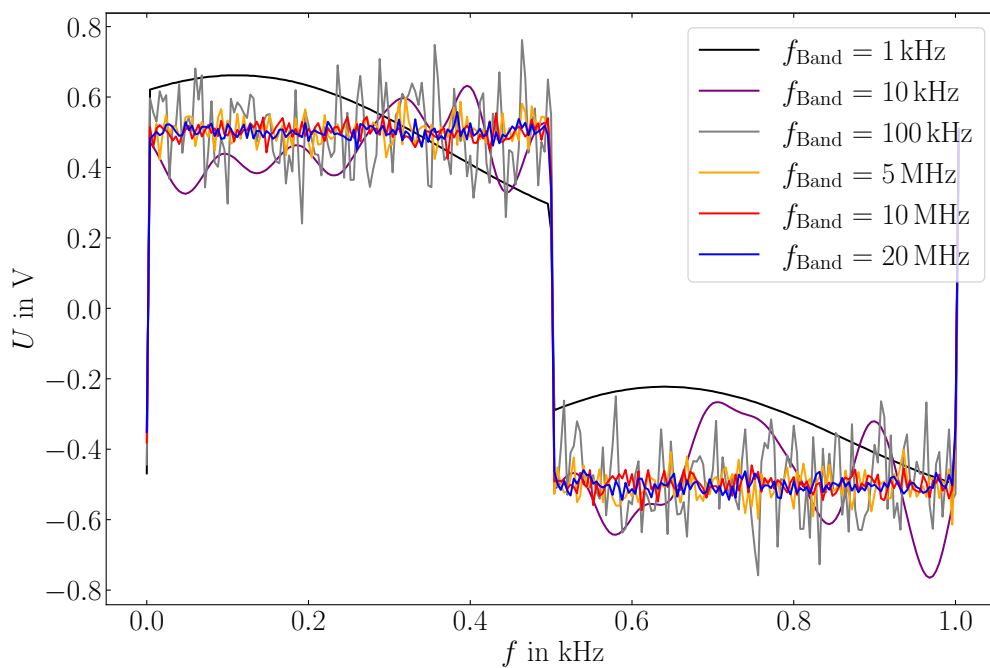


Abbildung 4.7: Einfluss Bandbreite auf komplette Rechteckschwingung

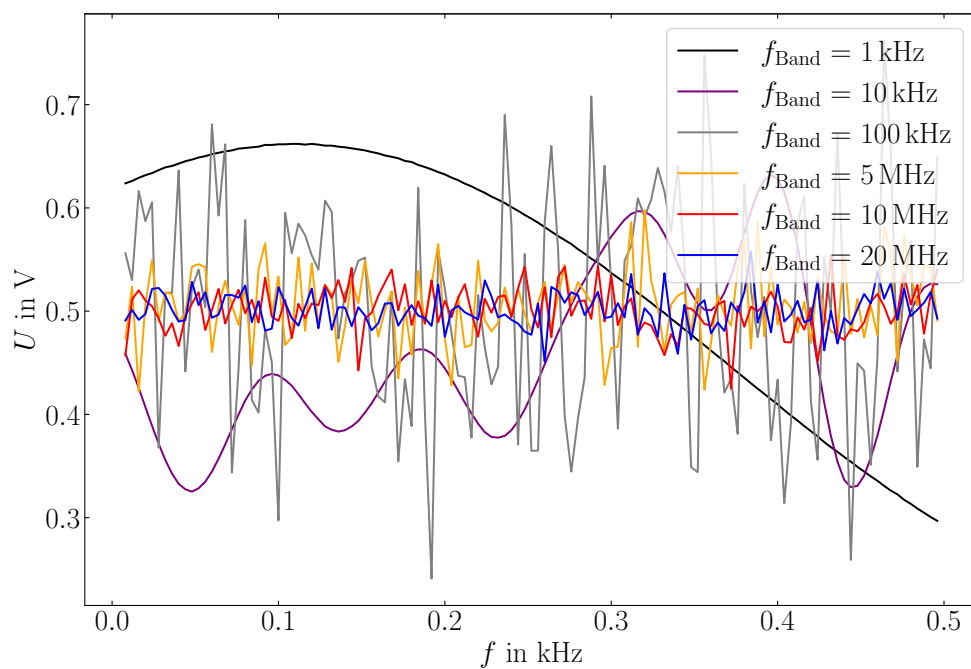


Abbildung 4.8: Einfluss Bandbreite im Ausschnitt vom oberen Umkehrpunkt der Rechteckschwingung

## 4.2 Theorem von Nyquist

Im Folgenden soll das Theorem von Nyquist genauer betrachtet werden. Dafür wird der Ausgang des Frequenzgenerator direkt mit dem Eingang des Messcomputers verbunden, parallel dazu wird der Ausgang des Generators mit dem Oszilloskop überprüft.

Das Theorem besagt das ein Signal, begrenzt mit  $f_{\max}$ , nur mit einer Abtastfrequenz von größer  $f_{\text{crit}}$  exakt rekonstruiert werden kann.

$$f_{\text{crit}} = 2 \cdot f_{\max} \quad (4.5)$$

Um dies genauer zu untersuchen wurde zuerst die Abtastrate für ein unverraushtes Sinussignal ( $f = 20 \text{ kHz}$ ) variiert und gegen die gemessene Frequenz aufgetragen.

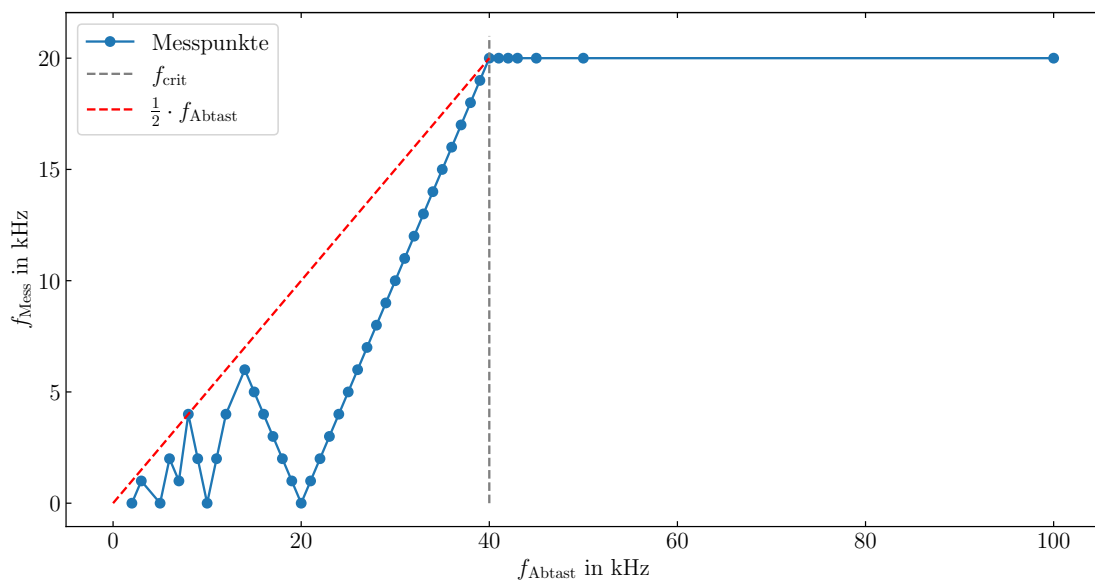


Abbildung 4.9: Variation der Abtastrate gegen die gemessene Frequenz, bei konstanter Generatorfrequenz von 20 kHz.

In Abbildung 4.9 ist deutlich zu erkennen, dass für die Abtastfrequenz  $f_{\text{Abtast}} > f_{\text{crit}}$  die Frequenz korrekt gemessen wird. Bei unterschreiten der kritischen Frequenz fällt die gemessene Frequenz jedoch unter den eigentlichen Wert, bis  $f = f_{\text{Abtast}}$ . Wenn die Abtastfrequenz gleich der Generatorfrequenz ist, wird eine Frequenz von 0 Hz gemessen, also ein konstantes Signal. Das ist logisch, da der Detektor immer den gleichen Punkt der Signalabfolge misst und dies somit als konstantes Signal wahrnimmt. Dies tritt nicht nur für  $f = f_{\text{Abtast}}$  auf, sondern immer dann wenn  $f_{\text{Abtast}} = n \cdot f$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Aus diesem Grund entsteht vor der kritischen Frequenz ein sägezahnähnliches Muster.

In der zweiten Messreihe wurde nun die Abtastrate ( $f_{\text{Abtast}} = 20 \text{ kHz}$ ) konstant gehalten und die Frequenz des Generators wurde variiert, welche wiederum gegen die gemessene Frequenz aufgetragen wurde. Für die kritische Frequenz gilt nun:

$$f_{\text{crit}} = \frac{1}{2} f_{\text{Abtast}} \quad (4.6)$$

In Abbildung 4.10 ist wieder deutlich zu sehen, dass für  $f_{\text{Quelle}} < f_{\text{crit}}$  die Frequenz

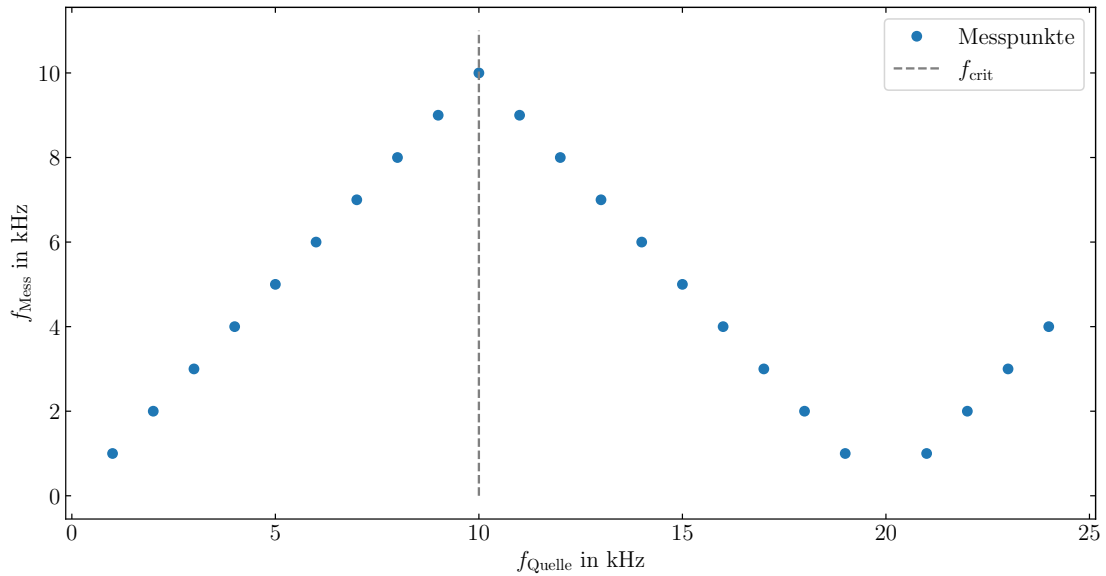


Abbildung 4.10: Variation der Generatorfrequenz gegen die gemessene Frequenz, bei konstanter Abtastfrequenz.

richtig gemessen wird. Ist dies jedoch nicht mehr der Fall, so tritt analog zu oben wieder ein Sägezahnmuster auf.

Des Weiteren wurde das Fourierspektrum eines Dreieckssignal ( $f = 3 \text{ kHz}$ ), mit einer Abtastfrequenz von  $f_s = 7 \text{ kHz}$ , aufgenommen.

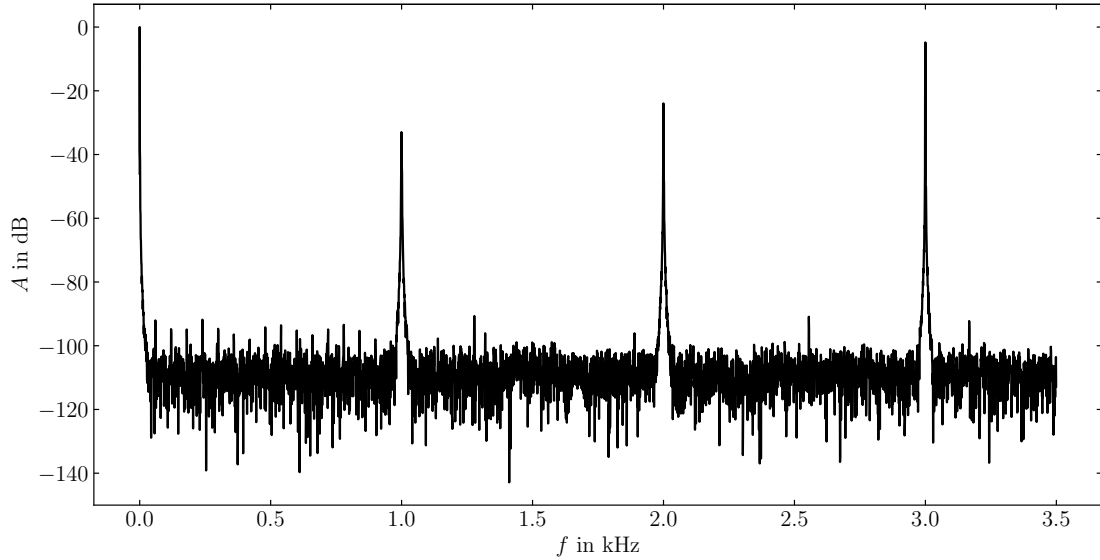


Abbildung 4.11: Fourierspektrum eines Dreieckssignal ( $f = 3 \text{ kHz}$ ),  $f_s = 7 \text{ kHz}$ .

In Abbildung 4.11 ist der Effekt des Aliasing zu erkennen, das heißt der Detektor kann nicht unterscheiden, welche die richtig gemessene Frequenz ist und was die Aliase (falsche zugeordnete Messwerte) der eigentlichen Frequenz sind. Da die Generatorfrequenz bekannt ist, ist ebenfalls bekannt, dass die richtige Frequenz  $f = 3 \text{ kHz}$  ist und die Peaks bei  $f_1 = 1 \text{ kHz}$  und  $f_2 = 2 \text{ kHz}$  die Aliase dieser sind. Hat man dieses wissen jedoch nicht, kann dies jedoch zu nicht unerheblichen Messfehlern führen. Um Aliasing zu vermeiden, sollte eine höhere Abtastfrequenz verwendet werden.

Eine mögliche Erklärung für die Peaks bei 0 kHz, 1 kHz und 2 kHz sind Umklappprozesse. Umklappprozesse sind im allgemeinen Dreiphononenprozesse, für die folgende Erhaltungssätze gelten:

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3 \quad \text{Energierhaltung} \quad (4.7)$$

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{q}_3 + \vec{G} \quad \left| \vec{G} \right| \neq 0 \quad (4.8)$$

Gleichung 4.8 lässt sich als Impulserhaltung auffassen, da  $\hbar\vec{q}$  der Quasiimpuls eines Phonons ist. Es handelt sich also um Stoßprozesse [4].

Die Erklärung für die Äquidistanz der Peaks hängt mit quantenmechanischen Effekten zusammen.

### 4.3 Signalfilterung

In diesem Abschnitt soll die Signalfilterung genauer betrachtet werden. Dafür wird wieder der Ausgang des Generators mit dem Eingang des Analog-Digital-Wandlers verbunden. Parallel dazu wird der Ausgang des Generators mit dem Oszilloskop überwacht.

#### 4.3.1 Verschiedene Tiefpassfilterkurven

Zuerst sollen die Filterkurven verschiedener Tiefpässe dargestellt werden. Hierzu wird am Generator ein Sinussignal ( $f = 100 \text{ Hz}$ ) mit einer Rauschbandbreite von 20 MHz eingestellt.

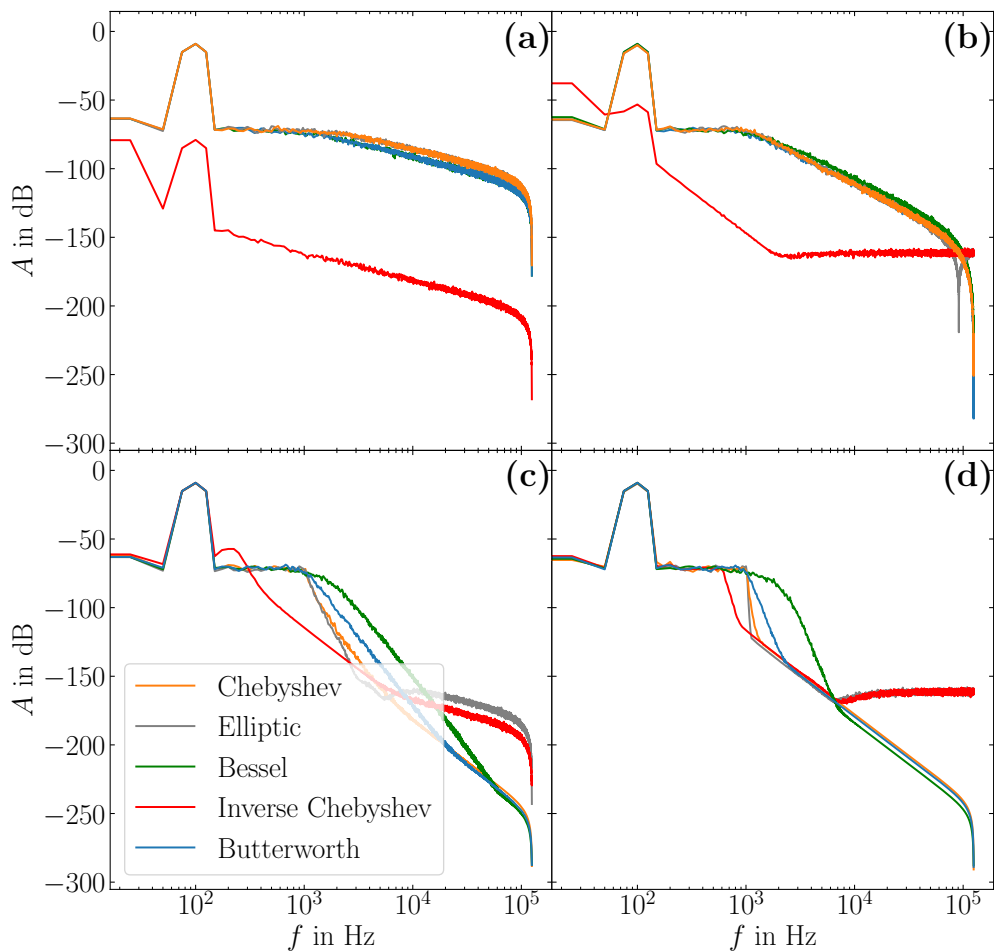


Abbildung 4.12: Fourierspektrum verschiedene Tiefpassfilter mit (a) Ordnung 1, (b) Ordnung 2, (c) Ordnung 5 und (d) Ordnung 10

In Abbildung 4.12 fällt auf, dass sich Elliptic- und Chebyshevfilter fast deckungsgleich überlagern. Auch Butterworth- und Besselfilter sind fast deckungsgleich mit den oben genannten lediglich für Frequenzen zwischen ca.  $1 \cdot 10^3$  Hz und  $1 \cdot 10^5$  Hz divergieren sie geringfügig. Am stärksten weicht der inverse Chebyshevfilter von den anderen ab. Der Verlauf ist sehr ähnlich, nahezu parallel, jedoch ist sie Kurve nach unten verschoben. Für höhere Ordnungen fallen die Kurven nach dem Knick immer steiler ab und die Kurven nähern sich im Durchgangsbereich an, während sie für hohe Frequenzen stärker von einander abweichen. Genauer im Bezug auf die Ordnung wird in Abschnitt 4.3.4 beschrieben.

Außerdem soll für jede Filterkurve der 3 dB-Punkt und die Steigung, für große Frequenzen bestimmt werden. Dies wurde mithilfe des Diagramms ermittelt.

Filter	3dB-Punkt in Hz	Steigung in dB/Oktave	Steigung in dB/Dekade
Butterworth	$1994 \pm 50$	$4 \pm 2$	$16 \pm 4$
Chebyshev	$1975 \pm 50$	$3 \pm 3$	$13 \pm 4$
inverser Chebyshev	$1499 \pm 50$	$4 \pm 2$	$19 \pm 3$
Elliptic	$1499 \pm 50$	$3 \pm 4$	$15 \pm 6$
Bessel	$1801 \pm 50$	$4 \pm 2$	$17 \pm 4$

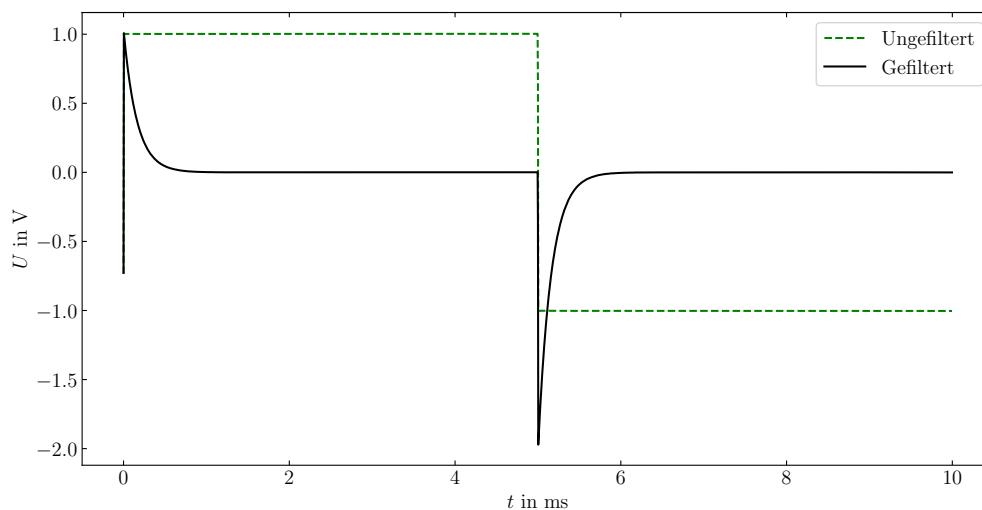
Tabelle 4.2: Werte des 3dB-Punktes und der Steigung für verschiedene Filter

Aus dem Vorbereitungsgespräch, mit dem Betreuer, ist bekannt, dass für einen Filter erster Ordnung 6 dB/Oktave (oder 20 dB/Dekade) erwartet werden. Trotz einiger Abweichungen stimmen die Größenordnungen, der Werte aus Tabelle 4.2 gut überein. Die großen Fehler sind der graphischen Werteermittlung geschuldet, für eine grobe Beurteilung, ob die vorliegende Messung Sinn ergibt, war dies jedoch ausreichend.

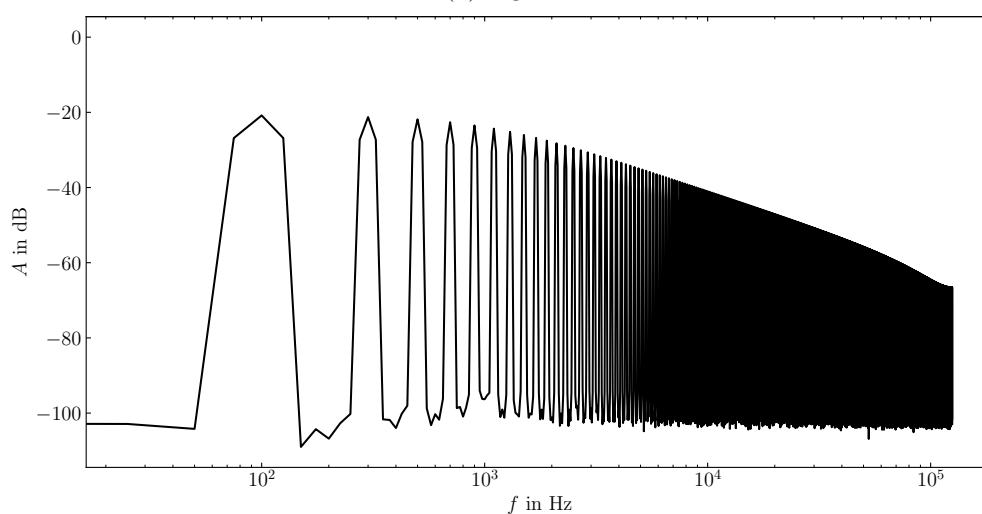
### 4.3.2 Filterwirkung auf Rechtecksignal

In diesem Abschnitt soll die Wirkung verschiedener Filter auf ein Rechtecksignal ( $f = 100 \text{ Hz}$ ) untersucht werden.

Hierfür wurde der Butterworthfilter und der inverse Chebyshevfilter ausgewählt, da dieser in Abschnitt 4.3.1 die größte Abweichung von den anderen zeigte.



(a) Signal

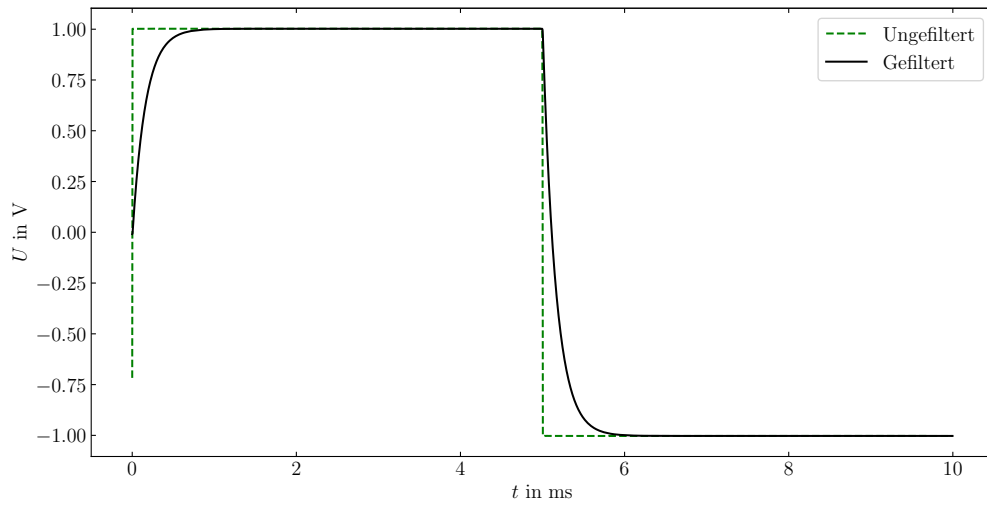


(b) Fourierspektrum

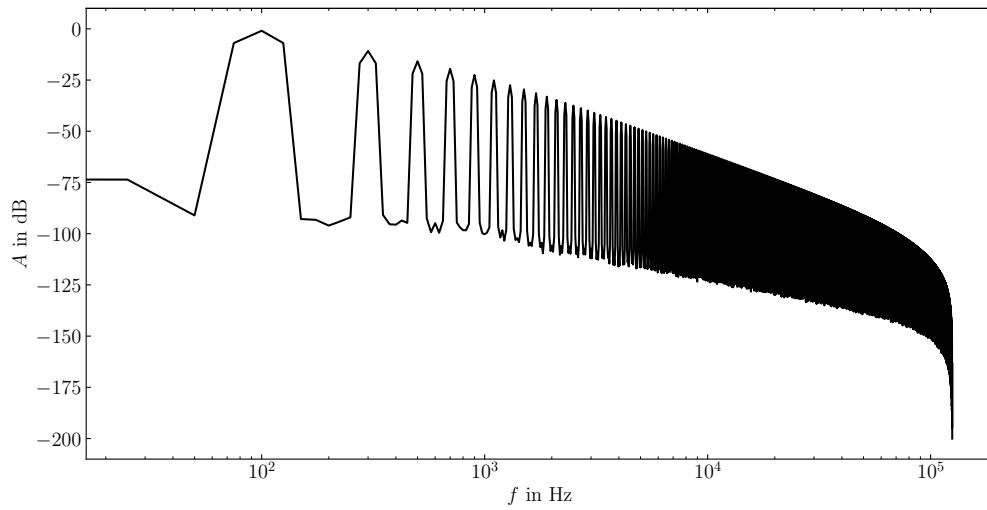
Abbildung 4.13: Butterworthfilter als Hochpass

Aus Abbildung 4.13 geht klar die differenzierende Eigenschaft des Hochpasses hervor. Außerdem knickt das Fourierspektrum für große Frequenzen ab.





(a) Signal

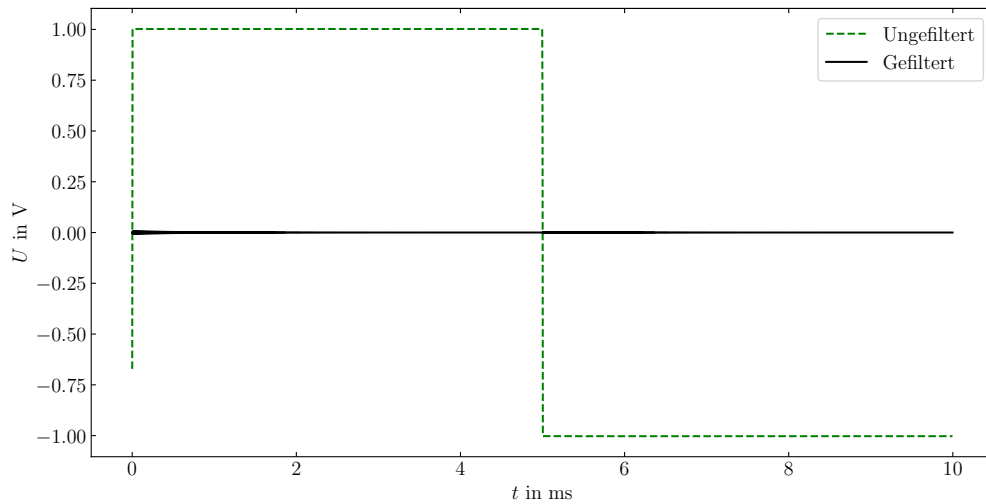


(b) Fourierspektrum

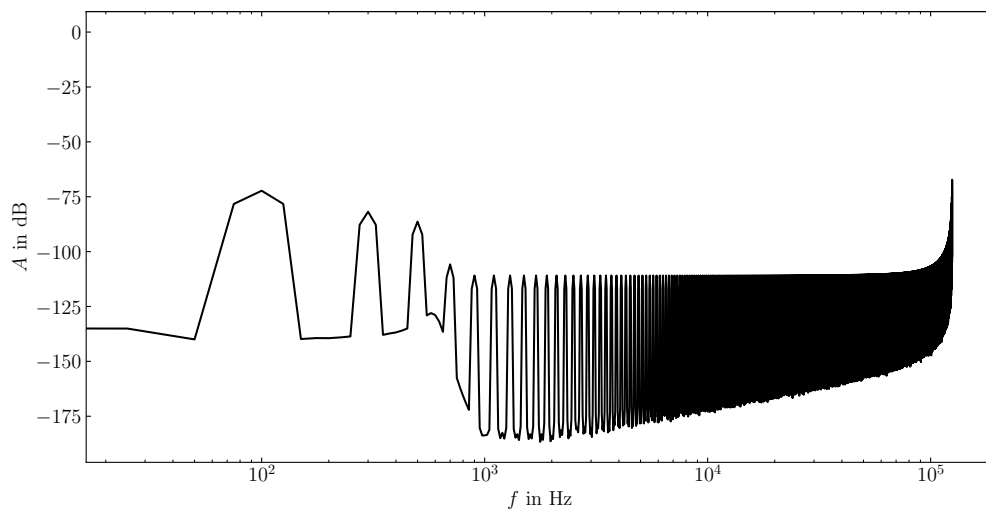
Abbildung 4.14: Butterworthfilter als Tiefpass

Im Gegensatz zum Hochpass wirkt der Butterworthfilter Tiefpass als Integriere und das Fourierspektrum knickt für große Frequenzen ab, dies ist in Abbildung 4.14 zu erkennen.

Der inverse Chebyshevfilter zeigt vor allem im Signal ein ganz anderes Bild. In Abbildung 4.15 ist beim Signal in der ersten Millisekunde eine gewisse Welligkeit zu erkennen. Im Bezug auf das Fourierspektrum fällt auf, dass dieser Filter, im Vergleich zum Butterworthhochpass, für größere Frequenzen schneller durchlässiger wird.



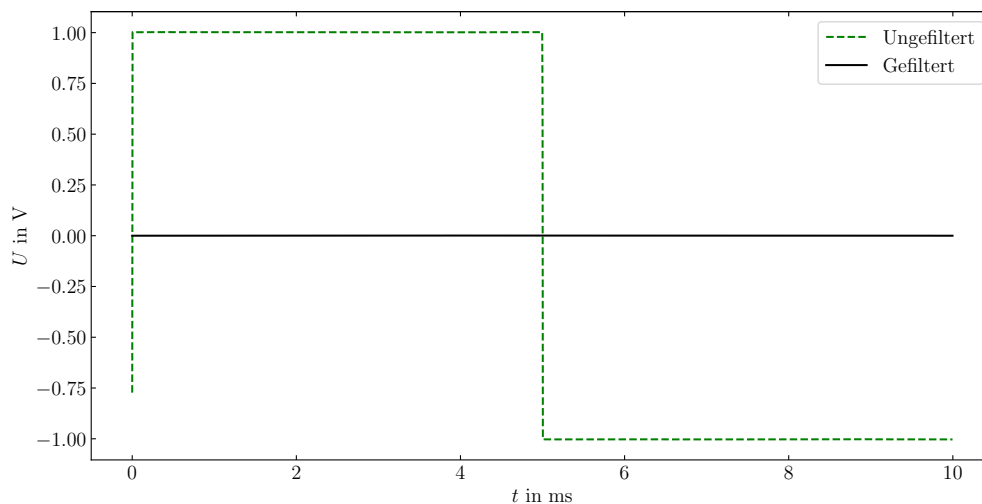
(a) Signal



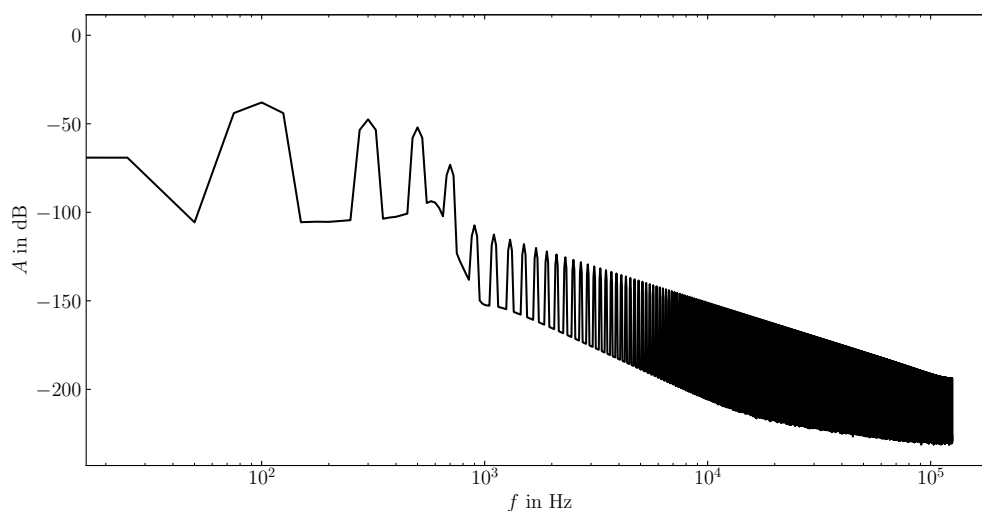
(b) Fourierspektrum

Abbildung 4.15: Inverser Chebyshevfilter als Hochpass

In Abbildung 4.16 fällt die konstante Nulllinie beim gefilterten Signal auf, auch ist das abknicken (bei ca. 1 kHz), im Vergleich zum Butterworthtiefpass ausgeprägter.



(a) Signal



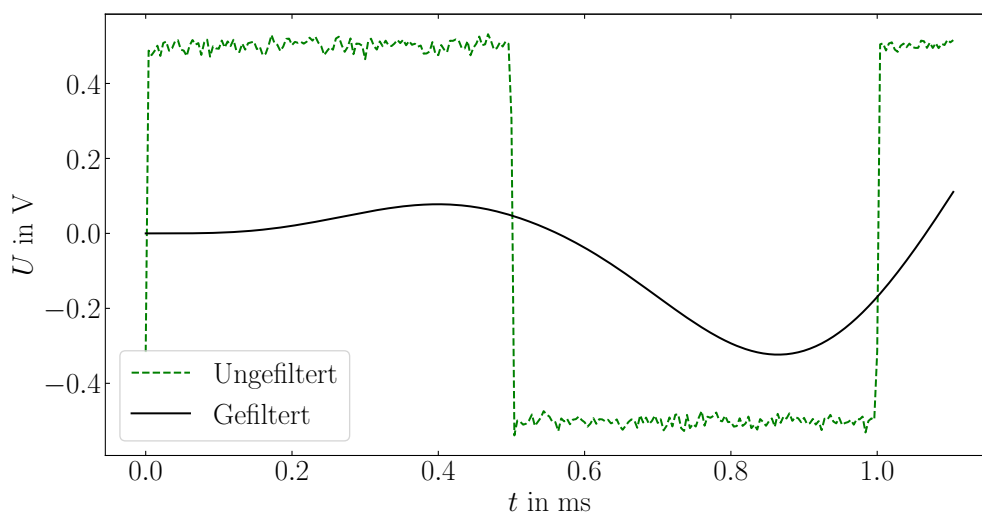
(b) Fourierspektrum

Abbildung 4.16: Inverser Chebyshevfilter als Tiefpass

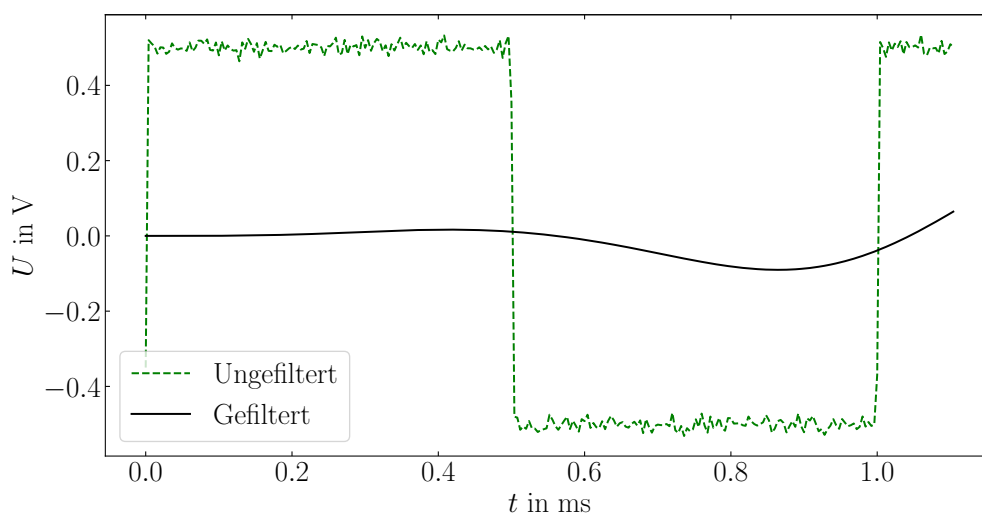
Da die anderen Filter ähnliche Eigenschaften wie der Butterworthfilter aufweisen wurde auf die Abbildung deren Signale und Fourierspektren bewusst verzichtet.

### 4.3.3 Bandpass 4. Ordnung

In diesem Abschnitt soll die geeignete Einstellung eines Butterworthbandpasses (4. Ordnung) gefunden werden, die Rauschen, beim gleichzeitigen Erhalt der zeitlichen Form der Signalfunktion, abmildert.



(a) Bandpass mit Durchlassbereich von 500 bis 1500Hz



(b) Bandpass mit Durchlassbereich von 700 bis 1300Hz

Abbildung 4.17: Signalfunktion verschiedener Bandpässe

Die in Abbildung 4.17 gezeigten Signalfunktionen weichen stark von einer Rechteckfunktion ab und sind daher ungeeignet.

Durch weiteres Ausprobieren wurden bessere Einstellungen gefunden, welche die in Abbildung 4.18 dargestellte Signalfunktion ergeben. Hier ist noch deutlich ein Rechtecksignal

zu erkennen.

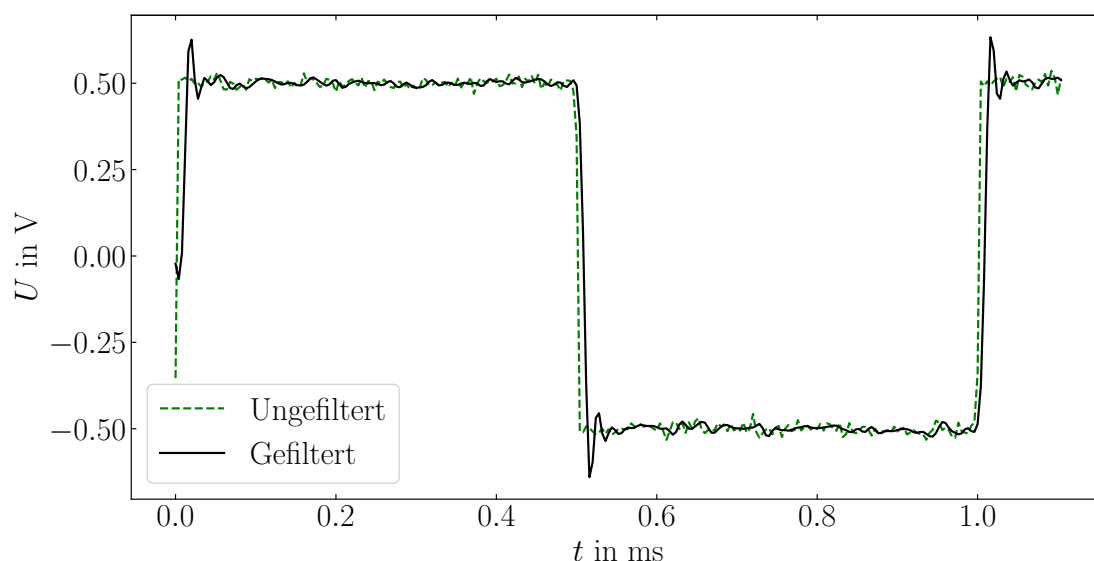


Abbildung 4.18: Bandpass mit Durchlassbereich von 10mHz bis 55kHz

Eine gute Rauschunterdrückung verursacht also eine große Signalverzerrung. Der Grund hierfür ist folgender: Die Fouriertransformierte des Rechtecksignals ist eine Superposition von Sinusschwingungen über den ganzen Frequenzraum, wenn nun ein Teil dieser Frequenzen herausgefiltert werden und eine Rücktransformation erfolgt kommt es, aufgrund der fehlenden Frequenzen zu einer Signalverzerrung. Das heist um so enger der Bandpass eingestellt wird um so verzerrter wird das Rechtecksignal, was gut zu unseren Beobachtungen passt. Es ist also darauf zu achten, dass dieses Verhältnis, abhängig vom Fokus der Messung, klug gewählt wird.

#### 4.3.4 Einfluss der Ordnung

Im folgenden soll betrachtet werden welchen Einfluss die Ordnung eines Filters hat. Um diesen Umstand genauer betrachten zu können werden Fourierspektren von Filtern verschiedener Ordnung miteinander verglichen.

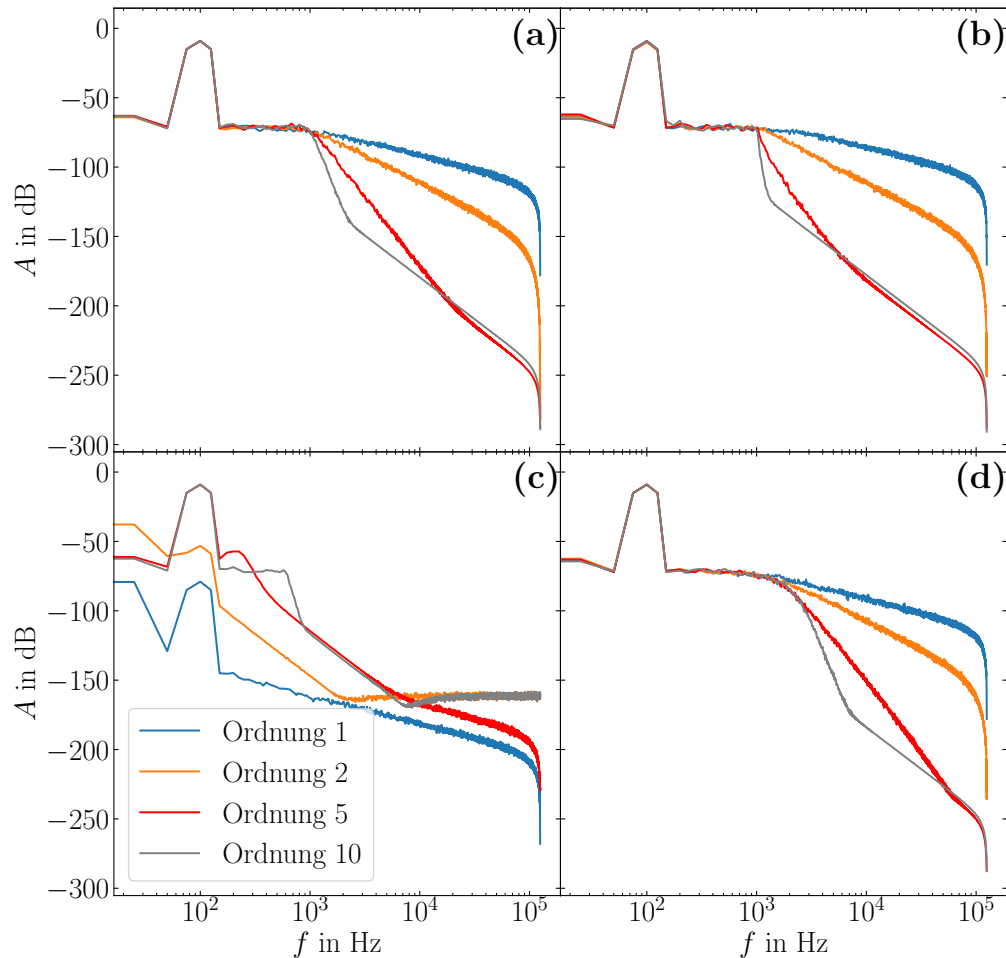
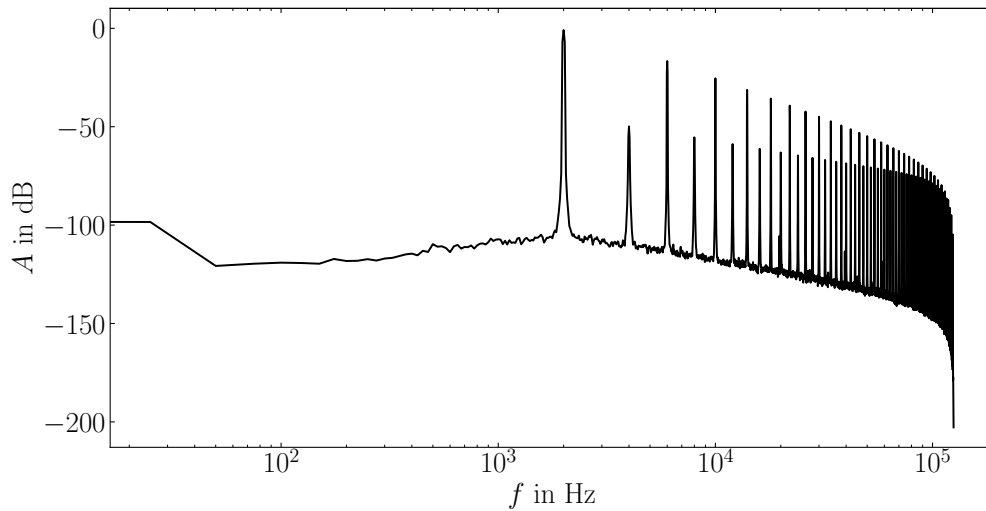


Abbildung 4.19: (a) Butterworth, (b) Chebyshev, (c) Inverse Chebyshev und (d) Bessel-filter bei verschiedenen Ordnungen

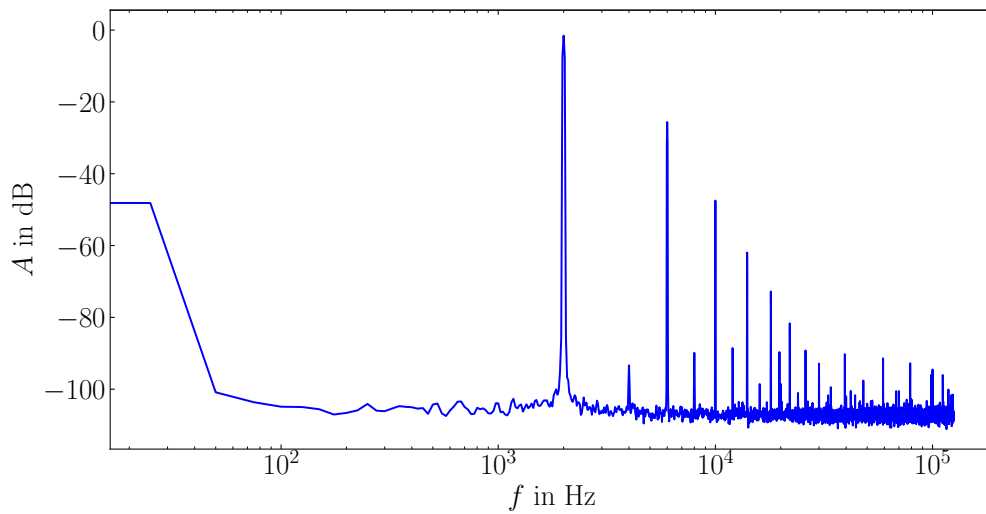
Aus Abbildung 4.19 ist zu erkennen, dass mit höherer Ordnung die Kurve, nach dem Knick, steiler Abfällt. Für große Ordnungen fällt jedoch ein weiterer Knick bei höheren Frequenzen auf, welcher die Kurve danach abflacht. Außerdem sind alle Filter im Durchlassbereich, unabhängig von der Ordnung, deckungsgleich, bis auf den Inversen Chebyshev. Beim Inversen Chebyshev ist auch noch zu beobachten, dass für gerade Ordnungen, die Kurve im letzten Teil des Frequenzspektrums waagrecht verläuft.

### 4.3.5 Vergleich: Analoge und digitale Filterung

Um die analoge mit der digitalen Filterung zu Vergleichen wird zuerst eine Messung mit dem gewohnten Messaufbau für den digitalen Filter aufgenommen. Danach wird der digitale Filter über die Messsoftware deaktiviert und zwischen den Generator und Detektor wird ein analoger Filter (Modell: Ithaco 4302) geschaltet, der analog zum digitalen Filter eingestellt wurde.



(a) digitale Filterung



(b) analoge Filterung

Abbildung 4.20: Vergleich von analoger und digitaler Filterung

In Abbildung 4.20 sind die Fourierspektren nach analoger und digitaler Filterung aufgetragen. Vergleicht man beides, so fällt auf, dass bei der digitalen Filterung auch der Hintergrund die Charakteristik des Bandpasses zeigt, wohingegen bei der analogen Filterung scheinbar nur die Nebenmaxima betroffen sind.

Eine mögliche Erklärung wäre, dass der Hintergrund nach dem analogen Filter einkoppelt oder dass diese Eigenschaft eine Eigenschaft des analogen Filters ist, bzw. die Auflösung der Filter ab -100dB abnimmt. (Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde darauf verzichtet, die Kurven in einen einzigen Plot aufzuzeichnen.)

### 4.3.6 Vergleich Filterung und Mittelung

Wenn man Filterung und Mittelung gegenüberstellt, so ist der größte Unterschied wohl das beim Filtern aktiv bestimmte Frequenzen unterdrückt werden, je nach Einstellung bzw. Dimensionierung des Filters. Dies kann dabei helfen, dass das Messsignal von Störungen wie dem 50 Hz Brummen bereinigt werden kann.

Mitteln hingegen ist besonders geeignet um die Messung von bspw. weißes Rauschen zu bereinigen da dies, gemittelt über die Zeit, Null ergibt.



## 4.4 Lock-In Verstärker

### a) Lock-In Verstärker als Filter

Im folgenden Teil der Lock-In Verstärker als Filter verwenden und die Ausgangsmesswerte der Sinus, Rechteck und Dreieckschwingung interpretieren.

Die Messungen haben folgende Tabelle ergeben:

f/kHz	1	3	5	7	9	11	13
$U_{\text{eff,Sinus}}/\text{V}$	0,7072	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$U_{\text{eff,Rechteck}}/\text{V}$	0,9003	0,3000	0,1800	0,1285	0,1000	0,0817	0,0692
$U_{\text{eff,Dreieck}}/\text{V}$	0,5733	0,0636	0,0229	0,0117	0,0070	0,0047	0,0034

Tabelle 4.3: Messung Lock-In Verstärker als Filter bei unterschiedlichen Signalen

Wie in Tabelle 4.3 schon angedeutet, handelt es sich bei den gemessenen Spannungswerte um die Effektivspannungswerte der jeweiligen Schwingung. Wie schon in Kapitel 4.1a) kann man die Effektivspannungswerte in die Werte der Fourierentwicklungskoeffizienten umrechnen, indem man die Messwerte mit dem Faktor  $\sqrt{2}$  multipliziert. Zum Vergleich mit der Theorie werden die errechneten Werte aus Tabelle 4.1 verwendet und es werden wieder nur Rechteck- und Dreieckschwingung betrachtet. Weiterhin wird erneut die betragsmässige Differenz wie in Kapitel 2.8a) berechnet. Damit erhält man:

f/kHz	Rechteck			Dreieck		
	$U_{\text{Mess}}/\text{V}$	$U_{\text{Theo}}/\text{V}$	$\Delta U/\mu\text{V}$	$U_{\text{Mess}}/\text{V}$	$U_{\text{Theo}}/\text{V}$	$\Delta U/\mu\text{V}$
1	1.273216	1.273240	23.07	0.810769	0.810569	199.17
3	0.424264	0.424413	149.11	0.089944	0.090063	119.29
5	0.254558	0.254648	89.47	0.032385	0.032423	37.29
7	0.181726	0.181891	164.92	0.016546	0.016542	4.06
9	0.141421	0.141471	49.70	0.009899	0.010007	107.54
11	0.115541	0.115749	207.80	0.006647	0.006699	52.12
13	0.097864	0.097942	77.92	0.004808	0.004796	12.06

Tabelle 4.4: Vergleich Theorie und Praxis bei der Messung mit Lock-In Verstärker

In Tabelle 4.4 sieht man ganz deutlich wie präzise die Messung mit einem Lock-In Verstärkers ist. In der Berechnung hat man dabei bewusst auf die Fehlerrechnung verzichtet, da die Fehler nur in der Größenordnung von  $\pm 0,0001 \text{ V}$  liegen. Im Vergleich zu Tabelle 4.1 hat der Lock-In Verstärker aber eine deutlich höhere Präzession der Messung, da vor allem bei Frequenzen von 1 kHz eine geringere Abweichung zu verzeichnen ist. Dies der Sachverhalt wurde im Vergleich mit den Ergebnis aus Kapitel 2.8a) in Abbildung 4.21 dargestellt.

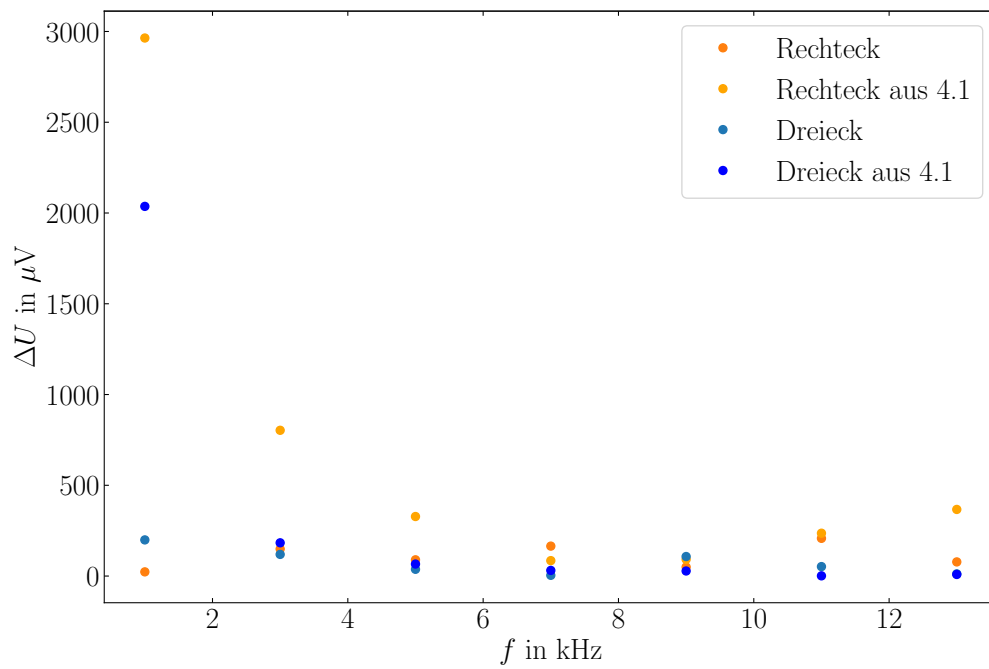


Abbildung 4.21: Vergleich der betragsmässigen Differenz zwischen Ergebnis aus Kapitel 4.4a) und Kapitel 4.1a)

### b) Bandbreite des Lock-In Verstärkers

Als Nächstes wird die Zeitkonstante  $\tau$  und die Ordnung  $n$  des Filters des Lock-In Verstärkers bestimmt. Dafür wurde an dem Lock-In Verstärker eine Sinusschwingung mit einer Frequenz von 1 kHz und eine Amplitude von 100 mV angelegt. Am Lock-In Verstärker wurde die Flankensteilheit  $\Delta$  des eingebauten Tiefpassfilters von 6 dB auf 18 dB verändert und eine Zeitkonstante  $\tau$  von 30 ms eingestellt. Um die Zeitkonstante und Ordnung zu bestimmen wird eine Kurve durch die aufgenommene Messreihe gefittet. Die Form der Kurve wurde im Praktikum zur Verfügung besprochen und ist speziell für den Lock-In Verstärker SR830 DSP. Die Kurve hat dann die Gleichung:

$$A_{\tau,n}(f) = \left[1 + (2\pi\tau(f - f_0))^2\right]^{-\frac{n}{2}} \quad (4.9)$$

Diese Gleichung beschreibt hierbei die Filterantwort des Lock-In Verstärkers, wobei  $n$  die Ordnung,  $\tau$  die Zeitkonstante des Filters und  $A$  die normierte Amplitude ist. Die Frequenz  $f_0$  ist die eingestellte Frequenz der Sinusschwingung und liegt bei 1 kHz. Die Normierung erfolgt über den maximalen Wert der Effektivspannung, welcher bei der Frequenz  $f_0$  liegt. Durch die Normierung muss die Umwandlung von Effektivspannung in tatsächliche Spannung nicht berücksichtigt werden. Es wurde wieder auf eine Fehlerrechnung verzichtet, da die Fehler der Messwerte zu klein sind. Der Fit liefert dann folgende Parameter:

$\Delta/\text{dB}$	$\tau/\text{ms}$	$n$
6	27,35	1,06
18	30,16	3,00

Tabelle 4.5: Ergebnis gefittete Parameter für  $\tau$  und  $n$

In Abbildung 4.22 und 4.23 ist jeweils der Fit für die jeweilige Messreihe dargestellt. Der Vergleich der gefitteten Werte der Zeitkonstante  $\tau$  mit dem tatsächlichen eingestellten Wert von 30 ms zeigt, dass die Messung des Lock-In Verstärkers eine genaue Bestimmung der Zeitkonstante  $\tau$  zulässt. Ein guter Indikator ist hierbei die Ordnung  $n$ , da die tatsächliche Zeitkonstante  $\tau$  dann erzielt wurden als  $n$  ganzzahlig war.

Auch ist zu erkennen, dass durch eine Verdreifachung der Flankensteilheit  $\Delta$  sich die Ordnung  $n$  des Filters verdreifacht. Dies zeigt auch Abbildung 4.24, in der die gefittete Kurve für  $\Delta = 18 \text{ dB}$  viel schmaler ist als die gefittete Kurve für  $\Delta = 6 \text{ dB}$ .

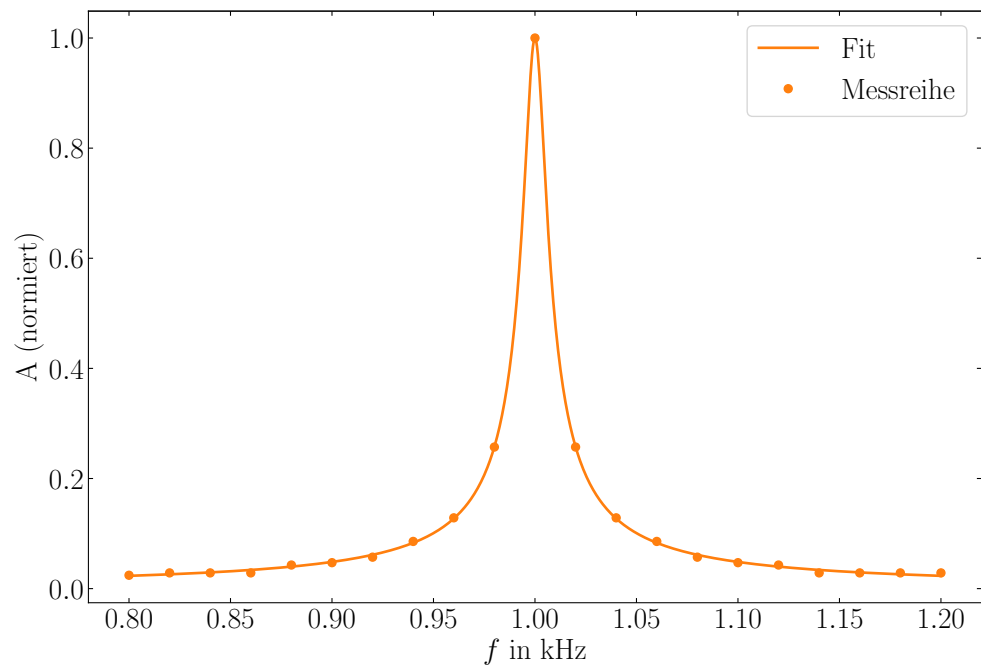


Abbildung 4.22: Fit für die Messung mit  $\Delta=6$  dB

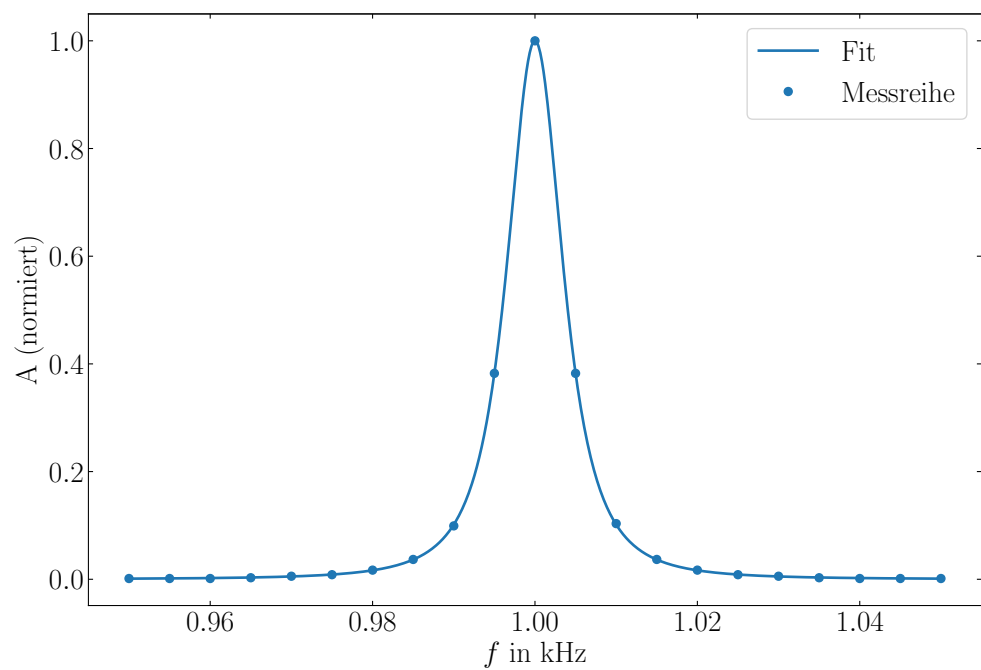


Abbildung 4.23: Fit für die Messung mit  $\Delta=18$  dB

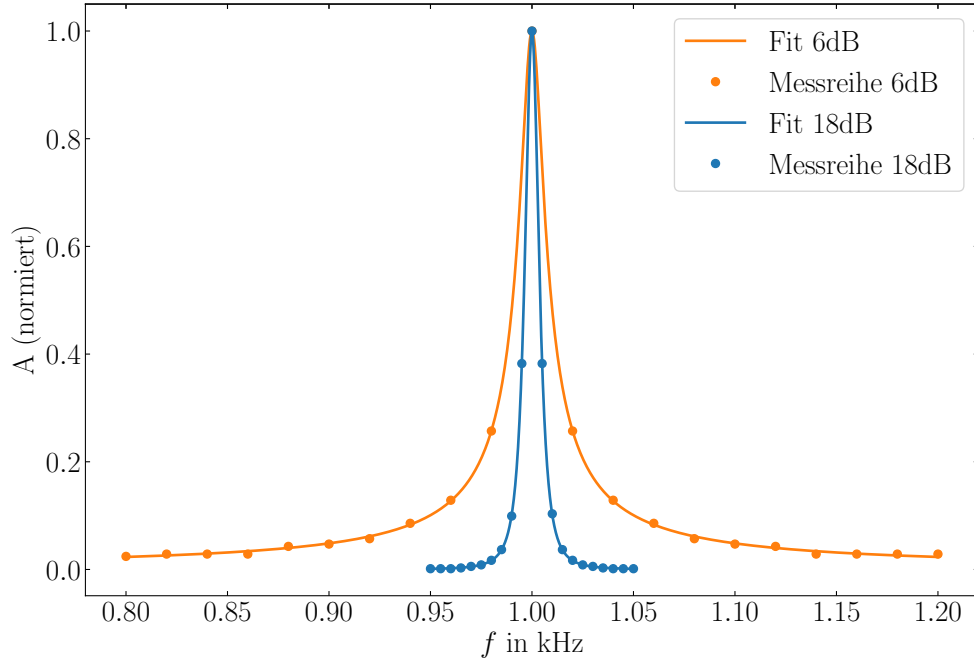


Abbildung 4.24: Vergleich beider Messreihen mit Fit

### c) Lock-In in Praxis

Im letzten Abschnitt wird noch die Verwendung eines Lock-In Verstärkers in der Praxis besprochen. Dazu stand eine Leuchtdiode und eine Photodiode in einer Box mit Deckel zur Verfügung. Die Signale von Leuchtdiode und Photodiode wurden dann auf dem Oszilloskop betrachtet. Man konnte beobachten, dass bei offenen Deckel große Schwankungen am Oszilloskop entstanden. Dies kann damit erklärt werden, dass die Photodiode neben dem Signal der Leuchtdiode auch das Licht der Beleuchtung des Raums registriert hat, welches mit 50 Hz flackert. Wurde der Deckel geschlossen, ließen die Schwankung nach und die Photodiode detektierte nur noch das Signal der Leuchtdiode, welches trotzdem sehr verrauscht war (zu sehen in Abb. 3.2).

Die Änderung der Zeitkonstante  $\tau$  und Flankensteilheit  $\Delta$  am Lock-In Verstärker ergaben eine Veränderung der Auflösung des Lock-In Verstärkers. Dabei war die Auflösung am höchsten, wenn auch die Zeitkonstante und Flankensteilheit am höchsten waren.

Die Detektionsbandbreite  $B$  des Lock-In Verstärkers lässt sich wie folgt berechnen:

$$B = 20 \log_{10} \left( \frac{U_{\min}}{U_{\max}} \right) \quad (4.10)$$

Bei dem verwendeten Lock-In Verstärker ist die maximale Spannung  $U_{\max} = 1 \text{ V}$ , was durch Bauart des Gerätes bedingt ist, und die minimal Spannung  $U_{\min} = 255 \text{ nV}$ . Damit ergibt sich eine Detektionsbreite  $B = -132 \text{ dB}$ .

## 5 Fazit

Der Versuch Signal/Rausch-Verbesserung hat gezeigt, wie signifikant die Auswirkungen der Umwelteinflüsse auf elektronische Messungen sind. Dabei wurden die Methoden der Unterdrückung von Rauschen und deren Einflüsse auf die Messung genaustens studiert. Weiterhin wurde das Verständnis der jeweiligen elektronischen Filter vertieft und erfolgreich in der Praxis angewendet. Auch die Mächtigkeit des Lock-In Verfahrens wurde im Verlauf des Versuchs und dessen Auswertung deutlich. Abschließend lässt sich festhalten, dass dieser Versuch einen guten Grundstock für zukünftige Messungen und deren Verbesserung aufgebaut hat.

# A Berechnungen Fourier-Reihenkoeffizient und Effektivspannung

## Sinusschwingung

Effektivspannung:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt} = \sqrt{\frac{U_0^2}{T} \left[ \frac{t}{2} - \frac{T \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)}{8\pi} \right]_0^T} = \sqrt{\frac{U_0^2}{T} \frac{T}{2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.1})$$

## Rechteckschwingung

$b_k$  der Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \sin\left(k \frac{2\pi}{T}t\right) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T U_0 \sin\left(k \frac{2\pi}{T}t\right) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \frac{U_0 T}{k 2\pi} \left[ -\cos\left(k \frac{2\pi}{T}t\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \cos\left(k \frac{2\pi}{T}t\right) \Big|_{\frac{T}{2}}^T \\ &= \frac{U_0}{k\pi} [-\cos(k\pi) + 1 + 1 - \cos(k\pi)] \\ &= \frac{2U_0}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4U_0}{\pi} \frac{1}{k}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Effektivspannung:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} U_0^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T U_0^2 dt \right]} = \sqrt{\frac{U_0^2}{T} \left[ \frac{T}{2} + T - \frac{T}{2} \right]} = U_0 \quad (\text{A.4})$$

## Dreiecksschwingung

$b_k$  der Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} f(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} at \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} a \left(\frac{T}{2} - t\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\
 &= \frac{2a}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} a \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\
 &= \text{(I)} + \text{(II)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} &= \frac{2a}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \Rightarrow \text{Partielle Integration} \\
 &= \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[ -t \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + t \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right] \\
 &\quad + \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[ \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\
 &= \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[ -\frac{T}{4} \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) - \frac{T}{4} \cos\left(-k \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3T}{4} \cos\left(k \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{T}{4} \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (\text{A.5}) \\
 &\quad + \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[ \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\
 &= \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[ \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\
 &= \frac{2a}{T} \left(\frac{T}{k2\pi}\right)^2 \left[ \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right] \\
 &= \frac{2a}{T} \left(\frac{T}{k2\pi}\right)^2 \left[ \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-k \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} &= \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} a \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{aT}{2\pi} \left[ \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right] \\
 &= \frac{aT}{2\pi} \left[ \cos\left(k \frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{8aT}{4\pi^2} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{8U_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$



Effektivspannung:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} (at)^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left( a \left( \frac{T}{2} - t \right) \right)^2 dt \right]} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left( \frac{T}{2} - t \right)^2 dt \right]} = \sqrt{\frac{a^2}{3T} \left[ t^3 \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \left( \frac{T}{2} - t \right)^3 \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right]} \quad (\text{A.7}) \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{3T} \left[ \left( \frac{T}{4} \right)^3 + \left( \frac{T}{4} \right)^3 - \left( \frac{T}{2} - \frac{3T}{4} \right)^3 + \left( \frac{T}{2} - \frac{T}{4} \right)^3 \right]} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{3T} \left( \frac{T^3}{16} \right)} = \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{aT}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{U_0^2}{3}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] Thomas Bühl. *Einführung in die elektrische Messtechnik*. Vieweg + Teubner Verlag, 1 edition, 2001.
- [2] Jörg Cassens. Medieninformatik, 2019. URL <https://mi.kriwi.de/mi/MI-06-Audio-JC-handout.pdf>. Grafikquelle.
- [3] J Gutekunst E. Hering, K. Bessler. *Elektronik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 6. auflage edition, 2014.
- [4] Konrad Kopitzki. *Einführung in die Festkörperphysik*. Springer Spektrum, 2016.
- [5] W. Richter. Signal/Rausch-Verbesserung. Versuchsanleitung, physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, Universität Bayreuth, Juli 2012.
- [6] Stanford Research System. Lock-In Amplifier Basics. URL <https://www.thinksrs.com/downloads/pdfs/applicationnotes/Lock-In%20Basics.pdf>.
- [7] Friedrich Kremer Wolfgang Schenk. *Physikalisches Praktikum*. Springer, 2014. URL [https://www.springer.com/cda/content/document/cda\\_downloaddocument/7\\_Fouriertransformation\\_PB14.pdf?SGWID=0-0-45-1437409-p176436733](https://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/7_Fouriertransformation_PB14.pdf?SGWID=0-0-45-1437409-p176436733). Ergänzungen zu Kapitel: Fourier-Transformation und Signalanalyse, Methoden der Messtechnik - Signal und Bildverarbeitung von Prof. Dr.-Ing. habil. P. Lehmann.