

WS2021/22

---

PPBphys2

---

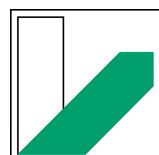
# Chaos in einfachen physikalischen Systemen

---

Manuel Lippert - Paul Schwanitz

---

Gruppe 11



# Informationen

<b>Versuchstag</b>	06.09.2021
<b>Versuchsplatz</b>	B11   0.09
<b>Betreuer</b>	Reinhard Richter
<b>Gruppen Nr.</b>	11
<b>Teilnehmer</b>	Manuel Lippert (Manuel.Lippert@uni-bayreuth.de) Paul Schwanitz (Paul.Schwanitz@uni-bayreuth.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 Hintergrund zum Versuch</b>	<b>6</b>
2.1 Allgemeines zum Thema Chaos . . . . .	6
2.1.1 Dynamische Systeme . . . . .	6
2.1.2 Deterministisches Chaos . . . . .	8
2.1.3 Fouriertransformation und Leistungsspektrum . . . . .	8
2.1.4 Darstellungsweisen eines chaotischen Attraktor . . . . .	9
2.2 Das invertierte Pendel . . . . .	10
2.2.1 Herleitung der Bewegungsgleichung . . . . .	10
2.2.2 Symmetriebrechung . . . . .	11
2.2.3 Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Masse . . . . .	12
2.2.4 Aufbau Pendel . . . . .	14
2.3 Der Shinriki-Oszillatior . . . . .	16
2.3.1 Differentialgleichung und Aufbau des Shinriki-Oszillatior . . . . .	16
2.3.2 NIC und Schwingung des Shinriki-Schaltkreis . . . . .	16
2.3.3 Geräusche einer Bifurkation . . . . .	17
<b>3 Messprotokoll</b>	<b>18</b>
3.1 Versuchsdurchführung invertiertes Pendel . . . . .	18
3.2 Versuchsdurchführung Shinriki . . . . .	20
<b>4 Auswertung und Diskussion</b>	<b>21</b>
4.1 invertierteres Pendel . . . . .	21
4.1.1 Bifurkationsdiagramm und kritische Masse . . . . .	21
4.1.2 Schwache Nichtlinearität . . . . .	26
4.1.3 Starke Nichtlinearität . . . . .	29
4.2 Auswertung zum Shinriki-Oszillatior . . . . .	32
4.2.1 Phasendiagramm . . . . .	32
4.2.2 Schnitt durch das Phasendiagramm . . . . .	34
4.2.3 Bifurkationsdiagramm . . . . .	38
4.2.4 Feigenbaum-Konstante . . . . .	40
4.2.5 Zum Einbettungstheorem . . . . .	41
<b>5 Fazit</b>	<b>44</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>45</b>



# **1 Einleitung**

Betrachtet man die physikalischen Prozesse (bsp. Räuber-Beutemodell), die in unserer Umwelt ablaufen, so fällt schnell auf, dass ein Großteil dieser chaotisch bzw. nicht linear ablaufen. Daher ist es für die Physik sehr wichtig auch diese Prozesse zu verstehen. Dabei ist anzumerken, dass chaotisches Verhalten deterministisch ablaufen und keineswegs zufällig sind.

Der folgende Versuch soll daher Einblicke in das äußerst bedeutende Gebiet des Chaos und der nichtlinearen Dynamik geben und uns die grundlegenden Konzepte dieser Versuche verständlich machen.

## 2 Hintergrund zum Versuch

### 2.1 Allgemeines zum Thema Chaos

#### 2.1.1 Dynamische Systeme

Die Formulierung eines *Dynamischen Systems* in der Physik geschieht anhand von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit dem Vektor  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.1)$$

dabei beschreibt  $\mathbf{x}(t)$  den **Zustand** des Systems zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$ .

Das dynamische System ist vollständig determiniert, wenn ein Zustand  $\mathbf{x}(t)$  angegeben ist. Aus diesem Zustand lassen sich alle vorangegangen und folgenden Zustände des Systems bestimmen, womit das System nur von der Wahl des Anfangszustands abhängt. Dynamische Systeme können auch zeitdiskret angegeben werden, worauf aber hier nicht weiter eingegangen wird (Lück, 1995).

#### 1. Phasenfluss

In der Mathematik wird ein dynamisches System durch den **Fluss** bzw. **Phasenfluss** beschrieben. Unter dem *Fluss* versteht man die Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , welche die **Flussaxiome** erfüllt (Jänicke, 2005):

$$\begin{aligned} (1) \quad & \phi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0 \\ (2) \quad & \phi(\phi(\mathbf{x}_0, t), s) = \phi(\mathbf{x}_0, t + s). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Der *Fluss*  $\phi$  ordnet **jedem** Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  einen neuen Zustand zum Zeitpunkt  $t$  zu (Lück, 1995).

#### 2. Trajektorie

Der *Fluss*  $\phi$  kann mit dem *Zustand*  $\mathbf{x}(t)$  in Verbindung gebracht werden mit der Beziehung:  $\mathbf{x}(t) = \phi_{\mathbf{x}_0}(t) = \phi(\mathbf{x}_0, t)$  mit festem  $\mathbf{x}_0$ , wobei nach (2.2)  $\mathbf{x}(0) = \phi_{\mathbf{x}_0}(0) = \phi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$  gilt.

Hierbei beschreibt  $\phi_{\mathbf{x}_0}(t)$  die *Lösungskurve*, welche auch *Bahnkurve*, *Orbit*, *Phasenbahn* oder **Trajektorie** des Flusses  $\phi$  genannt wird und eine spezielle Lösung von (2.1) darstellt, welche wiederum die Bewegung des Punktes  $\mathbf{x}$  unter Wirkung des Flusses  $\phi$  mit dem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  beschreibt. (Lück, 1995)

Durch die Abhängigkeit der *Trajektorien* vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  kann gefolgert

## 2.1 Allgemeines zum Thema Chaos

werden, dass sich *Trajektorien* mit unterschiedlichen Anfangszuständen  $\mathbf{x}_0$  nicht schneiden können. Es können aber unterschiedliche Anfangszustände  $\mathbf{x}_0$  auf derselben *Trajektorie* befinden und sich nur um eine Zeittranslation unterscheiden (Jänich, 2005).

### 3. Phasenraum

Der **Phasenraum** oder **Zustandsraum** beschreibt eine Menge aller Zustände oder eine Darstellung aller Trajektorien eines dynamischen Systems und bietet einen Überblick über das Verhalten der gesamten Differentialgleichung ohne diese explizit lösen zu müssen (Jänich, 2005).

### 4. Attraktor

In (2.1) wird ein Vektorfeld  $\mathbf{F}$  im Phasenraum definiert, welches als Geschwindigkeitsfeld des Phasenflusses  $\phi$  angesehen werden kann.

Durch Betrachtung der Divergenz des Vektorfelds  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  kann eine Aussage getroffen werden über die Rate mit dem sich ein Volumenelement  $V$  unter der Wirkung des Flusses verändert. Zwei Fälle sind hier besonders hervorzuheben:

- (1)  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \dot{V} = 0 \Rightarrow$  Konservatives System
  - (2)  $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0 \Rightarrow \dot{V} < 0 \Rightarrow$  Dissipatives System
- (2.3)

In einem dissipativen System laufen die Trajektorien nach einer Einlaufphase (transiente Bewegung) in einem begrenzten Bereich im Phasenraum, welchen man als **Attraktor** bezeichnet (Bewegung auf *Attraktor*: permanente oder posttransiente Bewegung). Ein Attraktor weist folgende Eigenschaften auf (Lück, 1995):

- (1) Kompakte Menge im Phasenraum
- (2) Invariant unter der Wirkung des Flusses
- (3) Volumen des Attraktors ist Null
- (4) Eine beliebige Obermenge des Attraktors schrumpft unter der Wirkung des Flusses auf den Attraktor selbst zusammen

#### Arten von Attraktor



Abbildung 2.1: Fixpunkt, Grenzzyklus, Tours- bzw. Ringattraktor (Lück, 1995)

## 2 Hintergrund zum Versuch

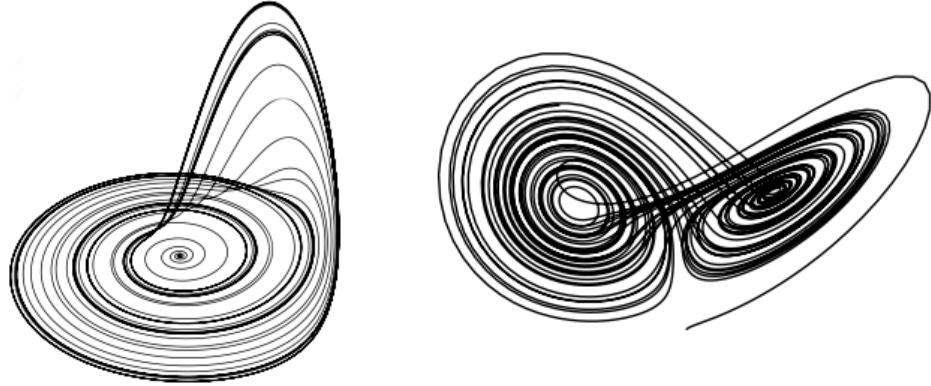


Abbildung 2.2: Seltsame Attraktoren: Rössler- und Lorentzattraktor, Eigens erstellt mit dem Python Packages matplotlib mit Hilfe von (Neururer, 2017b,a)

### 2.1.2 Deterministisches Chaos

Systeme, die das Verhalten des *deterministischen Chaos* zeigen, weisen ein zufällig erscheinendes Verhalten auf, was jedoch nicht durch äußere Umstände verursacht wird, sondern das Verhalten folgt aus den Eigenschaften des Systems selbst.

Das Verhalten von einem System mit deterministischem Chaos lässt sich langfristig nicht vorhersagen, da ähnliche Ursachen langfristig nicht zu ähnlichen Wirkungen führen. Das Prinzip der starken Kausalität wird somit verletzt (Lück, 1995).

### 2.1.3 Fouriertransformation und Leistungsspektrum

Eine Fouriertransformation ist eine Integraltransformation, mit der aperiodische Signale in ein kontinuierliches Spektrum zerlegt werden können.

Fouriertransformation einer Messgröße  $x(t)$ :

$$\hat{x}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.4)$$

Das Leistungsspektrum  $P(\omega)$  kann man nun folgendermaßen aus der Fouriertransformierten des Messwertes berechnen:

$$P(\omega) = |\hat{x}(\omega)|^2 \quad (2.5)$$

Das Leistungsspektrum stellt die Leistungsanteile für unterschiedliche Frequenzen im Zeitsignal dar.

Bei chaotischen Systemen beispielsweise erhält man ein Leistungsspektrum mit kontinuierlichem Verlauf, das für große Frequenzen abnimmt (Lück, 1995). Da jedoch weißes stochastisches Rauschen ebenfalls ein kontinuierlichen Verlauf liefert kann dieser nicht als hinreichender Beweis für Chaos angesehen werden.

### 2.1.4 Darstellungsweisen eines chaotischen Attraktor

#### 1. Phasenraumdarstellung

Die **Phasenraumdarstellung** wie in (2.1) erwähnt, gibt einen Überblick über den Verlauf der Bewegung des dynamischen Systems. Dabei trägt man je an eine Raumachse eine Phasenraumvariabel auf (z.B.  $x, \dot{x}$ ), wobei der Phasenraum dabei  $n$ -Dimensionen haben kann und nicht alle Phasenraumvariablen bekannt sein müssen, da ein Attraktor im Phasenraum rekonstruiert werden kann. Dazu werden die Messwerte einer Phasenraumvariablen bei einer festen Zeitspanne  $\tau$ , also  $\varphi(t), \varphi(t + \tau), \dots, \varphi(t + (n - 1)\tau)$ , als neu Koordinaten  $x_i$  (z.B.  $x_1 = \varphi(t)$  und  $x_2 = \varphi(t + \tau)$ ) eines neuen Koordinatensystems. Bei richtiger Wahl von  $\tau$  und  $n$  lässt sich dann der tatsächliche Attraktor rekonstruieren. Diese Methode der Rekonstruktion eines Attraktors wurde vom Mathematik *Floris Takens* bewiesen und ist auch als *Einbettungstheorem* bekannt (Lück, 1995).

#### 2. Poincaré-Abbildung

Die **Poincaré-Abbildung** ist eine Projektion des **Poincaré-Schnitts** an einer Ebene. Diese Abbildung ist immer die Dimension  $n - 1$  und ist somit eine Dimension niedriger als der Phasenraum mit der Dimension  $n$  und es gehen keinen Informationen bzgl. dem Langzeitverhalten des Systems verloren. Aufgrund dieser Tatsache lässt sich die *Poincaré-Abbildung* zur Analyse von höherdimensionalen Phasenräumen verwenden.

Der **Poincaré-Schnitt** ist dabei eine Menge aller Durchstoßpunkte der Trajektorien im Phasenraum auf einer Hyperfläche. Hierbei müssen die Trajektorien die Hyperfläche *transversal* (senkrecht) und in einer vorgegebenen Richtung schneiden. Praktisch werden meistens die Lage von Extremwerten einer Messgröße als Bedingung für die Schnittebene (Hyperfläche) und trägt diese gegen die anderen Phasenraumvariablen zu diesem Zeitpunkt gegeneinander auf oder man wählt eine Ebene, die den Attraktor geeignet schneide (Lück, 1995).

#### 3. Wiederkehr-Abbildung

Bei der **Wiederkehr-Abbildung** wird eine diskrete Abbildung aktueller Messwerte über die vorangegangenen Messwerte aufgetragen. Dabei werden Punkte in einer  $x(n)-x(n+1)$ -Ebene aufgetragen mit den Messwerten  $x_n$  als Koordinaten, also  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, x_{n+1})$ . Diese Abbildung ähnelt dann einem *Poincaré-Schnitt*, weswegen man bei einem kontinuierlichen System (2.1) dessen *Poincaré-Abbildung* für dieses Verfahren verwendet (Lück, 1995).

#### 4. Bifurkationsdiagramm

Bei einem **Bifurkationsdiagramm** betrachtet man die Projektion der *Poincaré-Abbildung* auf eine Achse unter Veränderung eines Kontrollparameters, Parameter welche man aktiv im Experiment verändern kann, wobei man die durch die Projektion gewonnenen Werte gegen den jeweiligen Parameterwert aufträgt (Lück, 1995).

## 2 Hintergrund zum Versuch

### 5. Phasendiagramm

Wenn bei dem *Bifurkationsdiagramm* mehrere unterschiedliche voneinander unabhängige Parameter existieren, verwendet man das **Phasendiagramm**. Dazu trägt man die als Koordinatenachsen die jeweiligen Parameter, die das Systemverhalten beeinflussen, gegeneinander auf und erhält Landkarte des globalen Systemverhaltens in Abhängigkeit der gewählten Parameter (Lück, 1995).

## 2.2 Das invertierte Pendel

Das invertierte Pendel erzeugt eine *nichtlinearer* Schwingung. Dabei besitzt das Pendel eine unten fest eingespannte Blattfeder mit Federkonstante  $k$ , welche über zwei horizontal in der Höhe  $h$  und der Auslenkung  $x_h$  angreifende Spiralfedern mit Federkonstante  $k_s$  und der Auslenkung  $\hat{x}$  angetrieben wird. Am oberen Ende der Blattfeder lässt sich ein Zusatzgewicht  $M$  anbringen und der Winkel  $\theta$  beschreibt den Winkel zwischen der Tangenten an der Pendelspitze und dem Lot. Weiterhin bezeichnet die Pendellänge  $L$  die Länge zwischen dem Anfang und Ende der Blattfeder, welche vom Winkel  $\theta$  abhängt (siehe Abb 2.3).

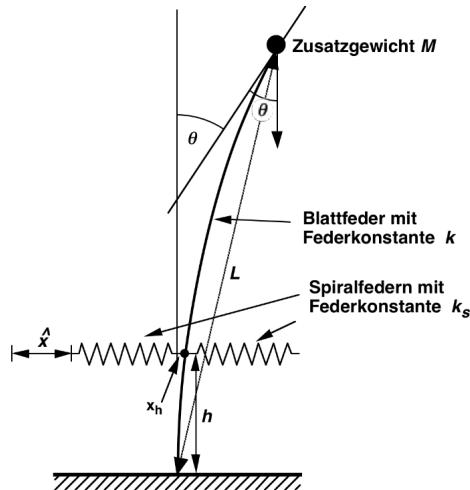


Abbildung 2.3: Skizze invertiertes Pendel (Lück, 1995)

### 2.2.1 Herleitung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung lässt sich über die wirkenden Drehmomente der Bauteile bestimmen:

$$\text{Pendel} + \text{Dämpfung} + \text{Blattfeder} - \text{Spiralfedern} - \text{Gewicht} = 0$$

$$\Rightarrow [M(L(\theta))^2 \ddot{\theta}] + [2\delta \dot{\theta}] + [k\theta] - [h k_s(x_h + \hat{x} \cos(\omega t))] - [MgL(\theta) \sin(\theta)] = 0 \quad (2.6)$$

Dabei bezeichnet  $\delta$  die Dämpfungskonstante und  $g$  die Erdbeschleunigung.

Im Folgenden wird die Pendellänge  $L$  als konstant angenommen, obwohl diese nicht konstant ist und von der Art der verwendeten Masse  $M$  abhängt. Weiterhin wird die Auslenkung  $x_h$  als vernachlässigbar klein angesehen und der Angriffswinkel der Spiralfedern wird als  $\frac{\pi}{2}$  genähert, was bei genügend kleiner Höhe  $h$  gegeben ist. Daraus folgt die genäherte Form der Bewegungsgleichung:

$$ML^2\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + k\theta - MgL(\theta) \sin(\theta) = hk_s \hat{x} \cos(\omega t) = T_0 \cos(\omega t) \quad (2.7)$$

Wobei  $T_0$  als die Amplitude des periodisch angreifenden Drehmoments interpretiert werden muss. Hierbei ist noch zu erwähnen, dass durch die Näherungen die Lösung dieser Differentialgleichung nicht der tatsächlichen Trajektorien des Systems entsprechen, da diese stark von der Anfangsbedingung abhängen, dennoch ist eine globale Aussage über das Verhalten mit der genäherten Differentialgleichung möglich.

Zu den letzten beiden Termen lässt sich dann ein Potenzial definieren und durch Entwicklung des Cosinus für kleine Winkel  $\theta$  (Kleinwinkelnäherung KWN) bis zur 2. Ordnung ergibt sich das Potenzial des *Duffing-Oszillator* (Lück, 1995).

$$V(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 + MgL(\cos(\theta) - 1) \stackrel{\text{KWN}}{\approx} \frac{1}{2}(k - MgL)\theta^2 + \frac{1}{24}MgL\theta^4, V(0) = 0 \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Symmetriebrechung

Bei einer kritischen Masse  $M_k = \frac{k}{gL}$  erfährt das System des Pendels einen Übergang von einem monostabilen System ( $M < M_k$ ) in ein bistabiles System ( $M > M_k$ ), dabei ist die Bewegung des Pendels in beiden Fällen Unterschiedlich und muss deshalb getrennt betrachtet werden. Bei diesem Übergang verändert sich die Struktur des Potenzial (siehe Abb 2.4), wodurch nun zwei Lösungen für das System möglich sind. Das Auftreten von mehreren Lösungen in einem System wird dann auch **Symmetriebrechung** genannt (Lück, 1995).

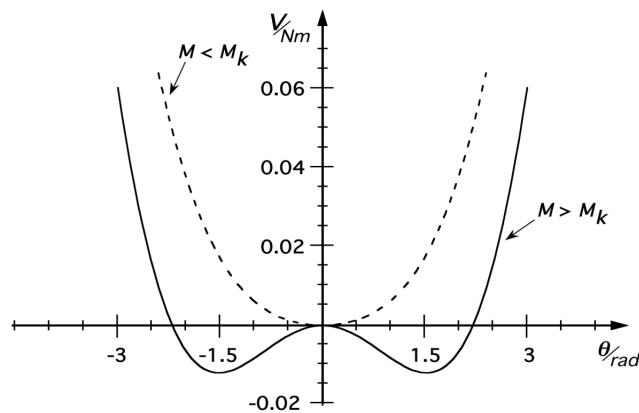


Abbildung 2.4: Potenzialdarstellung für invertiertes Pendel (Lück, 1995)

## 2 Hintergrund zum Versuch

### 2.2.3 Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Masse

Bei einem nichtlinearen Pendel hängt, im Gegensatz zu einem linearen Schwingungsvor-  
gang, die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  von der Schwingungsamplitude  $b$  ab  $\Rightarrow \omega_r(b)$ . Unverändert  
bleibt dennoch die Schwingungsamplitude  $b(\omega)$  gegenüber der Resonanzkurve eines linea-  
ren Oszillators bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen  $\omega$  (Lück, 1995).

1.  $M < M_k$  (Schwache Nichtlinearität)

Pendel ist nach (2.2.2) monostabil. Der Vorgang lässt sich näherungsweise mit der  
Bewegungsgleichung eines Duffing-Oszillators nähern, wobei die Abhängigkeit der  
Resonanzfrequenz  $\omega_r$  von der Amplitude  $b$  berücksichtigt bleibt. Die Bewegungs-  
gleichung lautet in diesem Fall:

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta + \gamma\theta^3 = f_a \cos(\omega t) \quad (2.9)$$

Dabei bezeichnet  $\gamma$  den Faktor der Nichtlinearität,  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz des  
Systems ohne Nichtlinearität ( $\gamma = 0$ ),  $f_a$  die Anregungsamplitude mit Anregungs-  
frequenz  $\omega$  und  $\delta$  die Dämpfung.

Durch Betrachtung des Verlaufs der Resonanzkurve in der Nähe von  $\omega_0$  erhält man  
eine Gleichung dritter Ordnung für das Quadrat der Schwingungsamplitude  $b$ .

$$\left[ \left( (\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{3}{4}\gamma b^2 \right)^2 + (2\delta\omega)^2 \right] b^2 = f_a^2 \quad (2.10)$$

Diese Gleichung hat je nach Werten von  $f_a, \gamma, \omega_0$  und  $\delta$  eine reelle oder zwei  
konjugierte komplexe Lösungen. Dabei ist es einfacher die Gleichung nach  $\omega$   
aufzulösen, wobei zur Vereinfachung  $\omega_0 = 1$  angenommen wird. Damit wird (2.10)  
zu:

$$\left[ \left( (\omega^2 - 1) - \frac{3}{4}\gamma b^2 \right)^2 + (2\delta\omega)^2 \right] b^2 = f_a^2 \quad (2.11)$$

Mit der Lösung für  $\omega$ :

$$\omega_{1,2}^2 = 1 - 2\delta^2 + \frac{3}{4}\gamma b^2 \pm \sqrt{\frac{f_a^2}{b^2} + 4\delta^2 \left[ \delta^2 - \left( 1 + \frac{3}{4}\gamma b^2 \right) \right]} \quad (2.12)$$

Bei hinreichender kleinen Dämpfung  $\delta$  gibt es zwei verschiedene eingeschwungene  
Zustände, da die Lösung instabil wird (siehe Abb 2.5c)).

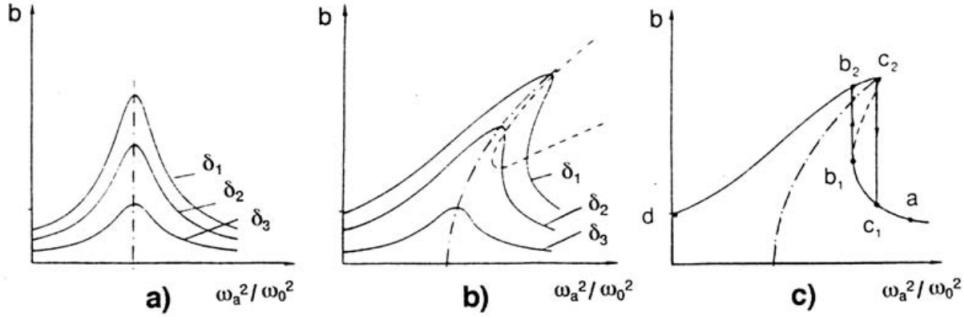


Abbildung 2.5: Resonanzkurven für eines Duffing-Oszillatoren (Lück, 1995)

a) linearer ( $\gamma = 0$ ) b) nichtlinear c) Hysterese

Die Schwingungsdauer  $T$  hängt hierbei logarithmisch von der Amplitude  $b$  ab mit dem Zusammenhang:

$$T = T_0 + T_1 \log(b) \quad (2.13)$$

Dies geht aus experimentellen Daten von (Lück, 1995) hervor, wobei  $T_0$  und  $T_1$  Näherungsparameter sind.

## 2. $M > M_k$ (Starke Nichtlinearität)

Das Pendel ist in diesem Fall nach (2.2.2) bistabil und besitzt zwei stabile Ruhelagen. Durch die Verringerung von großen Antriebsfrequenzen  $\omega$  entstehen nach Ende des Einschwingverhaltens nacheinander subharmonische Schwingungen mit einer Periodenverdopplungskaskade ( $T_n = 2^n T = 2^n \frac{2\pi}{\omega}$ ), obwohl sich das Pendel unterhalb einer kritischen Frequenz  $\omega_k$  chaotisch verhält. Dieses Verhalten ist auch ein Beispiel für ein Bifurkationsszenario (Lück, 1995).

## 2 Hintergrund zum Versuch

### 2.2.4 Aufbau Pendel

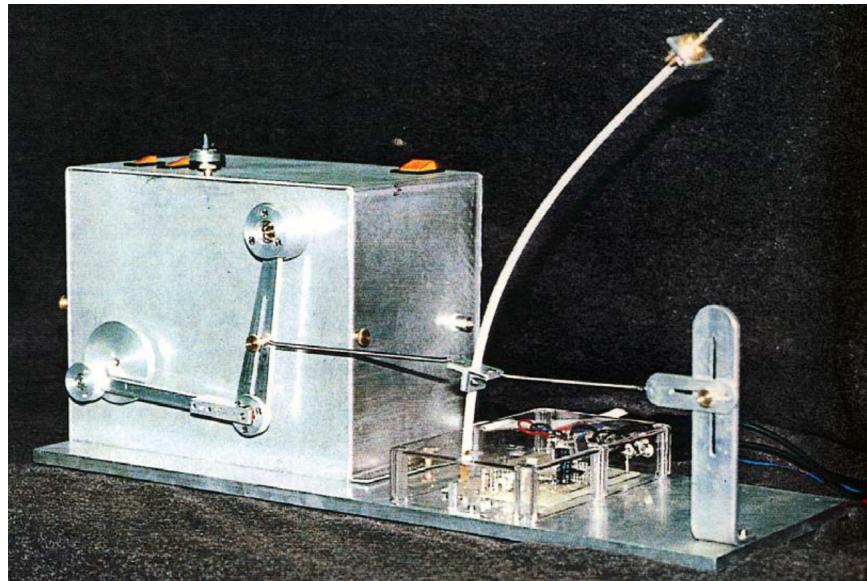


Abbildung 2.6: Aufbau des invertierten Pendels (Lück, 1995)

Hierbei besteht das Pendel aus einer:

- 5 mm starken Aluminium-Grundplatte
- 1 cm x 15 cm x 40 cm lange Blechstreifen aus einer Messing-Legierung mit hohem Kupferanteil, Dehnungsmessstreifen auf beiden Seiten (DMS, Widerstand abh. von der Dehnung) knapp oberhalb der Befestigung → Blattfeder
- Spiralfedern mit Federkonstante  $k = 027 \text{ N/cm}$
- Schrittmotor im Gehäuse mit 200 bzw. 400 Schritten (Halbschrittbereich)
- Multifunktionskarte Typs DAS 1602 der Firma Keithley (Taktimpulsgeber für Schrittmotoren)

Mit diesem Aufbau sind bis zu ca 5 Umdrehungen/s möglich, wobei die Antriebskraft durch das Verändern des Angriffspunktes der Spiralfeder am Übertragungshebel variierbar ist (Lück, 1995).

### Funktionsweise Differenzier-Schaltung

Bei einer Differenzier-Schaltung wird nur die Änderung der Eingangsspannung zu einer Ausgangsspannung verarbeitet. Dabei wird ein Kondensator am Eingang in Reihe und ein Widerstand parallel zwischen Eingang und Ausgang des Operationsverstärker geschaltet. Durch den Kondensator fließt nur Strom, wenn sich die Eingangsspannung ändert, wobei die Ausgangsspannung proportional zur Änderungsgeschwindigkeit der Eingangsspannung ist. Durch den Operationsverstärker wird dann das Signal verstärkt, um dieses Signal besser über ein angeschlossenes Messgerät (z.B. Oszilloskop) betrachten zu können (E. Hering, 2014).

## 2.2 Das invertierte Pendel

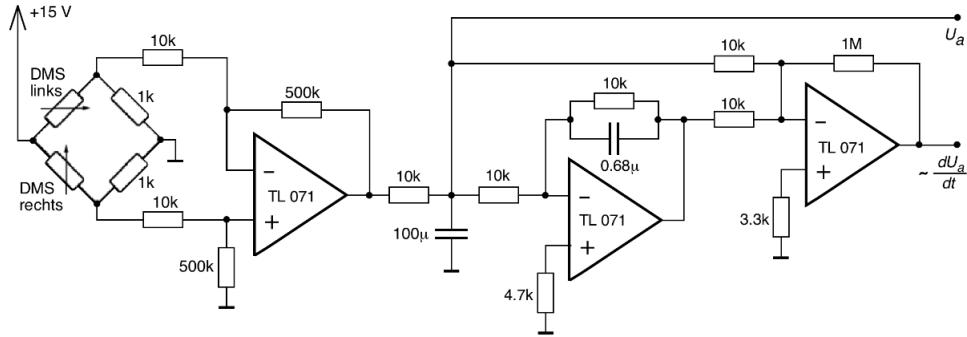


Abbildung 2.7: Messschaltung des invertierten Pendels (Lück, 1995)

Für die Messschaltung (siehe Abb. 2.7) wird für eine höhere Genauigkeit zwei DMS in einer Brückenschaltung verschalten, um die Spannungsdifferenz von ihnen zu messen, wobei die Spannung dann proportional zur Pendelauslenkung  $\theta$  ist. Für das Abgreifen der Geschwindigkeit als zweite Phasenraumvariable werden die Spannungen über eine Operationsverstärker-Schaltung differenziert. Die Spannungen werden dann einem im PC eingebauten Analog-Digital-Wandler-Karte gemessen, wobei die Messkarte über LABVIEW (Messprogramm) gesteuert wird (Lück, 1995).

## 2.3 Der Shinriki-Oszillator

### 2.3.1 Differentialgleichung und Aufbau des Shinriki-Oszillator

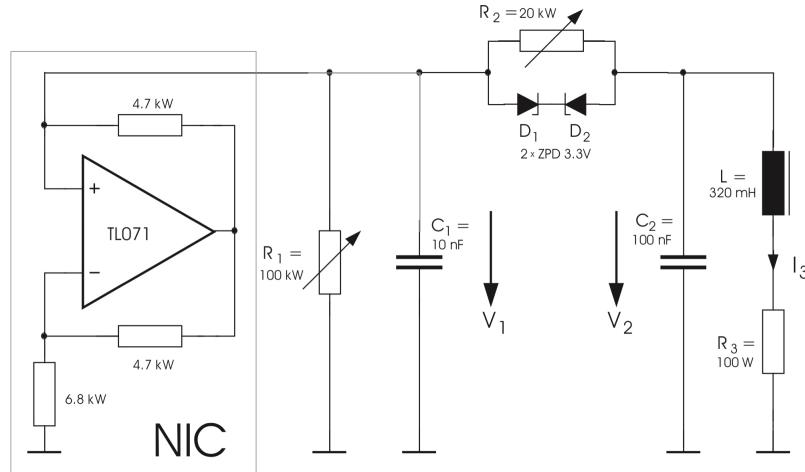


Abbildung 2.8: Schaltplan des Shinriki-Oszillators (Lück, 1995)

Der Shinriki-Oszillator besteht aus einem negativen Impedanzkonverter (NIC) und einem LC-Parallelschwingkreis, die durch ein gegeneinander geschaltetes Zenerdiodenpaar und dem parallel geschalteten  $R_2$ , gekoppelt sind.

Die Leitwertfunktion des Kopplungsglied ist  $f(V)$  und beschreibt den Strom, der über das Kopplungsglied fließt.  $R_{\text{NIC}}$  ist der Widerstand des NIC innerhalb des relevanten Intervalls von -8,1 V bis 8,1 V (Lück, 1995).

Damit und mit den Kirchhoffsschen Regeln lassen sich nun die DGLs aufstellen:

$$C_1 \dot{V}_1 = V_1 \left( \frac{1}{R_{\text{NIC}}} - \frac{1}{R_1} \right) - f(V_1 - V_2) \quad (2.14)$$

$$C_2 \dot{V}_2 = f(V_1 - V_2) - I_3 \quad (2.15)$$

$$L \dot{I}_3 = -I_3 R_3 + V_2 \quad (2.16)$$

### 2.3.2 NIC und Schwingung des Shinriki-Schaltkreis

Ein NIC benutzt einen Operationsverstärker, um einen negativen ohmschen Widerstand zu simulieren. Hierbei wird der gewünschte Widerstand einfach zwischen dem (-) Eingang des OpAmp und GND geschaltet. Durch den OpAmp wird ein Widerstand mit negativem Wert des eben eingesetzten simuliert.

Daher muss das System nicht mehr von außen zur Schwingung angeregt werden.

### 2.3.3 Geräusche einer Bifurkation

Eine Bifurkation ist eine Verdopplung der Periodendauer, d.h. die Frequenz wird halbiert. Dies verursacht einen tieferen Ton.

# 3 Messprotokoll

## 3.1 Versuchsdurchführung invertiertes Pendel

### Bifurkationsdiagramm

Vermessung der Gleichgewichtslage  $\theta_g$  in Abhängigkeit der Masse  $M$ . Dabei wird die Gleichgewichtslage über eine Spannung  $U_a$ , welche durch den in (2.2.4) beschriebenen Schaltkreis erzeugt wird. Dabei wird angenommen (siehe (2.2.4)), dass  $U_a$  proportional zu dem Auslenkwinkel im Gleichgewicht  $\theta_g$  ist und damit der generelle Verlauf der Graphen identisch ist.

- Messfehler Waage:  $s_a = 0,005 \text{ g} = s_r$
- Messfehler Multimeter:  $s_a = 0,00005 \text{ V} = s_r$   
Durch starke Schwankungen am Multimeter verändert sich der Wert des Fehlers des Multimeters mit der Zunahme der Masse  $M$
- Messfehler Stoppuhr:  $s_a = 0,01 \text{ s} = s_r$
- Länge des Pendels (mit Stahlmaßstab):  $l = 37 \text{ cm}$
- Gewicht Feststellschraube:  $m_s = 3,14 \text{ g}$

Datei: BifurkationPendel.csv

### Verifikation Ergebnis:

Freie Schwingung des Pendels bei einer Auslenkung bis ca. 1V. Messung der Schwingungsdauer  $T$  (10fach) mit Smartphone (Google Pixel 5). Über die Schwingungsdauer wird dann die Federkonstante  $k$  des Pendels berechnet.

Datei: Schwingungsdauer\_woMass.csv; Messung ohne Masse.

Datei: Schwingungsdauer\_wMass.csv; Messung mit 12,58 g.

Grobe Auswertung: Kritische Masse  $M_k \approx 19,3 \text{ g}$  wurde durch Überschlagsrechnung bestätigt.

### Schwache Nichtlinearität

Montage des Dämpfungssegels, wobei dabei zu beachten ist, dass die kritische Masse  $M_k \approx 19,3 \text{ g}$  nicht überschritten wird, damit man im monostabilen Zustand des Pendels bleibt.

- Masse Dämpfungssegel:  $m = 4,4 \text{ g}$
- Zusätzlich montierte Masse:  $m = 10,42 \text{ g}$

Die Masse  $M_{\text{total}} = 14,41 \text{ g}$  bleibt hierbei über den ganzen Versuchsteil unverändert und das Dämpfungssegel befestigt über den kompletten restlichen Versuchsverlauf.

### 3.1 Versuchsdurchführung invertiertes Pendel

- a)** Für die Amplitudenabhängigkeit des Pendels wird dieses einmal ausgelenkt und dessen Schwingung über das Messprogramm aufgezeichnet.

Datei: 06\_09\_2021\_14\_41\_30\_G11\_pendel\_0.dat

- b)** Messung der Hystereseschleife der Schwingung mit Messprogramm.

Einstellungen: 2000 Steps; Start: 0Hz; End: 1,1Hz

Datei: 06\_09\_2021\_14\_30\_52\_06\_09\_2021\_14\_30\_52\_G11\_pendel\_resonanz\_0.dat

## Starke Nichtlinearität

Veränderung der Masse über die kritische Masse für einen bistabilen Zustand, beachte das Dämpfungsblech aus (2a) ist immer noch mit befestigt.

- Zusätzlich montierte Masse:  $m = 19,44 \text{ g}$

Diese Masse  $M_{\text{total}} = 23,84 \text{ g}$  bleibt auch über diesen Versuchsteil unverändert.

- a)** Variation der Antriebsfrequenz  $\omega$  in kleinen Schritten zur Lokalisierung der Schwingungszustände. Aufnahme der Attraktoren und Leistungsspekten mit dem Messprogramm.

Labview Absturz bei 0,517 Hz

Datei: Datum\_Uhrzeit\_G11\_pendel\_0.dat (Mehrere Files mit selben Namen in zugehörige Ordner gespeichert)

Neustart bei 0,52 Hz quasichaotisch bei  $\omega \approx 0,411 \text{ Hz}$

Datei: Datum\_Uhrzeit\_Richter\_pendel\_0.dat (Wegen Neustart Dateienbenennung verändert gewesen)

Frequenzen den einzelnen Schwingungszuständen werden den Daten entnommen.

- b)** Verdeutlichung der Empfindlichkeit der Anfangsbedingung mit Ruhelage auf der linken Seite (Pendel hängt auf die linke Seite). Aufnahme von drei Zeitserien Trajektorien (eine mehr als benötigt) mittels des Messprogramms.

- Anregungsfrequenz  $\omega$ : 0,411Hz

Schrittmotor in Anfangspos. (Armstellung ganz unten)

Datei: Datum\_Uhrzeit\_G11\_pendel\_0.dat (Mehrere Files mit selben Namen in zugehörige Ordner gespeichert)

### 3 Messprotokoll

## 3.2 Versuchsdurchführung Shinriki

### Einstellfehler der Widerstände

$$s_{R_1} = 1 \text{ k}\Omega \quad (3.1)$$

$$s_{R_2} = 2 \text{ k}\Omega \quad (3.2)$$

#### a) Phasendiagramm

Wir stellen einzelne Parameterwerte für  $R_2$  und  $R_1$  ein und variierten je nach eingestelltem Parameter mit  $R_2$  oder  $R_1$  bis das Phasendiagramm vollständig abgefahren ist ab. Widerstände schwer ablesbar, weswegen Angaben fehlerhaft sein können,  $R_1$  konnte hierbei genauer bestimmt werden. Alle Werte werden in  $\text{k}\Omega$  angeben.

Par	Var	Per1	Per2	Per4	Chaos1	Per3	Chaos2	Double
$R_2$	16,50	$R_1$	13,40	20,10	21,10	21,46	22,20	22,30
$R_2$	13,00	$R_1$	16,16	23,68	25,19	25,86	26,72	26,82
$R_1$	55,00	$R_2$	7,88	8,52	8,72	8,76	8,92	8,96

#### b) Schnitt im Phasendiagramm

Wir schneiden bei fixierten  $R_2 = 8,4 \text{ k}\Omega$  durch das Phasendiagramm. Daten werden elektronisch erstellt.

#### c) Bifurkationsdiagramm

Nutzen oben verwendeten Schnitt für diese Aufgabe zum Erstellen eines Bifurkationsdiagramms. Dies geschieht wieder elektronisch.

#### d) Großmann-Feigenbaum-Konstante

Wir vermessen nun gesondert die einzelnen Bifurkationen durch Variation von  $R_1$  mit gleichen  $R_2$  aus (b). Alle Werte werden  $\text{k}\Omega$  angegeben. Hierbei steht der Index  $i$  in  $r_i$  für die einzelnen Bifurkationen.

$r_1$	$r_2$	$r_3$
59	65,6	67,6

- $r_1$  Periode 1 auf 2
- $r_2$  Periode 2 auf 4
- $r_3$  Periode 4 auf 8

#### e) Einbettungstheorem

Aufnahme des Originalattraktors bei  $R_2$  wie in (b) und  $R_1 = 51 \text{ k}\Omega$  und  $\delta t = 60 \text{ n}$  (?); Rekonstruktion mithilfe des entsprechenden Programmteils mit qualitativen Übereinstimmung der Form des rekonstruierten Attraktors mit dem Originalattraktor.

# 4 Auswertung und Diskussion

## 4.1 invertierter Pendel

### 4.1.1 Bifurkationsdiagramm und kritische Masse

Über den Versuch wurde die Auslenkung  $\theta$  bzw. die Spannung  $U_a$  am Digitalmultimeter links ( $U_{a,l}$ ) und rechts ( $U_{a,r}$ ) gemessen. Dabei ergeben sich erst ab einer gewissen Masse, eine Auslenkung links oder rechts, was im Bifurkationsdiagramm (Abb 4.1) dargestellt wurde, welches auch symmetrisch gegenüber Periode 1 ist.

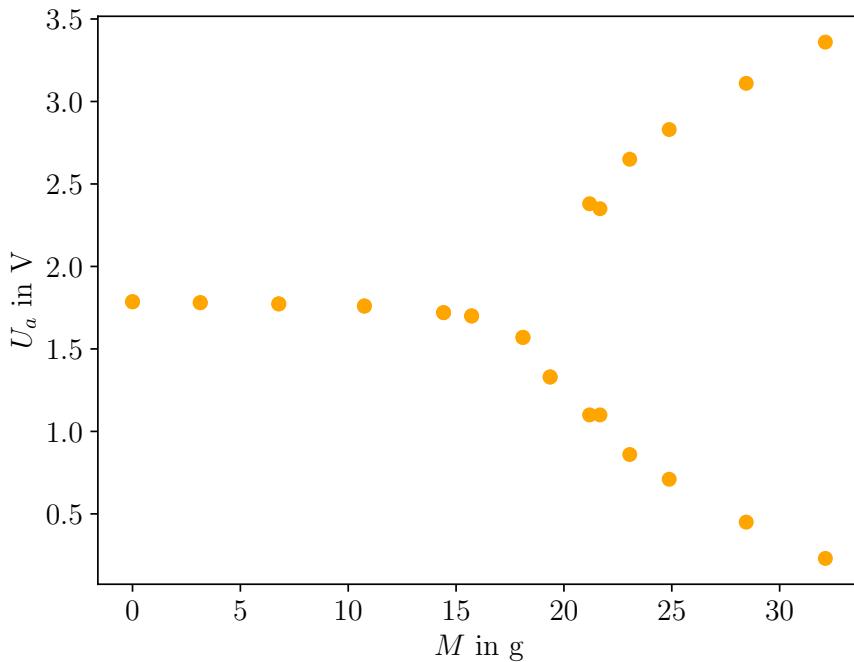


Abbildung 4.1: Bifurkationsdiagramm in Abhängigkeit der Masse

Um die kritische Masse  $M_k$  zu bestimmen, wird die Differenz  $\Delta U_a = U_{a,l} - U_{a,r}$  bestimmt und diese quadriert, also  $(\Delta U_a)^2$ . Der Fehler ergibt sich dann aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, wobei der Ablesefehler  $s_a$  gleichzeitig als Restfehler  $s_r$  abgeschätzt wird.

#### 4 Auswertung und Diskussion

Daraus folgt:

$$(\Delta U_a)^2 = (U_{a,l} - U_{a,r})^2 \quad (4.1)$$

$$s_{U_a} = \sqrt{s_a^2 + s_r^2} = \sqrt{2}s_a \quad (4.2)$$

$$s_{(\Delta U_a)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial((\Delta U_a)^2)}{\partial U_{a,l}} s_{U_a} \right)^2 + \left( \frac{\partial((\Delta U_a)^2)}{\partial U_{a,r}} s_{U_a} \right)^2} = 2\sqrt{2}s_{U_a}|\Delta U_a| = 4s_a|\Delta U_a| \quad (4.3)$$

$M/\text{g}$	$U_{a,l}/\text{V}$	$U_{a,r}/\text{V}$	$s_a/\text{V}$	$s_{U_a}/\text{V}$	$(\Delta U_a)^2/\text{V}^2$	$s_{(\Delta U_a)^2}/\text{V}^2$
0,00	1,78606	1,78606	0,00005	0,00007	0,0	0,0
3,14	1,78046	1,78046	0,00050	0,00071	0,0	0,0
6,78	1,77300	1,77300	0,00500	0,00707	0,0	0,0
10,75	1,76000	1,76000	0,00500	0,00707	0,0	0,0
14,42	1,72000	1,72000	0,05000	0,07071	0,0	0,0
15,72	1,70000	1,70000	0,05000	0,07071	0,0	0,0
18,10	1,57000	1,57000	0,05000	0,07071	0,0	0,0
19,36	1,33000	1,33000	0,05000	0,07071	0,0	0,0
21,19	1,10000	2,38000	0,05000	0,07071	1,6	0,3
21,67	1,10000	2,35000	0,05000	0,07071	1,6	0,3
23,05	0,86000	2,65000	0,05000	0,07071	3,2	0,4
24,88	0,71000	2,83000	0,05000	0,07071	4,5	0,4
28,45	0,45000	3,11000	0,05000	0,07071	7,1	0,5
32,12	0,23000	3,36000	0,05000	0,07071	9,8	0,6

Tabelle 4.1: Messreihe Auslenkung Gleichgewichtslage

Die Daten werden dann mit dem Numpy-Modul linear gefittet, dabei werden nur die letzten sieben Datensätze verwendet werden, da sich  $(\Delta U_a)^2$  erst ab da Veränderung zeigt (siehe Abb. 4.2). Dabei ergibt sich die gefittete Funktion mit den jeweiligen Fehlern:

$$(\Delta U_a)^2 = cM + b = 0,77 \frac{\text{V}^2}{\text{g}} M - 14,73 \text{ V}^2 \quad (4.4)$$

$$c = (0,77 \pm 0,02) \frac{\text{V}^2}{\text{g}}, \quad b = (-14,73 \pm 0,48) \text{ V}^2 \quad (4.5)$$

Daraus ergibt sich die kritische Masse  $M_k$ , wenn man  $(\Delta U_a)^2 = 0$  setzt. Woraus widerrum mit Fehlerfortpflanzung folgt:

$$M_k = \frac{b}{c} = 19,22 \text{ g}, \quad s_{M_k} = \sqrt{\left( \frac{s_b}{c} \right)^2 + \left( \frac{bs_c}{c^2} \right)^2} = 0,78 \text{ g} \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_k = (19,22 \pm 0,78) \text{ g}} \quad (4.7)$$

#### 4.1 invertierteres Pendel

Die Federkonstante  $k$  und dessen Fehler ergibt sich dann mit dem Fehler der Länge  $L$  (gemessen mit Stahlmaßstab), wobei die Erdbeschleunigung fehlerfrei angenommen wird:

$$L = 0,37 \text{ m} \quad (4.8)$$

$$s_L = \sqrt{s_a^2 + s_r^2} = \sqrt{(5 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2 + (5 \cdot 10^{-5} \text{ m} + \cdot 10^{-4} * L)^2} = 0,0006 \text{ m} \quad (4.9)$$

$$M_k = \frac{k}{gL} \Leftrightarrow k = M_k g L = 0,069762834 \text{ Nm} \quad (4.10)$$

$$s_k = \sqrt{(gL s_{M_k})^2 + (M_k g s_L)^2} = 0,002833425 \text{ Nm} \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow \boxed{k = (0,070 \pm 0,003) \text{ Nm}} \quad (4.12)$$

Hierbei ist anzumerken, dass  $k$  nicht die Einheit einer Federkonstante hat sondern eines Drehmoments. Die Vermutung liegt mit einen Blick auf Kapitel 2.2.1 beschrieben Differentialgleichung, dass sich bei  $k$  eigentlich um das Direktionsmoment handeln muss, wobei das Direktionsmoment der Federkonstante  $k$  bei longitudinalen Auslenkungen entspricht.

Zur Verifikation des Ergebnisses haben wir mehrfache (10mal) die Schwingungsdauer des Pendels mit der befestigten Masse  $M = 12,58 \text{ g}$  gemessen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_{10}/\text{s}$	19,14	19,28	18,88	19,18	19,00	18,66	19,12	19,01	19,20	19,29

Tabelle 4.2: Messreihe Schwingungsdauer

Es wird nun der Mittelwert über eine Periode genommen, wobei der Ablesefehler der digitale Messuhr auch gleichzeitig als Restfehler abgeschätzt wird und der Fehler der einen Periode mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet wurde. Daraus folgt:

$$T = \bar{T} = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} \frac{T_{10,n}}{10} = 1,9076 \text{ s} \quad (4.13)$$

$$s_{T_{10}} = \sqrt{s_a^2 + s_r^2} = \sqrt{2}s_a \Rightarrow s_T = \frac{s_T}{10\sqrt{10}} = \frac{s_a}{10\sqrt{5}} = 0,000447214 \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = (1,9076 \pm 0,0004) \text{ s}} \quad (4.15)$$

#### 4 Auswertung und Diskussion

Über Federkonstante (Direktionsmoment)  $k$  lässt sich dann die Schwingungsdauer  $T$  wie folgt berechnen (LeifiPhysik, 2021), wobei für den Fehler von  $T$  der Fehler der Masse und Länge vernachlässigt wird:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ML^2}{k - MgL}} = 1,671383586 \text{ s} \quad (4.16)$$

$$s_T = \frac{\pi ML^2 s_k}{(k - MgL)^2 \sqrt{\frac{ML^2}{k - MgL}}} = 0,1030091566 \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = (1,67 \pm 0,10) \text{ s}} \quad (4.18)$$

Das Ergebnis zeigt, dass die bestimmte Federkonstante  $k$  nahe an den tatsächlichen Wert der Blattfeder liegt. Die möglichen Abweichungen könnten von denen in Kapitel 2.2.1 gemachten Näherungen oder dem vorangegangenen Fit verursacht werden. Auch könnte das Alter des Messaufbaus seinen Teil zu der Ungenauigkeit beigetragen haben. Dennoch ist das Ergebnis im Rahmen unserer Möglichkeiten akzeptabel.

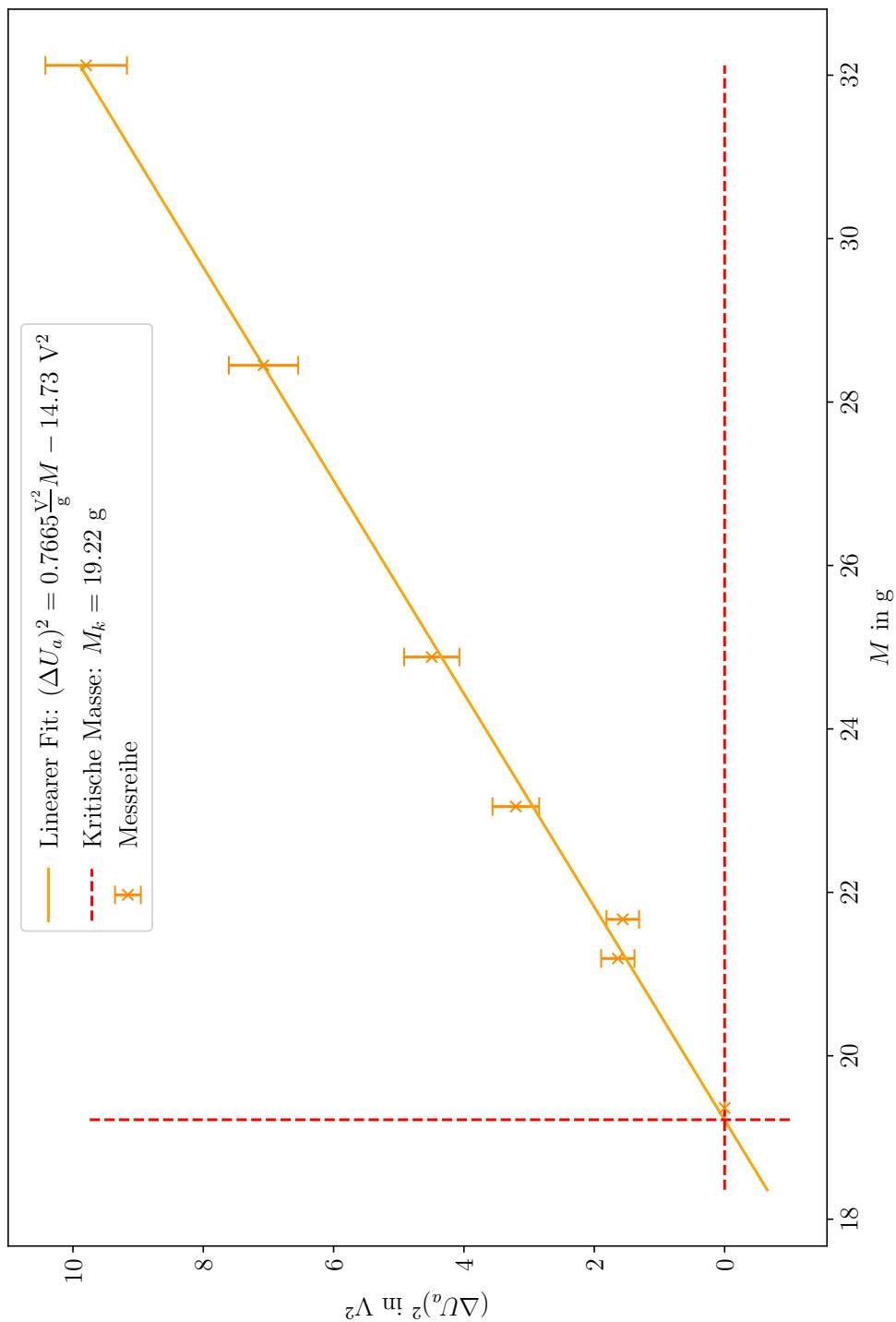


Abbildung 4.2: Linerar Fit der Messreihe

## 4 Auswertung und Diskussion

### 4.1.2 Schwache Nichtlinearität

#### a) Amplitudenabhängigkeit

Für die experimentelle Auswertung der Amplitudenabhängigkeit der Schwingungsdauer  $T$  des Pendels werden aus den aufgenommenen Daten die Maxima der Spannung  $U_a$  bestimmt, sowie der zeitlichen Abstand  $\Delta t$  zwischen zwei Maxima ermittelt. Der Abstand  $\Delta t$  entspricht dann der Periodendauer  $T$  des Pendels. Da mehrere Werte für  $T$  gehäuft vorkamen, haben wir die Daten von  $T$  gruppiert und über die zugehörigen Maxima der Spannung  $U_{a,\max}$  den Mittelwert gebildet.

$T/\text{s}$	1.90	2.10	2.20	2.30	2.32	2.36	2.40	2.44
$U_{a,\max}/\text{V}$	2.3950	2.2310	2.0450	1.8816	1.7230	1.5400	1.6278	1.5651

Tabelle 4.3: Messreihe Schwingungsdauer in Amplitudenabhängigkeit

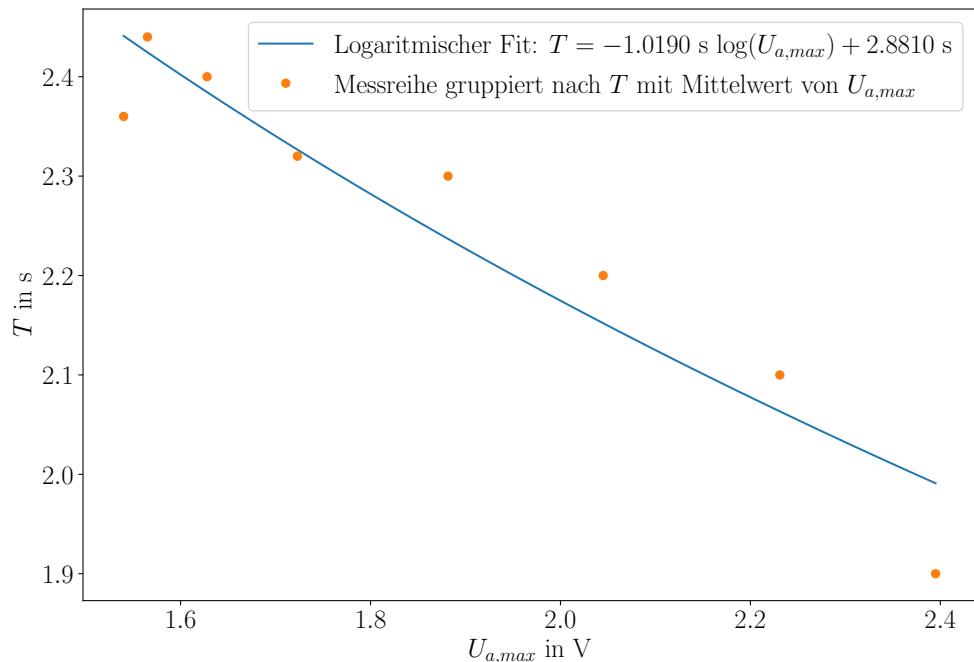


Abbildung 4.3: Amplitudeabhängigkeit der Schwingungsdauer mit logarithmischen Fit

Bei der grafischen Auswertung (siehe Abb.4.3) erkennt man deutlich einen Abwärtstrend. Ein logarithmisches Fit wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben, gibt dann die Funktion:

$$T = (-1,0190 \text{ s}) \log(U_{a,\max}) + (2.8810 \text{ s}). \quad (4.19)$$

Dieser Fit ist aber noch nicht aussagekräftig, da die Messwerte auch einen linearen Fit zulassen würden, weswegen mehr Messpunkte gebraucht werden würden.

**b) Resonanzkurve**

Bei der Messung der Resonanzkurve erkennt man grob verschiedene Bereiche (siehe Abb 4.4), dabei beschreibt die **blaue Kurve** den Hinweg ( $0.0\text{ Hz} \rightarrow 6.9\text{ Hz}$ ) und die **orange Kurve** den Rückweg ( $6.9\text{ Hz} \rightarrow 0.0\text{ Hz}$ ).

Zuerst betrachten wir den Hinweg bzw. die **blaue Kurve**:

- 1)  $0,0\text{-}0,5\text{ Hz}$   
Die Drehfrequenz des Schrittmotors reicht nicht aus um das Pendel anzuregen.
- 2)  $0,5\text{-}2,0\text{ Hz}$   
Erregerfrequenz regt Pendel zur Schwingung an. Vereinzelte Zacken zeigen dabei die Schritte, welche der Schrittmotor macht beim Antreiben.
- 3)  $2,0\text{-}4,0\text{ Hz}$   
Anstieg der Amplitude bis zu ihrem Maximum von  $\approx 2.2\text{ V}$
- 5)  $4,0\text{-}6,9\text{ Hz}$   
Abfallen der Amplitude bis auf  $0\text{ Hz}$ , wobei das Pendel der Drehfrequenz des Motors nicht nachkommt.

Nun betrachten wir den Rückweg bzw. die **orange Kurve**:

- 1)  $6,9\text{-}3,0\text{ Hz}$   
Anstieg der Amplitude von  $0\text{ Hz}$  auf ihr Maximum von  $\approx 2.0\text{ V}$ .
- 2)  $3,0\text{-}2,0\text{ Hz}$   
Abfallen der Amplitude auf  $\approx 0.6\text{ V}$
- 3)  $2,0\text{-}0,5\text{ Hz}$   
Erregerfrequenz regt Pendel zur Schwingung an. Vereinzelte Zacken zeigen dabei die Schritte, welche der Schrittmotor macht beim Antreiben.
- 5)  $0,5\text{-}0,0\text{ Hz}$   
Die Drehfrequenz des Schrittmotors reicht nicht aus um das Pendel anzuregen.

Im Bereich zwischen  $3.0\text{ Hz}$  und  $4.0\text{ Hz}$  lässt sich dann durch Vergleich zwischen Hin- und Rückweg schön den bistabilen Zustand aus Kapitel 2.2.3.

#### 4 Auswertung und Diskussion

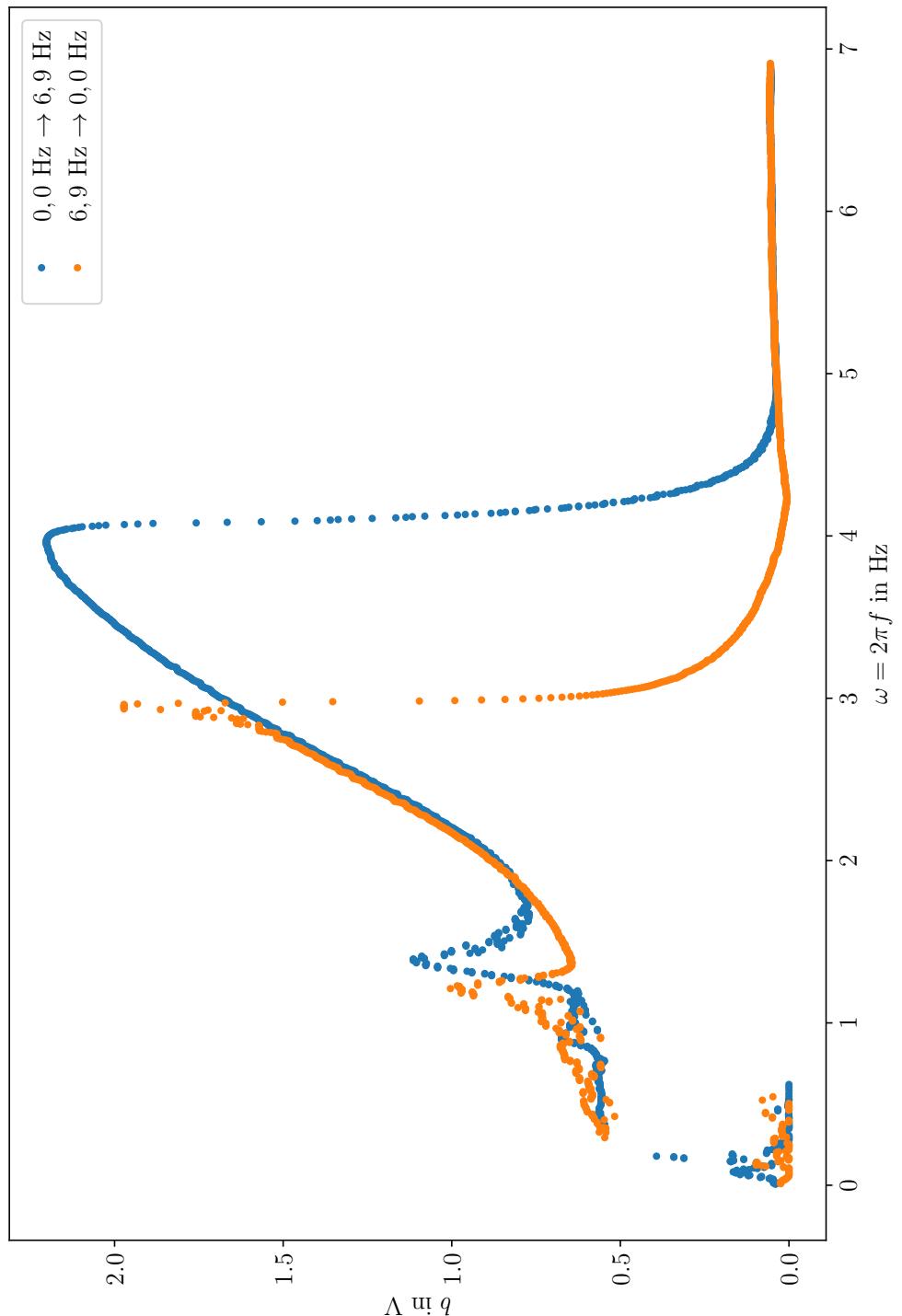


Abbildung 4.4: Resonanzkurve

### 4.1.3 Starke Nichtlinearität

#### a) Schwingungszustände des Pendels

Nun werden die einzelnen Schwingungszustände bei verschiedenen Frequenzen untersucht. Wobei mit einer hohen Frequenz begonnen wurde und dann schrittweise verkleinert wird.

In Abb. 4.5 zeigt das Pendel chaotisches Verhalten, dabei befindet es sich selbst auf der linken Seite. Im Leistungsspektrum erkennt man aber ausgeprägte Zacken, was für ein quasi-periodisches Verhalten sprechen könnte.

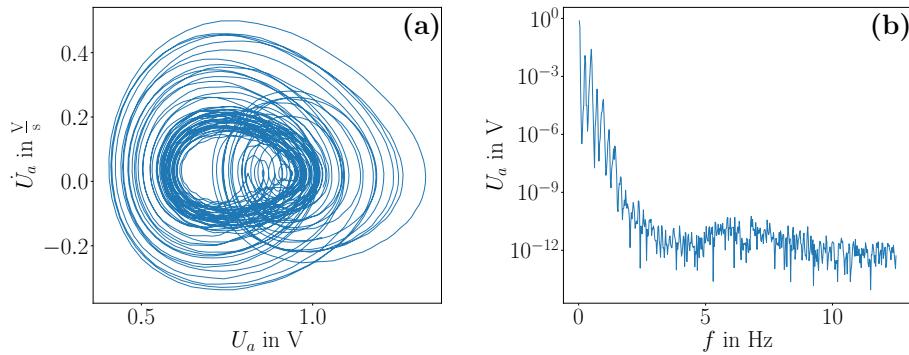


Abbildung 4.5: Messung bei  $f_a=0,233$  Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum

Abb. 4.6 zeigt deutlich chaotisches Verhalten des Pendels, was auch am Rauschen im Leistungsspektrum auch zu erkennen ist. Weiterhin erkennt man die zwei möglichen Schwingungen auf der rechten und linken Seite der Pendels, wobei in der Mitte der Sattelpunkt des Attraktors.

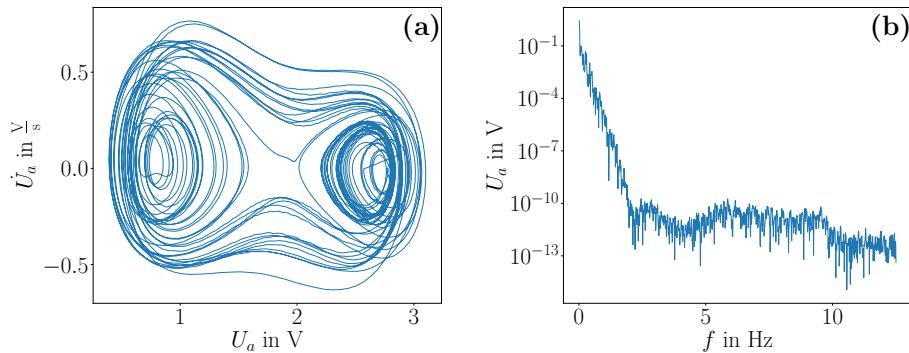


Abbildung 4.6: Messung bei  $f_a=0,411$  Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum

Hier erkennt man in Abb. 4.7 nur ganz leicht die Periode 2 im Phasenportrait, da das Verhalten weiterhin chaotisch. Dafür sieht man im Leistungsspektrum deutliche ausgeprägte Peaks.

#### 4 Auswertung und Diskussion

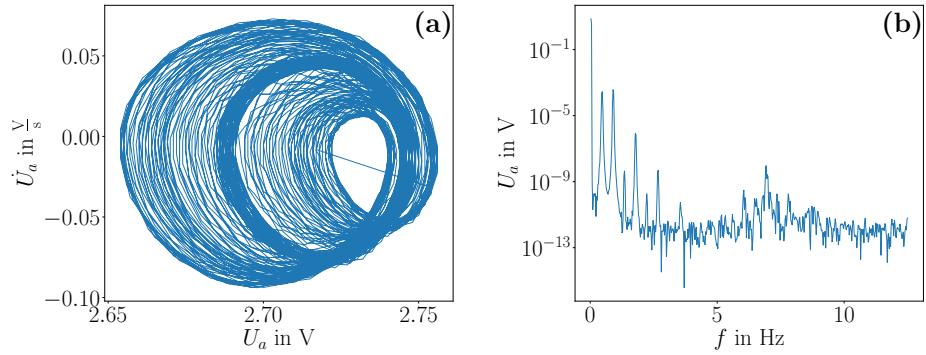


Abbildung 4.7: Messung bei  $f_a=0,882$  Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum

Deutlich ausgebildete Periode 1 Schwingung in Abb. 4.8, gut zu erkennen an dem Attraktor in Form eines leicht deformierten Kreises und an den definierten Peaks im Leistungsspektrum.

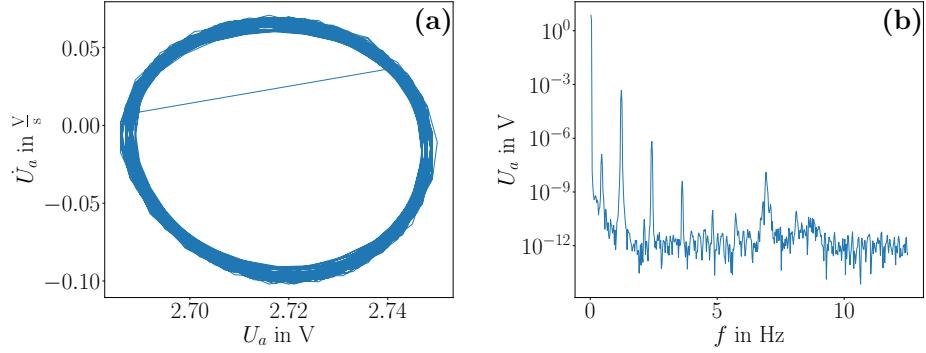


Abbildung 4.8: Messung bei  $f_a=1,201$  Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum

Ausprägen des Torusattraktors in Abb. 4.9 bei hoher Frequenzen, mit stark ausgeprägten Peaks im Leistungsspektrum, was für den klar definierten Attraktor spricht.

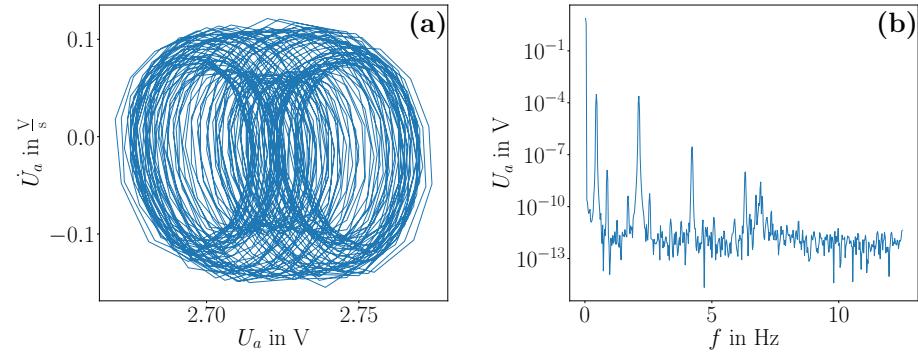


Abbildung 4.9: Messung bei  $f_a=2,100$  Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum

**b) Abhängigkeit der Anfangsbedingung**

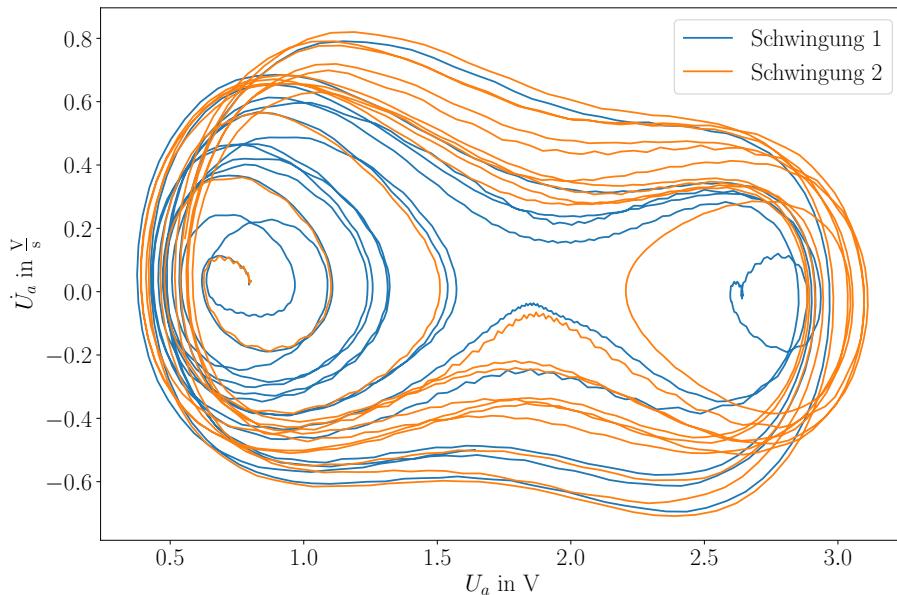


Abbildung 4.10: Schwingung nach  $\Delta T = 56.28 \text{ sec}$

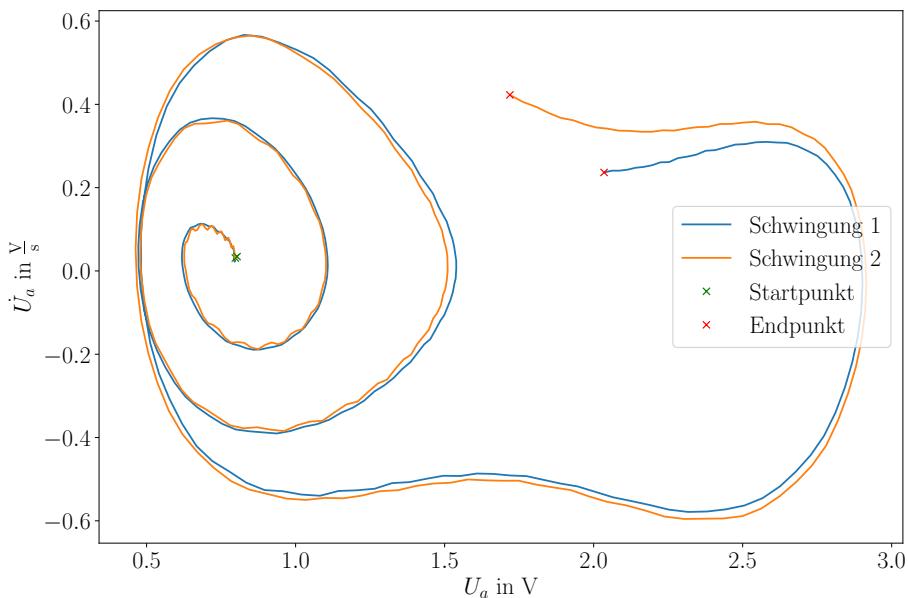


Abbildung 4.11: Schwingung mit Start und Endpunkt nach  $\Delta T = 10.28 \text{ sec}$

In Abbildung 4.11 erkennt man dann deutlich, dass die Schwingungen sich beim zweiten Umschlag auf die linken Seite voneinander unterscheiden.

## 4 Auswertung und Diskussion

### 4.2 Auswertung zum Shinriki-Oszillator

#### 4.2.1 Phasendiagramm

Im Folgenden wurde ein Phasendiagramm des Shinriki-Oszillators mit den Werten  $R_1$  und  $R_2$  erstellt. Dafür wurden Schnittpunkte der Phasenübergänge ermittelt und mithilfe eines Python-Skripts wurde diese Punkte mit einer Funktion verbunden. Daraus ergibt sich folgende Abbildung, welche die Übergänge der verschiedenen Phasen abhängig von den Werten der Widerstände darstellen. Jede Line stellt dabei einen Phasenübergang dar.

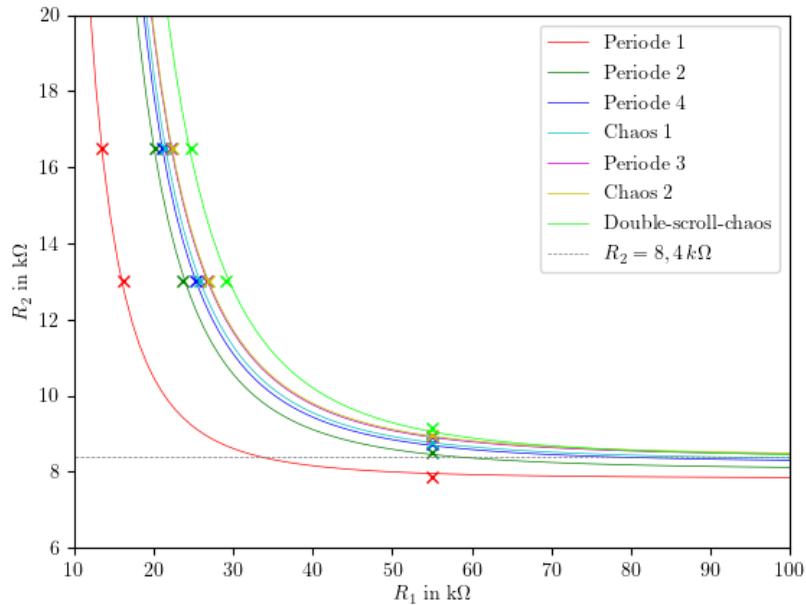


Abbildung 4.12: Phasendiagramm

Die Funktion welche benutzt wurde, um die Punkte zu verbinden ist:

$$f = \frac{a}{x^3} + b \quad (4.20)$$

Hier:  $R_1 = f$ ,  $R_2 = x$  und  $R_0 = b$ .

Diese Funktion wurde ausgewählt, indem mehrere verschiedene Funktionen ausprobiert wurden. Nachfolgend ausgewählte Funktionen zum Vergleich, um die Auswahl nachvollziehen zu können.

## 4.2 Auswertung zum Shinriki-Oszillatator

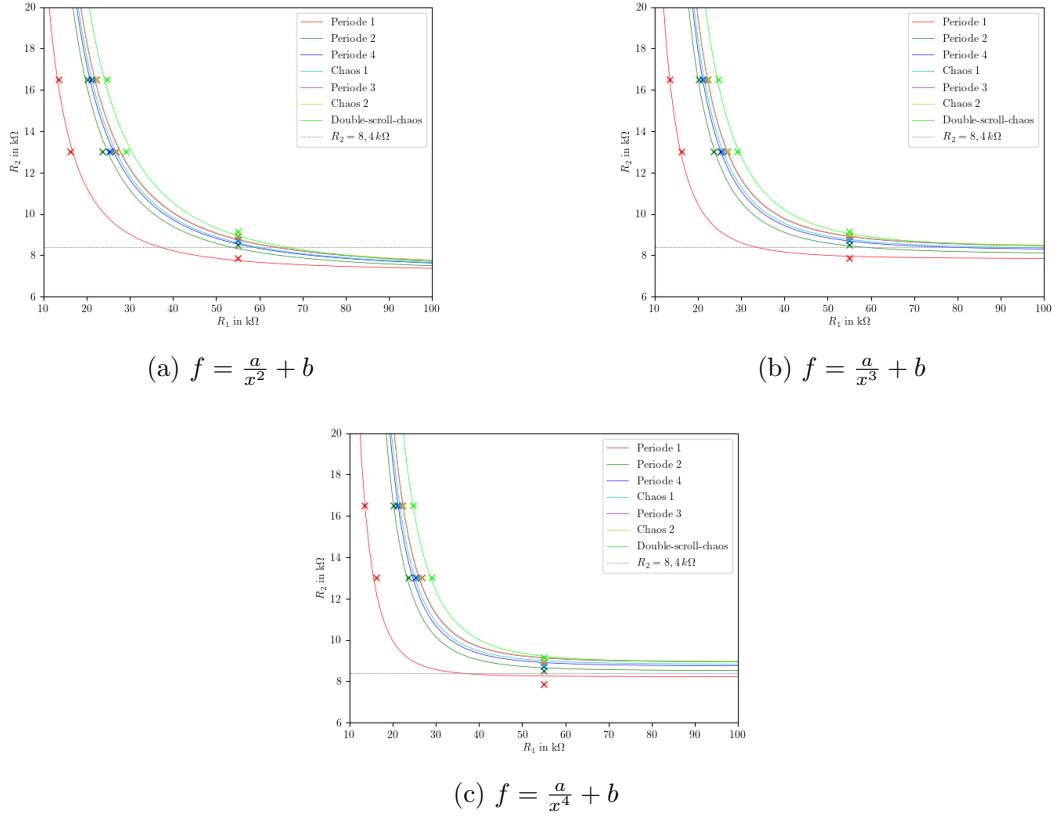


Abbildung 4.13: Vergleich verschiedener 'Fitting'-Funktionen

Anbei noch die errechneten Parameter für die einzelnen Funktionen:

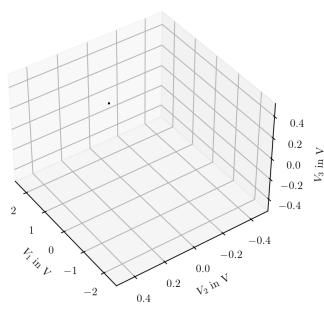
Übergang auf	a in Ohm <sup>4</sup>	b in Ohm
Periode 1	21098,64	7,83
Periode 2	67878,80	8,05
Periode 4	77374,66	8,23
Chaos 1	81341,62	8,28
Periode 3	88743,91	8,37
Chaos 2	89540,79	8,40
Double-scroll-chaos	119710,19	8,33

Tabelle 4.4: Fitting-Parameter

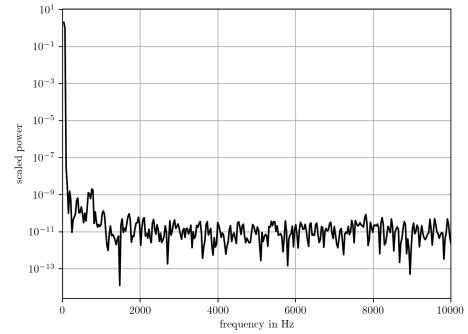
## 4 Auswertung und Diskussion

### 4.2.2 Schnitt durch das Phasendiagramm

Nun wird für einen festen Wert ( $R_2 = 8,4k\Omega$ ) ein Schnitt durch das Phasendiagramm erzeugt, indem  $R_1$  variiert wird und die Veränderungen aufmerksam beobachtet werden. Im Folgenden unsere Beobachtungen bei ausgewählten Werten von  $R_1$ .



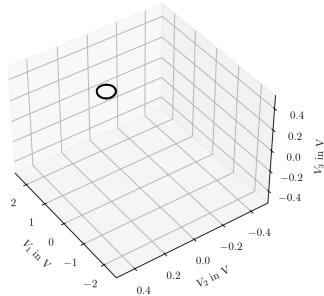
(a) Attraktor



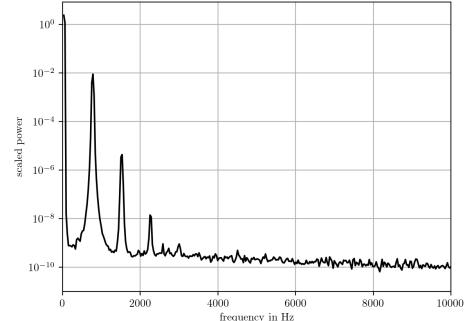
(b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.14:  $R_1 = 37 \text{ k}\Omega$

Bei  $R_1 = 37 \text{ k}\Omega$  (Abbildung 4.14) ist anhand des Attraktors zu erkennen, dass keine Schwingung auftritt. Auch das Leistungsspektrum verläuft, bis auf einen Peak bei ca. 0 Hz erstaunlich gleichmäßig und bis auf Störungsrauschen nahezu horizontal. Dies spricht ebenfalls für ein schwingungsfreies System.



(a) Attraktor



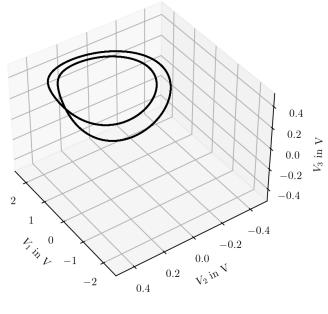
(b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.15:  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$

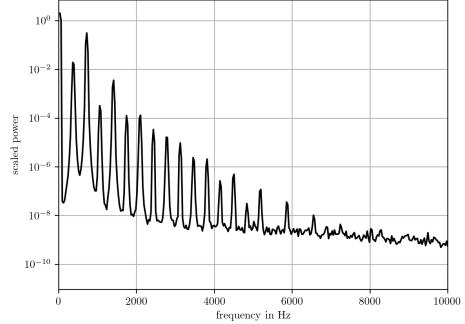
Für  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$  (Abbildung 4.15) befindet sich der Shinriki-Oszilator bereits in Periode 1, was deutlich anhand des Attraktors zu erkennen ist. Auch im Leistungsspektrum sind

## 4.2 Auswertung zum Shinriki-Oszillatator

nun deutliche Unterschiede im Vergleich zum voran gegangenen zu erkennen. Es ist nun die erste Grundschwingung und die 1. harmonische zu erkennen.



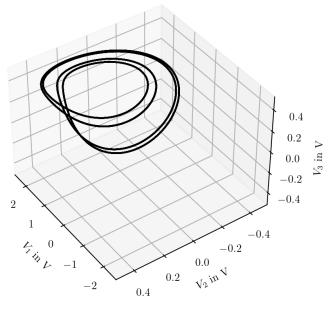
(a) Attraktor



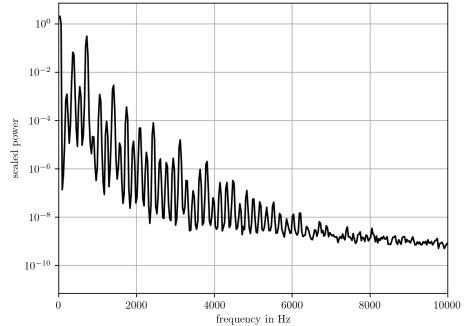
(b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.16:  $R_1 = 60 \text{ k}\Omega$

Eine deutliche Zunahme an Peaks ist bei  $R_1 = 60 \text{ k}\Omega$  (Abbildung 4.16) zu erkennen. Nun ist eine subharmonische Schwingung mit  $\frac{1}{2}f_0$  zu erkennen. Anhand des Attraktors ist sehr gut zu erkennen, dass es sich nun um Periode 2 handelt. Im Vergleich zum letzten Mal fand also ein Bifurkation statt.



(a) Attraktor



(b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.17:  $R_1 = 66 \text{ k}\Omega$

Eine weitere Bifurkation findet im Übergang zu  $R_1 = 66 \text{ k}\Omega$  (Abbildung 4.17) statt. Was wiederum durch eine Zunahme an Peaks im Leistungsspektrum begleitet wird. Nun ist eine subharmonische Schwingung mit  $\frac{1}{4}f_0$  zu erkennen. Ein Blick auf den Attraktor bestätigt das sich der Oszillatator nun in Periode 4 befindet.

#### 4 Auswertung und Diskussion

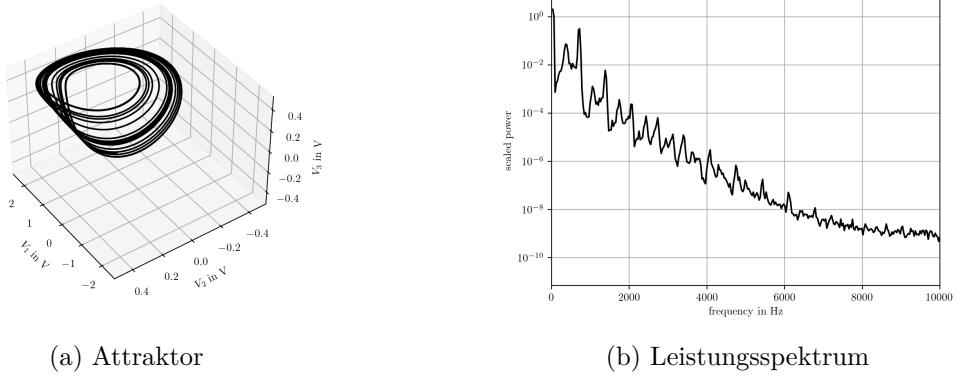


Abbildung 4.18:  $R_1 = 70 \text{ k}\Omega$

Die nächste Phase zeigt nun zum ersten Mal chaotisches Verhalten, was sehr gut am nahezu kontinuierlich abnehmenden Leistungsspektrum und an dem Attraktor zu erkennen ist. Dies geschieht bei  $R_1 = 70 \text{ k}\Omega$  (Abbildung 4.18).

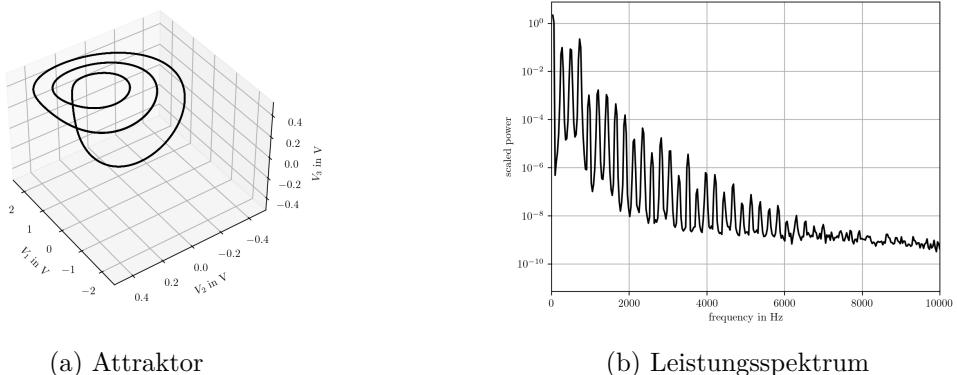


Abbildung 4.19:  $R_1 = 73 \text{ k}\Omega$

Das Chaos wird durch ein Periode 3 Fenster durchbrochen, was der Plot des Attraktors bei  $R_1 = 73 \text{ k}\Omega$  (Abbildung 4.19) sehr gut verdeutlicht.

## 4.2 Auswertung zum Shinriki-Oszillatator

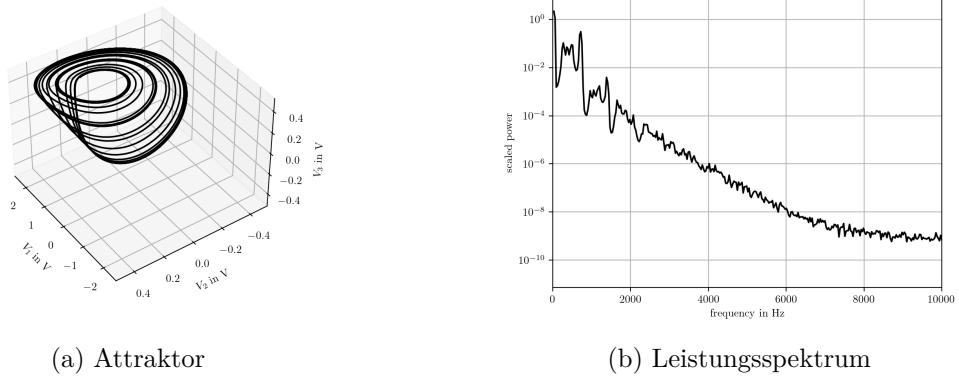


Abbildung 4.20:  $R_1 = 74 \text{ k}\Omega$

Anschließend bei  $R_1 = 74 \text{ k}\Omega$  (Abbildung 4.20) tritt, deutlich erkennbar, erneut Chaos auf.

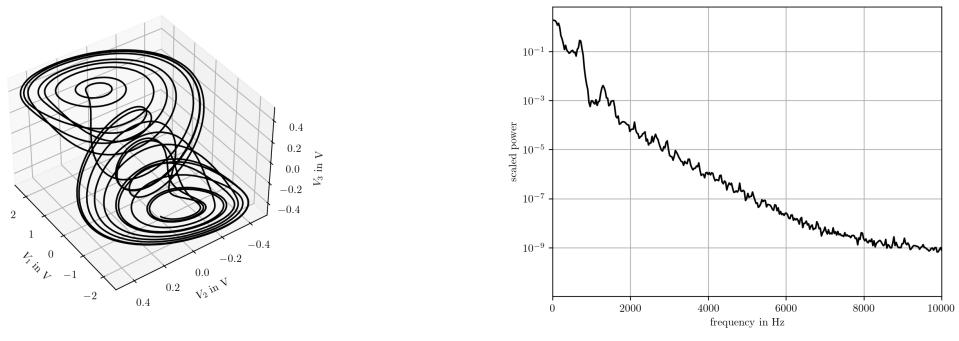


Abbildung 4.21:  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$

Bei  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  (Abbildung 4.21) ist das Double-scroll-chaos zu erkennen.

## 4 Auswertung und Diskussion

### 4.2.3 Bifurkationsdiagramm

Um ein Bifurkationsdiagramm zu erstellen wurde ähnlich zum Schnitt durch das Phasendiagramm ein fester Wert ( $R_2 = 8,4\text{k}\Omega$ ) eingestellt. Unter Zuhilfenahme des Labview Messprogramms konnte nun durch Variation von  $R_1$  folgendes Diagramm erstellt werden.

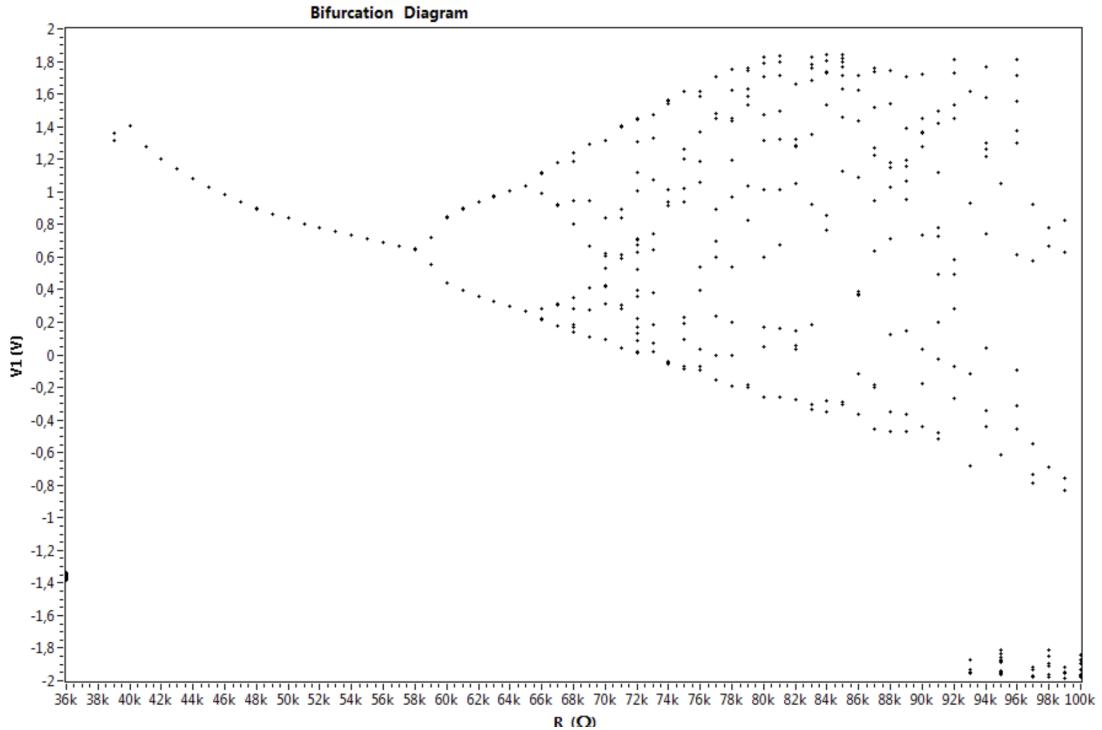


Abbildung 4.22: Bifurkationsdiagramm bei  $R_2 = 8,4 \text{ k}\Omega$  und variablen  $R_1$

Im obigen Diagramm ist die erste Bifurkation (ca.  $R = 58 \text{ k}\Omega$ ) sehr deutlich zu erkennen aber auch die zweite (ca.  $R = 66 \text{ k}\Omega$ ) und dritte (ca.  $R = 68 \text{ k}\Omega$ ) sind noch zu erkennen. Ab ca.  $R = 93 \text{ k}\Omega$  beginnt der Double-Scroll-Bereich. Leider ist bei der Messung der Fixpunktbereich etwas zu kurz gekommen, was wahrscheinlich der fortgeschrittenen Zeit und den damit einhergehenden Verlust der Konzentration zulasten zulegen ist. Außerdem würden mehr Messpunkte das Diagramm noch deutlicher machen.

Nun soll das Bifurkationsdiagramm mit der Simulation verglichen werden.

## 4.2 Auswertung zum Shinriki-Oszillatator

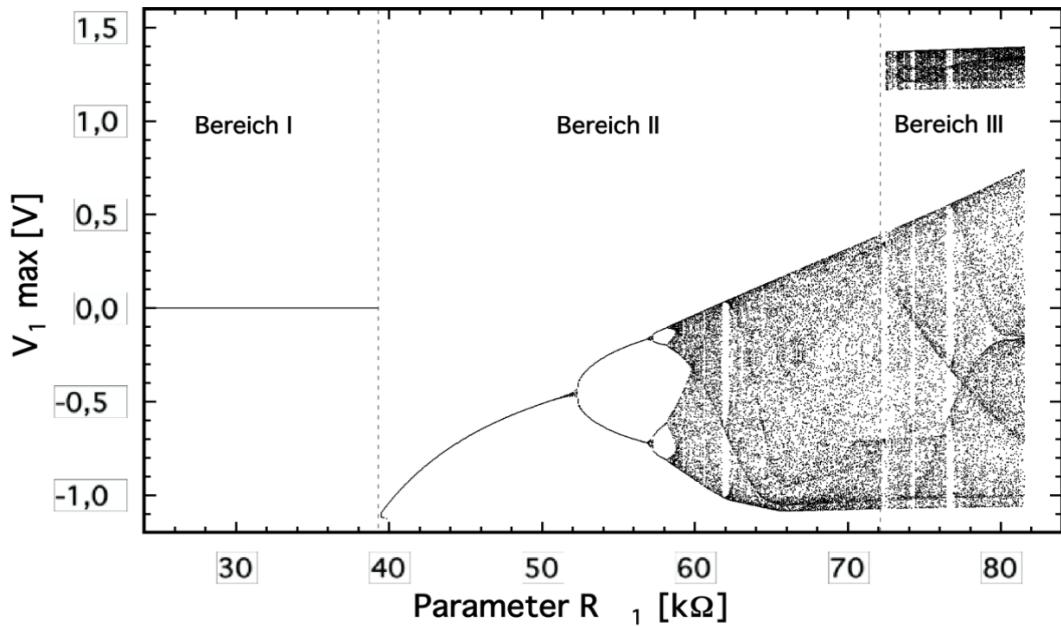


Abbildung 4.23: Berechnetes Bifurkationsdiagramm (Abbildung 7 aus der Anleitung)

Betrachtet man die beiden Diagramme, so fällt auf, dass diese qualitativ gut übereinstimmen. Jedoch fällt auch auf, dass die Messung gegenüber der Simulation horizontal gespiegelt ist. Außerdem fallen auch Abweichungen auf. So ist die erste Bifurkation in der Messung bei ca.  $R = 58 \text{ k}\Omega$  gegenüber  $R = 52 \text{ k}\Omega$  in der Simulation verschoben.

## 4 Auswertung und Diskussion

### 4.2.4 Feigenbaum-Konstante

Um die Feigenbaum-Konstante zu bestimmen wurden die Werte, bei denen eine Periodenverdopplung auftrat, ermittelt. Diese wurden durch eine separate Messung aufgenommen und nicht aus obigem Bifurkationsdiagramm abgelesen. Damit wird versucht genauere Werte zu erhalten, da für das Bifurkationsdiagramm die Messdauer, im Vergleich zum direkten Suchen der Periodenverdopplungen, deutlich größer ist, ist es wahrscheinlicher, dass Störquellen, wie Temperaturveränderungen der Messgeräte, die Werte verfälschen.

Die Feigenbaum-Konstante  $\delta$  kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \quad (4.21)$$

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \quad (4.22)$$

Für den Fehler gilt:

$$s_\delta = s_{R_1} \sqrt{\left(\frac{1}{r_{n+1} - r_n}\right)^2 + \left(\frac{r_{n+1} - r_{n-1}}{(r_n - r_{n+1})^2}\right)^2 + \left(\frac{r_n - r_{n-1}}{(r_{n+1} - r_n)^2}\right)^2} \quad (4.23)$$

$$\text{mit } s_{R_1} = 1 \text{ k}\Omega \quad (4.24)$$

Der Literaturwert der Feigenbaum-Konstante ist:  $\delta = 4,6692\dots$

Folgende Werte wurden gemessen:

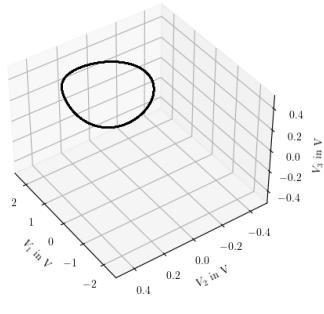
$$\begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & r_3 \\ \hline 59 & 65,6 & 67,6 \end{array}$$

Mit unseren Werten ergibt sich:  $\delta_2 = (3 \pm 3)$

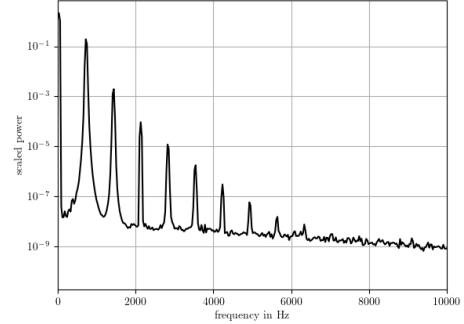
Der Literaturwert liegt noch innerhalb des Fehlerintervalls. Eine Abweichung vom Literaturwert wäre allerdings nicht weiter erstaunlich, da die Feigenbaum-Konstante durch  $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$  gegeben ist. Für unseren Wert gilt jedoch  $n = 2$ .

### 4.2.5 Zum Einbettungstheorem

Im folgenden soll nun eine Attraktorrekonstruktion durchgeführt werden.  
Der Orginalattraktor wurde bei  $R_1 = 51 \text{ k}\Omega$  und  $R_2 = 8,4 \text{ k}\Omega$  aufgenommen.



(a) Attraktor



(b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.24:  $R_1 = 51 \text{ k}\Omega$  und  $R_2 = 8,4 \text{ k}\Omega$

Die qualitativ beste Rekonstruktion wurde für den Verschiebungsindeks  $n = 60$  n erreicht.  
Die Delayzeit kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$\tau = n \frac{1}{f_{\text{abtast}}} \quad \text{mit} \quad f_{\text{abtast}} = 150 \text{ kHz} \quad (4.25)$$

Somit gilt:  $\tau = 0,4 \text{ ms}$

Der größte Peak aus dem Leistungsspektrum liegt bei  $f = 724 \text{ Hz}$ , da der nächst kleinere nur noch ein  $\frac{1}{10}$  davon hat kann er bei der Ermittlung der mittleren Umlaufdauer vernachlässigt werden. Somit gilt für die mittlere Umlaufdauer:

$$\bar{T} = \frac{1}{724} = 1,38 \text{ ms} \quad (4.26)$$

Vergleicht man die beiden Werte, so fällt auf, dass sie sich in etwa der gleichen Größenordnung bewegen.

$$\frac{\bar{T}}{\tau} = 3,45 \Rightarrow \tau \approx \frac{\bar{T}}{4} \quad (4.27)$$

#### 4 Auswertung und Diskussion

Außerdem soll die Rekonstruktion noch für einen chaotischen Attraktor durchgeführt werden. Der Orginalattraktor wurde bei  $R_1 = 70 \text{ k}\Omega$  und  $R_2 = 8,4 \text{ k}\Omega$  aufgenommen, wie in Abbildung 4.25 zu sehen.

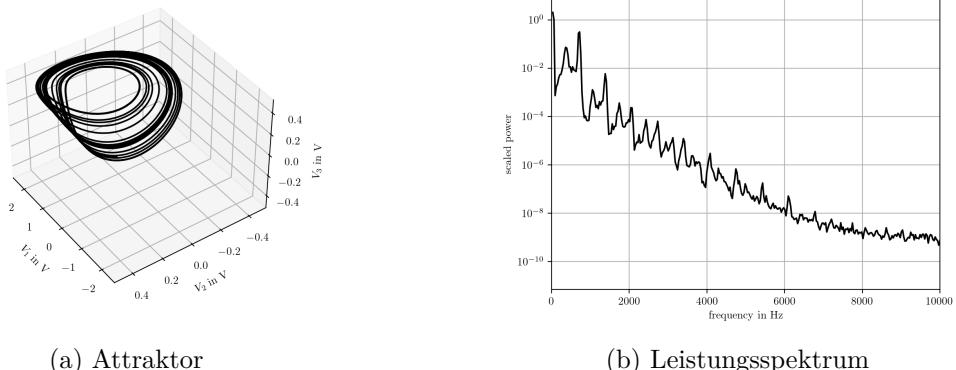


Abbildung 4.25:  $R_1 = 70 \text{ k}\Omega$

Mit Hilfe eines selbst geschriebenen Python Skripts wurde nun das beste  $n$  für die Attraktorrekonstruktion ermittelt. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.26 zu sehen.

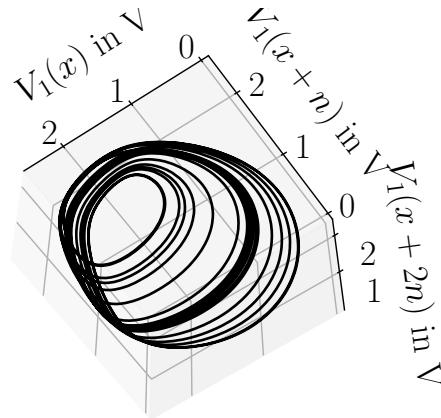


Abbildung 4.26: Attraktorrekonstruktion für  $n = 44$

Genau wie oben wird das Verhältnis der beiden Zahlen gebildet:

$$\tau = n \frac{1}{f_{\text{abtast}}} \quad \text{mit} \quad f_{\text{abtast}} = 150 \text{ kHz} \quad (4.28)$$

Somit gilt:  $\tau = 0,3 \text{ ms}$

$$\bar{T} = \frac{1}{730} = 1,37 \text{ ms} \quad (4.29)$$

## 4.2 Auswertung zum Shinriki-Oszillator

$$\frac{\bar{T}}{\tau} = 4,6 \Rightarrow \tau \approx \frac{\bar{T}}{4} \quad (4.30)$$

Es fällt auf, dass das Verhältnis nahe  $\frac{1}{4}$  liegt.

## **5 Fazit**

Abschließend ist zu sagen, dass der Versuch sehr dabei geholfen hat die Grundzüge der nichtlinearen Dynamik und des chaotischen Verhaltens zu verstehen. Außerdem wurde uns auch die Bedeutung dieses Gebietes vor Augen geführt.

So ist der Versuch alles in allem als Erfolg zu bewerten.

# Literaturverzeichnis

E. HERING, K. BESSLER, J GUTEKUNST 2014 *Elektronik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, 6. Auflage. Springer.

JÄNICH, K. 2005 *Mathematik 1, Geschrieben für Physiker*. Springer.

LEIFI PHYSIK 2021 Blattfederpendel stehend. URL <https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/ausblick/blattfederpendel-stehend> – Zugriffssdatum: 09.09.2021.

LÜCK, S. 1995 Ein Praktikumsversuch zum Thema: 'Chaos in einfachen physikalischen Systemen'. Internes Dokument, Experimentalphysik II, Universität Bayreuth.

NEURURER, ANTON 2017a Lorenz attraktor zeichnen mit matplotlib. URL <http://jupiter-online.net/lorenz-attraktor-zeichnen-mit-matplotlib/> – Zugriffssdatum: 02.09.2021.

NEURURER, ANTON 2017b Rössler attraktor zeichnen mit matplotlib. URL <http://jupiter-online.net/roessler-attraktor-zeichnen-mit-matplotlib/> – Zugriffssdatum: 02.09.2021.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Fixpunkt, Grenzzyklus, Tours- bzw. Ringattraktor (Lück, 1995) . . . . .	7
2.2	Seltsame Attraktoren: Rössler- und Lorentzattraktor, Eigens erstellt mit dem Python Packages matplotlib mit Hilfe von (Neururer, 2017b,a) . . . . .	8
2.3	Skizze invertiertes Pendel (Lück, 1995) . . . . .	10
2.4	Potenzialdarstellung für invertiertes Pendel (Lück, 1995) . . . . .	11
2.5	Resonanzkurven für eines Duffing-Oszillatior (Lück, 1995) . . . . .	13
2.6	Aufbau des invertierten Pendels (Lück, 1995) . . . . .	14
2.7	Messschaltung des invertierten Pendels (Lück, 1995) . . . . .	15
2.8	Schaltplan des Shinriki-Oszilator (Lück, 1995) . . . . .	16
4.1	Bifurkationsdiagramm in Abhängigkeit der Masse . . . . .	21
4.2	Linerar Fit der Messreihe . . . . .	25
4.3	Ampliudenabhängigkeit der Schwingungsdauer mit logarithmischen Fit .	26
4.4	Resonanzkurve . . . . .	28
4.5	Messung bei $f_a=0,233$ Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum . .	29
4.6	Messung bei $f_a=0,411$ Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum . .	29
4.7	Messung bei $f_a=0,882$ Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum . .	30
4.8	Messung bei $f_a=1,201$ Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum . .	30
4.9	Messung bei $f_a=2,100$ Hz, (a) Phasenportrait (b) Leistungsspektrum . .	30
4.10	Schwingung nach $\Delta T = 56.28$ sec . . . . .	31
4.11	Schwingung mit Start und Endpunkt nach $\Delta T = 10.28$ sec . . . . .	31
4.12	Phasendiagramm . . . . .	32
4.13	Vergleich verschiedener 'Fitting'-Funktionen . . . . .	33
4.14	$R_1 = 37$ k $\Omega$ . . . . .	34
4.15	$R_1 = 40$ k $\Omega$ . . . . .	34
4.16	$R_1 = 60$ k $\Omega$ . . . . .	35
4.17	$R_1 = 66$ k $\Omega$ . . . . .	35
4.18	$R_1 = 70$ k $\Omega$ . . . . .	36
4.19	$R_1 = 73$ k $\Omega$ . . . . .	36
4.20	$R_1 = 74$ k $\Omega$ . . . . .	37
4.21	$R_1 = 100$ k $\Omega$ . . . . .	37
4.22	Bifurkationsdiagramm bei $R_2 = 8,4$ k $\Omega$ und variablen $R_1$ . . . . .	38
4.23	Berechnetes Bifurkationsdiagramm (Abbildung 7 aus der Anleitung) . . .	39
4.24	$R_1 = 51$ k $\Omega$ und $R_2 = 8,4$ k $\Omega$ . . . . .	41
4.25	$R_1 = 70$ k $\Omega$ . . . . .	42
4.26	Attraktorrekonstruktion für $n = 44$ . . . . .	42