

## Ergänzungen zum Kapitel

# Fourier-Transformation und Signalanalyse

## Methoden der Messtechnik - Signal und Bildverarbeitung

Für die Überlassung des Skripts für die 14. Auflage 'Physikalisches Praktikum' danken wir Prof. Dr.-Ing. habil. P. Lehmann, Universität Kassel, FB 16 - Elektrotechnik/Informatik, Fachgebiet Messtechnik

Fachbereich 4  
Produktionstechnik

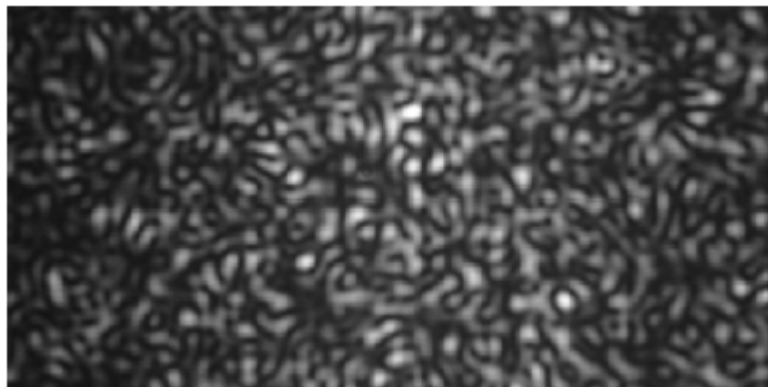


Fachgebiet 08:  
Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik

# Skript

zur Vorlesung

## Methoden der Messtechnik - Signal und Bildverarbeitung (SiBi)



**Herausgegeben von:**  
Dr.-Ing. Peter Lehmann

Wintersemester 2005/2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Fourier-Reihen und Fourier-Transformation</b>	<b>1</b>
1.1	Fourier-Reihen . . . . .	1
1.2	Fourier-Integrale und Fourier-Tranformation . . . . .	7
1.3	Diracsche-Deltafunktion . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Faltung und Korrelation</b>	<b>10</b>
2.1	Faltungstheorem . . . . .	10
2.2	Korrelationstheorem . . . . .	11
2.3	Autokorrelationsfunktionen stochastischer und periodischer Signale . . . . .	12
2.4	Faltung und Korrelation mit Deltafunktionen . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Eigenschaften der Fouriertransformation, spezielle Fouriertransformierte</b>	<b>14</b>
3.1	Eigenschaften der Fouriertransformation . . . . .	14
3.2	Spezielle Fouriertransformierte . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Abtastung und diskrete Fouriertransformation</b>	<b>20</b>
4.1	Signalabtastung und Abtasttheorem . . . . .	20
4.2	Diskrete Fouriertransformation . . . . .	24
4.2.1	Diskrete Leistungsdichtespektren . . . . .	26
4.2.2	Fensterfunktionen . . . . .	29
4.2.3	Zero-Padding und spektrale Interpolation . . . . .	29
4.3	Diskrete Faltung und Korrelation . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Anwendungen der diskreten Fouriertransformation</b>	<b>37</b>
5.1	Digitale Filter . . . . .	37
5.2	Verrauschte Signale . . . . .	41
5.2.1	Verrauschte deterministische Signale . . . . .	42
5.2.2	Stochastische Signale . . . . .	46
5.3	Hilbert-Transformation und Zeit-Frequenz-Analyse . . . . .	50
5.3.1	Hilbert-Transformation zur Erzeugung des analytischen Signals . . . . .	50
5.3.2	Zeit-Frequenz-Analyse . . . . .	53
5.4	Korrelationsanalyse . . . . .	59
5.4.1	Korrelationsfunktionen diskreter Signale . . . . .	59
5.4.2	Anwendungen der Korrelationsanalyse . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Digitale Bildverarbeitung</b>	<b>66</b>
6.1	Grundbegriffe der Bildverarbeitung . . . . .	66
6.2	Punktoperationen . . . . .	70
6.3	Lokale Operationen . . . . .	71
6.3.1	Maskenkorrelation . . . . .	71
6.3.2	Grauwertglättung . . . . .	72
6.3.3	Kantenfilterung . . . . .	72
6.4	Globale Operationen . . . . .	74

6.4.1	2D-Fouriertransformation . . . . .	74
6.4.2	Radon-Transformation . . . . .	79

# 1 Fourier-Reihen und Fourier-Transformation

## 1.1 Fourier-Reihen

Fourier-Reihenentwicklung periodischer Funktionen  $f(\Theta)$  mit der Periodendauer  $T$ .  
Voraussetzungen (Dirichlet Bedingungen):

- Funktion hat eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen in einer Periode
- Funktion hat endliche Anzahl finiter Maxima und Minima pro Periode
- Das Integral  $\int_{-\pi}^{+\pi} |f(\Theta)| d\Theta$  ist endlich.

→ Fourier-Reihe:  $f(\Theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Theta) + b_n \sin(n\Theta)]$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\Theta) \cos(n\Theta) d\Theta; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\Theta) \sin(n\Theta) d\Theta; \quad n = 1, 2, \dots$$

Im allgemeinen geht es um zeitabhängige Funktionen der Periodendauer  $T$ . Dann gilt  $\Theta = 2\pi \frac{t}{T} = \omega t$  ( $t = \frac{T\Theta}{2\pi}$ ), ( $d\Theta = \frac{2\pi dt}{T}$ )

$$\rightarrow \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (1)$$

In der systemtheoretischen Beschreibung wird häufig eine andere Schreibweise bevorzugt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \Psi_n) \quad (2)$$

mit  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ;  $\Psi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$   
Gleichung (2) bedeutet, daß  $f(t)$  zerlegt wird in

- den Mittelwert über eine Periode  $\left(\frac{a_0}{2}\right)$
- sowie harmonische Cosinuskomponenten als ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\omega$  mit den Amplituden  $c_n$  und den Phasen  $\Psi_n$

Das Diagramm  $c_n$  über  $n\omega$  ist das Amplitudenspektrum von  $f(t)$ . Bei  $\omega = 0$  erhält man den „Offset“ von  $f(t)$ . Das Diagramm  $\Psi_n$  über  $n\omega$  ist das Phasenspektrum von  $f(t)$ .  $C_n$  und  $\Psi_n$  sind diskrete und nicht kontinuierliche Funktionen, man spricht auch von Linienpektren.

Wenn  $T$  ansteigt, wird  $\omega$  kleiner  $\rightarrow$  Linien werden dichter!

Wenn  $T \rightarrow \infty$  wird aus dem diskreten Spektrum ein kontinuierliches und die Fourier-Reihe geht in ein Fourier-Integral über.

Symmetrieeigenschaften:

1. Für gerade (periodische) Funktionen gilt:  $f(t) = f(-t)$

2. Für ungerade (periodische) Funktionen gilt:  $f(t) = -f(-t)$

Die Fourier-Reihenentwicklungen von geraden bzw. ungeraden periodischen Funktionen enthalten nur Kosinus- bzw. nur Sinus-Terme.

3. Eine periodische Funktion mit der Periode  $T$  enthält nur geradzahlige Vielfache von  $\omega$  (auch Harmonische genannt), wenn gilt:  $f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = f(t)$ .

4. Eine periodische Funktion mit der Periode  $T$  enthält nur ungeradzahlige Vielfache von  $\omega$  (auch Harmonische genannt), wenn gilt:  $f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -f(t)$ .

5. Jede Funktion kann in gerade und ungerade Anteile zerlegt werden:

$$f(t) = \underbrace{\frac{f(t) + f(-t)}{2}}_{\text{gerader Anteil}} + \underbrace{\frac{f(t) - f(-t)}{2}}_{\text{ungerader Anteil}}$$

Ausnutzen der Symmetrieeigenschaften beschränkt die Anzahl der zu berechnenden Koeffizienten und den Integrationsbereich (z.B. auf eine halbe Periode) bei der Fourier-Reihenentwicklung:

zu 1:  $f(t) = f(-t) \rightarrow b_n = 0; \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left[\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t\right] dt$

zu 2:  $f(t) = -f(-t) \rightarrow a_n = 0; \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left[\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t\right] dt$

zu 3:  $f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = f(t) \rightarrow$  geradzahlige  $n$ :

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(\dots) dt; \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(\dots) dt$$

ungeradzahlige  $n$ :  $a_n = b_n = 0$

zu 4:  $f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -f(t) \rightarrow$  geradzahlige  $n$ :  $a_n = b_n = 0$

ungeradzahlige  $n$ :  $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(\dots) dt; \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(\dots) dt$

Beispiele:

1. Periodische Rechteckfunktion:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{4} \\ f_0 & \text{für } -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$f(t)$  ist gerade Funktion  $\rightarrow b_n = 0$  für alle  $n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \left( \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \right) \\ &= \frac{4f_0}{n\omega T} [\sin(n\omega t)]_{t=0}^{\frac{T}{4}} = 2f_0 \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}, \quad n \in \{1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot f_0 = f_0 \\ \rightarrow f(t) &= \frac{f_0}{2} + \frac{2f_0}{\pi} \left( \cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right) \end{aligned}$$

$\rightarrow$  Amplitudenspektrum:

$$\begin{array}{llll} 0 & \rightarrow & |c_0| & = & \frac{f_0}{2} \\ \omega & \rightarrow & |c_1| & = & \frac{2f_0}{\pi} \\ 2\omega & \rightarrow & |c_2| & = & 0 \\ 3\omega & \rightarrow & |c_3| & = & \frac{2f_0}{3\pi} \\ 5\omega & \rightarrow & |c_5| & = & \frac{2f_0}{5\pi} \\ & & & & \text{u.s.w.} \end{array}$$

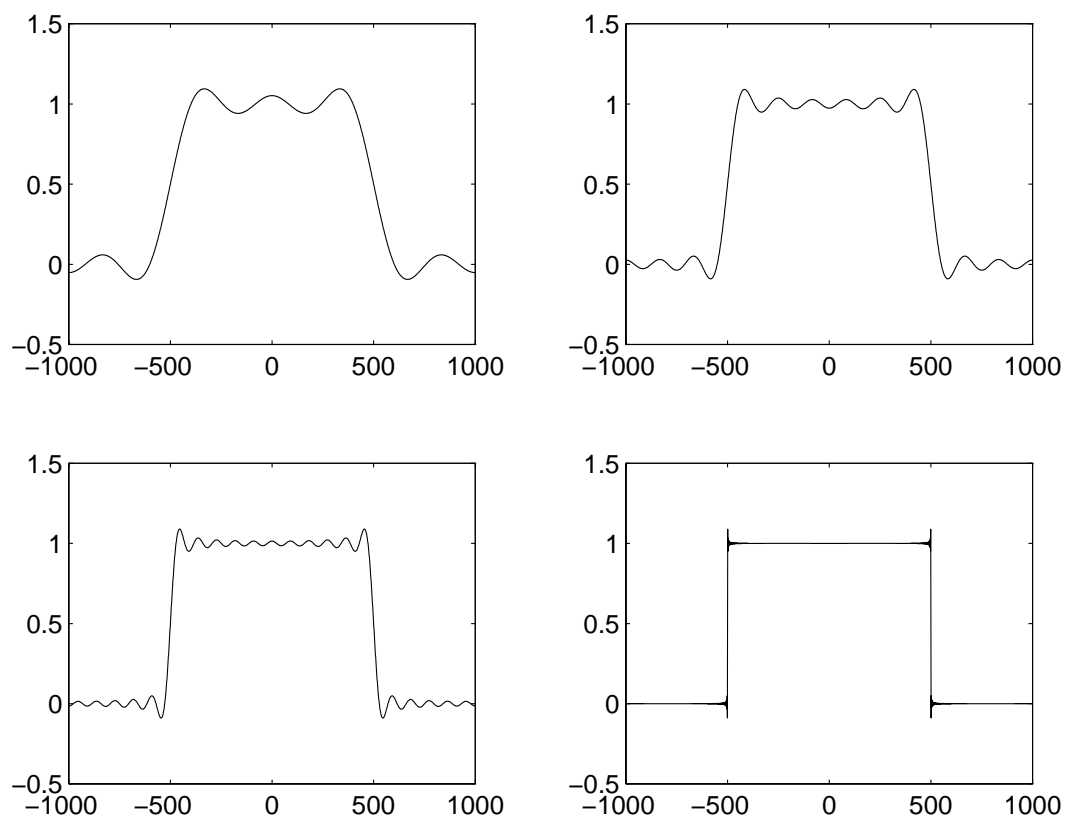
Das Phasenspektrum nimmt abwechselnd die Werte 0 und  $\pi$  an, beginnend mit 0 für  $n\omega = 0$  und  $n\omega = 1\omega$ .

2. Periodische Dreieckfunktion mit

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f\left(\frac{T}{4}\right) &= f_0 \\ f\left(\frac{T}{2}\right) &= 0 \\ f\left(\frac{3T}{4}\right) &= -f_0 \end{aligned}$$

Symmetrieeigenschaften:

$$f(t) = -f(-t) \tag{3}$$



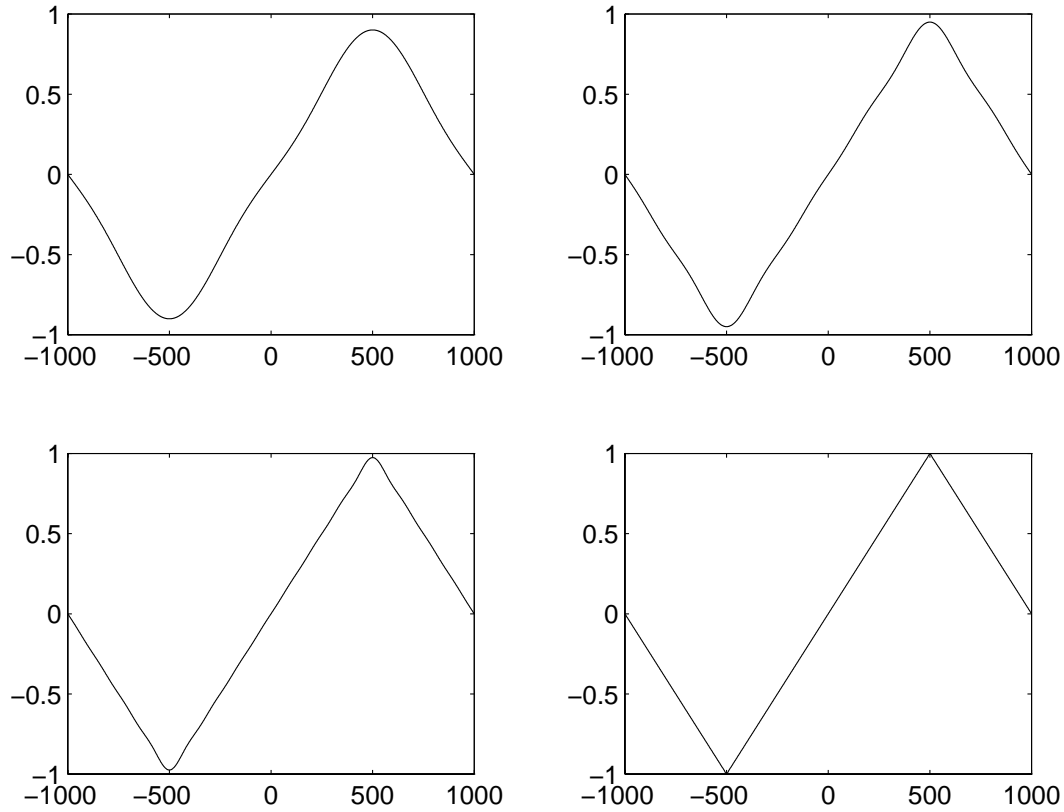
**Abb. 1:** Darstellung der Fourier-Reihenentwicklung einer periodischen Rechteckfunktion mit der Periode 2000 und  $f_0 = 1$  bis zur Ordnung  $n = 5$  (oben links),  $n = 11$  (oben rechts),  $n = 21$  (unten links) und  $n = 1001$  (unten rechts).



$$f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad (4)$$

Aus (3):  $a_n = 0 \quad (n \in \{0, 1, \dots\})$

Aus (4):  $b_n = 0 \quad \text{für } n \in \{2, 4, 6, \dots\}$



**Abb. 2:** Darstellung der Fourier-Reihenentwicklung einer periodischen Dreiecksfunktion mit der Periode 2000 und  $f_0 = 1$  bis zur Ordnung  $n = 3$  (oben links),  $n = 7$  (oben rechts),  $n = 15$  (unten links) und  $n = 101$  (unten rechts).

Bei zwei Symmetriebedingungen reicht es, über  $\frac{T}{4}$  zu integrieren, also  $0 \leq t \leq \frac{T}{4} \rightarrow f(t) = \left(\frac{4f_0}{T}\right)t$

$$\begin{aligned} \rightarrow b_n &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4f_0}{T}\right)t \sin\left(\left[\frac{2\pi n}{T}\right]t\right) dt \\ &= \frac{8f_0}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{partielle Integration}) \\ \rightarrow f(t) &= \frac{8f_0}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega t) - \frac{1}{7^2} \sin(7\omega t) + \dots \right) \end{aligned}$$

Das Phasenspektrum alterniert wieder zwischen 0 und  $\pi$ .

Amplitudenspektrum:

$$\begin{array}{rcl}
\omega & \rightarrow & |c_1| = \frac{8f_0}{\pi^2} \\
3\omega & \rightarrow & |c_3| = \frac{8f_0}{(3\pi)^2} \\
5\omega & \rightarrow & |c_5| = \frac{8f_0}{(5\pi)^2} \\
& & \text{u.s.w.}
\end{array}$$

Eigenschaften der Charakterisierung von Signalen im Frequenzbereich:

1. Ein Offset  $g(t) = f(t) + \text{const.}$  wirkt sich nur auf den Koeffizienten  $a_0$  aus.
2. Zeitverschiebung:  $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$  bleibt konstant;  $\Psi_n$  ändert sich!
3. Allgemein gilt:  
Unstetigkeiten von  $f(t)$  bewirken, daß das Amplitudenspektrum mit  $\frac{1}{n}$  fällt (siehe Beispiel 1). Unstetigkeiten von  $f'(t)$  bewirken, daß das Amplitudenspektrum mit  $\frac{1}{n^2}$  fällt (siehe Beispiel 2).
4.  $f(t)$  muß nicht periodisch sein, wenn  $f(t)$  nur auf dem endlichen Intervall  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$  approximiert werden soll. Dann kann  $f(t)$  mit der Periode  $T$  periodisch fortgesetzt werden.

Exponentielle Form der Fourier-Reihe:

- ist leichter umzuformen
- erlaubt Übergang zu Fourier-Integral und Fourier-Transformation

Aus (1) folgt mit der Euler-Gleichung  $\sin(n\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t})$ ,  
 $\cos(n\omega t) = \frac{1}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t})$ :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega t} + \left( \frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega t} \right] \\
&= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{jn\omega t} + \alpha_{-n} e^{-jn\omega t}); \quad \alpha_0 = a_0/2 \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} e^{-jn\omega t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha_n e^{jn\omega t} \\
\rightarrow f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\omega t} \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt \tag{6}$$

Um zu zeigen, daß die  $\alpha_n$  gemäß Gl. (6) die in Gl. (5) einzusetzenden Koeffizienten sind, nutzen wir einmal mehr die Euler-Gleichung aus:

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt \tag{7}$$

$$= \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt - j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt \right] \quad (8)$$

Für  $n < 0$  gilt:

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(|n|\omega t) dt}_{=\frac{T}{2}a_n} + \frac{j}{T} \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(|n|\omega t) dt}_{=\frac{T}{2}b_n} \quad (9)$$

$$= \frac{a_n + j b_n}{2}, \quad (10)$$

Für  $n > 0$  gilt:

$$\alpha_n = \frac{a_n - j b_n}{2}.$$

In Gl. (5) nimmt  $n$  auch negative Werte an, die auf sogenannte negative Frequenzen führen, welche keine physikalische Relevanz haben. Sie sind eine Folge des mathematischen Formalismus, der Sinus- und Kosinusfunktionen in Paare von Exponentialfunktionen überführt.

- Bei Schwierigkeiten sollte man sich erinnern, daß die Koeffizienten der Fourier-Reihe reell sein müssen, wenn  $f(t)$  eine reelle Funktion von  $t$  ist.
- Der Grund für die Exponentialdarstellung liegt darin, daß sie direkt auf das Fourier-Integral und die Fourier-Transformation führt, die wichtig sind, um die Frequenzbereichskonzepte auf nichtperiodische Funktionen und ggf. im Hinblick auf die Laplace-Transformation zu erweitern.

## 1.2 Fourier-Integrale und Fourier-Tranformation

Die Amplitudenspektren von periodischen Funktionen sind diskret (Linienspektren).

Die relevante Frequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  wird mit wachsendem  $T$  kleiner und die Spektrallinien in den Amplituden- und Phasenspektren werden dichter.

Im Grenzfall  $T \rightarrow \infty$  wird aus dem diskreten Spektrum eine glatte Kurve, das kontinuierliche Amplitudenspektrum.

Für  $T \rightarrow \infty$  muß  $f(t)$  nicht mehr periodisch sein. Nichtperiodische Funktionen treten häufig als Systemantworten auf, so daß die Fourier-Reihenentwicklung diesbezüglich modifiziert werden soll:

Folgende Änderungen in der Notation sind dafür nötig, denn  $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$  und  $n$  werden bedeutungslos, wenn  $T \rightarrow \infty$ .

In einem kontinuierlichen Spektrum kann  $\omega$  jeden Wert annehmen. Eine Redefinition der relevanten Größen gibt die folgende Tabelle an:

Fourier-Reihe	Definition	Fourier-Integral
$n\omega$	harmonische Komponente	$\omega$
$\omega$	Fundamentalfrequenz	$\Delta\omega$
$T$	Periode von $f(t)$	$\frac{2\pi}{\Delta\omega}$

$$\rightarrow f(t) = \sum_{\substack{\omega \\ \Delta\omega = -\infty}}^{+\infty} \alpha_{\omega} e^{j\omega t} \quad (11)$$

mit  $\omega = 0, \pm\Delta\omega, \pm2\Delta\omega \dots$

$$\alpha_{\omega} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (12)$$

Einsetzen von (12) in (11) liefert:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{\substack{\omega \\ \Delta\omega = -\infty}}^{+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \Delta\omega$$

Für  $T \rightarrow \infty$  folgt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right\} e^{j\omega t} d\omega \quad (13)$$

Gl. (13) ist die Darstellung von  $f(t)$  als Fourierintegral.

→ Definition der Fourier-Transformation:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (14)$$

und der inversen Fourier-Transformation:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (15)$$

Gln. (14) und (15) heißen Fourier-Transformations-Paar.

$F(\omega)$  ist die Fourier-Transformierte von  $f(t)$ :

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\},$$

$f(t)$  ist die inverse Fourier-Transformierte von  $F(\omega)$ :

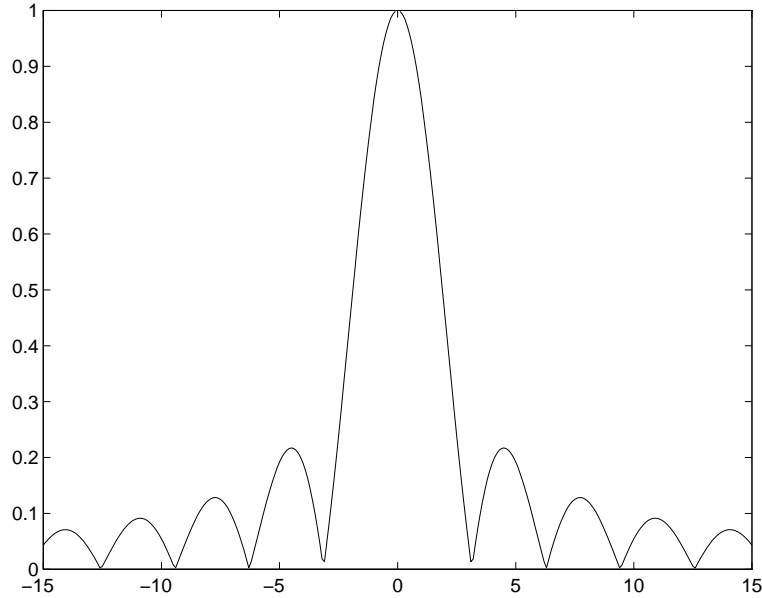
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}.$$

Das Betragsquadrat  $F(\omega)F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$  des Amplitudenspektrums  $|F(\omega)|$  wird als Leistungsdichtespektrum bezeichnet.

Beispiel: Amplitudenspektrum eines einzelnen Rechteck-Pulses der Dauer  $T$ :

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & 0 < t < T \\ 0, & 0 \geq t \geq T \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow F(\omega) &= \int_0^T f_0 e^{-j\omega t} dt = \frac{f_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}) \\ &= \frac{2f_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j(\omega \frac{T}{2})} \\ |F(\omega)| &= 2f_0 \left| \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega} \right| = f_0 T \left| \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}} \right| \end{aligned}$$



**Abb. 3:** Betrag  $|F(\omega)|$  der Fourier-Transformierten eines Rechteck-Pulses mit  $f_0T = 1$ .  
(Die Abszisse ist in Vielfachen von  $\omega T/2$  skaliert.)

Der Verlauf von  $|F(\omega)|$  ist in Abb. 3 dargestellt.

Beispiel: Amplitudenspektrum einer Gaußfunktion der Breite  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} \\
 \rightarrow F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/(2\sigma^2)} \cos(\omega t) dt \\
 &= e^{-\omega^2 \sigma^2 / 2} \\
 &= |F(\omega)|
 \end{aligned}$$

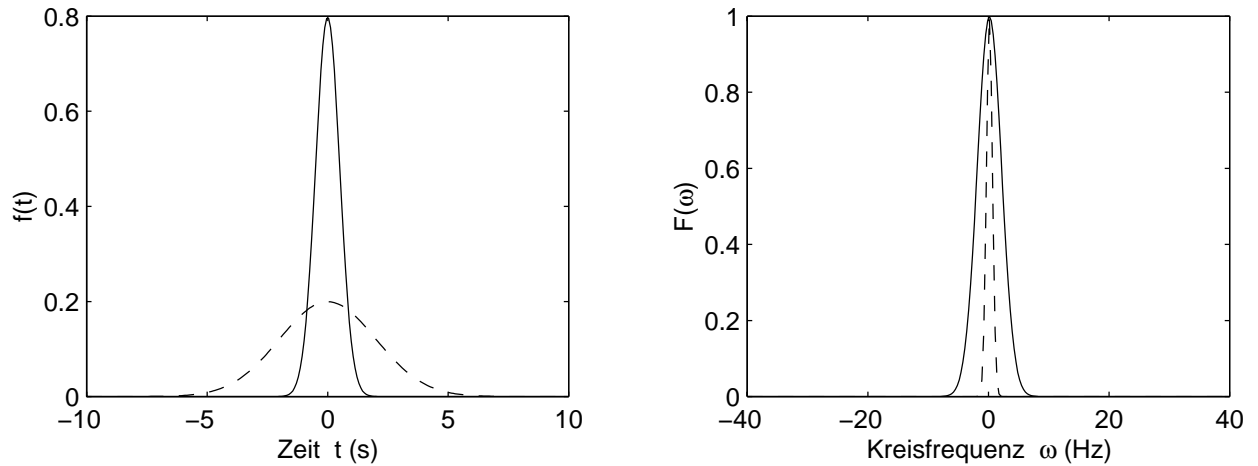
Abb. 4 zeigt zwei Gaußfunktionen unterschiedlicher Breite mit den zugehörigen Amplitudenspektren.

### 1.3 Diracsche-Deltafunktion

Für die digitale Signal- und Bildverarbeitung sowie für die Beschreibung linearer Systeme ist die Diracsche Deltafunktion  $\delta(t)$  (auch Delta-Puls genannt) von elementarer Bedeutung.  
Definition der Deltafunktion:

Für einen Rechteck-Puls mit  $f_0 = \frac{1}{T}$  folgt der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow 0} f(t) = \delta(t)$$



**Abb. 4:** linkes Bild: Darstellung von Gaußfunktionen der Breite  $\sigma = 0,5 \text{ s}$  (durchgezogene Linie) und  $\sigma = 2 \text{ s}$  (gestrichelte Linie) im Zeitbereich; rechtes Bild: zugehörige Amplitudenspektren im Frequenzbereich.

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} |F(\omega)| &= 1 \\ \lim_{T \rightarrow 0} F(\omega) &= 1 \end{aligned}$$

Alternative Definition:

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Das Spektrum ergibt sich zu:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} e^{-\omega^2 \sigma^2 / 2} = 1.$$

Es gilt also:

- Das Amplitudenspektrum einer Diracschen Delta-Funktion ist konstant 1.
- Bei Anregung eines linearen Systems durch einen Delta-Puls werden alle Frequenzen gleichermaßen angeregt.

## 2 Faltung und Korrelation

### 2.1 Faltungstheorem

Das Faltungsintegral, das die Faltung zweier Funktionen, z.B.  $x(t)$  und  $h(t)$  beschreibt, ist wie folgt definiert:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x * h. \quad (16)$$

Die Funktion  $y(t)$  wird als Faltungsprodukt der Funktionen  $x(t)$  und  $h(t)$  bezeichnet.

Die Beziehung zwischen dem Faltungsintegral (16) und dessen Fourier-Transformierter ist ein wichtiges Instrument der Systemtheorie. Dieser Zusammenhang, als Faltungstheorem bekannt, ermöglicht es, eine Faltung nicht nur im Zeitbereich sondern auch als einfache Multiplikation im Frequenzbereich auszuführen. Wenn  $H(f)$  die Fourier-Transformierte von  $h(t)$  und  $X(f)$  die Fourier-Transformierte von  $x(t)$  ist, dann ist  $H(f)X(f)$  die Fourier-Transformierte von  $h(t) * x(t)$ . Das Faltungstheorem läßt sich somit durch das Transformationspaar

$$\mathcal{F}(h(t) * x(t)) = \mathcal{F}(h(t)) \cdot \mathcal{F}(x(t)) = H(f)X(f) \quad (17)$$

mit  $f = \omega/(2\pi)$  zum Ausdruck bringen. Um dieses Theorem zu beweisen, setzen wir für  $h(t - \tau)$  in Gl.(16) die Beziehung gemäß Gl.(15) ein, wobei  $\omega = 2\pi f$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} df \right] d\tau . \quad (18)$$

Mit der Annahme, daß die Reihenfolge der Integrale vertauscht werden kann, ist diese Beziehung äquivalent zu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] H(f) e^{j2\pi ft} df . \quad (19)$$

Gemäß Gl.(14) läßt sich der Term in eckigen Klammern durch  $X(f)$  ersetzen. Mit Hilfe von Gl.(15) folgt dann:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)H(f) e^{j2\pi ft} df , \quad (20)$$

und somit

$$Y(f) = H(f)X(f) . \quad (21)$$

Der Beweis für die Umkehrung des Theorems (Faltung im Frequenzbereich entspricht Multiplikation im Zeitbereich) erfolgt in ähnlicher Weise.

## 2.2 Korrelationstheorem

Das Korrelationsprodukt zweier Funktionen, z.B.  $x(t)$  und  $h(t)$ , (auch einfach Korrelation genannt) ist eng mit dem Faltungsprodukt verknüpft. Das Korrelationsprodukt ist wie folgt definiert:

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t + \tau)d\tau = x(-t) * h(t) . \quad (22)$$

Das Ergebnis, die Funktion  $\rho(t)$ , wird als Korrelationsfunktion bezeichnet. Um das zweite Gleichheitszeichen zu beweisen, ersetzen wir  $\tau$  durch  $-\theta$ :

$$\rho(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} x(-\theta)h(t - \theta)(-d\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\theta)h(t - \theta)d\theta . \quad (23)$$

Da für die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}(f(-t)) = F^*(\omega)$$

gilt, läßt sich aus dem Faltungstheorem unmittelbar das Korrelationstheorem ableiten:

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t+\tau)d\tau = \mathcal{F}^{-1}(X^*(\omega)H(\omega)) \quad . \quad (24)$$

Unter der Voraussetzung  $x(t) = h(t) = f(t)$  stimmt die Korrelationsfunktion  $\rho(t)$  mit der Autokorrelationsfunktion überein. In diesem Fall folgt aus dem Korrelationstheorem die wichtige Beziehung:

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau = \mathcal{F}^{-1}(|F(\omega)|^2) \quad , \quad (25)$$

die unter dem Begriff **Wiener-Khintchine-Theorem** bekannt ist. In Worten ausgedrückt besagt das Wiener-Khintchine-Theorem, daß die Autokorrelationsfunktion einer Funktion mit der inversen Fouriertransformierten des Leistungsdichtespektrums übereinstimmt bzw. daß die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion gleich dem Leistungsdichtespektrum ist.

Ein weiteres wichtiges Theorem, das **Parsevalsche Theorem**, ergibt sich aus dem Wiener-Khintchine-Theorem als Spezialfall für  $t = 0$ :

$$\rho(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (26)$$

Dieses Theorem läßt sich als Energieerhaltungsprinzip interpretieren: Durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\tau)d\tau$$

wird die Gesamtenergie des Signals  $f(t)$  repräsentiert. Wenn man sich unter  $f(t)$  beispielsweise die elektrische Spannung als Funktion der Zeit vorstellt, die an einem  $1 \Omega$  Widerstand anliegt, dann ist  $|f(t)|^2$  die elektrische Leistung, die der Widerstand aufnimmt. Die Integration der Leistung über alle Zeiten ergibt die Gesamtenergie des Signals, die gemäß dem Parsevalschen Theorem bei der Transformation in den Frequenzbereich unverändert bleibt.

## 2.3 Autokorrelationsfunktionen stochastischer und periodischer Signale

Die Definition der Autokorrelationsfunktion gemäß Gl.(25) führt zu Konvergenzproblemen, wenn die zu korrelierenden Funktionen nicht zeitbegrenzt sind, wie dies i. allg. bei stochastischen und bei periodischen Funktionen der Fall ist.



Allgemein handelt es sich bei diesen Signalen um sogenannte Leistungssignale. Ein Leistungssignal  $x(t)$  ist dadurch gekennzeichnet, daß seine Energie  $\varepsilon_x$  mit

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

alle Grenzen übersteigt, so daß die für Energiesignale ( $\varepsilon_x < \infty$ ) gültige Definition der Autokorrelationsfunktion gemäß Gl.(25) nicht anwendbar ist. In diesen Fällen wird die Definition der Autokorrelationsfunktion wie folgt modifiziert:

$$\rho_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau)x(t + \tau) d\tau. \quad (27)$$

Der Wert der Autokorrelationsfunktion an der Stelle  $t = 0$  entspricht dann genau der Varianz  $\sigma_x^2$  des (mittelwertfreien) Signals  $x(t)$ :

$$\sigma_x^2 = \rho_{xx}(t = 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(\tau)|^2 d\tau. \quad (28)$$

Gebräuchlich ist es darüber hinaus, die Autokorrelationsfunktion mit der Varianz zu normieren. Die auf diese Weise erhaltene normierte AKF,

$$\rho_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T \sigma_x^2} \int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau)x(t + \tau) d\tau, \quad (29)$$

nimmt an der Stelle  $t = 0$  den Maximalwert 1 an.

Im Fall einer periodischen Funktion  $x(t)$  mit der Periode  $T$  wird ebenfalls Gl.(29) verwendet, allerdings wird die Integrationslänge mit der Periodenlänge gleichgesetzt und auf die Grenzwertbildung verzichtet. Dieses Vorgehen wird unmittelbar einsichtig, wenn man das Beispiel  $x(t) = \cos \omega_0 t$  betrachtet, für das sich der Wert  $\rho_{xx}(t = 0) = 1/2$  ergibt.

## 2.4 Faltung und Korrelation mit Deltafunktionen

Aus der Definition der Deltafunktion (Abschnitt 1.3) läßt sich die sog. Ausblendeigenschaft ableiten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) h(t) dt = h(0), \quad (30)$$

oder allgemeiner:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) h(t) dt = h(t_0). \quad (31)$$

Eine auf der Zeitachse an der Stelle  $t = t_0$  lokalisierte Deltafunktion ist durch  $\delta(t - t_0)$  gegeben. Die Ausblendeigenschaft besagt also, daß durch die Multiplikation mit der Deltafunktion in Verbindung mit der zugehörigen Integration nur der Funktionswert von  $h(t)$  an der Stelle  $t = t_0$  übrigbleibt, während alle anderen Werte von  $h(t)$  „ausgeblendet“ werden. Die Situation, daß eine beliebige Funktion  $h(t)$  im Zeitbereich mit einer Deltafunktion  $\delta(t)$ , die an der Stelle  $t_0$  lokalisiert ist, gefaltet wird, kommt in der Signalverarbeitung häufig vor und wird deshalb hier behandelt. Auch die Faltung mit einer Deltafunktion  $\delta(f)$  im Frequenzbereich spielt in der Signalverarbeitung eine wichtige Rolle.

Das zu Gl.(16) korrespondierende Faltungsintegral hat die Form:

$$\delta(t - t_0) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0) h(t - \tau) d\tau = h(t - t_0). \quad (32)$$

Eine Faltung einer Funktion  $h(t)$  mit der Deltafunktion  $\delta(t - t_0)$  bewirkt also, daß die ursprünglich um  $t = 0$  zentrierte Funktion anschließend auf der Zeitachse um den Wert  $t = t_0$  zentriert ist.

Die Faltung einer Deltafunktion an der Stelle  $f = f_0$  im Frequenzbereich mit einer spektralen Funktion  $H(f)$  führt dementsprechend zu folgendem Resultat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f' - f_0) H(f - f') df' = H(f - f_0). \quad (33)$$

## 3 Eigenschaften der Fouriertransformation und spezielle Fouriertransformierte

### 3.1 Eigenschaften der Fouriertransformation

#### 1. Linearität:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) + y(t)\} &= \mathcal{F}\{x(t)\} + \mathcal{F}\{y(t)\}, \\ \mathcal{F}\{\text{const.} \times x(t)\} &= \text{const.} \times \mathcal{F}\{x(t)\}. \end{aligned}$$

#### 2. Zeitverschiebung

Für eine um  $t = t_0$  zeitverschobene Funktion  $h(t)$  gilt:

$$\mathcal{F}\{h(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} H(f),$$

d.h. eine Zeitverschiebung um den Wert  $t_0$  bewirkt im Frequenzbereich einen zusätzlichen Phasenterm  $e^{-j2\pi f t_0}$ , also eine Phasenverschiebung.

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{h(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f (t_0 + \tau)} d\tau \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= e^{-j2\pi f t_0} H(f).\end{aligned}$$

Das Betragsspektrum bleibt bei der Zeitverschiebung jedoch unverändert, denn:

$$|e^{-j2\pi f t_0} H(f)| = |H(f)|.$$

### 3. Frequenzverschiebung

Für eine um  $f = f_0$  frequenzverschobene Funktion  $H(f)$  gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f - f_0)\} = e^{j2\pi f_0 t} h(t),$$

d.h. eine Frequenzverschiebung um den Wert  $f_0$  bewirkt im Zeitbereich einen zusätzlichen Phasenterm  $e^{j2\pi f_0 t}$ , der sich als Modulation des Zeitsignals verstehen läßt. Der Beweis dieses Theorems ist analog zum Beweis des Zeitverschiebungstheorems.

### 4. Zeitskalierung

Eine Zeitskalierung bedeutet mathematisch die Multiplikation der Variablen  $t$  im Argument einer Funktion  $h(t)$  mit einer positiven reellen Konstanten  $K_0$ . Es gilt:

$$\mathcal{F}\{h(K_0 t)\} = \frac{1}{K_0} H(f/K_0).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{h(K_0 t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(K_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \tau (f/K_0)} \frac{d\tau}{K_0} \\ &= \frac{1}{K_0} H(f/K_0).\end{aligned}$$

Besondere Vorsicht ist bei der Skalierung von Deltafunktionen geboten, da die Deltafunktion im streng mathematischen Sinne keine Funktion, sondern eine Distribution darstellt. Die Deltafunktion macht nur Sinn, wenn sie in Verbindung mit einem Integral

verwendet wird, bei dem eine beliebige Funktion im Integranden mit der Deltafunktion multipliziert wird (siehe Gln. (31), (32)). Bei einer Skalierung gilt folglich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(K_0 t) h(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) h(\tau/K_0) d\tau/K_0 = \frac{1}{K_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) h(t/K_0) dt.$$

Daraus läßt sich für die Deltafunktion das Skalierungstheorem

$$\delta(K_0 t) = \frac{1}{K_0} \delta(t)$$

ableiten. Analog gilt natürlich im Frequenzbereich:

$$\delta(K_0 f) = \frac{1}{K_0} \delta(f)$$

## 5. Frequenzskalierung

Für eine Frequenzskalierung gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(K_0 f)\} = \frac{1}{K_0} h(t/K_0).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{H(K_0 f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(K_0 f) e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(f') e^{j2\pi f'(t/K_0)} \frac{df'}{K_0} \\ &= \frac{1}{K_0} h(t/K_0). \end{aligned}$$

## 6. reelle Funktion im Zeitbereich

Ist die Funktion im Zeitbereich reell, so folgt anhand der Euler-Formel, daß der Realteil der Fouriertransformierten gerade, der Imaginärteil ungerade ist.

## 7. imaginäre Funktion im Zeitbereich

Ist die Funktion im Zeitbereich rein imaginär, so resultiert ein ungerader Realteil der Fouriertransformierten und ein gerader Imaginärteil.

## 8. gerade Funktion im Zeitbereich

Ist die Funktion im Zeitbereich gerade, so ist die Fouriertransformierte rein reell.

## 9. ungerade Funktion im Zeitbereich

Ist die Funktion im Zeitbereich ungerade, so resultiert eine rein imaginäre Fouriertransformierte.

## 3.2 Spezielle Fouriertransformierte

### 1. Deltafunktion im Frequenzbereich

Gemäß Abschnitt 1.3 erhält man eine Deltafunktion im Frequenzbereich als

$$\delta(f) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-f^2/(2\sigma^2)}, \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1.$$

Bei Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich (vgl. 2. Beispiel in Abschnitt 1.2):

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(f)\} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-f^2/(2\sigma^2)}\right\} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} e^{-4\pi^2 t^2 \sigma^2/2} = 1.$$

### 2. Sinusfunktion

Für eine Sinusfunktion gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin(2\pi f_0 t) \\ &= \frac{x_0}{2j} (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) \\ \Rightarrow X(f) &= \frac{x_0}{2j} (\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} - \mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\}). \end{aligned}$$

Die gesuchten Fouriertransformierten ergeben sich direkt aus dem Frequenzverschiebungstheorem (Abschnitt 3.1, 3.), wenn dort  $h(t) = 1$  gesetzt wird. In diesem Fall gilt nämlich (siehe oben):

$$H(f) = \delta(f)$$

und damit

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{x_0}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \\ &= j \frac{x_0}{2} \delta(f + f_0) - j \frac{x_0}{2} \delta(f - f_0). \end{aligned}$$

Bereits aus den Symmetrierelationen (Abschnitt 3.1, 6. und 9.) läßt sich folgern, daß die Fouriertransformierte  $X(f)$  rein imaginär und ungerade sein muß, da die Sinusfunktion reell und ungerade ist.

### 3. Cosinusfunktion

Für eine Cosinusfunktion gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \frac{x_0}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}). \end{aligned}$$

Als Fouriertransformierte ergibt sich in Analogie zur Fouriertransformation der Sinusfunktion:

$$X(f) = \frac{x_0}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)).$$

#### 4. Dirac-Kamm

Unter einem Dirac-Kamm versteht man eine Folge von äquidistanten Deltafunktionen (siehe Abb. 5):

$$\text{comb}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \Delta t).$$

Für die Fouriertransformierte gilt:

$$\mathcal{F}\{\text{comb}(t)\} = \text{COMB}(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/\Delta t),$$

d.h. im Frequenzbereich resultiert ebenfalls ein Dirac-Kamm, dessen Periode sich zu der des Zeitsignals reziprok verhält (siehe Abb. 5).

Beweisidee:

Zunächst definieren wir einen Dirac-Kamm von endlicher Breite:

$$h(t) = \sum_{n=-N}^{+N} \delta(t - n \Delta t).$$

Unter Ausnutzung der Beziehung  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  (Abschnitt 1.3) und des Zeitverschiebungstheorems (Abschnitt 3.1, 2.) folgt für die Fouriertransformierte von  $h(t)$ :

$$H(f) = \sum_{n=-N}^{+N} e^{j2\pi n f \Delta t} = \sum_{n=0}^{+N} e^{j2\pi n f \Delta t} + \sum_{n=0}^{+N} e^{-j2\pi n f \Delta t} - 1.$$

Die beiden Summen lassen sich unter Ausnutzung der geometrischen Reihe  $\sum_{n=0}^{+N} a^n = \frac{a^{N+1}-1}{a-1}$  umformen, und man erhält schließlich:

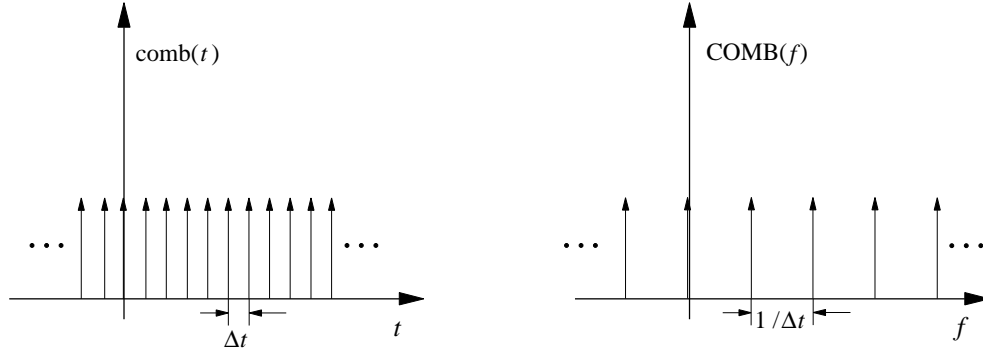
$$H(f) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})2\pi f \Delta t)}{\sin(2\pi f \Delta t/2)}.$$

Der Verlauf von  $H(f)$  ist für verschiedene  $N$ -Werte in Abb. 6 dargestellt. Für  $N = 1$  zeigt sich ein cosinusförmiger Verlauf mit einem Offset von 1. Für größere Werte von  $N$  bleibt die Anzahl und die Lage der periodisch auftretenden Hauptmaxima zwar gleich, jedoch werden diese mit zunehmendem  $N$  immer schmaler und höher.

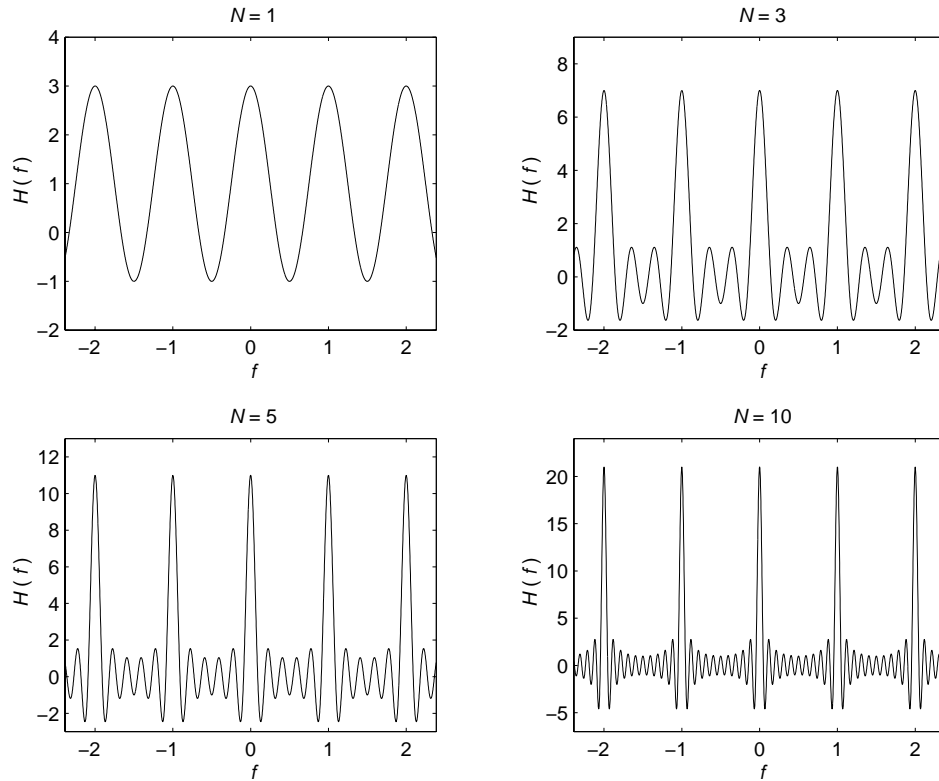
Durch Einsetzen von  $f + 1/\Delta t$  in obige Gleichung läßt sich auch mathematisch zeigen, daß die Funktion  $H(f)$  periodisch mit der Periode  $1/\Delta t$  ist. Um zu dem Resultat  $\text{COMB}(f)$  für den unendlichen Dirac-Kamm im Frequenzbereich zu kommen, muß noch gezeigt werden, daß im Limes  $N \rightarrow \infty$  das Integral über eine Periode der Funktion  $H(f)$  gleich  $1/\Delta t$  ist. Also:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{+\frac{1}{2\Delta t}} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})2\pi f \Delta t)}{\sin(2\pi f \Delta t/2)} df &\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{+\frac{1}{2\Delta t}} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})2\pi f \Delta t)}{\pi \Delta t f} df \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{+\frac{1}{2\Delta t}} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})2\pi f \Delta t)}{\pi \Delta t f} df = \frac{2}{\pi \Delta t} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha f)}{f} df}_{=\pi/2 \text{ (Bronstein)}} \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 \\ &= \frac{1}{\Delta t}, \end{aligned}$$

wobei für das erste Gleichheitszeichen die Funktion  $\sin(2\pi f \Delta t/2)$  durch ihre Taylorreihenentwicklung bis zur ersten Ordnung um den Wert  $f = 0$  approximiert wird. Dies ist gerechtfertigt, weil die Hauptmaxima in Abb. 6, die die wesentlichen Beiträge zum Integral leisten, mit zunehmendem  $N$  immer schmaler werden.



**Abb. 5:** Die Funktion  $\text{comb}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \Delta t)$  und die zugehörige Fouriertransformierte  $\text{COMB}(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/\Delta t)$ .



**Abb. 6:** Die Funktion  $H(f) = \sin((N + \frac{1}{2})2\pi f \Delta t) / \sin(2\pi f \Delta t/2)$  für unterschiedliche Werte von  $N$ .

## 4 Abtastung und diskrete Fouriertransformation

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln die wesentlichen mathematischen Grundlagen der Signalverarbeitung behandelt wurden, folgen nun einige praktische Konsequenzen, die sich daraus für die Signalabtastung und die digitale Analyse von Signalen ergeben.

### 4.1 Signalabtastung und Abtasttheorem

Als geeignetes Hilfsmittel zur mathematischen Beschreibung des Abtastvorganges erweist sich die Deltafunktion. Wenn  $h(t)$  eine stetige Funktion der Zeit  $t$  ist (im folgenden auch als „Zeitsignal“ bezeichnet), läßt sich der im Zeitpunkt  $t = n_0 \Delta t$  entnommene Abtastwert ausdrücken als:

$$h(n_0 \Delta t) = h(t) \delta(t - n_0 \Delta t). \quad (34)$$

Dabei ist das Produkt im Sinne der Distributionentheorie zu interpretieren, d.h. es macht nur im Integranden einer Integralgleichung Sinn (vgl. Ausblendeigenschaft der Deltafunktion). Werden der Funktion  $h(t)$  nun in äquidistanten Abtastzeitpunkten im Abstand  $\Delta t$  Abtastwerte entnommen, so läßt sich dies entsprechend als Produkt

$$h(n \Delta t) = h(t) \text{comb}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(t) \delta(t - n \Delta t) \quad (35)$$

beschreiben. Die Zeitdifferenz  $\Delta t$  zwischen zwei benachbarten Abtastwerten wird als **Abtastintervall** bezeichnet, der Reziprokwert  $1/\Delta t$  als Abtastfrequenz. Die Abtastung eines Signals im Zeitbereich ist in Abbildung 7 c) graphisch dargestellt. Abb. 7 a) zeigt das zugehörige kontinuierliche Zeitsignal, Abb. 7 d) den Verlauf des durch die Abtastung diskretisierten Signals.

Im folgenden interessieren wir uns für die Spektren des kontinuierlichen und des diskreten Zeitsignals. Bei dem kontinuierlichen Signal in Abb. 7 a) handelt es sich um einen sinusförmigen Verlauf mit einer (schmalen) Gaußschen Hüllkurve. Es läßt sich folglich als Produkt einer Sinusfunktion mit der Gaußfunktion auffassen. Gemäß dem Faltungstheorem ergibt sich also das Spektrum  $H(f)$  des Signals  $h(t)$  durch Faltung der Fouriertransformierten der Sinusfunktion mit der Fouriertransformierten der Gaußfunktion. Diese beiden Fouriertransformierten wurden in Abschnitt 3.2 bzw. Abschnitt 1.2 hergeleitet. Für die Sinusfunktion ergibt sich eine rein imaginäre Fouriertransformierte, die aus zwei Delta-Peaks, einem negativen bei der positiven Signalfrequenz  $f_0$  und einem positiven bei der negativen Signalfrequenz  $-f_0$  besteht. Die Fouriertransformierte der Gaußfunktion ist ebenfalls eine Gaußfunktion. Durch die Faltung mit der Deltafunktion rückt diese Gaußfunktion im Frequenzbereich an die Stellen der Delta-Peaks (vgl. Gl.(32)). Folglich besteht das Leistungsdichtespektrum  $|H(f)|^2$  in Abb. 7 aus zwei gleichen Gaußfunktionen, die bei  $+f_0$  bzw. bei  $-f_0$  zentriert sind.

Die Signalabtastung entspricht der Multiplikation des kontinuierlichen Zeitsignals mit einem Dirac-Kamm. Um das Spektrum des diskretisierten Signals zu konstruieren, kann man auch hier wieder das Faltungstheorem ausnutzen: Im Frequenzbereich wird das Spektrum  $H(f)$  des kontinuierlichen Zeitsignals mit dem des Dirac-Kamms gefaltet. Wie oben gezeigt (siehe Abb. 6), ist die Fouriertransformierte des Dirac-Kamms ein Dirac-Kamm im Frequenzbereich, dessen Periode  $1/\Delta t$  dem Kehrwert des Abtastintervalls entspricht. Wie



bei der Herleitung des Spektrums des kontinuierlichen Signals führt auch hier die Faltung mit einer Deltafunktion im Frequenzbereich dazu, daß eine spektrale Funktion entlang der Frequenzachse verschoben wird. Das Spektrum  $H(f)$  des kontinuierlichen Zeitsignals rückt also jeweils an die Stellen der Delta-Peaks des Dirac-Kamms im Frequenzbereich, d.h. es wird periodisch mit der Periode  $1/\Delta t$  fortgesetzt. Die Periode entspricht dabei der Abtastfrequenz. Die Abtastung des Signals im Zeitbereich bewirkt demnach im Frequenzbereich eine periodische Fortsetzung des Spektrums  $H(f)$  des kontinuierlichen Signals  $h(t)$ .

In Abb. 7 e) und f) ist diese periodische Fortsetzung für zwei unterschiedlich große Abtastintervalle  $\Delta t$  graphisch dargestellt. Im Fall von Abb. 7 e) wurde  $\Delta t$  so klein gewählt, daß sich die um zwei benachbarte Frequenzlinien (z.B. 0 und  $1/\Delta t$ ) zentrierten Spektren nicht überlappen. Für Abb. 7 f) wurde ein größeres Abtastintervall vorausgesetzt. Dies führt dazu, daß die periodisch fortgesetzten Spektren näher aneinander rücken und sich ggf. überlappen. Betrachtet man nur das Frequenzintervall von  $f = -1/(2\Delta t)$  bis  $f = +1/(2\Delta t)$ , so stimmt das Spektrum in diesem Intervall im ersten Fall (keine Überlappung) mit dem des kontinuierlichen Signals überein, während im zweiten Fall durch die Überlappung eine Veränderung des Spektrums in diesem Intervall hervorgerufen wird. Dieser Störeffekt wird als Aliasing bezeichnet.

Aus diesen Überlegungen läßt sich unmittelbar das Abtasttheorem (auch als **Shannon-Theorem** bekannt) ableiten. Es besagt, daß aus den Abtastwerten das ursprüngliche (d.h. das kontinuierliche) Signal dann fehlerfrei rekonstruiert werden kann, wenn die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß ist wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz  $f_{\max}$ . Dies führt auf folgende zwei Forderungen:

- das Spektrum  $H(f)$  des Signals muß bandbegrenzt sein, d.h. es muß gelten:  $H(f) = 0$  für  $f > f_{\max}$ .
- Die Abtastfrequenz muß mindestens doppelt so groß wie  $f_{\max}$  gewählt werden, d.h.

$$\frac{1}{\Delta t} = 2f_c \geq 2f_{\max}.$$

Die untere Grenze für die Abtastfrequenz,  $2f_{\max}$ , bezeichnet man als Nyquist-Frequenz.

Bei Einhaltung des Abtasttheorems kann zur Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals einmal mehr vom Faltungstheorem Gebrauch gemacht werden. Im Frequenzbereich ergibt sich das Spektrum des kontinuierlichen Signals, indem alle Spektralwerte für  $|f| > f_c$  gleich null gesetzt werden. Es gilt

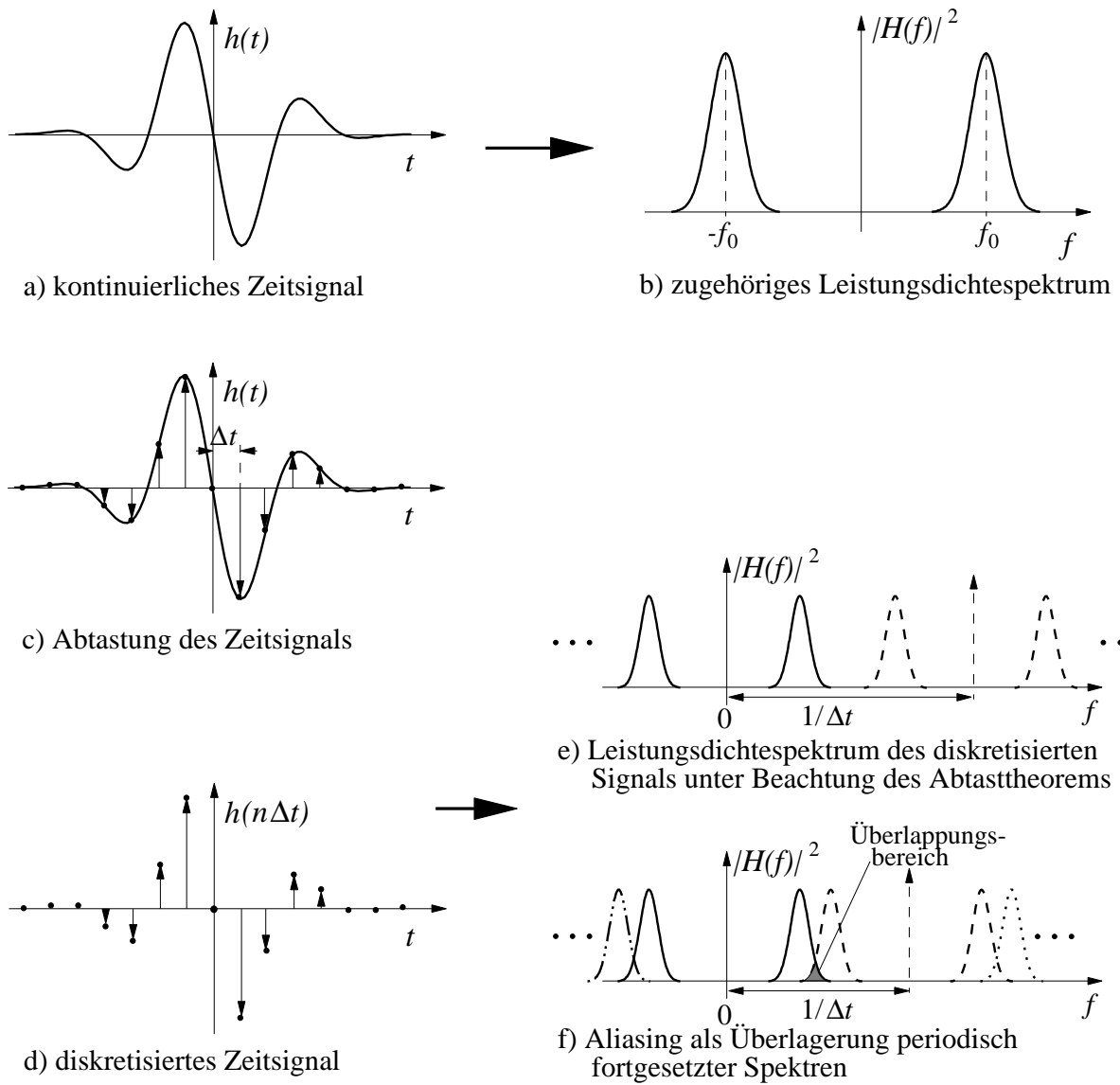
$$f_c = \frac{1}{2\Delta t}.$$

Das entspricht einer Multiplikation des (periodisch fortgesetzten) Spektrums mit einer Rechteckfunktion der Form:

$$\frac{1}{2f_c} \text{rect}(f/f_c) = \begin{cases} \frac{1}{2f_c} & \text{für } -f_c \leq f \leq +f_c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (36)$$

Da als Amplitude der Rechteckfunktion der Wert  $1/(2f_c)$  gewählt wurde, gilt die Normierungsbedingung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2f_c} \text{rect}(f/f_c) df = 1.$$



**Abb. 7:** Die Signalabtastung im Zeitbereich führt im Frequenzbereich zu einer periodischen Fortsetzung des Spektrums mit der Periode  $1/\Delta t$ .

Die Fouriertransformation einer Rechteckfunktion wurde bereits in Abschnitt 1.2 behandelt. Bei Rücktransformation von Gl.(36) in den Zeitbereich ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2f_c} \text{rect}(f/f_c) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{f_c} \int_0^{f_c} \cos(2\pi ft) df = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} = \text{sinc}(2\pi f_c t). \quad (37)$$

Die Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals aus den Abtastwerten erfolgt also durch Faltung von  $h(n \Delta t)$  mit der Funktion  $\text{sinc}(2\pi f_c t)$ . Sie führt auf das Ergebnis:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n \Delta t) \text{sinc}(2\pi f_c(t - n \Delta t)) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n \Delta t) \frac{\sin(2\pi f_c(t - n \Delta t))}{\pi(t - n \Delta t)}. \quad (38)$$

In praktischen Anwendungen der Signalanalyse ist die höchste im Signal vorkommende Frequenz  $f_{\max}$  unter Umständen unbekannt. Um in solchen Fällen Aliasing-Probleme zu vermeiden, wird das kontinuierliche Signal vor der Diskretisierung tiefpaßgefiltert. Die Eckfrequenz des Tiefpaßfilters entspricht dabei der Frequenz  $f_c$ . Wenn die hochfrequenten Signalanteile nun den Wert  $f_c$  überschreiten, d.h.  $f_{\max} > f_c$ , werden diese durch den Tiefpaß herausgefiltert, so daß bei der Diskretisierung das Abtasttheorem eingehalten wird. Ein solches Tiefpaßfilter bezeichnet man als Anti-Aliasing-Filter.

Abbildung 8 zeigt den Aufbau eines Systems zur digitalen Analyse kontinuierlicher Signale mit dem Eingangssignal  $h(t)$ , welches i. allg. dem zeitlichen Verlauf einer elektrischen Spannung entspricht, dem tiefpaßgefilterten Analogsignal  $\tilde{h}(t)$  und dem abgetasteten Signal  $\tilde{h}(n \Delta t)$ .



**Abb. 8:** Aufbau eines Systems zur digitalen Analyse eines kontinuierlichen Zeitsignals  $h(t)$ : das Tiefpaßfilter dient als Anti-Aliasing-Filter; das gefilterte Signal  $\tilde{h}(t)$  wird in einem Analog-Digital-Wandler diskretisiert und quantisiert und anschließend in einem digitalen System (z.B. Rechner, Micro-Controller) analysiert.

Bei der **Digitalisierung** wird das Signal zusätzlich zur **Diskretisierung** auch noch **quantisiert**. Während der Wertebereich eines analogen Eingangssignals i. allg. ein zusammenhängendes Intervall der reellen Achse umfaßt, führt die Quantisierung dazu, daß das digitale Signal nur bestimmte diskrete Werte annehmen kann. Von einer 1-Bit-Digitalisierung spricht man z.B. dann, wenn das digitale Signal nur zwei unterschiedliche Werte annehmen kann. Das bedeutet, daß bei der A/D-Wandlung ein Schwellwert wirksam wird. Signalwerte, die größer sind als dieser Schwellwert, werden auf den Digitalwert 1 abgebildet, die kleineren Signalwerte auf den Digitalwert 0.

Die Anzahl der für die Digitalisierung maßgeblichen „Bits“ wird auch als **Auflösung** der Digitalisierung bezeichnet. Eine Digitalisierung mit 8-Bit Auflösung teilt den relevanten

Wertebereich beispielsweise in  $2^8 = 256$  Digitalwerte ein, die z.B. das Intervall  $[-128, -127, \dots, 127]$  repräsentieren können. In der Praxis erweist sich für die meisten Anwendungen eine 8- bzw. 12-Bit-Digitalisierung als ausreichend.

Dies setzt allerdings voraus, daß die Amplitude des analogen Signals so verstärkt oder abgeschwächt wird, daß der maximale Analogwert in etwa auf den maximalen Digitalwert abgebildet wird. Wird beispielsweise das Intervall  $[-5 \text{ V}, +5 \text{ V}]$  mit 8-Bit digitalisiert, so wird der Wert  $+5 \text{ V}$  z.B. auf den Digitalwert  $+127$  bzw.  $255$  abgebildet. Um die volle Auflösung nutzen zu können, sollte ein auszuwertendes Meßsignal in diesem Beispiel den Wertebereich zwischen  $-5$  und  $+5 \text{ V}$  möglichst gut ausfüllen. Dies kann ggf. durch Verstärkung oder Abschwächung erreicht werden.

## 4.2 Diskrete Fouriertransformation

Eine häufig vorkommende Aufgabe der digitalen Signalanalyse besteht darin, ein abgetastetes Signal in den Frequenzbereich zu überführen. Um dies zu erreichen, bedient man sich der diskreten Fouriertransformation (**DFT**).

Ausgangspunkt der Herleitung einer mathematischen Beziehung zur DFT ist ein diskretes Signal  $h(n \Delta t)$ , das aus  $N$  Abtastwerten besteht, d.h.  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ . (Es ist üblich, dem ersten Abtastwert den Zeitpunkt  $t = 0$  zuzuordnen.) Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt, in dem die Gesamtzahl der entnommenen Abtastwerte keine Rolle spielte, wird hier die endliche Anzahl von  $N$  Abtastwerten vorausgesetzt, da in der Praxis nur Signale von Interesse sind, die während eines begrenzten Zeitraums abgetastet werden.

Das zu transformierende Signal ist diskret. Deshalb muß in der Definitionsgleichung der Fouriertransformation (Gl.(14)) zunächst das Integral durch eine Summe ersetzt werden, die sich auf alle  $N$  Abtastwerte des Signals bezieht. Als Resultat der DFT erwartet man im Frequenzbereich ebenfalls eine diskrete Funktion, also:

$$H(k \Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n \Delta t) e^{-j 2\pi k \Delta f n \Delta t} \Delta t = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} h(n \Delta t) e^{-j 2\pi k \Delta f n \Delta t}. \quad (39)$$

Es stellt sich nun die Frage nach dem Diskretisierungsintervall  $\Delta f$  im Frequenzbereich. Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß bei Einhaltung des Abtasttheorems das Spektrum des kontinuierlichen Signals auf dem Intervall  $-1/(2\Delta t) \leq f < +1/(2\Delta t)$  mit dem des diskreten Signals übereinstimmt. Wird nun angenommen, daß bei  $N$  Abtastwerten des Zeitsignals im Frequenzbereich ebenfalls  $N$  Abtastwerte vorliegen, dann müssen sich diese gleichmäßig über das oben angegebene Frequenzintervall erstrecken. Damit folgt für das Abtastintervall  $\Delta f$  im Frequenzbereich:

$$\Delta f = \frac{1}{N} \left( \frac{1}{2\Delta t} - \frac{-1}{2\Delta t} \right) = \frac{1}{N \Delta t}. \quad (40)$$

Einsetzen von Gl.(40) in Gl.(39) führt auf

$$H(k \Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n \Delta t) e^{-j 2\pi k n / N}. \quad (41)$$

In Gl.(41) wurde, wie es der gebräuchlichen Definition der DFT entspricht, der Vorfaktor  $\Delta t$  aus Gl.(39) vernachlässigt. Man beachte, daß der Vorfaktor letztlich nur eine Normierung

der diskreten Fourierkoeffizienten darstellt. Wird die Normierung gemäß Gl.(39) gewählt, so stimmt beispielsweise der Wert an der Stelle  $f = 0$  der kontinuierlichen Fouriertransformierten einer achsensymmetrischen Rechteckfunktion, der die Fläche des Rechtecks angibt, mit dem Wert der DFT für  $k = 0$  überein.

Die inverse DFT zu Gl.(41) hat die Form:

$$h(n \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k \Delta f) e^{j 2\pi k n / N} . \quad (42)$$

Um zu zeigen, daß die Gln.(41) und (42) ein Transformationspaar bilden, wird Gl.(42) in Gl.(41) eingesetzt:

$$\begin{aligned} H(k \Delta f) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H(l \Delta f) e^{j 2\pi l n / N} \right] e^{-j 2\pi k n / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H(l \Delta f) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j 2\pi l n / N} e^{-j 2\pi k n / N} \right] \\ &= H(k \Delta f) , \end{aligned} \quad (43)$$

wobei für die letzte Umformung von der Orthogonalitätsbeziehung

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j 2\pi l n / N} e^{-j 2\pi k n / N} = \begin{cases} N & \text{für } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gebrauch gemacht wurde.

Alternativ kann der Vorfaktor  $1/N$  aus Gl.(42) auch in die Hintransformation gezogen werden. Damit ergibt sich das folgende Transformationspaar (in der gebräuchlichen Kurzschreibweise, d.h.  $h_n = h(n \Delta t)$ ,  $H_k = H(k \Delta f)$ ):

$$H_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j 2\pi k n / N} , \quad (44)$$

$$h_n = \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{j 2\pi k n / N} . \quad (45)$$

Unter dem Begriff Fast Fourier Transform (**FFT**) werden besonders effiziente Realisierungen der DFT verstanden, bei denen im allgemeinen  $N = 2^m$  mit  $m \in \{2, 3, \dots\}$  vorausgesetzt wird und redundante Rechenoperationen vermieden werden. Die Anzahl der Rechenschritte reduziert sich von  $N^2$  (komplexen Multiplikationen und Additionen) auf  $\approx N \text{ld}(N)$ , wobei mit  $\text{ld}(\dots)$  der Logarithmus Dualis, d.h. der Logarithmus zur Basis zwei, bezeichnet wird. Zur Spektralanalyse wird häufig das diskrete Leistungsdichtespektrum  $P_k$  herangezogen, das sich gemäß  $P_k = H_k H_k^*$  aus den Werten  $H_k$  des Amplitudenspektrums ergibt. ( $H_k^*$  ist wieder das zu  $H_k$  konjugiert Komplexe.)

Für periodische Signale, d.h.  $h(t + T_s) = h(t)$ , mit der Periodenlänge  $T_s = 1/f_s$  gilt:

$$\frac{N \Delta t}{T_s} = n_s = \frac{f_s}{\Delta f} ,$$

d.h. die Anzahl  $n_s$  der abgetasteten Signalperioden entspricht der mit  $\Delta f$  normierten Signalfrequenz. Die Signalfrequenz  $f_s$  fällt für ganzzahlige  $n_s$  mit dem diskreten Frequenzwert

$n_s \Delta f$  zusammen. Im Fall nicht-ganzzahliger  $n_s$  tritt der Leck- oder Leakage-Effekt in Erscheinung, der dazu führt, daß sich die spektrale Leistung des Signals auf mehrere diskrete Frequenzwerte in der Umgebung von  $n_s \Delta f$  verteilt. (Dieser Effekt wird in Abschnitt 4.2.1 noch näher erläutert.) Der diskrete Frequenzwert  $n_0 \Delta f$  (mit  $n_0 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ), wobei man  $n_0$  durch Runden von  $n_s$  erhält, repräsentiert dann das Maximum des diskreten Leistungsdichtespektrums.

#### 4.2.1 Diskrete Leistungsdichtespektren

Beim Vergleich der diskreten mit der kontinuierlichen Fouriertransformation, fallen drei wesentliche Unterschiede auf:

- die Diskretisierung im Zeitbereich, die letztlich auf eine periodische Fortsetzung des Spektrums und damit u.U. zu Aliasing führt, wie in Abschnitt 4.1 gezeigt wurde,
- die endliche Anzahl von  $N$  Abtastwerten des in die DFT eingehenden Datensatzes, die gemäß Gl.(40) die Diskretisierungsschrittweite im Frequenzbereich beeinflußt,
- die Diskretisierung im Frequenzbereich, die letztlich auf den Leck- bzw. Leakage-Effekt führt.

Der zweite und dritte Punkt wird in diesem Abschnitt näher untersucht.

Im Idealfall wird genau ein ganzzahliges Vielfaches  $n_0$  einer Signalperiode abgetastet. Ein Beispiel hierfür stellt das Signal  $s_n = \cos(2\pi n_0 n / N)$  dar. Gemäß Gl.(44) ergibt sich:

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi n_0 n / N) \cos(2\pi k n / N) = \begin{cases} 1/2 & \text{für } k = \pm n_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn nur der positive Teil des Leistungsdichtespektrums betrachtet wird, nimmt lediglich  $P_{k=n_0} = 1/4$  einen von null verschiedenen Wert an. Abb. 9 a) zeigt ein solches Signal, das innerhalb des 64 Abtastintervalle umfassenden Abtastfensters genau fünf Perioden durchläuft. Abb. 9 c) zeigt den anderen Extremfall am Beispiel eines cosinusförmigen Signalverlaufs, bei dem sich genau 4,5 Signalperioden innerhalb des Abtastfensters befinden, so daß in Abb. 9 d) die Konsequenzen des Leckeffektes deutlich werden. Das diskrete Leistungsdichtespektrum ist stark verbreitert, die Signalfrequenz  $f_s = n_s \Delta f$  liegt genau zwischen der 4. und der 5. Spektrallinie. Die Erklärung des Leakage-Phänomens kann erneut auf der Grundlage des Faltungstheorems erfolgen, wenn man die Signalabtastung im Zeit- und im Frequenzbereich als Multiplikation eines kontinuierlichen Signals mit einem Dirac-Kamm versteht. Für die Diskretisierung im Frequenzbereich bedeutet dies eine Faltung des Zeitsignals innerhalb des Abtastfensters mit der Fouriertransformierten des Dirac-Kamms, die ihrerseits einen Dirac-Kamm mit reziproker Periodendauer darstellt (siehe Abschnitt 3.2, Beispiel 4.). Dies führt letztlich dazu, daß das Zeitsignal periodisch mit der Periode

$$T = \frac{1}{\Delta f} = N \Delta t$$

fortgesetzt wird, so daß es bei nicht-ganzzahligen Signalperioden innerhalb des Abtastfensters zu Unstetigkeiten des Signalverlaufs kommt, die letztlich die Ursache des Leck-Effektes

bilden. Eine äquivalente Erklärung besteht zunächst in der Interpretation des Abtastfensters endlicher Breite als Multiplikation eines unendlich langen Signals mit einer Rechteckfunktion, deren Breite  $N \Delta t$  mit der Breite des Abtastfensters übereinstimmt. Im Frequenzbereich führt dies auf eine Faltung der Fouriertransformierten des Signals mit der Fouriertransformierten des Rechteckfensters, dessen Leistungsdichtespektrum sich durch die Funktion

$$P_w(f) = \left( N \Delta t \frac{\sin(\pi f N \Delta t)}{\pi f N \Delta t} \right)^2 = (N \Delta t \operatorname{sinc}(\pi f N \Delta t))^2$$

beschreiben läßt. Diese Funktion ist für das in Abb. 9 e) abgebildete Rechteckfenster in Abb. 9 f) als durchgezogene Linie dargestellt. (Hier wurden  $N = 1024$  Abtastpunkte gewählt, um zu einer hohen Auflösung im Frequenzbereich zu gelangen.) Die Fouriertransformierte der Cosinusfunktion besteht aus Deltafunktionen bei der positiven und der negativen Signalfrequenz. Die Faltung bewirkt, daß sich das Hauptmaximum der Sinc-Funktion gemäß Abb. 9 f) an der Stelle der Signalfrequenz befindet. Für  $n_s \in \{1, 2, \dots\}$  fällt der  $n_s$ -te Abtastwert mit dem Hauptmaximum zusammen, während alle übrigen Abtastwerte mit den Nullstellen der Sinc-Funktion übereinstimmen. In ungünstigen Fällen, wie in Abb. 9 d), liegen dagegen zwei Abtastwerte in den jeweiligen Randbereichen des Hauptmaximums, während die übrigen Abtastwerte den Bereichen der Nebenmaxima entnommen werden.

Das tatsächlich durch FFT ermittelte Leistungsdichtespektrum wird in Abb. 9 f) durch die gestrichelte Linie repräsentiert, die bei höheren Frequenzen vom Quadrat der Sinc-Funktion (durchgezogene Linie) abweicht. An dieser Stelle offenbart sich erneut das Aliasing-Phänomen. Dieser Effekt wird durch die Zeitbereichsabtastung, d.h. durch die Multiplikation des Zeitsignals mit dem Dirac-Kamm, hervorgerufen, die sich im Frequenzbereich als Faltung mit dem reziproken Dirac-Kamm niederschlägt (vgl. Abschnitt 4.1). Dementsprechend liefert die DFT grundsätzlich eine periodische Fortsetzung des Leistungsdichtespektrums mit der Periode  $N \Delta f$ . Bei hohen Frequenzen machen sich folglich die hochfrequenten Anteile des benachbarten, um den Wert  $N \Delta f$  zentrierten Spektrums bemerkbar. Um dies quantitativ zu erfassen, ist die Summe:

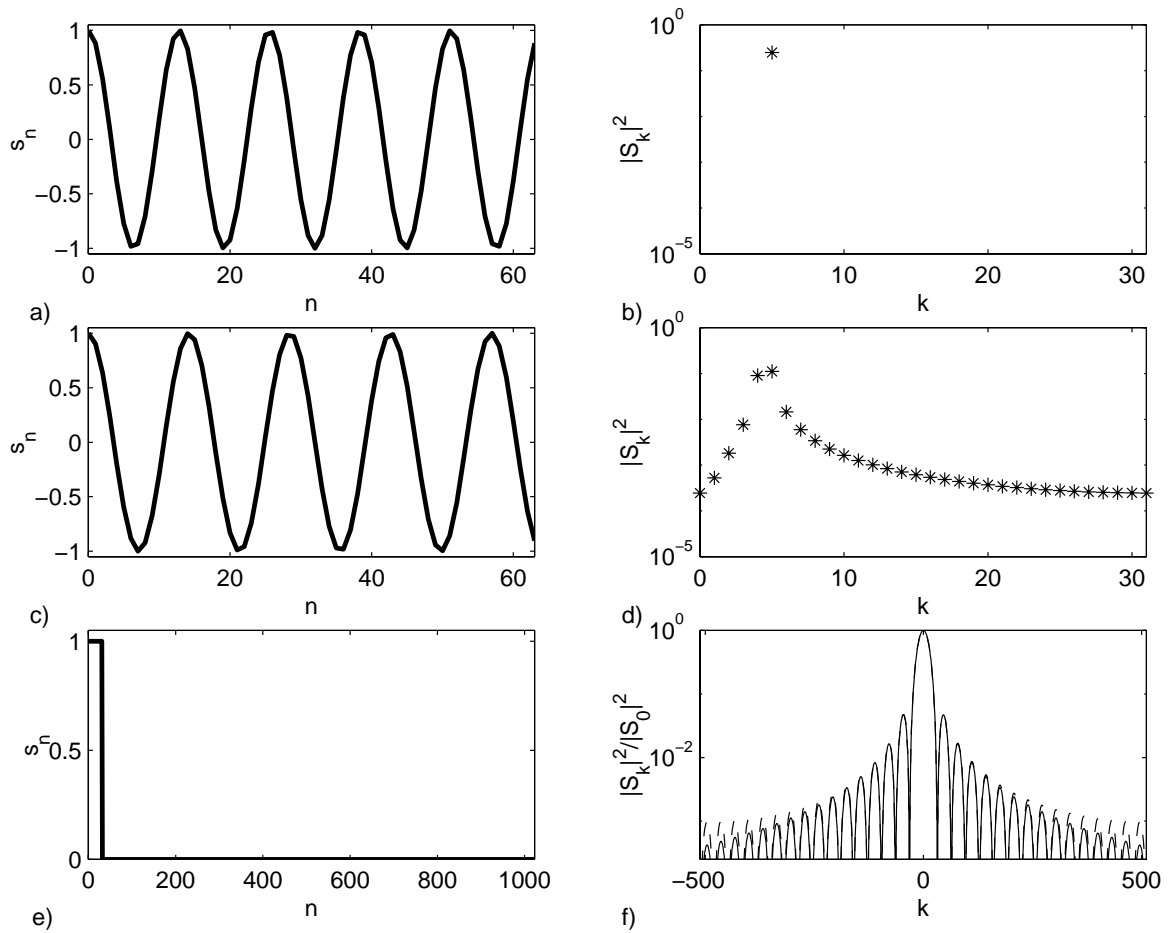
$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j 2\pi k n / N}, \quad (46)$$

bei der  $M$  die Breite des Rechteckfensters angibt, zu bestimmen. Im Fall von Abb. 9 e) gilt  $M = 32$ . Einsetzen der Exponentialfunktion gemäß Gl.(46) in die Summenformel für die geometrische Reihe,  $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$ , führt auf:

$$S_k = \frac{1}{N} e^{-j \pi k (M-1)/N} \frac{\sin(\pi k M / N)}{\sin(\pi k / N)} \quad (47)$$

$$\Rightarrow |S_k|^2 = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2(\pi k M / N)}{\sin^2(\pi k / N)}. \quad (48)$$

Mit  $N = 1024$ ,  $M = 32$  und Normierung auf den Maximalwert 1 liefert diese Gleichung das in Abb. 9 f) als gestrichelte Linie dargestellte Leistungsdichtespektrum. Für den Fall kleiner  $k$ -Werte läßt sich die Sinusfunktion im Nenner durch ihr Argument ersetzen, so daß die diskrete Form der oben angegebenen Sinc-Funktion resultiert und sich somit Leakage und Aliasing unterscheiden lassen.



**Abb. 9:** a) Cosinussignal mit 5 Perioden im Abtastfenster ( $N=64$ ), b) zugehöriges Leistungsdichtespektrum berechnet mit einem FFT-Algorithmus, c) Cosinussignal mit 4,5 Perioden im Abtastfenster ( $N=64$ ), d) zugehöriges Leistungsdichtespektrum; e) Rechteckfunktion der Breite  $M = 32$ , f) normiertes Leistungsdichtespektrum der Rechteckfunktion.



### 4.2.2 Fensterfunktionen

Als Konsequenzen für die Spektralanalyse mittels der diskreten Fouriertransformation ergeben sich aus den oben beschriebenen Effekten zunächst eine Beschränkung der spektralen Auflösung in Abhängigkeit von der Anzahl der Abtastwerte des DFT-Eingangssignals sowie die beschriebene Verbreiterung des spektralen Peaks, die unter Umständen weitere Charakteristika im Frequenzspektrum überdecken kann. Zur Unterdrückung störender Leakage-Einflüsse kann das ursprüngliche Zeitsignal mit einer geeigneten Fensterfunktion multipliziert werden, die zu den Rändern des Zeitbereiches hin abfällt, wie dies in Abb. 10 für das Signal gemäß Abb. 9 c) bzw. 9 a) demonstriert wird. Als Fensterfunktion wird eine Gaußsche Exponentialfunktion der Form

$$w_n = \exp \left[ - (n - N/2)^2 / (n_\sigma^2) \right] \quad (49)$$

verwendet.

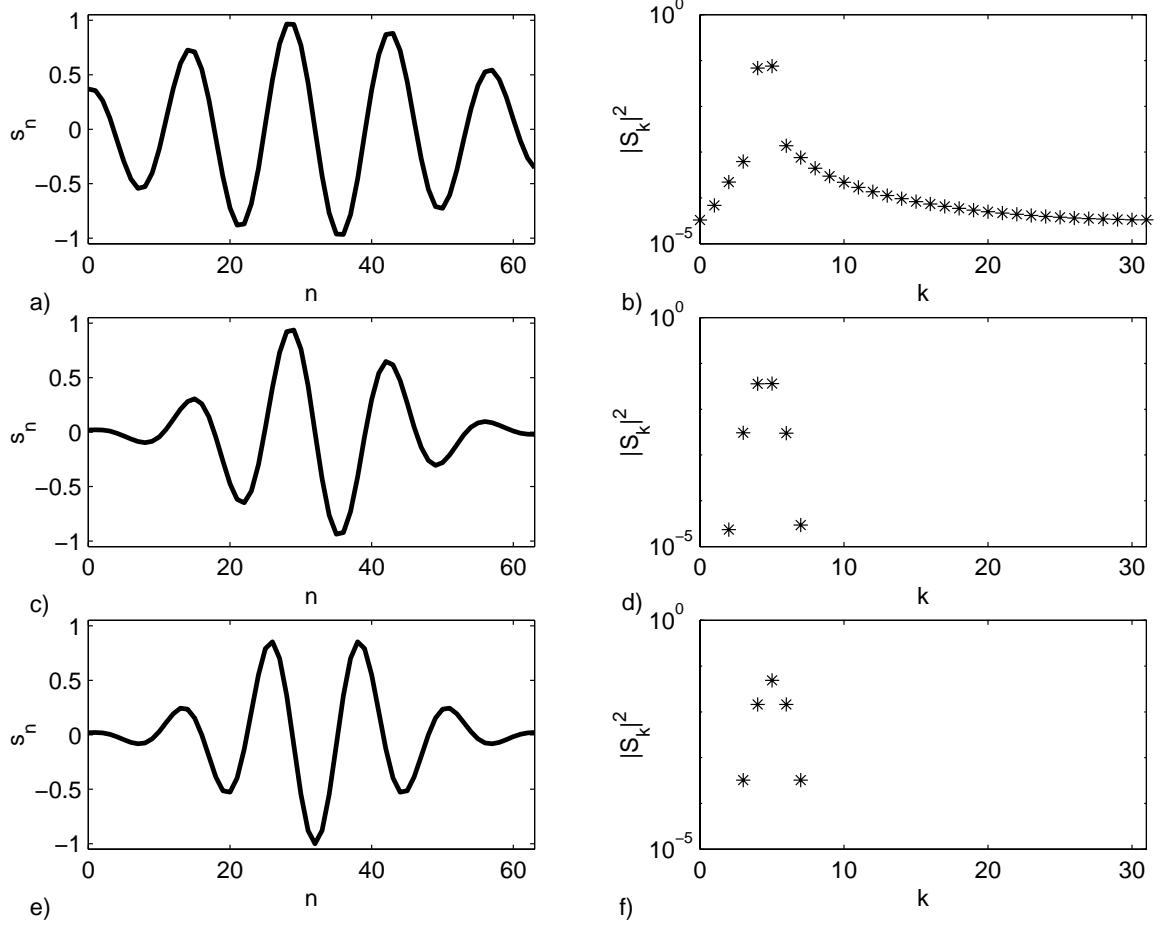
Abb. 10 a) zeigt das mit einer Gaußschen Fensterfunktion der Breite  $n_\sigma = 32$  multiplizierte Cosinussignal gemäß Abb. 9 c). Im Leistungsdichtespektrum (Abb. 10 b)) ist bereits ein im Vergleich zu Abb. 9 d) steilerer Abfall der Flanken des spektralen Maximums zu erkennen. Für Abb. 10 c) und 10 e) wurde die Breite  $n_\sigma = 16$  gewählt, d.h. die Signalamplitude ist an den Rändern des Zeitfensters um den Faktor  $1/e^4$  gedämpft. In diesem Fall zeigt sich im Spektrum (Abb. 10 d) bzw. 10 f)) ein steil abfallender spektraler Peak, der um die Signalfrequenz zentriert, jedoch gegenüber dem Peak in Abb. 9 b) deutlich breiter ist. Dies führt mitunter dazu, daß sich zwei nahe beieinanderliegende spektrale Maxima nicht mehr getrennt wahrnehmen lassen, d.h. daß die Auflösung der Spektralanalyse durch die Multiplikation mit Fensterfunktionen reduziert wird. Dennoch erweisen sich Fensterfunktionen in verschiedenen Anwendungen als nützlich, vor allem dann, wenn ausreichend viele Abtastwerte des zu untersuchenden Signals zur Verfügung stehen, oder wenn vorausgesetzt werden kann, daß die charakteristischen spektralen Peaks soweit auseinander liegen, daß es zu keinen durch die Fensterfunktion bedingten Überlappungseffekten kommt. Zusätzlich zu dem oben beschriebenen Gaußfenster sei hier das weit verbreitete Hanning-Fenster eingeführt, das wie folgt definiert ist:

$$w_n = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos(2\pi n/N) \right), \quad \text{mit } n \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (50)$$

Für  $n = 0$  und für  $n = N$  nimmt die Cosinusfunktion den Wert eins an, so daß das Hanning-Fenster an den Rändern auf null abfällt. In der Mitte, bei  $n = N/2$  gilt  $w_n = 1$ .

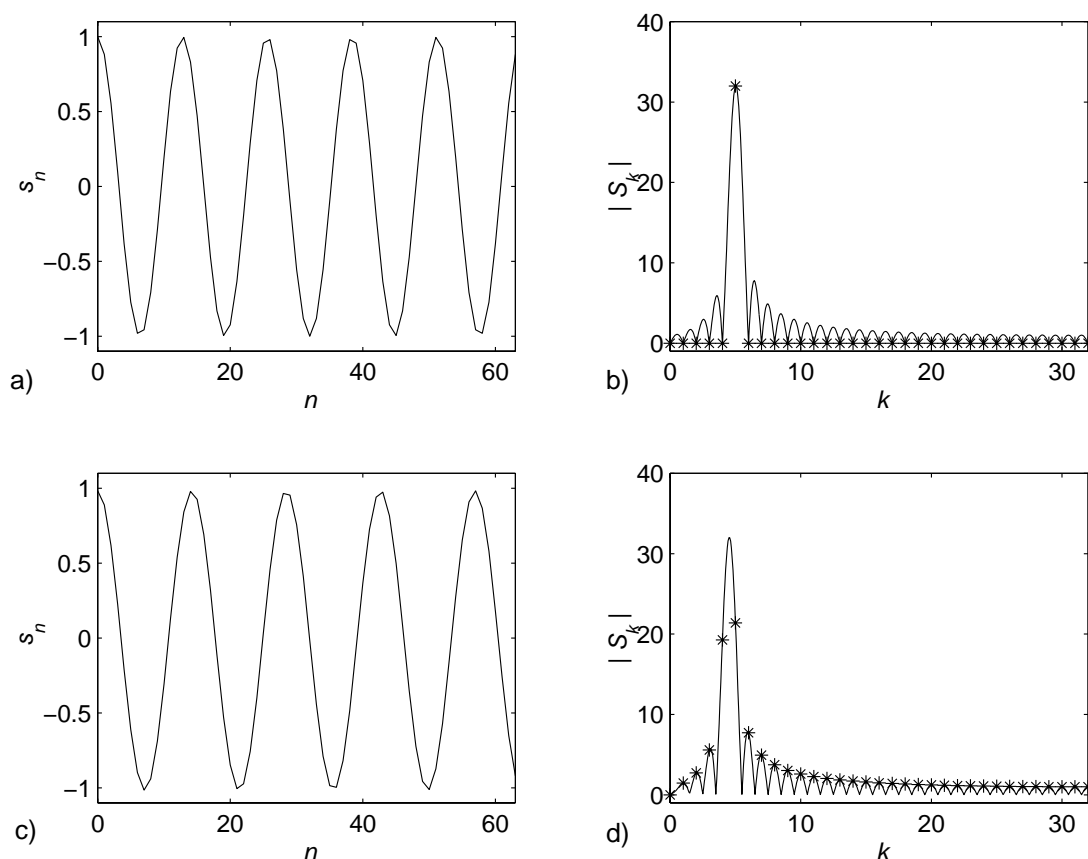
### 4.2.3 Zero-Padding und spektrale Interpolation

Eine Möglichkeit, die Auflösung bei der Frequenz- und der Phasenschätzung im Spektralbereich zu verbessern, besteht im Anhängen von Nullen an das eigentliche Meßsignal, dem sogenannten „Zero-Padding“. Bei dieser Methode macht man sich Gl.(40) dadurch zunutze, daß die Gesamtzahl  $N$  der Abtastpunkte künstlich erhöht wird, indem der Datensatz mit Nullen aufgefüllt wird. Das Prinzip wird durch Abb. 11 veranschaulicht, bei dem die Signale in den Teilbildern a) und c) mit denen aus Abb. 9 a) und c) übereinstimmen. Die durch das „\*“-Symbol gekennzeichneten diskreten Kurvenverläufe in Abb. 11 b) und d) stimmen



**Abb. 10:** a) Cosinussignal gemäß Abb. 9 c), multipliziert mit Gauß-Fensterfunktion der Breite  $n_\sigma = 32$ , die in Gl.(49) definiert wird, und b) zugehöriges Leistungsdichtespektrum; c) Cosinussignal gemäß Abb. 9 c), multipliziert mit Gauß-Fensterfunktion der Breite  $n_\sigma = 16$  und d) zugehöriges Leistungsdichtespektrum; e) Cosinussignal gemäß Abb. 9 a), multipliziert mit Gauß-Fensterfunktion der Breite  $n_\sigma = 16$  und f) zugehöriges Leistungsdichtespektrum.

ebenfalls mit den entsprechenden Verläufen aus Abb. 9 b) und d) überein. Die quasikontinuierlichen, durchgezogenen Kurvenverläufe resultieren, wenn die jeweiligen Signal-Datensätze, die zunächst 64 Werte umfassen auf 1024 Werte mit Nullen angefüllt werden. Hierdurch wird eine Verringerung der Diskretisierungsschrittweite  $\Delta f$  um den Faktor 16 erreicht. Wie Abb. 11 zu entnehmen ist, erlaubt dies eine deutlich bessere Frequenzschätzung sowie eine exaktere Phasenschätzung. Bei verrauschten Signalen ist es darüber hinaus hilfreich, daß die Signalanalyse auf Werten basiert, die in der Nähe des Maximums des Leistungsdichtespektrums liegen und somit den größtmöglichen Abstand zum Rauschlevel aufweisen.

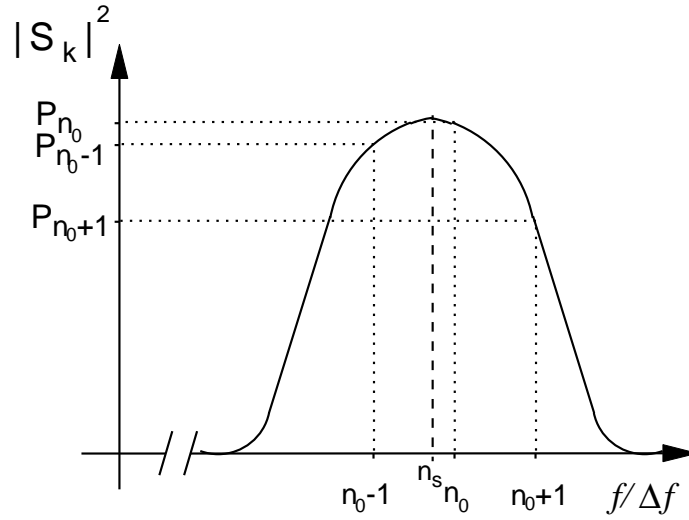


**Abb. 11:** a) Cosinussignal mit 5 Perioden im Abtastfenster ( $N=64$ ), b) Sternchen: zugehöriges Betragsspektrum berechnet mit einem FFT-Algorithmus mit  $N = 64$ , durchgezogene Linie: zugehöriges Betragsspektrum berechnet mit einem FFT-Algorithmus mit  $N = 1024$  unter Vorgabe von  $s_n = 0$  für  $64 \leq n \leq 1023$  c) Cosinussignal mit 4,5 Perioden im Abtastfenster ( $N=64$ ), d) Sternchen: zugehöriges Betragsspektrum berechnet mit einem FFT-Algorithmus mit  $N = 64$ , durchgezogene Linie: zugehöriges Betragsspektrum berechnet mit einem FFT-Algorithmus mit  $N = 1024$  unter Vorgabe von  $s_n = 0$  für  $64 \leq n \leq 1023$ .

Durch Interpolation der Frequenzwerte in der Umgebung des spektralen Peaks kann die Auflösung bei der Frequenzschätzung mittels DFT unabhängig vom Zero-Padding verbessert werden<sup>1</sup>. Bei den meisten Verfahren zur Frequenzinterpolation werden die Werte der

<sup>1</sup>Der Begriff „Auflösung“ bezieht sich hier nicht auf den minimalen Abstand zwischen zwei getrennt wahr-

Fouriertransformierten  $S_k$  bzw. des Betragsquadrates  $P_k$  für die drei Spektrallinien  $k = n_0$ ,  $k = n_0 - 1$  und  $k = n_0 + 1$  verwendet. Die Wahl des geeigneten Interpolationsalgorithmus hängt wesentlich von der verwendeten Fensterfunktion ab: Aufgrund des Faltungstheorems wirkt sich die Multiplikation mit der Fensterfunktion im Zeitbereich als Faltung im Frequenzbereich aus. Die Fouriertransformierte der im vorigen Abschnitt als Fensterfunktion eingeführten Gaußschen Exponentialfunktion hat ebenfalls die Form einer Gaußschen Exponentialfunktion, so daß man im Frequenzbereich eine um die Signalfrequenz  $n_s \Delta f$  zentrierte Gaußfunktion erhält, deren Verlauf bei drei bekannten Funktionswerten approximiert werden kann. Abbildung 12 veranschaulicht das Prinzip der Verbesserung der Frequenzauflösung durch spektrale Interpolation.



**Abb. 12:** Spektrale Interpolation zur Verbesserung der Auflösung bei der FFT-basierten Frequenzschätzung.

Die Beziehung zur Bestimmung der Position des Maximums, die der gesuchten Frequenz  $n_s \Delta f$  entspricht, lautet:

$$n_s = n_0 + \epsilon = n_0 + \frac{1}{2} \frac{\ln(P_{n_0-1}) - \ln(P_{n_0+1})}{\ln(P_{n_0-1}) - 2\ln(P_{n_0}) + \ln(P_{n_0+1})}. \quad (51)$$

Zur Herleitung dieser Beziehung wird der Ansatz

$$P_k = e^c e^{-(k-n_s)^2/\sigma_k^2}$$

zunächst logarithmiert, so daß die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \ln(P_{n_0}) &= c - (n_0 - n_s)^2/\sigma_k^2, \\ \ln(P_{n_0-1}) &= c - (n_0 - 1 - n_s)^2/\sigma_k^2, \\ \ln(P_{n_0+1}) &= c - (n_0 + 1 - n_s)^2/\sigma_k^2 \end{aligned} \quad (52)$$

genommenen Maxima des Leistungsdichtespektrums sondern auf die Genauigkeit, mit der eine Signalfrequenz anhand der zur Verfügung stehenden Werte des diskreten Leistungsdichtespektrums ermittelt werden kann.

resultieren. Durch Eliminieren von  $c$  und  $\sigma_k$  folgt daraus die durch Gl.(51) gegebene Beziehung zur Ermittlung von  $n_s$ . Für die in Abb. 10 d) und 10 f) dargestellten Leistungsdichtespektren resultieren mit den entsprechenden Werten für  $P_k$  die normierten Frequenzen  $n_s = 4,5024$  bzw.  $n_s = 4,9999$ , die den Vorgaben,  $n_s = 4,5$  bzw.  $n_s = 5,0$ , sehr nahe kommen. Wird die Gauß-Interpolation dagegen auf die Leistungsdichtespektren gemäß Abb. 9 d) bzw. 9 b) angewendet, bei denen keine Fensterfunktion verwendet wurde, so resultiert  $n_s = 4,5930$  und  $n_s = 4,994$ , d.h. es zeigen sich durchaus Abweichungen gegenüber den Vorgabewerten.

Neben der Signalfrequenz ist vielfach auch die Phasenlage des Signals bzw. die Phasendifferenz gegenüber einem Referenzsignal von Interesse. Eine Phasen-Schätzung läßt sich im Frequenzbereich durchführen, indem für die Spektralwerte  $S_{n_0}$ ,  $S_{n_0+1}$  und  $S_{n_0-1}$  zunächst die Phasenwerte  $\phi_{n_0}$ ,  $\phi_{n_0+1}$  und  $\phi_{n_0-1}$  gemäß der Beziehung

$$\phi_k = \arctan \left( \frac{\text{Im}[S_k]}{\text{Re}[S_k]} \right) \quad (53)$$

bestimmt werden. Der gesuchte Phasenwert  $\phi_{n_s}$  ergibt sich dann durch lineare Interpolation:

$$\phi_{n_s} = (1 - \epsilon) \phi_{n_0} + \epsilon \phi_{(n_0 + \epsilon/|\epsilon|)}, \quad (54)$$

wobei  $\epsilon$  der bei der spektralen Interpolation resultierende Parameter ist (z.B. gemäß Gl.(51)). Für Abbildung 13 wurde ein sinusförmiges Signal und ein demgegenüber um  $45^\circ$  phasenverschobenes Signal vorgegeben (Teilbild a)). Die zugehörigen Betragsspektren (Teilbild b)) sind weitgehend identisch. Die in Teilbild c) über der diskreten Frequenz aufgetragene Phasendifferenz durchläuft den gesamten Wertebereich von  $-90^\circ$  bis  $+90^\circ$ . Bei der vorgegebenen normierten Signalfrequenz  $n_s = f_s/\Delta f = 4,5$  zeigt sich der gemäß Gl.(54) zu bestimmende Wert von  $\phi_2 - \phi_1 = 45^\circ$ , wenn man Teilbild d) betrachtet, welches einen vergrößerten Ausschnitt aus Teilbild c) darstellt.

Bei bekannter Signalfrequenz  $f_0$  kann man den spektralen Koeffizienten und damit die Phasenlage des Signals selbstverständlich auch direkt, d.h. ohne den Umweg über die FFT bestimmen. Es gilt:

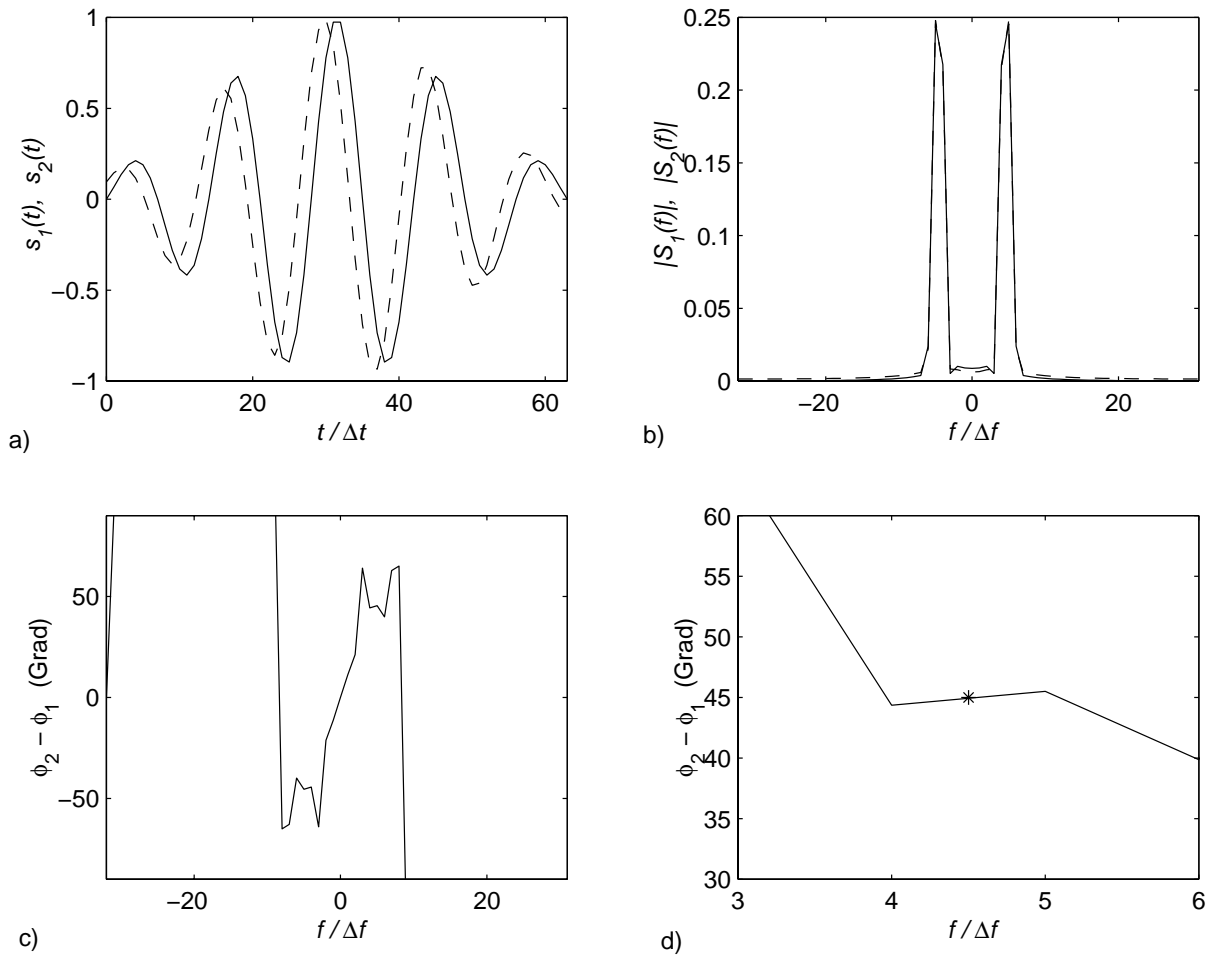
$$S(f_0) = \sum_{n=0}^N s_n w_n e^{-j 2\pi f_0 n \Delta t}, \quad \phi(f_0) = \arctan \left( \frac{\text{Im}[S(f_0)]}{\text{Re}[S(f_0)]} \right). \quad (55)$$

### 4.3 Diskrete Faltung und Korrelation

Die kontinuierliche Faltung und die kontinuierliche Korrelation wurden in Kapitel 2 behandelt. Ebenso, wie die DFT eine diskrete Realisierung der kontinuierlichen Fouriertransformation darstellt, lassen sich das Faltungs- und das Korrelationsprodukt in diskreter Form realisieren. Für die diskrete Faltung zweier diskreter Funktionen  $x(n \Delta t)$  und  $h(n \Delta t)$  gilt:

$$y(n \Delta t) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m \Delta t) h((n - m) \Delta t). \quad (56)$$

Durch Multiplikation der rechten Seite von Gl.(56) mit  $\Delta t$  läßt sich dieselbe Skalierung wie bei der kontinuierlichen Faltung erreichen.



**Abb. 13:** a) Sinusförmiger Signalverlauf mit Gaußscher Hüllkurve (durchgezogene Linie) und um  $45^\circ$  phasenverschobenes Signal (gestrichelt), beide mit 4,5 Perioden innerhalb des Abtastfensters; b) die zugehörigen Betragsspektren, c) anhand der spektralen Koeffizienten berechneter Frequenz-Phasendifferenz-Verlauf; d) Ausschnitt aus c): bei dem normierten Frequenzwert 4,5 resultiert die vorgegebene Phasendifferenz von  $45^\circ$ .

Analog ergibt sich für die diskrete Korrelation der beiden Funktionen  $x(n \Delta t)$  und  $h(n \Delta t)$  die Beziehung:

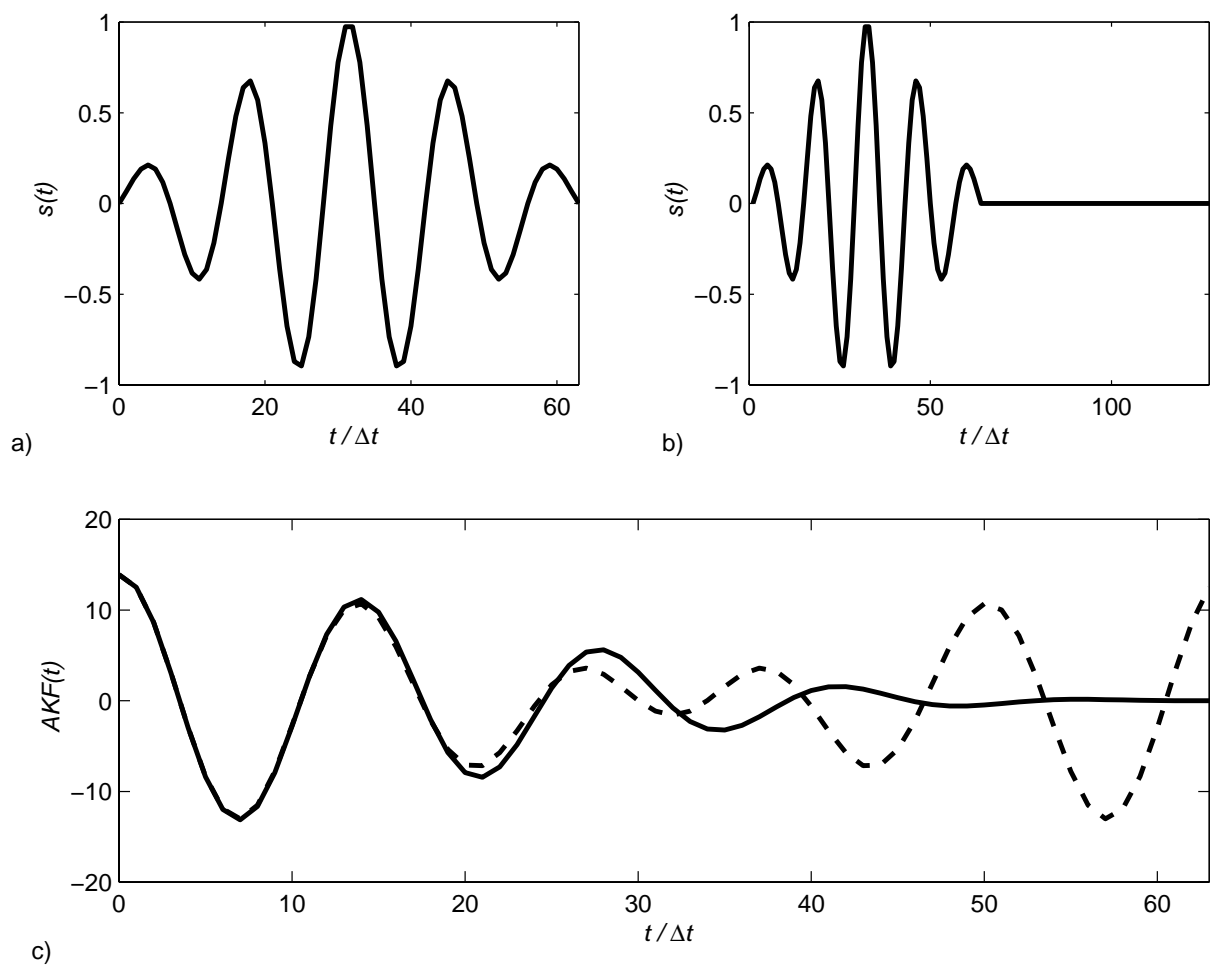
$$\rho(n \Delta t) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m \Delta t) h((n + m) \Delta t). \quad (57)$$

Das Faltungs- und das Korrelationstheorem (vgl. Kap. 2) lassen sich auf den diskreten Fall übertragen, wenn die Konsequenzen der Abtastung im Zeit- und im Frequenzbereich und die endliche Breite  $N \Delta t$  des Abtastfensters berücksichtigt werden. Um die diskrete Faltung bzw. die diskrete Korrelation möglichst effizient numerisch durchzuführen, empfiehlt es sich, das Faltungs- bzw. das Korrelationstheorem in Kombination mit einem FFT-Algorithmus auszunutzen. Dabei werden die folgenden Schritte durchlaufen:

- diskrete Fouriertransformation der beiden Datensätze  $x(n \Delta t)$  und  $h(n \Delta t)$ ,  $n \in \{0, \dots, N - 1\}$ , mittels FFT,
- Multiplikation von  $X(k \Delta f)$  mit  $H(k \Delta f)$  bzw. mit  $H^*(k \Delta f)$ ,  $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ ,
- inverse diskrete Fouriertransformation des Produktes  $X(k \Delta f) H(k \Delta f)$  bzw.  $X(k \Delta f) H^*(k \Delta f)$  mittels FFT.

Ein Problem stellt bei dieser Realisierung einer Faltung bzw. einer Korrelation die durch die Abtastung im Frequenzbereich bedingte periodische Fortsetzung des diskreten Signals im Zeitbereich dar. Dies wird anhand von Abb. 14 deutlich: Abb. 14 a) zeigt ein Signal  $s(n \Delta t)$ , dessen Autokorrelationsfunktion (AKF) bestimmt werden soll. Gemäß der oben beschriebenen Vorgehensweise ergibt sich die in Abb. 14 c) gestrichelt dargestellte Kurve, die aufgrund der periodischen Fortsetzung des Zeitsignals ebenfalls periodisch mit der Periode  $N \Delta t$  ist.

Um den realen Verlauf der AKF des Zeitsignals zu bestimmen, ist die Anzahl der Abtastwerte des Signals zunächst zu verdoppeln, indem der  $N$ -te bis  $(2N - 1)$ -te Abtastwert mit Nullen belegt werden, wie dies Abb. 14 b) zeigt. Wird dieses Signal mittels der FFT bzw. der inversen FFT über  $2N$  Punkte in der oben beschriebenen Weise verarbeitet, ergibt sich die in Abb. 14 c) durchgezogen gezeichnete AKF, die für die Abtastwerte 0 bis  $N - 1$  mit der AKF des diskreten Eingangssignals  $s(n \Delta t)$  übereinstimmt und zum rechten Rand des dargestellten Zeitfensters, d.h. für  $n = N - 1$  auf null abfällt.



**Abb. 14:** a) 64 Abtastpunkte umfassender Signalverlauf; b) aus 128 Werten bestehendes Datenfeld, von denen die ersten 64 mit dem Signal gemäß a) belegt werden und der Rest mit Nullen aufgefüllt wird; c) mittels zweifacher FFT berechnete Autokorrelationsfunktion für den Signalverlauf gemäß a) (gestrichelt) sowie gemäß b) (durchgezogen).

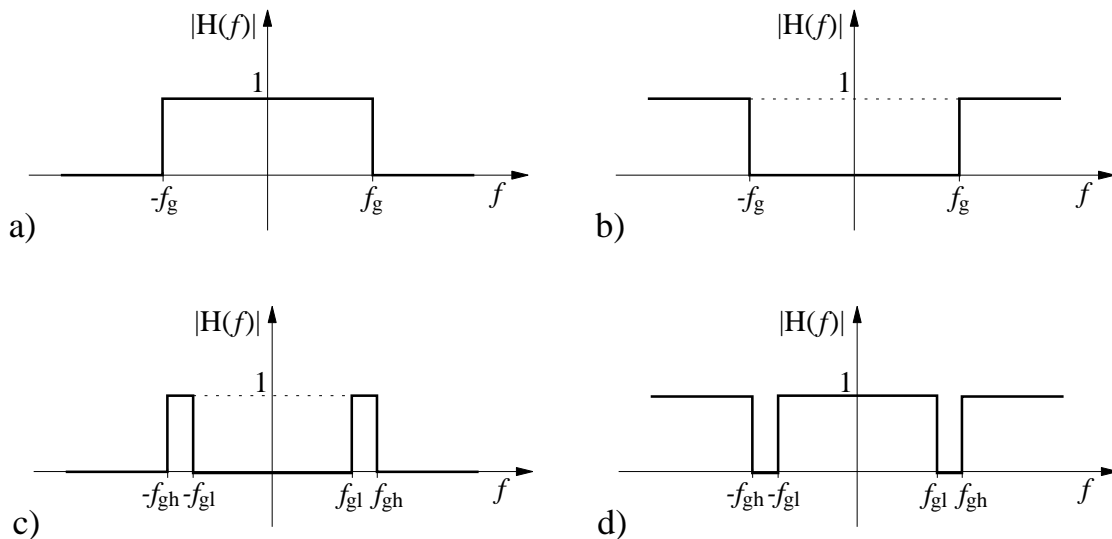


## 5 Anwendungen der diskreten Fouriertransformation

### 5.1 Digitale Filter

Der Entwurf digitaler Filter ist ein umfangreiches eigenständiges Gebiet innerhalb der digitalen Signalverarbeitung. Ein umfassendes Verständnis der digitalen Filterung würde zunächst die Einführung der **z-Transformation**, dem diskreten Pendant zur Laplace-Transformation, erfordern. Um auf die z-Transformation verzichten zu können, soll hier nur eine der zahlreichen Möglichkeiten des Entwurfs digitaler Filter betrachtet werden, nämlich die **Fourier-Approximation**, die auf der DFT basiert.

Hinsichtlich des **Amplitudenganges** frequenzselektiver Filter sind die vier in Abbildung 15 zusammengestellten Grundformen zu unterscheiden: der Tiefpaß, der Hochpaß, der Bandpaß und die Bandsperre. Bandpaß und Bandsperre lassen sich ihrerseits als Kombination eines Tiefpaßfilters mit einem Hochpaß verstehen. Abb. 15 zeigt die idealen Amplituden-Frequenzgänge dieser vier Grundformen.



**Abb. 15:** Filter-Grundformen: a) Tiefpaß, b) Hochpaß, c) Bandpaß und d) Bandsperre.

Digitale Filter können entweder durch ihre **Übertragungsfunktion** im Frequenzbereich oder durch ihre **Impulsantwort** (Zeitverhalten des Filters bei Anregung mit einem Deltaimpuls) im Zeitbereich charakterisiert werden. Übertragungsfunktion und Impulsantwort können durch Fouriertransformation ineinander überführt werden, d.h. sie bilden ein Fouriertransformations-Paar. Die Filterung eines Zeitsignales erfolgt nun dadurch, daß das Zeitsignal mit der Impulsantwort des Filters gefaltet wird. Gemäß dem Faltungstheorem entspricht dies im Frequenzbereich der Multiplikation des Fouriertransformierten Zeitsignals mit der Übertragungsfunktion des Filters.

Im folgenden wird exemplarisch der Entwurf eines Tiefpaßfilters diskutiert, welches sich

idealerweise durch die Amplituden-Übertragungsfunktion

$$|H_{tp}(f)| = \text{rect}(f/f_g) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| \leq f_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (58)$$

beschreiben läßt (vgl. Abb. 15 a)). Ein ideales Hochpaßfilter hat dementsprechend die Amplituden-Übertragungsfunktion:

$$H_{hp}(f) = 1 - H_{tp}(f).$$

Wird  $H_{tp}(f)$  als reellwertig vorausgesetzt, so ergibt sich die Funktion  $h'_{tp}(t)$  im Zeitbereich durch inverse Fouriertransformation (vgl. Gl.(37)):

$$h'_{tp}(t) = 2f_g \frac{\sin(2\pi f_g t)}{2\pi f_g t}. \quad (59)$$

Die Funktion  $h'_{tp}(t)$  ist gerade und erstreckt sich entlang der gesamten Zeitachse. In praktischen Anwendungen kann deshalb immer nur ein Ausschnitt der Impulsantwort  $h'_{tp}(t)$  betrachtet werden, der einem Zeitintervall der Länge  $N \Delta t$  entspricht. Dies wird mathematisch durch die Multiplikation von  $h'_{tp}(t)$  mit der Rechteckfunktion

$$r(t) = \text{rect}(t/(N\Delta t/2)) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq N\Delta t/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (60)$$

erreicht.

Weiter ist zu berücksichtigen, daß das Antwortverhalten eines Filters kausal sein muß, d.h. die Impulsantwort  $h_{tp}(t)$ , die sich auf eine Pulsanregung im Zeitpunkt  $t = 0$  bezieht, muß für  $t < 0$  verschwinden. Die Kausalität erfordert also eine zeitliche Verschiebung der achsensymmetrischen Funktion  $\text{rect}(t/(N\Delta t/2)) h'_{tp}(t)$  um den Wert  $N\Delta t/2$ . Gemäß dem Zeitverschiebungstheorem (siehe 3.1) bewirkt die Zeitverschiebung im Frequenzbereich eine Phasenverschiebung der ursprünglich reellen Übertragungsfunktion  $H_{tp}(f)$  um  $e^{-j2\pi f N\Delta t/2}$ . Da die Phasenverschiebung linear mit der Frequenz zunimmt, spricht man von **linearphasigen** Filtern.

Das Hauptproblem bei dieser Art der digitalen Filterung besteht nun in der Wahl einer geeigneten Länge  $N\Delta t$  des Zeitfensters: Je größer  $N$  gewählt wird, desto mehr Rechenzeit wird für die Faltung mit der Impulsantwort des Filters benötigt. Abbildung 16 a) zeigt die Impulsantworten für Filter unterschiedlicher Ordnung. Die Ordnung  $N_0$  des Filters entspricht dabei dem Wert  $N - 1$ .

Andererseits nehmen die Abweichungen der realen Übertragungsfunktion des Filters von der in Abb. 15 a) dargestellten idealen Übertragungsfunktion mit abnehmender Ordnung immer mehr zu, wie Abb. 16 b) zeigt. Als Grenzfrequenz des Tiefpaßfilters wurde für Abb. 16 der Wert

$$f_g = 0,2 f_{\text{abtast}} = 0,2 / \Delta t$$

vorgegeben.

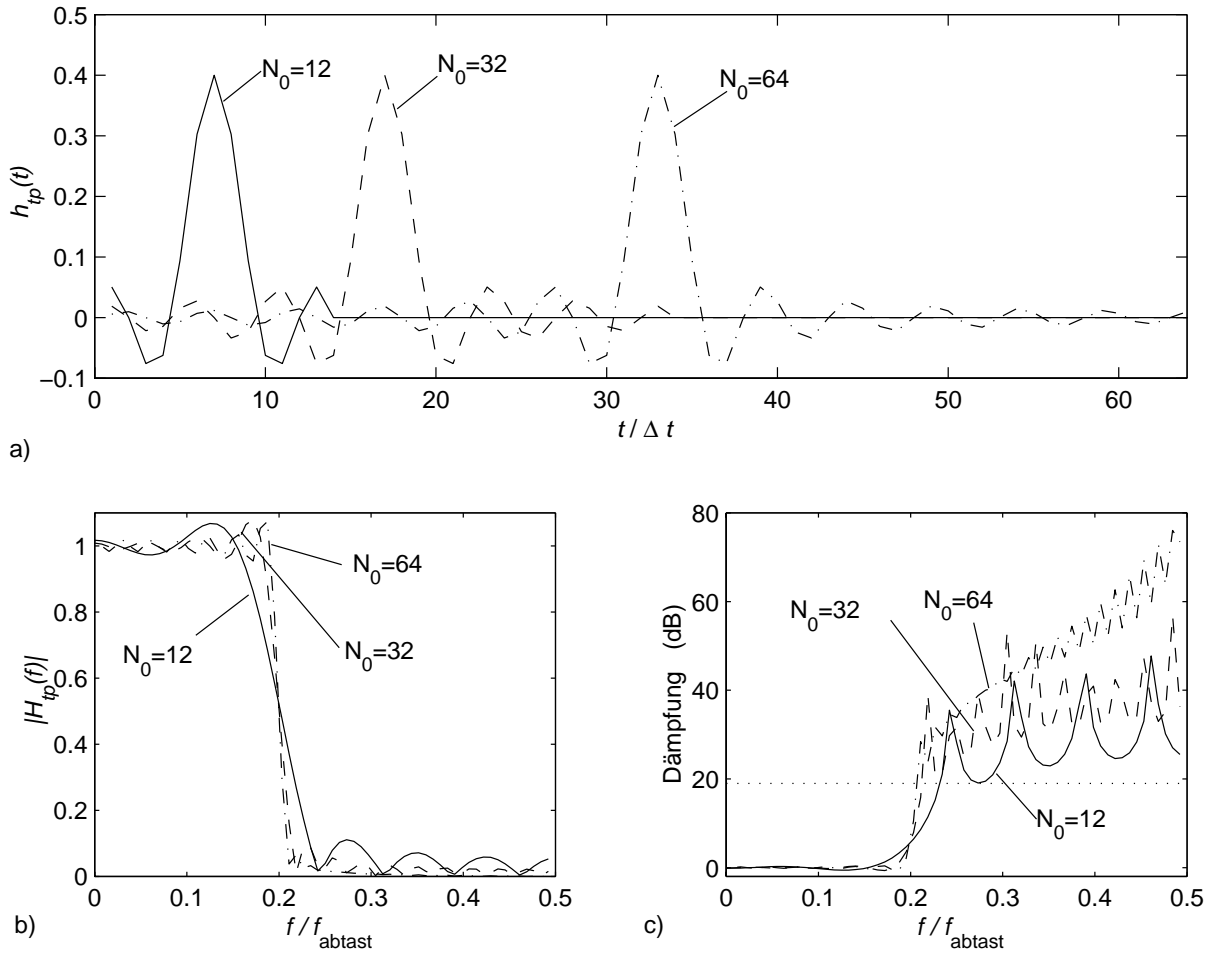
Die Ursache der Abweichungen vom idealen Filter-Verhalten ist die durch das Zeitfenster bedingte Faltung der idealen Übertragungsfunktion des Filters mit der sinc-Funktion

$$\text{sinc}(\pi N \Delta t f) = \frac{\sin(\pi N \Delta t f)}{\pi N \Delta t f}.$$

Eine wichtige Eigenschaft zur Beurteilung von Filtern ist die Dämpfung  $D$ , die sich aus dem Betragsspektrum nach der Beziehung

$$D = -20 \log(|H_{tp}(f)|)$$

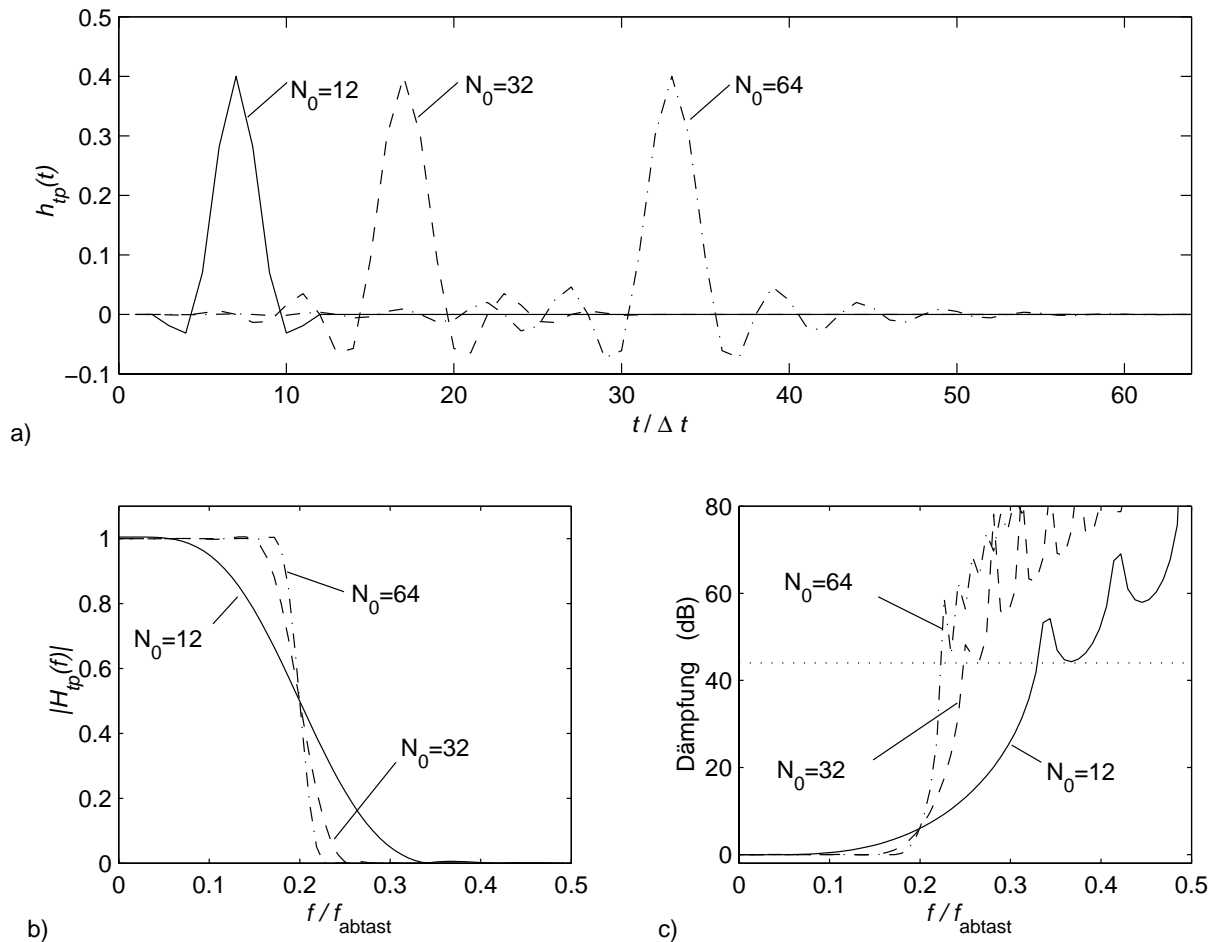
bestimmen läßt. Solche Dämpfungskurven sind in Abb. 16 c) für die Betragsspektren aus Abb. 16 b) dargestellt. Als charakteristischer Wert ergibt sich eine Sperrdämpfung  $a = 19$  dB, die in Abb. 16 c) als waagerechte Linie (gepunktet) eingezeichnet ist. Die **Sperrdämpfung** gibt an, wie stark das Filter im Sperrbereich mindestens dämpft. Ein weiteres Charakteristikum zur Kennzeichnung des Filters ist die Breite des Übergangsbereichs. Als **Übergangsbereich** bezeichnet man die Differenz  $f_{sp} - f_{du}$  zwischen der Frequenz  $f_{sp}$ , bei der das Filter vollständig sperrt, und der Frequenz  $f_{du}$ , bei der es vollständig durchläßt. Die Breite des Übergangsbereichs nimmt mit zunehmender Ordnung des Filters ab (vgl. Abb. 16 b)). Der ideale Tiefpaß gemäß Abb. 15 a) hat einen Übergangsbereich der Breite null.



**Abb. 16:** a) Impulsantworten von Tiefpaß-Filtern der Ordnung  $N_0$ , die für die relative Grenzfrequenz  $f/f_{abst} = 0,2$  ausgelegt wurden, b) zugehörige Betragsspektren  $|H_{tp}(f)|$ , c) aus den Betragsspektren resultierende Filterdämpfung.

Eine Glättung der Übertragungsfunktion des Filters und eine verbesserte Sperrdämpfung lassen sich erreichen, wenn die Impulsantwort des Filters mit einer geeigneten Fensterfunktion,

die um das Maximum der Impulsantwort zentriert ist, multipliziert wird. Entsprechende Ergebnisse, bei denen das **Hanning-Fenster** gemäß Gl.(50) verwendet wurde, zeigt Abbildung 17. Durch die Fensterfunktion werden die Nebenmaxima der in Abb. 17 a) dargestellten Impulsantworten gedämpft. Dies führt im Frequenzbereich zu einer Glättung der zugehörigen Betragsspektren (siehe Abb. 17 b)). Bei Verwendung des Hanning-Fensters beträgt die Sperrdämpfung 44 dB, wie Abb. 17 c) zeigt. Noch höhere Sperrdämpfungen lassen sich mit dem **Hamming-Fenster** (54 dB) oder mit dem **Blackman-Fenster** (74 dB) erzielen, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen wird.



**Abb. 17:** a) Impulsantworten von Tiefpaß-Filtern der Ordnung  $N_0$  nach Multiplikation mit einem Hanning-Fenster, b) zugehörige Betragsspektren  $|H_{tp}(f)|$ , c) aus den Betragsspektren resultierende Filterdämpfung.

Ein auf diese Weise ausgelegtes Filter ist von endlicher Ordnung und hat deshalb eine **zeitbegrenzte** Impulsantwort. Derartige Filter bezeichnet man als **FIR-Filter** (FIR = Finite Impulse Response).

Ist das digitale Filter korrekt ausgelegt, so kann die Realisierung der digitalen Filterung grundsätzlich auf zweierlei Weise erfolgen:

1. durch diskrete Faltung gemäß Gl.(56),

2. durch Multiplikation im Frequenzbereich unter Ausnutzung des Faltungstheorems.

Die erste Methode ist leicht zu programmieren und eignet sich vor allem für Filter von niedriger Ordnung  $N_0 \leq 40$ . Die Vorgehensweise bei der zweiten Methode wird im folgenden beschrieben. Das zu filternde Signal bestehe aus  $N$ -Abtastwerten. Dieses Signal wird, wie in Abbildung 18 (oben) schematisch dargestellt, zunächst in Bereiche von je  $M$  Abtastwerten unterteilt. Es wird angenommen, das Filter habe die Ordnung  $K$ . Um Probleme mit der periodischen Fortsetzung des Zeitsignals aufgrund der Abtastung im Frequenzbereich zu vermeiden, müssen die Eingangsdatensätze der FFT  $M + K$  Abtastpunkte umfassen (vgl. diskrete Korrelation gemäß Abb. 14). Also sind die folgenden Schritte auszuführen:

- die Impulsantwort der Länge  $K + 1$  des Filters wird bis zur Gesamtlänge  $M + K$  mit Nullen aufgefüllt,
- zur Berechnung der Übertragungsfunktion  $H_k$  wird eine  $(M + K)$ -Punkte FFT durchgeführt.

Aus der Gesamtzahl  $N$  der Abtastwerte des Signals ergeben sich  $L$ -Teilfolgen mit  $L = N/M$ . Jede dieser Teilfolgen umfaßt  $M$  Abtastpunkte. Für jede Teilfolge werden die folgenden Schritte ausgeführt (vgl. Abb 18):

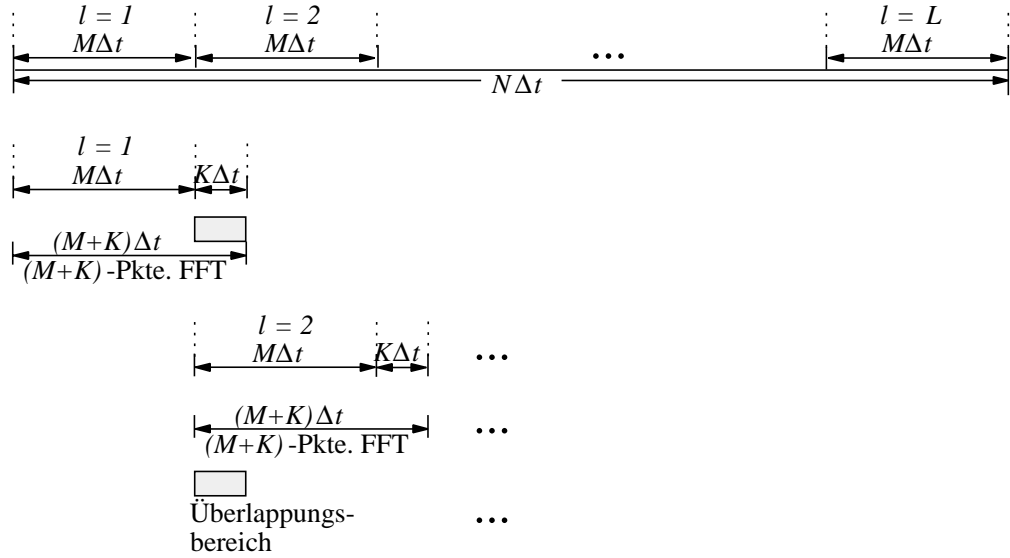
- Auffüllen der  $l$ -ten Teilfolge des Signals bis zur Gesamtlänge  $M + K$  mit Nullen,
- $(M + K)$ -Punkte FFT der aufgefüllten Teilfolge,
- elementweise Multiplikation der diskreten Fouriertransformierten der aufgefüllten Teilfolge mit  $H_k$ ,
- inverse  $(M + K)$ -Punkte FFT des Produktes liefert die  $l$ -te Teilfolge des gefilterten Signals,
- Überlagerung der  $l$ -ten Teilfolge des gefilterten Signals mit der  $(l - 1)$ -ten Teilfolge, indem die  $K$  Werte des Überlappungsbereiches addiert werden.

Diese Methode ist unter dem Begriff „**Overlap-Add**“-Verfahren oder auch als **schnelle Faltung** bekannt.

## 5.2 Verrauschte Signale

In der Praxis kommt es häufig vor, daß das eigentlich interessierende Signal, das als **deterministisches** Signal oder als **Nutzsignal** bezeichnet wird, mit Rauschen behaftet ist. In diesem Fall wird die DFT für die Signalanalyse verwendet, um den deterministischen Signalanteil im Frequenzbereich besser vom Rauschen unterscheiden zu können.

Desweiteren gibt es Prozesse, in denen ausschließlich Rauschen am Ausgang vorhanden ist. Die bei solchen Prozessen resultierenden Meßsignale werden als **stochastische** Signale bezeichnet. Die Aufgabe der Signalanalyse besteht hier i. allg. darin, Charakteristika in diesen Signalen zu ermitteln und zu beurteilen.



**Abb. 18:** Realisierung der digitalen Filterung mit einem FIR-Filter mittels der schnellen Faltung nach dem „Overlap-Add“-Verfahren.

### 5.2.1 Verrauschte deterministische Signale

Um die Genauigkeit von Algorithmen zur Frequenzschätzung beurteilen zu können, werden verrauschte Signale künstlich generiert, bei denen dem Nutzsignal **weißes Rauschen** mit Gaußscher Amplitudenverteilung additiv überlagert wird. Weißes Rauschen hat eine konstante mittlere Rauschamplitude, die unabhängig von der Frequenz ist. (Im Gegensatz dazu spricht man von farbigem Rauschen, wenn die Rauschamplitude eine charakteristische Frequenzabhängigkeit zeigt.)

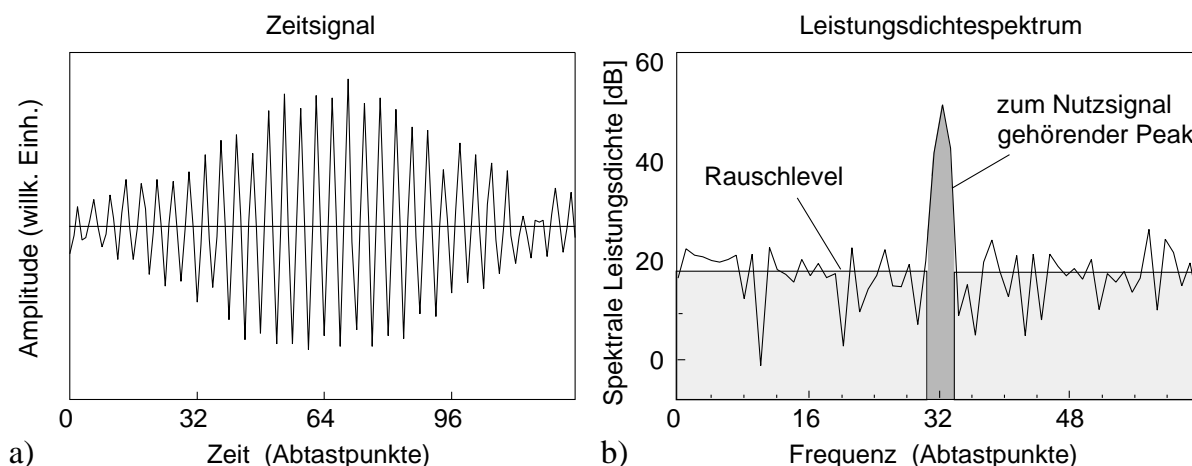
Solche Rauschsignale lassen sich mit Hilfe normalverteilter Pseudozufallszahlen erzeugen. Als Parameter zur Beschreibung der Signalgüte wird der Wert des Signal-Rausch-Verhältnisses ( $SNR = \text{Signal-to-Noise Ratio}$ ) gemäß der allgemein gebräuchlichen Definition

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \right) \quad (61)$$

vorgegeben. In Gl.(61) stellt  $\sigma_s^2$  die mittlere quadratische Signalamplitude innerhalb des Abtastfensters dar und  $\sigma_n^2$  die Varianz des Rauschsignals, dessen Bandbreite durch die halbe Abtastfrequenz begrenzt wird. Es sei angemerkt, daß das  $SNR$  gemäß dieser Definition nur unter Einbeziehung der Anzahl  $N$  der Abtastwerte, mit denen ein gegebenes analoges Signal diskretisiert wird, eine Aussage über die Zuverlässigkeit der anhand des Spektrums geschätzten Frequenz zuläßt. Um eine solche Aussage unabhängig von  $N$  zu tätigen, muß eine von Gl.(61) abweichende  $SNR$ -Definition zugrunde gelegt werden, wie im folgenden gezeigt wird.

Aus der  $SNR$ -Definition gemäß Gl.(61) (im weiteren als Def. 1 bezeichnet) folgt unter Berücksichtigung des Parsevalschen-Theorems (siehe Abschnitt 2.2), daß ein  $SNR$ -Schätzwert, wie durch Abbildung 19 veranschaulicht wird, als Verhältnis der Signalleistung (gegeben durch

die Fläche unter dem spektralen Peak) zur Rauschleistung (gegeben durch die verbleibende Fläche im Spektrum) bestimmt werden kann. Dabei wird die spektrale Rauschleistung im Bereich der Signalfrequenz i. allg. vernachlässigt. Ferner wird die spektrale Rauschleistung durch die halbe Abtastfrequenz begrenzt. Auch Leakage-Effekte bleiben unberücksichtigt.<sup>2</sup> Im dargestellten Beispiel wurde die Breite der Hüllkurve des Zeitsignals so gewählt, daß sich im Frequenzbereich eine Signal-Bandbreite von  $3 \Delta f$  ergibt.



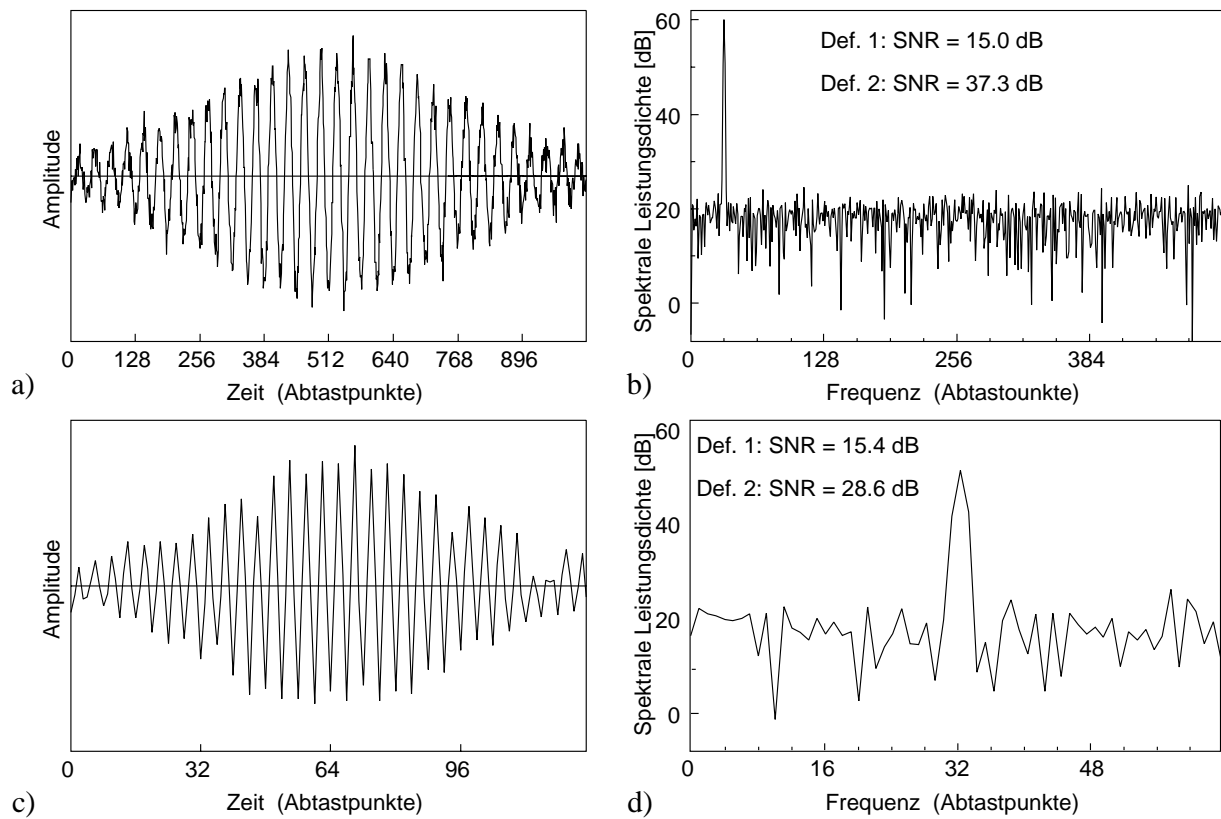
**Abb. 19:** a) Verrauschtes Zeitsignal, b) zugehöriges Leistungsdichtespektrum.

Simulierte Signale mit unterschiedlichem  $SNR$  bestehend aus  $N = 1024$  Abtastwerten sind in den Abbildungen 20 a) und 21 a) dargestellt. Im Fall von Abb. 20 wurde ein  $SNR$  von 15 dB vorgegeben, bei dem Signal gemäß Abb. 21 betrug der  $SNR$ -Wert -15 dB. Die Abbildungen 20 c) und 21 c) zeigen dieselben Signalverläufe, jedoch wurde nur jeder achte Abtastwert aufgetragen, so daß  $N = 128$  resultiert. Die  $SNR$ -Definition gemäß Gl.(61) liefert in beiden Fällen praktisch dieselben Werte wie für die jeweiligen Teilbilder a).

In den Teilbildern 20 b), 21 b), 20 d) und 21 d) sind jeweils die zugehörigen Leistungsdichtespektren aufgetragen und die anhand der Spektren geschätzten  $SNR$ -Werte gemäß Def. 1 angegeben. Diese stimmen im wesentlichen mit den theoretischen Vorgaben überein. Vergleicht man die in den Teilbildern b) und d) dargestellten Spektren untereinander, so ist festzustellen, daß die Differenz zwischen dem Maximum des jeweiligen spektralen Peaks und dem Rauschlevel für die höhere Abtastrate ( $N = 1024$ ) jeweils größer ist. Da die vorgegebene Breite des Abtastfensters 32 Signalperioden umfaßt, ist der spektrale Peak stets bei  $f = 32 \Delta f$  lokalisiert.

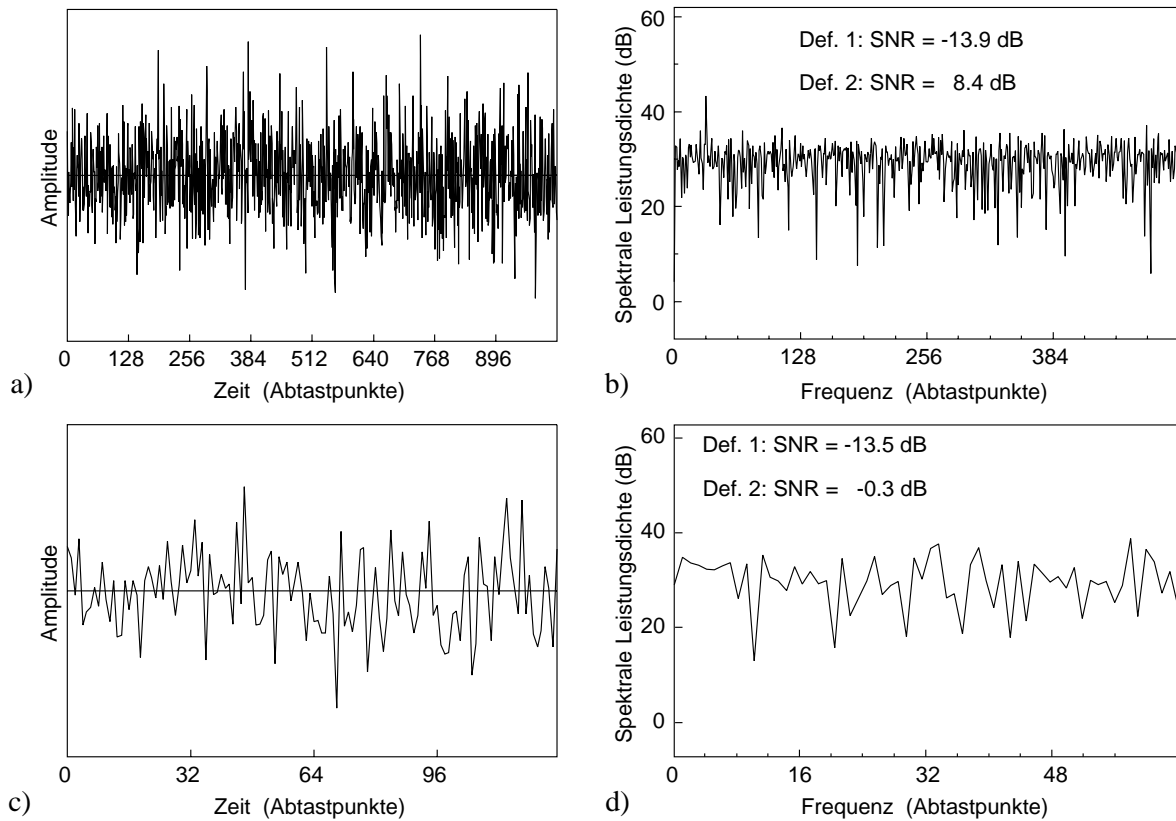
Die weitgehende Übereinstimmung der  $SNR$ -Schätzwerte läßt sich dadurch erklären, daß die halbe Abtastfrequenz mit zunehmender Abtastrate größer wird, so daß die gesamte Rauschleistung bei konstantem Rauschlevel ebenfalls zunimmt. Damit das Verhältnis aus Signalleistung zur Rauschleistung konstant bleibt (vgl. Gl.(61)) muß folglich die Signalleistung ebenfalls zunehmen. Dies führt bei unveränderter Signalbandbreite zu einer Erhöhung des spektralen Peaks relativ zum Rauschlevel.

<sup>2</sup>Bezüglich der Kompensation von Leakage-Einflüssen auf die  $SNR$ -Schätzung sei auf das Dolph-Tschebyscheff-Fenster verwiesen.



**Abb. 20:** a) Simuliertes Zeitsignal:  $SNR = 15 \text{ dB}$  (gemäß Def. 1),  $N = 1024$ , b) zugehöriges Leistungsdichtespektrum, c) Zeitsignal gemäß dem Datensatz aus a) bei dem jedoch nur jeder 8. Abtastwert verwendet wurde (d.h.  $N = 128$ ), d) zugehöriges Leistungsdichtespektrum.





**Abb. 21:** a) *Simuliertes Zeitsignal:  $SNR = -15$  dB (gemäß Def. 1),  $N = 1024$ , b) zugehöriges Leistungsdichtespektrum, c) Zeitsignal gemäß dem Datensatz aus a) bei dem jedoch nur jeder 8. Abtastwert verwendet wurde (d.h.  $N = 128$ ), d) zugehöriges Leistungsdichtespektrum.*

Da ein hoher spektraler Peak einen geringen Schätzfehler bei der Ermittlung der Signalfrequenz zur Folge hat, empfiehlt es sich, verrauschte Signale so hochfrequent wie möglich abzutasten. Eine  $SNR$ -Definition, bei der dies berücksichtigt wird, ist durch

$$SNR_2 = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_s^2 (N/2 - 1)}{\sigma_n^2 n_s} \right). \quad (62)$$

gegeben, wobei mit  $n_s$  die Frequenzbandbreite des Signals bezeichnet wird. Bei dieser  $SNR$ -Definition wird die Signalleistung zu dem Produkt aus der mittleren spektralen Rauschleistungsdichte ( $\sigma_n^2/(N/2 - 1)$ ) und der Signalbandbreite ins Verhältnis gesetzt. Für weißes Rauschen ist das auf diese Weise definierte  $SNR_2$  somit unabhängig von der Abtastfrequenz. Resultate der  $SNR$ -Schätzung gemäß Gl.(62) sind in den Spektren der Abbildungen 20 und 21 als „Def. 2,  $SNR$ “ vermerkt. Ein negativer  $SNR$ -Wert hat bei dieser Definition zur Folge, daß der spektrale Peak des Signals geringer als der mittlere Rauschlevel ist, so daß anhand des diskreten Spektrums keine zuverlässige Frequenzschätzung mehr erfolgen kann.

### 5.2.2 Stochastische Signale

Stochastische Signale sind das Ergebnis von Zufallsprozessen. Sie werden mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschrieben, d.h. die Analyse besteht darin, Erwartungswerte und Varianzen zu ermitteln. Aufgrund des Wiener-Khintchine-Theorems (siehe Abschnitt 2.2) läßt sich das Leistungsdichtespektrum eines Signals durch Fouriertransformation in die Autokorrelationsfunktion überführen. Für ein aus  $N$  Abtastwerten bestehendes Signal  $h_n$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  hat die entsprechende diskrete Beziehung die Form

$$|H_k|^2 = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \rho_h(n \Delta t) e^{-j 2\pi k n / N}. \quad (63)$$

Die in Abschnitt 4.3 angegebene Definition der diskreten Autokorrelationsfunktion wird hier so abgewandelt, daß auch negative  $n$ -Werte zugelassen werden und darüber hinaus die periodische Fortsetzung des Zeitsignals vermieden wird:

$$\rho_h(n \Delta t) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1-n} h(m \Delta t) h((m+n) \Delta t), & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{m=-n}^{N-1} h(m \Delta t) h((m+n) \Delta t), & \text{für } n \leq 0 \end{cases} \quad (64)$$

Bei Gl.(64) handelt es sich aufgrund der Normierung mit dem Vorfaktor  $1/N$  um die **nicht-erwartungstreue Autokorrelationsfolge**. Die **erwartungstreue Autokorrelationsfolge** erhält man, wenn man den Vorfaktor  $1/N$  durch  $1/(N - |n|)$  ersetzt, denn mit der durch  $E\{\dots\}$  bezeichneten Erwartungswertbildung gilt<sup>3</sup>:

$$E \left\{ \frac{1}{N - n} \sum_{m=0}^{N-1-n} h_m h_{m+n} \right\} = \frac{1}{N - n} \sum_{m=0}^{N-1-n} E \{ h_m h_{m+n} \}$$

---

<sup>3</sup>Der Begriff „Erwartungswert“ ist hier etwas irreführend, da es sich bei der Autokorrelationsfunktion um eine Funktion der Zeit handelt. Die Erwartungswertbildung bezieht sich nicht etwa auf die zeitliche Mittelung, sondern auf die Mittelung für eine Vielzahl von unterschiedlichen Realisierungen desselben stochastischen Prozesses. Das Resultat der Erwartungswertbildung der AKF ist nach wie vor eine zeitabhängige Funktion. Dementsprechend ist der Erwartungswert des Leistungsdichtespektrums eine Funktion der Frequenz.

$$\begin{aligned}
&= \frac{N-n}{N-n} E \{h_m h_{m+n}\} \\
&= \frac{N-n}{N-n} r_h(n \Delta t) = r_h(n \Delta t).
\end{aligned} \tag{65}$$

In der letzten Zeile bezeichnet  $r_h(n \Delta t)$  den Erwartungswert der Autokorrelationsfunktion. Für die Analyse stochastischer Prozesse spielen Erwartungswerte eine wichtige Rolle. Wird in Gl.(63) auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens der Erwartungswert gebildet, so resultiert:

$$E\{|H_k|^2\} = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} E\{\rho_h(n \Delta t)\} e^{-j 2\pi k n / N}, \tag{66}$$

wobei die Erwartungswertbildung auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in die Summe hineingezogen wurde. Die Erwartungswerte des Leistungsdichtespektrums und der (nicht-erwartungstreuen) AKF bilden also ein Fouriertransformations-Paar.

Diese Überlegung sei am Beispiel des weißen Rauschprozesses näher erläutert: Der Erwartungswert des Leistungsdichtespektrums eines weißen Rauschprozesses ist eine Konstante  $K_0$ . Die Fouriertransformierte einer Konstanten  $K_0$  entspricht einer mit  $K_0$  multiplizierten Deltafunktion, d.h. die AKF eines weißen Rauschprozesses ist ein mit  $K_0$  multiplizierter Delta-Peak an der Stelle  $t = 0$ .

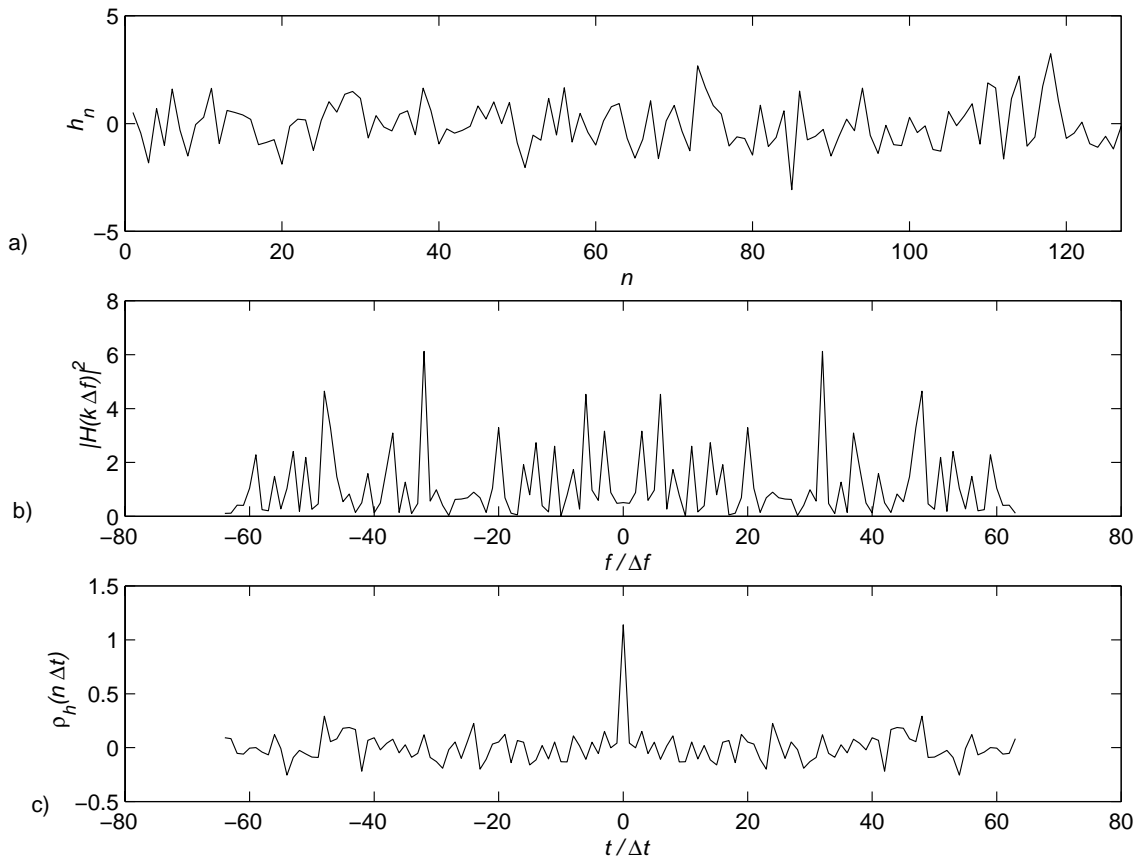
Die Abbildungen 22 und 23 veranschaulichen dies: Abb. 22 a) zeigt ein stochastisches Signal, welches einer Realisierung eines weißen Rauschprozesses mit Gaußscher Amplitudenverteilung der Varianz 1 entspricht. In den Teilbildern b) und c) sind das zugehörige Leistungsdichtespektrum, das auch als **Periodogramm** bezeichnet wird, und die Autokorrelationsfunktion des Signals dargestellt. Beide Kurvenverläufe zeigen stochastische Fluktuationen und besitzen deshalb nur eine begrenzte Aussagekraft im Hinblick auf die Beurteilung der statistischen Eigenschaften des Prozesses. Erst die gemittelten Resultate gemäß Abb. 23 lassen Rückschlüsse auf den Prozess zu, d.h. man kann erkennen, daß es sich tatsächlich um weißes Rauschen mit der Varianz 1 handelt.

Wie oben erwähnt, interessiert hinsichtlich der Beurteilung stochastischer Signale im Frequenzbereich der Erwartungswert des Leistungsdichtespektrums. Da der Erwartungswert nicht experimentell zu bestimmen ist, wird nach praktischen Möglichkeiten zur **Schätzung** des Erwartungswertes gesucht. Man könnte zum Beispiel annehmen, daß das Periodogramm für  $N \rightarrow \infty$  in den Erwartungswert des Leistungsdichtespektrums übergeht. Dies hätte zur Folge, daß die Varianz des Periodogramms für  $N \rightarrow \infty$  gegen null geht und man würde von einer **konsistenten** Schätzung sprechen. Die Varianz von  $|H_k|^2$  berechnet sich nach der Beziehung:

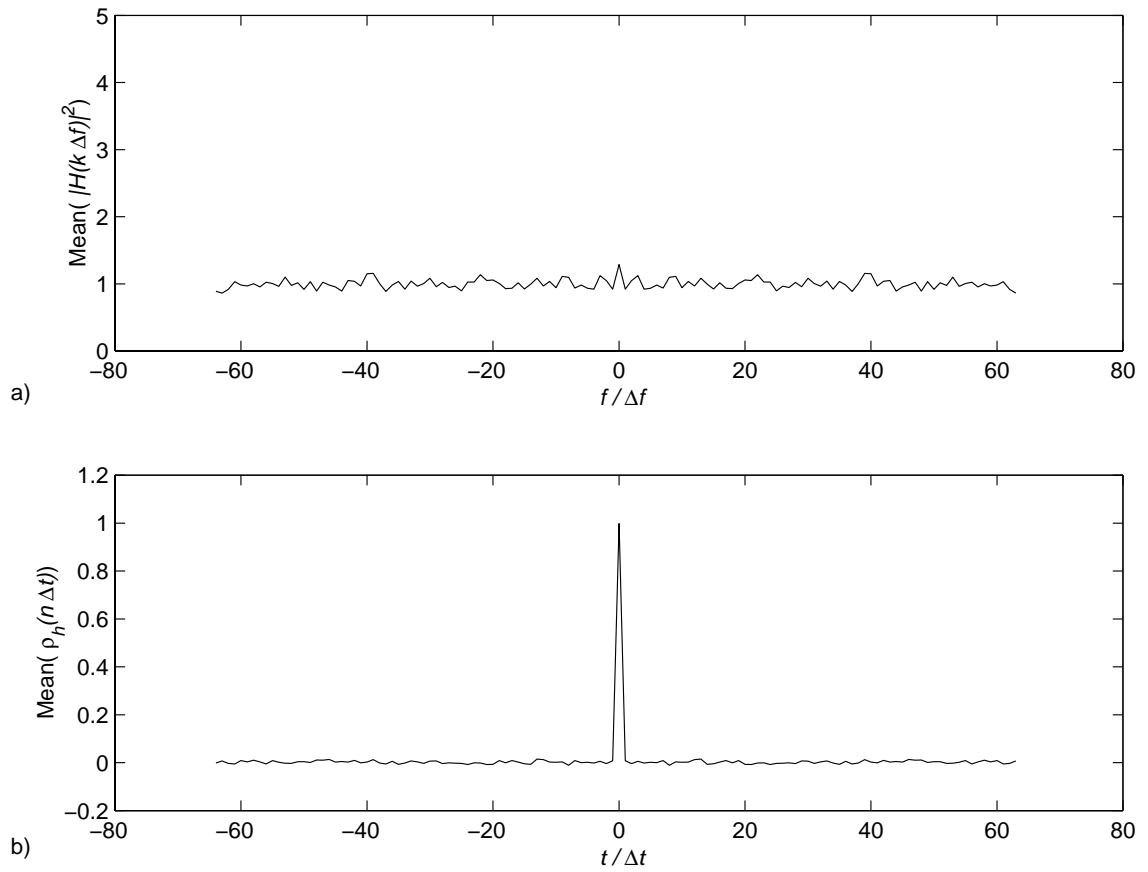
$$\begin{aligned}
\text{Var}\{|H_k|^2\} &= E\{(|H_k|^2 - E\{|H_k|^2\})^2\} \\
&= E\{(|H_k|^2)^2\} - (E\{|H_k|^2\})^2.
\end{aligned} \tag{67}$$

Der Grenzwert  $N \rightarrow \infty$  ist gleichbedeutend mit einer langen Abtastzeit, was wegen  $\Delta f = 1/(N \Delta t)$  zu einer hohen Frequenzauflösung des Leistungsdichtespektrums führt. Durch eine erhöhte Auflösung wird jedoch keine Reduzierung der Varianz erzielt, so daß diese Methode nicht zu einer konsistenten Schätzung führt.

Eine konsistente Schätzung des Erwartungswerts des Leistungsdichtespektrums läßt sich mit folgenden drei Methoden erreichen:



**Abb. 22:** a) Weißes Rauschsignal mit Gaußscher Amplitudenverteilung, b) zugehöriges Leistungsdichtespektrum (mit FFT berechnet), c) durch inverse Fouriertransformation des Leistungsdichtespektrums ermittelte AKF des Signals.



**Abb. 23:** a) Mittelung von 200 Leistungsdichtespektren gemäß Abb. 22 b) für unterschiedliche Realisierungen desselben stochastischen Prozesses, b) Mittelung von 200 Autokorrelationsfunktionen gemäß Abb. 22 c).

1. durch die Mittelung einer Anzahl voneinander unabhängiger Periodogramme eines stochastischen Prozesses (Bartlett-Methode)

Diese Methode wurde oben bereits am Beispiel des weißen Rauschprozesses erörtert (vgl. Abb. 23). Sie basiert darauf, daß die Varianz eines arithmetischen Mittelwertes bei Mittelung über  $N_0$  Realisierungen eines Zufallsprozesses sich um den Faktor  $N_0$  gegenüber der Varianz der einzelnen Realisierungen reduziert (vgl. Meßtechnischer Grundkurs). Dabei wird vorausgesetzt, daß der zu analysierende Prozeß über einen längeren Zeitraum **stationär** ist, d.h. daß sich die statistischen Eigenschaften nicht innerhalb des Zeitraumes ändern, in dem die Meßsignale mehrfach aufgezeichnet werden.

2. durch Fensterung der Autokorrelationsfolge im Bereich des Maximums (Blackman-Tukey-Methode)

Wird beispielsweise in Abb. 22 c) die Autokorrelationsfunktion mit einer Fensterfunktion, z.B. Gaußfunktion, die um den Nullpunkt zentriert ist, multipliziert, so führt dies im Leistungsdichtespektrum zu einer Faltung mit der Fouriertransformierten der Fensterfunktion. Eine solche Faltung ist gleichbedeutend mit einer Tiefpaßfilterung des Leistungsdichtespektrums, so daß man als Resultat ein geglättetes Leistungsdichtespektrum erhält.

3. durch Fensterung von Datensegmenten des Meßsignals (Welch-Methode)

Ein über einen längeren Zeitraum aufgezeichnetes stochastisches Meßsignal wird - wie bei der Bartlett-Methode - in  $N_0$  Teilsegmente von je  $L$  Abtastwerten zerlegt. Jedes dieser Teilsegmente wird mit einer Fensterfunktion multipliziert und anschließend mittels DFT transformiert. Die Fensterung bewirkt in diesem Fall eine Tiefpaßfilterung der diskreten Fouriertransformierten. Durch Mittelwertbildung für die  $N_0$  Datenblöcke wird eine weitere Reduzierung der Varianz erreicht. Zur Reduzierung der notwendigen Anzahl von Mittelungen, kann mit Datensegmenten gearbeitet werden, die sich jeweils um die Hälfte überlappen. Dadurch erhöht sich die Konvergenz des Verfahrens für ein gegebenes Meßsignal.

## 5.3 Hilbert-Transformation und Zeit-Frequenz-Analyse

### 5.3.1 Hilbert-Transformation zur Erzeugung des analytischen Signals

Die Hilbert-Transformation ist eine Integraltransformation, die den Zusammenhang zwischen dem Real- und dem Imaginärteil der Fouriertransformierten eines kausalen Signals mathematisch ausdrückt.

Bei der Herleitung der Hilbert-Transformation geht man von der Sprungfunktion

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (68)$$

aus und berechnet die zugehörige die Fouriertransformierte:

$$\Theta(\omega) = \pi \delta(\omega) - \frac{j}{\omega}. \quad (69)$$

Zur Berechnung von Gl.(69) betrachtet man die Ableitung der Signumfunktion:

$$\frac{d}{dt} \text{sign}(t) = 2\delta(t), \quad (70)$$

denn es gilt:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} (1 + \text{sign}(t)). \quad (71)$$

Wird die Beziehung aus Gl.(70) der Fourier-Transformation unterzogen, so resultiert:

$$j \omega \text{SIGN}(\omega) = 2.$$

Damit folgt Gl.(69).

Die Multiplikation eines kausalen Signals  $s(t)$  mit  $\theta(t)$  führt zu keiner Veränderung im Zeitbereich. Im Frequenzbereich bewirkt sie jedoch eine Faltung von  $S(\omega) = |S(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$  mit dem rechten Ausdruck in Gl.(69). Es folgt also:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * \Theta(\omega),$$

was letztlich auf die Beziehung

$$S(\omega) = \frac{1}{2} S(\omega) - \frac{j}{2\pi} P \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right\}$$

führt. Da der Integrand eine Singularität an der Stelle  $\omega' = \omega$  hat, ist es erforderlich, das obige Integral als Cauchysches Hauptwertintegral (siehe z.B. Bronstein) zu bestimmen, was durch  $P\{\dots\}$  symbolisiert wird. Durch Aufspalten der Funktion  $S(\omega)$  in Real- und Imaginärteil erhält man die folgende Integraltransformation, die als Hilbert-Transformation bekannt ist.

$$\text{Re}\{S(\omega)\} = \frac{1}{\pi} P \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}\{S(\omega')\}}{\omega - \omega'} d\omega' \right\}, \quad (72)$$

$$\text{Im}\{S(\omega)\} = \frac{-1}{\pi} P \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\{S(\omega')\}}{\omega - \omega'} d\omega' \right\}. \quad (73)$$

Gemäß den Gleichungen (72), (73) ergibt sich der Realteil der Fouriertransformierten eines kausalen Eingangssignals als Hilbert-Transformierte des Imaginärteils und umgekehrt.

Als Hilbert-Transformierte eines reellen zeitdiskreten Signals  $s_n$  der Form

$$s_n = s_0 \cos(2\pi f_s n \Delta t + \phi_0) \quad (74)$$

bezeichnet man ein um  $90^\circ$  phasenverschobenes Signal  $s_n$ , das als Imaginärteil zusammen mit dem ursprünglichen Signal als Realteil das komplexwertige **analytische Signal**  $a_n = s_n + j s_n$  bildet.

Eine Möglichkeit zur Erzeugung des analytischen Signals besteht in der zweifachen Anwendung eines FFT-Algorithmus. Bei Verwendung von FFT-Algorithmen werden die negativen Frequenzwerte durch  $k\Delta f$  mit  $k \in \{N/2, \dots, N-1\}$  repräsentiert. Wegen der Symmetrieeigenschaften der Fouriertransformation enthalten sowohl die Anteile des Frequenzspektrums

eines reellen Signals, die positiven Frequenzwerten zugeordnet sind, als auch die negativen Frequenzen zugeordneten Spektralanteile die komplette spektrale Information. Durch die Definition

$$A_k = \begin{cases} 2S_k, & 0 < k < N/2 \\ S_k, & k = 0 \\ 0, & k \geq N/2. \end{cases} \quad (75)$$

wird das diskrete Spektrum  $A_k$  ohne Informationsverlust auf positive Frequenzen beschränkt, so daß es sich im Sinne der Hilbert-Transformation um ein „kausales Signal im Frequenzbereich“ handelt. Zusätzlich kann der Offset eines Signals eliminiert werden, indem  $A_0 = 0$  vorgegeben wird. Die Anwendung der inversen FFT auf  $A_k$  liefert dann die komplexen Abtastwerte  $a_n$  des analytischen Signals, wie in den Abbildungen 24 a), 25 gezeigt wird. Anhand des Betrages  $|a_n|$  läßt sich der Verlauf der Hüllkurve des Signals ermitteln (siehe Abb. 24 b)). Die Signalfrequenz ergibt sich folgendermaßen aus dem analytischen Signal: Der in Abb. 24 c) angegebene zeitabhängige Phasenwinkel  $\phi_n$  folgt aus

$$\phi_n = \arctan \left( \frac{\text{Im}[a_n]}{\text{Re}[a_n]} \right) \quad (76)$$

und ist zunächst auf das Intervall  $-\pi \leq \phi_n < \pi$  beschränkt. Durch Addition von geeigneten Vielfachen von  $2\pi$ , sogenanntes „Unwrapping“, erhält man einen stetigen Verlauf  $\phi_n$  des Phasenwinkels. Ein einfacher „Unwrapping“-Algorithmus, der auf der Folge  $\phi_n$ ,  $n \in \{1, \dots, N-1\}$  basiert, kann wie folgt programmiert werden:

$$\begin{aligned} \phi_{n0} - \phi_{n0-1} > \phi_s &\Rightarrow \phi_n = \phi_n - 2\pi, \quad \forall \quad n \geq n_0 \\ \phi_{n0} - \phi_{n0-1} < \phi_s &\Rightarrow \phi_n = \phi_n + 2\pi, \quad \forall \quad n \geq n_0, \end{aligned} \quad (77)$$

wobei  $\phi_s$  ein zuvor festgelegter Schwellwert ist, z.B.  $\phi_s = \pi$ .

Für die Phase des Signals gemäß Gl.(74) gilt

$$\phi_n = 2\pi f_s n \Delta t + \phi_0 \quad (78)$$

Also kann die Signalfrequenz  $f_s$  aus der Steigung einer Regressionsgeraden für  $\phi_n$  ermittelt werden. Wegen der Definition des analytischen Signals  $a_n$  im Zeitbereich wird diese Methode als Zeitbereichsmethode interpretiert.

Als erläuterndes Beispiel sei in diesem Zusammenhang ein Cosinussignal der Form

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \mathcal{F} \{ \cos(2\pi f_0 t) \} = \frac{1}{2} \left( \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) \right). \quad (79)$$

betrachtet.

Die Multiplikation mit dem zweifachen der  $\theta$ -Funktion im Frequenzbereich, welche die negativen Frequenzen zuzuordnenden Anteile des Spektrums abschneidet (vgl. Gl.(75)), führt auf:

$$2\theta(f) \frac{1}{2} \left( \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) \right) = \delta(f - f_0). \quad (80)$$

Durch inverse Fouriertransformation der rechten Seite von Gl.(80) erhält man das folgende analytische Signal:

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \delta(f - f_0) \} = e^{j 2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t). \quad (81)$$



Der Realteil dieses Signals stimmt mit dem ursprünglichen Cosinussignal überein. Der Imaginärteil ist ein um  $90^\circ$ , d.h. um  $\pi/2$ , phasenverschobenes Signal, denn es gilt:

$$\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2).$$

Das analytische Signal hat den Phasenverlauf

$$\arctan\left(\frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\cos(2\pi f_0 t)}\right) = 2\pi f_0 t,$$

der linear mit der Zeit ansteigt, und die konstante Amplitude

$$|e^{j2\pi f_0 t}| = 1.$$

Wie oben bereits erwähnt, führt die Abtastung im Frequenzbereich zu einer periodischen Fortsetzung des Signals im Zeitbereich. Dies schlägt sich, wie Bild 25 zeigt, in Abweichungen des Imaginärteils des durch diskrete Hilbert-Transformation (zweifache Anwendung der FFT) erzeugten analytischen Signals von dem gegenüber dem Eingangssignal um  $90^\circ$  phasenverschobenen Signal nieder, die in Bild 25 b) zu Beginn und gegen Ende des Abtastfensters zu erkennen sind. Um in diesem Zusammenhang systematische Fehler bei der Frequenzschätzung zu vermeiden, empfiehlt es sich, die Frequenzschätzung ohne diese Phasenwerte durchzuführen, d.h. es werden z.B. nur die Werte  $\phi_n$  mit  $n \in \{10, \dots, N-11\}$  zur Frequenzschätzung verwendet.

### 5.3.2 Zeit-Frequenz-Analyse

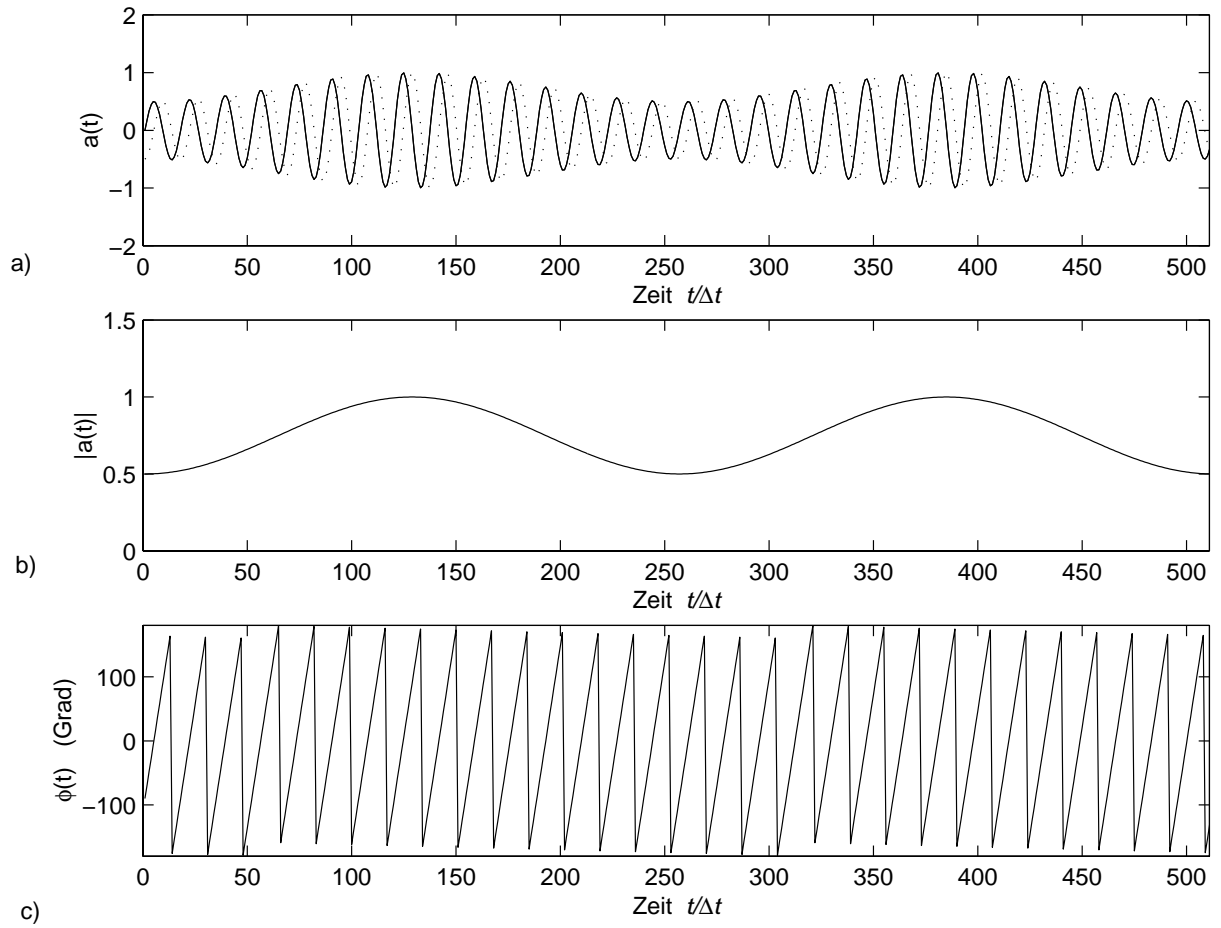
Bei den bisher analysierten deterministischen Signalen handelte es sich i. allg. um sinus- bzw. cosinusförmige Signale, die aufgrund ihrer spektralen Eigenschaften auch als **Single Tone**-Signale bezeichnet werden. Die Signalcharakteristika, die bei solchen Signalen von Interesse sind, sind die Signalfrequenz, die Amplitude und ggf. die Phasenlage des Signals bezogen auf ein Referenzsignal. Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt (vgl. Abb. 24 b)), wie sich eine mögliche **Amplitudenmodulation** eines Signals mittels Hilbert-Transformation erfassen läßt.

Sämtliche bisher betrachteten Signale wurden jedoch als **stationär** angenommen, d.h. eine mögliche Zeitabhängigkeit der Signalfrequenz wurde vernachlässigt. Eine wichtige Klasse von Signalen, die bisher ausgeklammert wurde, sind sogenannte **frequenzmodulierte** Signale, bei denen die in dem Signal enthaltene Information in Form einer Frequenzmodulation, d.h. in Form einer zeitlichen Änderung der Signalfrequenz, codiert ist (z.B. UKW-Signale).

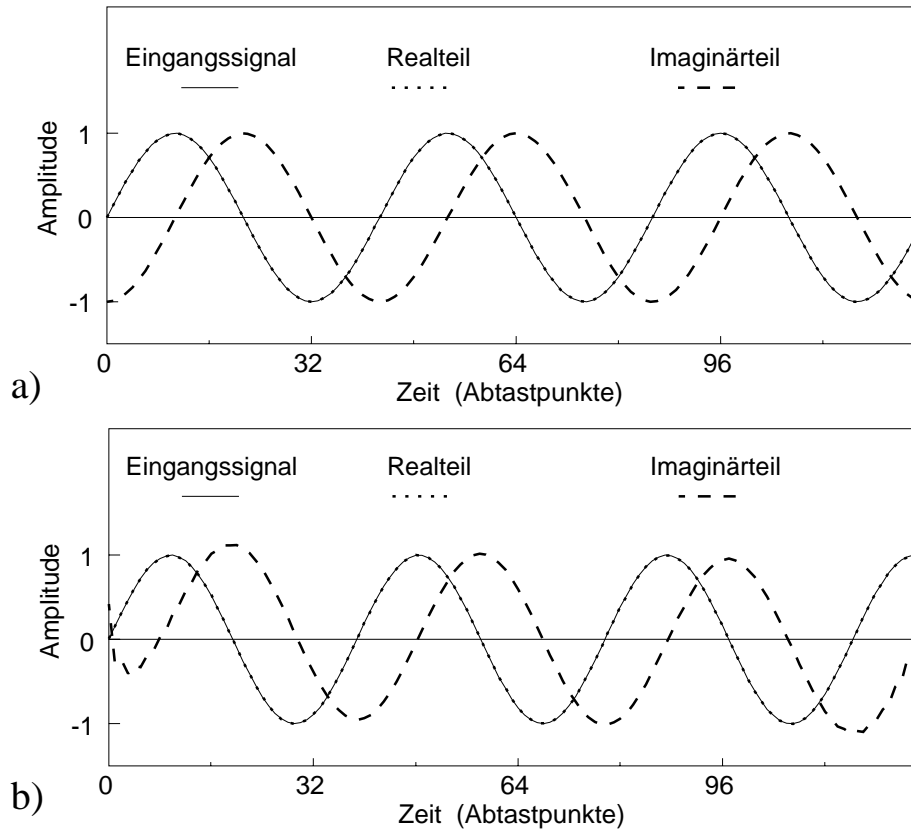
Da frequenzmodulierte Signale in der Praxis eine wichtige Rolle spielen, sollen in diesem Abschnitt ausgewählte Methoden eingeführt werden, mit denen sich eine mögliche Frequenzmodulation erfassen läßt. Als Beispiel zeigt Abbildung 26 a) ein **linear frequenzmoduliertes** Signal, bei dem sich die Signalfrequenz linear mit der Zeit erhöht. Auch die Signalamplitude steigt linear mit der Zeit an. In Abbildung 26 b) ist das Gegenteil der Fall: Frequenz und Amplitude nehmen linear mit der Zeit ab. Die Aufgabe der Signalanalyse besteht bei diesen Signalen darin, den zeitlichen Frequenz- und Amplitudenverlauf zu quantifizieren.

Zur mathematischen Beschreibung gehen wir von einem kontinuierlichen reellen Zeitsignal der allgemeinen Form

$$s(t) = s_0(t) \cos(\phi(t)) \tag{82}$$



**Abb. 24:** a) Analytisches Signal  $a_n$  bestehend aus Realteil (durchgezogen) mit 30 Perioden im Abtastfenster und Imaginärteil (gepunktet), der durch diskrete Hilbert-Transformation erzeugt wurde, b) der Betrag  $|a_n|$  gibt den Verlauf der Hüllkurve, d.h. der Amplitude, des Signals an, c) zeigt den Phasenverlauf  $\phi_n$ .



**Abb. 25:** Analytische Signale für ein sinusförmiges Eingangssignal erzeugt durch diskrete Hilbert Transformation a) bei 3,0 Signalperioden im Abtastfenster und b) bei 3,3 Signalperioden im Abtastfenster ( $N=128$ ).

aus, bei dem die zeitabhängige Amplitude durch die Funktion  $s_0(t)$  repräsentiert wird und die Phase durch  $\phi(t)$ . Die zeitabhängige Frequenz  $f(t)$  ist proportional zur zeitlichen Ableitung der Phasenfunktion:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}. \quad (83)$$

Ein cosinusförmiger Signalverlauf, wie er durch Gl.(74) beschrieben wird, setzt voraus, daß die Phasenfunktion  $\phi(t)$  linear von der Zeit abhängt.

Ist die Phasenfunktion durch

$$\phi(t) = 2\pi f_0 t \left(1 + \frac{\Delta f}{2} t\right) + \phi_0 \quad (84)$$

gegeben, so resultiert wegen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = f_0 (1 + \Delta f t) \quad (85)$$

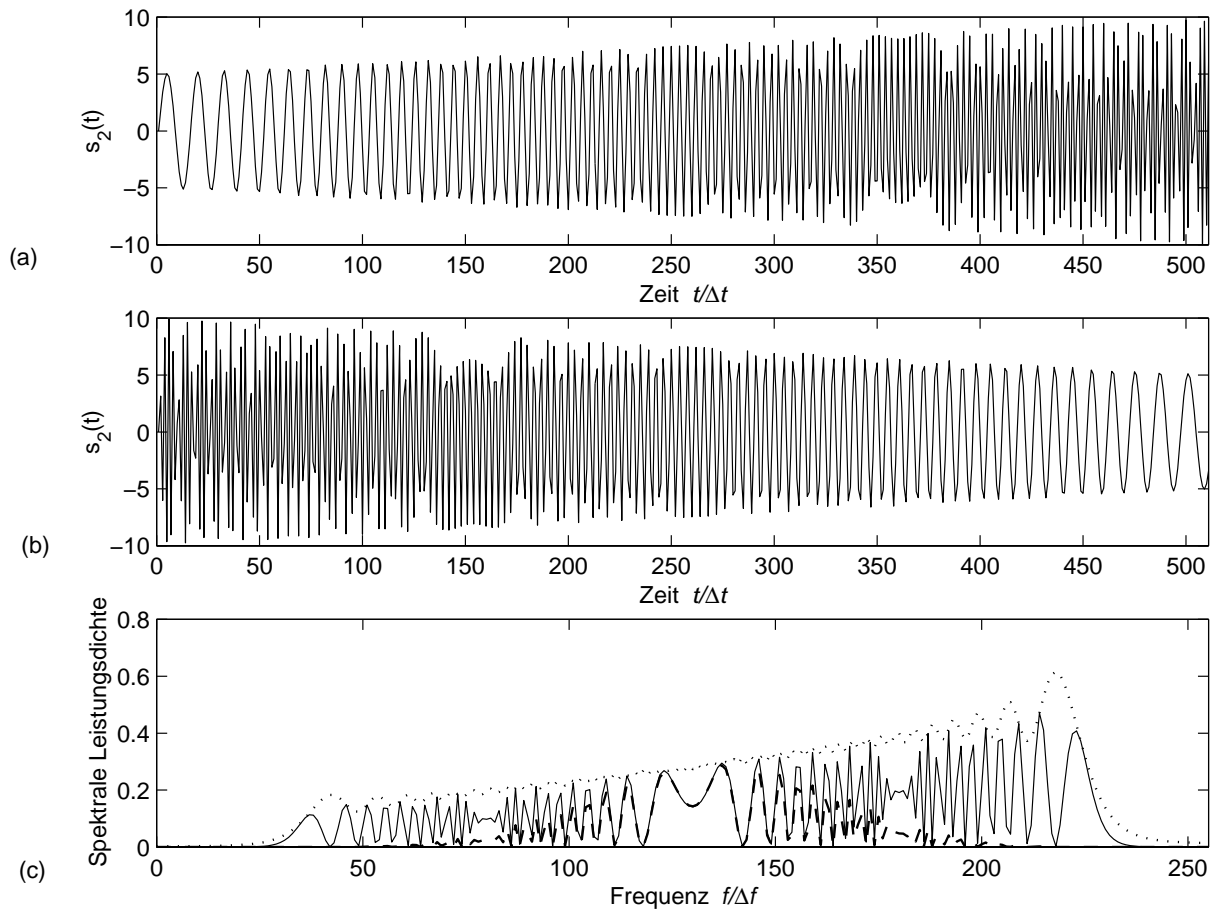
eine lineare zeitliche Frequenzabhängigkeit (vgl. Abb. 26 a) und b)). Das zu einem frequenzmodulierten Signal gehörende Leistungsdichtespektrum erstreckt sich i. allg. über einen größeren Frequenzbereich, wie Abb. 26 c) zeigt. In dem dargestellten Leistungsdichtespektrum ist zwar zu erkennen, daß die niederfrequenten Signalanteile eine geringere Amplitude haben als die höherfrequenten, allerdings läßt sich nicht unterscheiden, ob es sich um ein frequenzmoduliertes oder um ein breitbandiges stationäres Signal handelt.

Unter der Voraussetzung, daß das betrachtete Signal ein Single-Tone-Signal ist, kann diese Problematik auf der Grundlage der aus dem analytischen Signal resultierenden Phasenfunktion  $\phi_n$  gelöst werden. Der gemäß Gl.(76) bestimmte Phasenverlauf für das Signal aus Abb. 26 a) ist in Abb. 27 a) dargestellt. Es zeigt sich, daß das Zeitintervall, in dem sich die Signalphase um  $2\pi$  ändert, immer geringer wird. Durch „Phase-Unwrapping“ erhält man den in Abb. 27 b) gezeigten, stetigen Verlauf der Signalphase  $\phi_n$ , der sich offensichtlich durch eine Parabel beschreiben läßt. Numerisches Differenzieren der diskreten Funktion  $\phi_n$  liefert den gesuchten zeitlichen Frequenzverlauf.

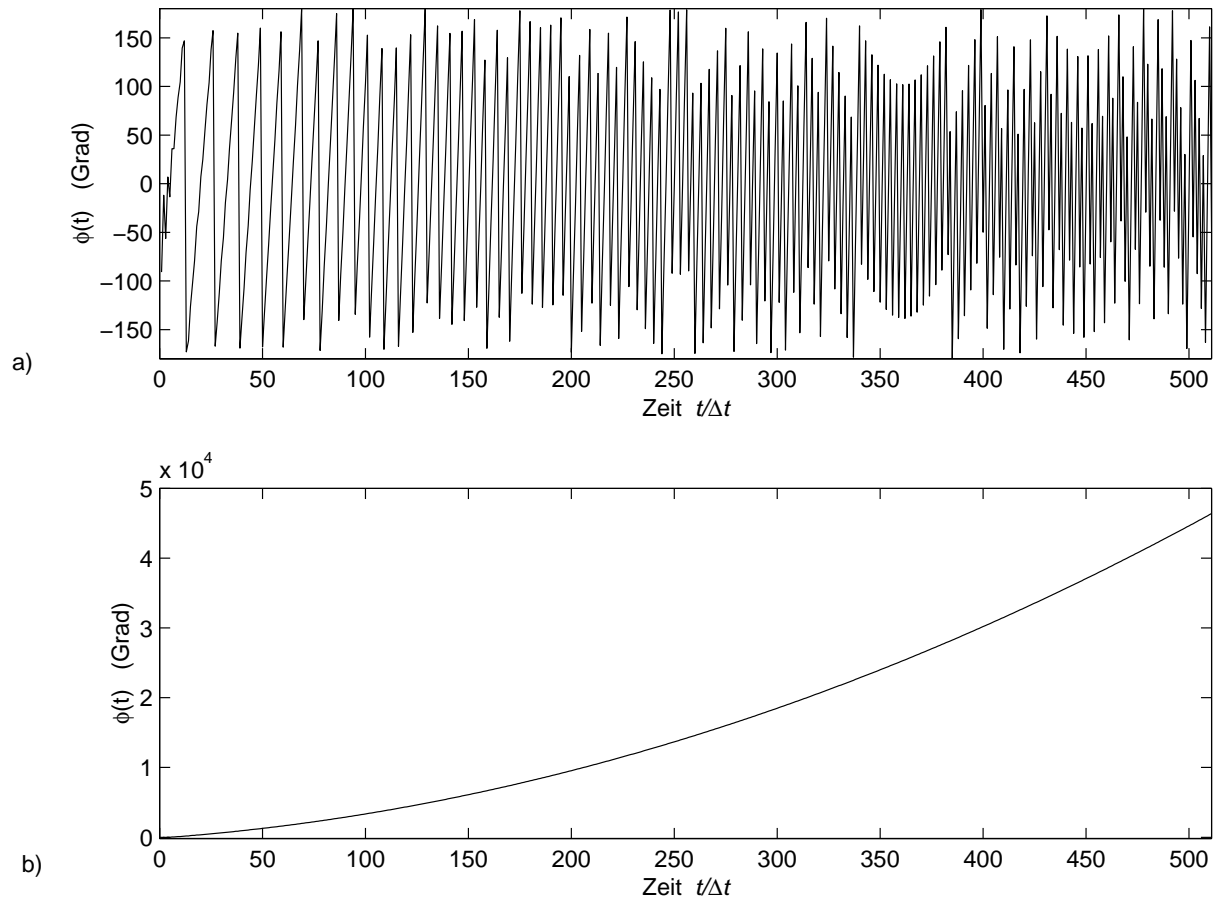
Da in praktischen Anwendungsfällen dem reinen Nutzsignal i. allg. ein mehr oder weniger großer Rauschanteil überlagert ist, stößt man bei der numerischen Differentiation vielfach auf das Problem, daß die Resultate, die das zeitliche Frequenzverhalten widerspiegeln sollen, extrem stark stochastisch fluktuieren.

Abhilfe kann in diesem Zusammenhang geschaffen werden, wenn man davon ausgehen kann, daß die zeitliche Frequenzänderung langsam erfolgt. In solchen Fällen kann der resultierende Verlauf von  $\phi_n$  z.B. durch ein Polynom zweiter Ordnung approximiert werden, welches auf analytischem Wege zu differenzieren ist. Für das linear frequenzmodulierte Signal aus Abb. 26 a) würde man bei dieser Vorgehensweise ebenfalls den linearen Frequenzanstieg ermitteln. Probleme sind hier allerdings z.B. bei cosinusförmig frequenzmodulierten Signalen zu erwarten.

Eine Alternative stellt in diesem Zusammenhang eine Methode dar, die unter dem Begriff **Kurzzeit-Fouriertransformation** bzw. **Short Time Fourier Transform** (STFT) bekannt ist. Das zu analysierende, aus  $N$  Abtastwerten bestehende Signal  $s_n$  wird hierbei zunächst mit einer Fensterfunktion multipliziert, die lediglich in einem Intervall  $M \Delta t$  ( $M \ll N$ ) Werte ungleich null annimmt. Das resultierende Produkt dient als Eingangsfunktion eines FFT-Algorithmus, mit dem z.B. die spektrale Leistungsdichte ermittelt wird.



**Abb. 26:** a) Beispielsignal  $s_1$  mit linear ansteigender Amplitude und Frequenz, b) Beispielsignal  $s_2$  mit linear abnehmender Amplitude und Frequenz, c) Leistungsdichtespektren für das Signal  $s_1$  (gepunktet) und für die Summe  $s_1 + s_2$  ohne Fensterfunktion (durchgezogen) und nach Multiplikation mit dem Hanning-Fenster (gestrichelt).



**Abb. 27:** *Resultat der Zeit-Frequenz-Analyse des Signals  $s_1$  (Abb. 26 a)) auf der Grundlage des durch Hilbert-Transformation ermittelten analytischen Signals.*

Die Lage dieses Fensters relativ zum Signal bestimmt nun den Zeitpunkt, dem das durch FFT ermittelte Spektrum zugeordnet wird.

Wird beispielsweise der erste von null verschiedene Wert der Fensterfunktion mit dem ersten Abtastwert ( $s(0 \Delta t)$ ) multipliziert so wird zwangsläufig das Zentrum der Fensterfunktion mit dem Abtastwert  $M/2$  multipliziert, d.h. die Fensterfunktion ist um die Position  $M/2$  zentriert. Um zu einer möglichst vollständigen „Zeit-Frequenz-Analyse“ zu gelangen, muß die Fensterfunktion alle Positionen zwischen  $M/2$  und  $N - M/2 - 1$  durchlaufen, und für jede dieser Fensterpositionen ist das Spektrum zu berechnen. Eine 3D-Darstellung, in der die resultierende spektrale Leistungsdichte über der jeweiligen Fensterposition aufgetragen wird, nennt man **Spektrogramm**. Ein solches Spektrogramm ist in Abbildung 28 dargestellt. Als Eingangssignal wurde die aus  $N = 512$  Abtastwerten bestehende Summe  $s_1 + s_2$  der beiden Signale aus den Abbildungen 26 a) und b) vorgegeben. Die Fensterfunktion bildete ein Hanningfenster mit  $M = 64$ , so daß Leistungsdichtespektren für die diskreten Zeitpunkte  $32 \Delta t$  bis  $479 \Delta t$  resultieren. Abb. 28 zeigt deutlich, daß das Eingangssignal zwei Signalanteile unterschiedlicher Frequenz und Amplitude enthält. Es ist auch zu erkennen, daß die Frequenz und die Amplitude des ursprünglich niederfrequenten Signalanteils linear mit der Zeit ansteigt, während die Frequenz und die Amplitude des ursprünglich hochfrequenten Signalanteils linear mit der Zeit abnimmt.

Hinsichtlich weiterer Methoden der Zeit-Frequenz-Analyse, die jedoch den Rahmen dieser Einführung sprengen, sei auf die Stichworte **Wigner-Ville-Spektralanalyse** und **Wavelet-Transformation** verwiesen.

## 5.4 Korrelationsanalyse

Eine ähnlich große Bedeutung wie das Leistungsdichtespektrum für die Signalanalyse im Frequenzbereich einnimmt, kommt bei der Zeitbereichsanalyse der Autokorrelationsfunktion (AKF) des Signals zu. Der gleich hohe Stellenwert dieser beiden Signalanalysemethoden läßt sich daran erkennen, daß gemäß dem Wiener-Khintchine-Theorem (Gl.(25)) das Leistungsdichtespektrum die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion darstellt (siehe auch Abschnitt 5.2.2).

### 5.4.1 Korrelationsfunktionen diskreter Signale

Für diskrete Signale nimmt die Gleichung zur Bestimmung der AKF die Form

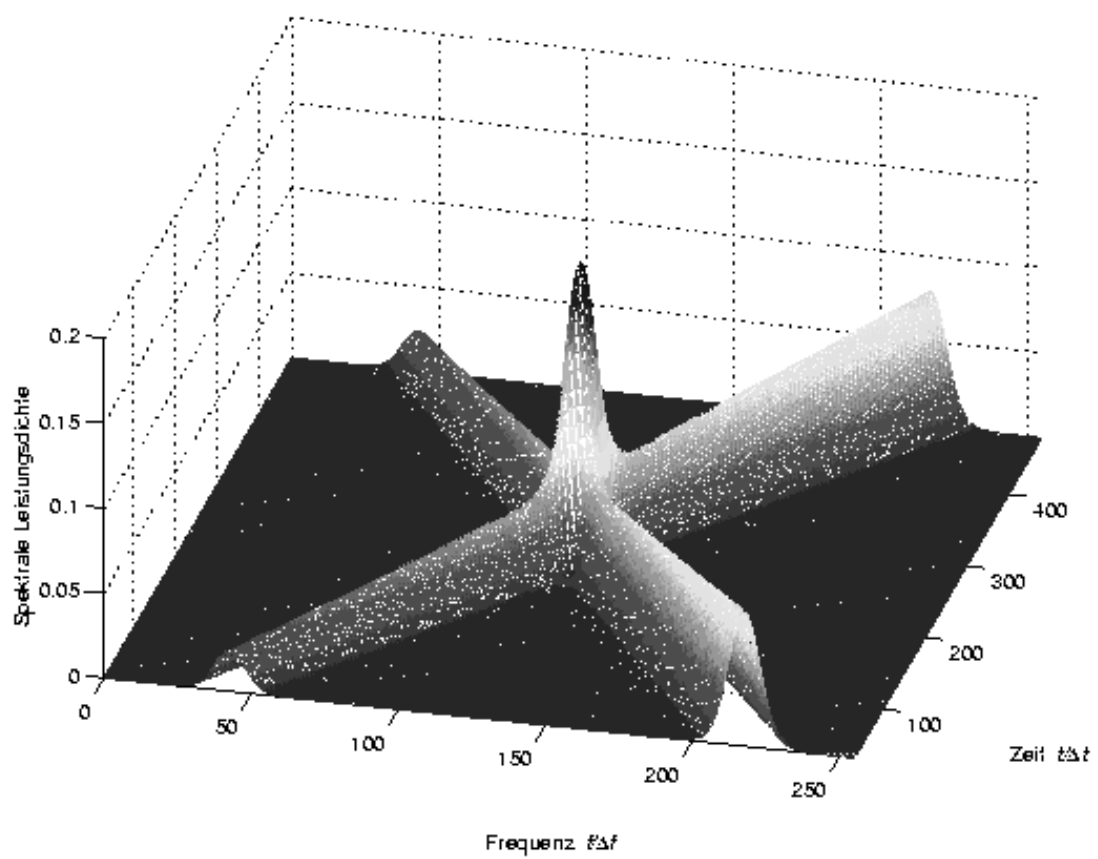
$$\rho_{xx}(m\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)x((n+m)\Delta t) \quad (86)$$

an, die bereits in Abschnitt 5.2.2 verwendet wurde.

Die Ähnlichkeit zweier aus je  $N$  Elementen bestehender Zahlenfolgen  $x_1$  und  $x_2$  wird durch den empirischen (**Kreuz-)** **Korrelationskoeffizienten**

$$r_{12} = \frac{\sum_{n=1}^N (x_{1n} - \bar{x}_1)(x_{2n} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (x_{1n} - \bar{x}_1)^2 \sum_{n=1}^N (x_{2n} - \bar{x}_2)^2}} \quad (87)$$

ausgedrückt, der Werte zwischen  $+1$  und  $-1$  annehmen kann. Mathematisch exakt handelt es sich bei dem Zähler von  $r_{12}$  um den **Kreuzkovarianzkoeffizienten**, da die arithmetischen



**Abb. 28:** Resultat der auf der Kurzzeit-Fourier-Transformation basierenden Zeit-Frequenz-Analyse (Spektrogramme) des Summensignals  $s_1 + s_2$  aus Abb. 26 a), b).



Mittelwerte von  $x_1, x_2, n \in \{1, \dots, N\}$  (in Gl.(87) mit  $\bar{x}_1$  bzw.  $\bar{x}_2$  bezeichnet) von den jeweiligen diskreten Einzelwerten abgezogen werden. Der Nenner stellt das Produkt der empirischen Standardabweichungen der beiden Folgen dar.

In praktischen Anwendungen der Korrelationsanalyse kommt es vor, daß zwei Datensätze eine zunächst unbekannte Verschiebung gegeneinander aufweisen. In diesen Fällen ist anstelle von einem einzigen Korrelationskoeffizienten die **diskrete Kreuzkorrelationsfunktion** zu berechnen:

$$r_{12}(m) = \frac{\sum_{n=1}^N (x_{1n} - \bar{x}_1)(x_{2(n+m)} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (x_{1n} - \bar{x}_1)^2 \sum_{n=1}^N (x_{2(n+m)} - \bar{x}_2)^2}} \quad (88)$$

Der Maximalwert dieser Kreuzkorrelationsfunktion gibt dann ein Maß für die maximale Ähnlichkeit der beiden Zahlenfolgen an.

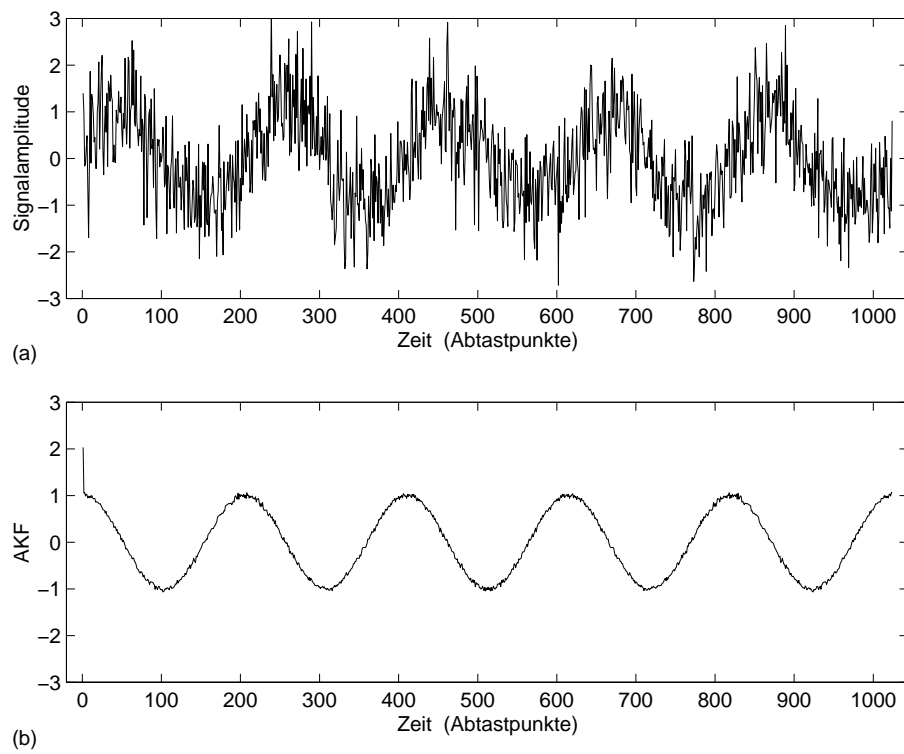
#### 5.4.2 Anwendungen der Korrelationsanalyse

Bezüglich konkreter Anwendungen der Korrelationsanalyse muß zwischen stochastischen und deterministischen Signalen unterschieden werden. Im Falle eines mit Rauschen beaufschlagten **deterministischen Signals**, z.B. eines Sinussignals, dessen Signalfrequenz ermittelt werden soll, erweist sich die Berechnung der Autokorrelationsfunktion als wirksames Mittel zur Rauschunterdrückung. Dies läßt sich in Abb. 29 erkennen, in der oben ein stark verrauschtes Sinussignal dargestellt ist und unten die zugehörige cosinusförmige AKF, die dieselbe Frequenz hat, wie das ursprüngliche Signal, jedoch weitaus weniger durch das Rauschen beeinflusst wird. Lediglich der erste Abtastwert der AKF, der die gesamte Signalleistung repräsentiert, zeigt einen deutlich größeren Wert als ein unverraushtes Sinussignal. Daß sich die gesamte Rauschleistung auf diesen einen Wert konzentriert, hängt damit zusammen, daß das Rauschsignal aus unabhängigen Pseudozufallszahlen bestand.

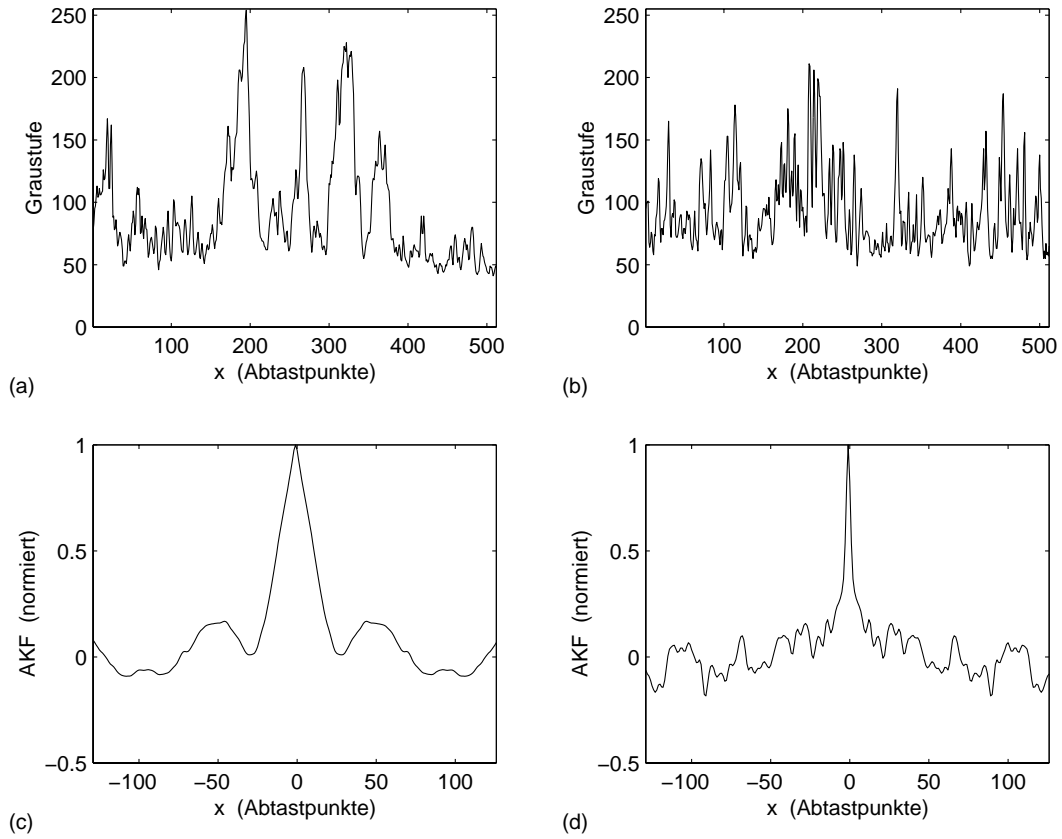
Ein Nachteil der Signalanalyse mittels AKF im Vergleich zur Fourieranalyse läßt sich ebenfalls aus dem Wiener-Khintchine-Theorem ableiten. Während die Fouriertransformierte eines Signals bestehend aus Real- und Imaginärteil bzw. aus Betrag und Phase die gesamte Signalinformation beinhaltet, so daß sich das Originalsignal wieder rekonstruieren läßt, geht bei der Bildung des Leistungsdichtespektrums und somit auch bei der Berechnung der Autokorrelationsfunktion die Phaseninformation verloren.

Der Nutzen der Korrelationsanalyse zur Ermittlung von Charakteristika **stochastischer Signale** zeigt sich in Abb. 30, in der zwei verschiedene stochastisch fluktuierende Lichtintensitätssignale und die zugehörigen Autokorrelationsfunktionen dargestellt sind. Das Signal gemäß Abb. 30 a) unterscheidet sich von dem Signal gemäß Abb. 30 b) dadurch, daß es eine geringere Anzahl von Intensitätsmaxima bei gleicher Skalierung der Abszisse umfaßt. Als Folge dieses Charakteristikums zeigt die AKF gemäß Abb. 30 c) eine größere Breite als die in Abb. 30 d) dargestellte AKF. Als Maß für die Breite einer AKF wird häufig die **Korrelationslänge** verwendet, die als der Wert auf der Abszisse der AKF definiert ist, an dem die AKF von ihrem Maximalwert auf das 1/e-fache dieses Wertes abgefallen ist.

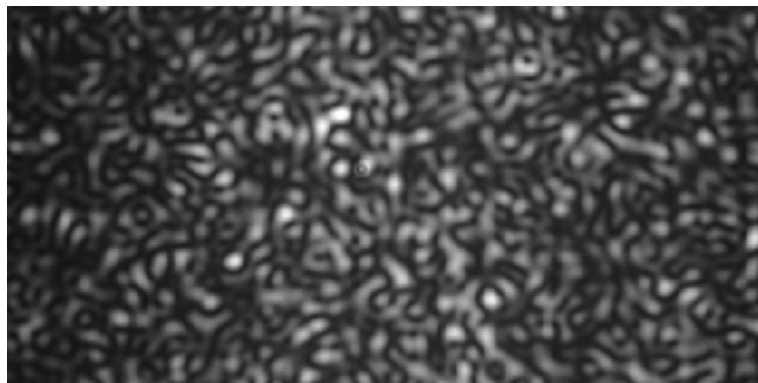
Als letzter Anwendungsbereich der Korrelationsanalyse sei die Ermittlung von Kreuzkorrelationsfunktionen bzw. von Korrelationskoeffizienten genannt, anhand derer sich zwei beliebige unterschiedliche Signale bezüglich ihrer „Ähnlichkeit“ beurteilen lassen. Dies soll an einem Beispiel aus der digitalen Bildverarbeitung demonstriert werden. Die Abbildungen 31 und



**Abb. 29:** Verrauschtes Sinussignal mit  $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$  (oben), zugehörige AKF mittels zweifacher FFT berechnet (unten).



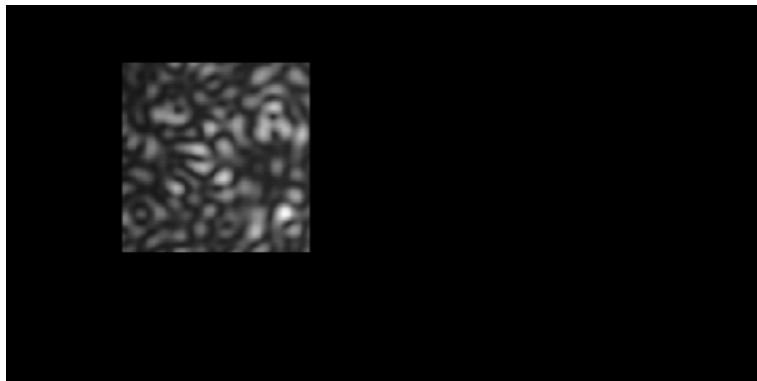
**Abb. 30:** *Stochastisch fluktuierende Intensitätssignale (als Grauwerte) (a) und (b) sowie die zugehörigen Autokorrelationsfunktionen (c) und (d).*



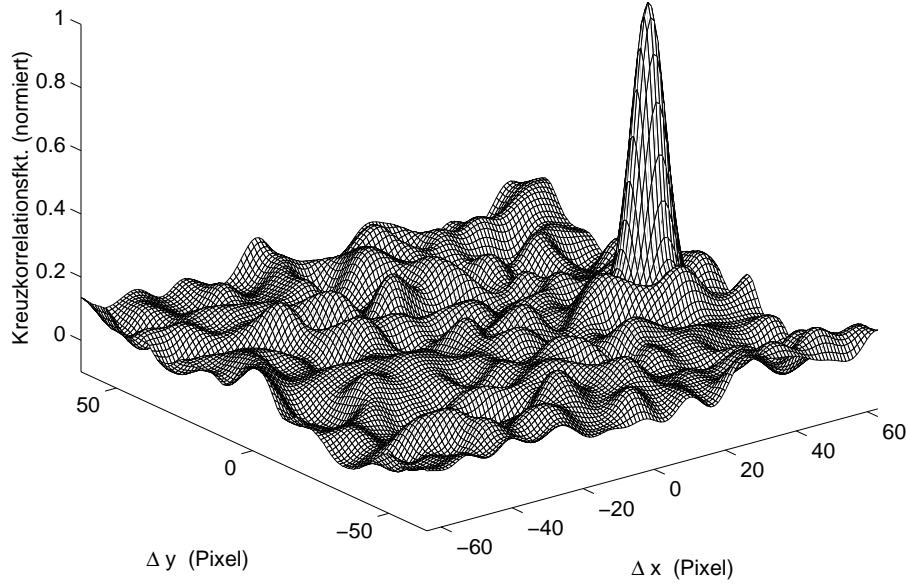
**Abb. 31:** *CCD-Aufnahme 1 ( $512 \times 256$  Pixel).*



**Abb. 32:** *CCD-Aufnahme 2 ( $512 \times 256$  Pixel).*



**Abb. 33:** *Ausgewählter Bereich aus Aufnahme 1 (Größe:  $128 \times 128$  Pixel).*



**Abb. 34:** Normierte 2D-Kreuzkorrelationsfunktion mit maximalem Korrelationskoeffizienten von 0,94 an der Pixelposition  $[45, -3]$ .

32 zeigen Ausschnitte von  $512 \times 256$  Pixeln Größe aus zwei unterschiedlichen, gegeneinander verschobenen CCD-Aufnahmen einer rauen Oberfläche, die mit kohärentem Laserlicht beleuchtet wurde. In Abb. 33 wurde ein Ausschnitt von  $128 \times 128$  Pixeln aus Abb. 31 gewählt. Dieses Bildsegment soll nun mittels Korrelationsanalyse in Abb. 32 wiedergesucht werden. Zu diesem Zweck werden von den beiden Bildern 31 und 32 zunächst die jeweiligen Intensitätsmittelwerte subtrahiert. Die Bilddaten aus Abb. 31 werden anschließend mit der entsprechenden Fensterfunktion gemäß Abb. 33 multipliziert, bei der die „schwarzen Pixel“ dem Funktionswert null entsprechen und der verbleibende Rest der Matrix mit dem Wert eins belegt wird. Die beiden Matrizen (Originalbild 32 abzüglich des Mittelwertes sowie Originalbild 31 abzüglich des Mittelwertes und nach Multiplikation mit der Fensterfunktion) werden nun jeweils einer 2D-Fouriertransformation gemäß der Gleichung

$$S_{k,l} = S(k \Delta f_x, l \Delta f_y) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} s_{n,m} e^{-j 2\pi (k n / N + l m / M)}, \quad (89)$$

die die Erweiterung von Gl.(44) auf zwei Dimensionen darstellt, unterzogen. Die Frequenzen  $\Delta f_x$  und  $\Delta f_y$  sind im Fall der Bildverarbeitung, bei der ein ortsabhängiges Eingangssignal transformiert wird, sogenannte **Ortsfrequenzen**. Gl.(89) läßt sich durch wiederholte Anwendung eines eindimensionalen FFT-Algorithmus numerisch berechnen. Als Resultat erhält man zwei komplexe Matrizen  $S_1(k \Delta f_x, l \Delta f_y)$  und  $S_2(k \Delta f_x, l \Delta f_y)$  mit  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ ,  $l \in \{0, \dots, M-1\}$  für die beiden Eingangsmatrizen der Größe  $M \times N$ . Für alle Elemente dieser Matrizen wird das Produkt  $S_1(k \Delta f_x, l \Delta f_y) S_2^*(k \Delta f_x, l \Delta f_y)$  berechnet. Die resultierende Matrix wird einer inversen 2D-FFT unterzogen. Diese Vorgehensweise führt gemäß

dem Faltungs- bzw. Korrelationstheorem auf die 2D-Kreuzkorrelationsfunktion der beiden Eingangsbilder. Abb. 34 zeigt einen Ausschnitt der auf den Maximalwert einer normierten 2D-Kreuzkorrelationsfunktion der oben beschriebenen Eingangs-Datensätze. Es ist ein ausgeprägter Peak zu erkennen, dessen  $xy$ -Position die Verschiebung der beiden Originalbilder (31 und 32) gegeneinander angibt. Außerhalb dieses Peaks nimmt die Kreuzkorrelationsfunktion bedingt durch die unterschiedliche Feinstruktur der beiden korrelierten Bildsegmente der Größe  $128 \times 128$  Pixel nur Werte zwischen 0,2 und  $-0,2$  an. Die große Ähnlichkeit der beiden zum Maximalwert der Kreuzkorrelationsfunktion führenden Bildausschnitte läßt sich anhand des Kreuzkorrelationskoeffizienten (siehe Gl.(87), wobei  $N$  die Gesamtzahl der Elemente der zu korrelierenden Datensätze repräsentiert, also hier  $128^2$ ) beurteilen, der in diesem Beispiel einen Wert von 0,94 annimmt.

## 6 Digitale Bildverarbeitung

Nachdem im vorigen Abschnitt bereits ein Beispiel aus der digitalen Bildverarbeitung zur Korrelationsanalyse vorgestellt wurde, dient dieser Abschnitt dazu, systematisch in die digitale Bildverarbeitung einzuführen. Dabei wird vorausgesetzt, daß das zu analysierende Bild digital vorliegt. Die Möglichkeiten, digitale Bilder zu erzeugen, sind äußerst vielfältig. Beispielsweise lassen sich digitale Bilder leicht am Rechner generieren. Mit Blick auf meßtechnische Anwendungen kann man davon ausgehen, daß mittels einer optischen Anordnung ein reales Bild erzeugt wird, welches z.B. von einer CCD-Kamera aufgezeichnet wird. Als Kamera-Ausgangssignal erhält man i. allg. ein Videosignal. Das Videosignal läßt sich mit Hilfe eines **Frame-Grabbers** in ein digitales Bild umwandeln, das dann numerisch analysiert werden kann. Beispiele für Standard-Bildformate sind das JPEG-, das TIFF- oder das BMP-Format. Abbildung 35 zeigt ein auf der Auswertung von Videobildern basierendes digitales Bildverarbeitungssystem.

### 6.1 Grundbegriffe der Bildverarbeitung

Zunächst werden die Grundbegriffe der Video- und CCD-Technik eingeführt:

**Videosignal** analoges (1-dimensionales) Zeitsignal mit V-sync. Pulsen, die ein neues Halbbild anzeigen und H-sync. Pulsen, die innerhalb eines Halbbildes jeweils den Beginn einer neuen Zeile markieren  
 (V-sync. = vertikale Synchronisation)  
 (H-sync. = horizontale Synchronisation)

**Videobild** aus dem Videosignal erzeugtes Bild, das aus zwei Halbbildern besteht, deren Zeilen sich abwechselnd zu einem Vollbild ergänzen  
 Erstes Halbbild: ungeradzahlige Zeilen  
 Zweites Halbbild: geradzahlige Zeilen

**Standards** CCIR: Comité Consultatif International de Radiocommunications, Europa, 625 Zeilen,  $1/25$  s  
 EIA: Electronics Industries Association (RS-170-Standard), USA, 525 Zeilen,  $1/30$  s

**Videotakt** (gemäß CCIR) 20 ms pro Halbbild, d.h. 40 ms pro Vollbild, also 50 bzw. 25 Hz Bildfolgefrequenz,  
die ersten 50 der 625 Zeilen enthalten das V-sync-Signal, d.h. für die Bildinformation stehen 575 Zeilen zur Verfügung

**Kammereffekt** Effekt, der aufgrund der ineinander verzahnten Halbbilder bei bewegten Objekten auftritt, Abhilfe: Progressive Scan Kameras

**CCD-Kamera** CCD=Charge Coupled Device

Die CCD-Kamera sammelt auf jedem Pixel des CCD-Chips proportional zur Anzahl der auftreffenden Photonen elektrische Ladungsträger an. Die gesamte auf einem Pixel freigesetzte Ladung entspricht dem Grauwert,

gängige Größen von CCD-Chips: 1/2" (6,4 x 4,8 mm<sup>2</sup>), 2/3" (8,8 x 6,6 mm<sup>2</sup>), 1/3" (4,2 x 3,6 mm<sup>2</sup>)

Faustregel für 1/2" -Chips:

2 Photonen erzeugen 1 Elektron

50.000 Elektronen liefern die Maximalamplitude des Videosignals von 1 V,

durch thermische Effekte werden zusätzliche Elektronen freigesetzt → Dunkelstrom → Rauschen

Abhilfe: Kühlen des CCD-Chips

**Elektronischer Shutter** Der elektronische Shutter bestimmt die Belichtungszeit (auch Integrationszeit) der CCD-Matrix. Die „Shutterzeit“ entspricht der Verschlusszeit. Typische Werte reichen bei Standard-CCD-Kameras von 1/50 s bis 1/100.000 s. Zusätzlich wird bei CCD-Kameras das Videosignal i.allg. verstärkt, um den gegebenen Dynamikbereich des Videosignal (0 bis 1 Volt) möglichst auszuschöpfen.

**Farbkameras** einfallendes Licht wird mit Hilfe von Filtern und Prismen in die Grundfarben Rot (R), Grün (G), Blau (B) zerlegt:

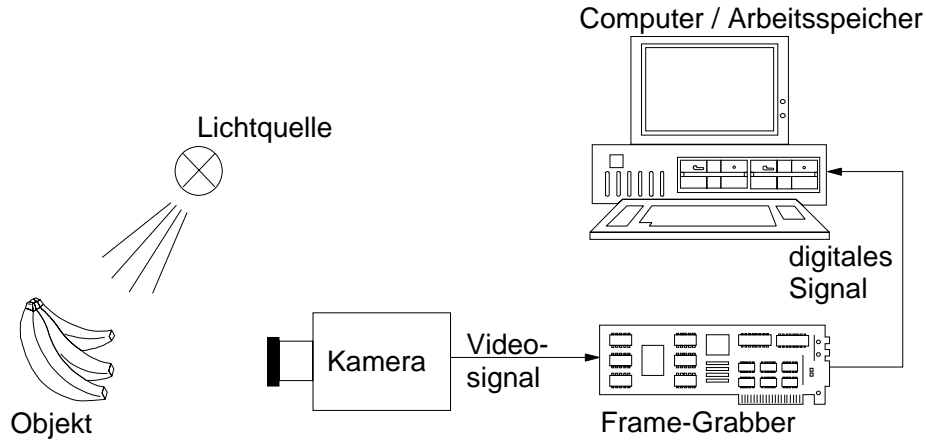
- 3-Chip-Kameras nehmen für jede Grundfarbe ein separates Bild auf, die drei Bilder werden zu einem RGB-Bild überlagert

- bei 1-Chip-Kameras verteilen kleine Filterstrukturen die Farben auf unterschiedliche Pixel

**Frame-Grabber** Ein Frame-Grabber ist eine Digitalisierungskomponente (i.allg. PC-Einsteckkarte), die das analoge Videosignal in ein digitales Bilddaten-Array umwandelt. Dabei wird das Videosignal mit einer Sample-and-Hold-Einheit abgetastet (Abtastfrequenz 14,75 MHz bei CCIR). Je nach Leistungsfähigkeit des Rechner Busses (z.B. ISA oder PCI) verfügt der Frame-Grabber entweder über einen eigenen Bildspeicher oder nur über einen FIFO-Buffer (wenige kbyte). Beim PCI-Bus werden die digitalisierten Bilddaten direkt im Arbeitsspeicher des Rechners abgelegt.

typische Pixelzahlen sind: 768 (Spalten) x 576 (Zeilen), bei 8-bit-Quantisierung resultiert ein Speicherbedarf von 768 x 576 x 1 Byte = 0,44 Megabyte für ein S/W-Bild und von 1,33 Megabyte für ein Farbbild

Ein Bild, das in digitaler Form vorliegt, läßt sich allgemein als Intensitätsfunktion zweier Ortsvariabler  $x$  und  $y$ , also  $I(x, y)$ , interpretieren. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten



**Abb. 35:** *Typisches Anwendungsbeispiel für ein auf der Auswertung von Videobildern basierendes digitales Bildverarbeitungssystem.*

Zeitsignalen tritt hier der Ort an die Stelle der Zeit als Variabler. Da es sich bei Bildern um Gebilde handelt, die sich über zwei Raumdimensionen erstrecken, werden zwei Ortskoordinaten, z.B. die kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$ , benötigt, um einen Ort im Bild genau zu lokalisieren.

Ähnlich wie bei der Digitalisierung von Zeitsignalen geht mit der Digitalisierung eines Bildes grundsätzlich eine Diskretisierung einher, d.h. die zunächst kontinuierliche Funktion  $I(x, y)$  wird in eine diskrete Funktion  $I(m \Delta x, n \Delta y)$  mit  $m \in \{1, \dots, M\}$ ,  $n \in \{1, \dots, N\}$  überführt. Das Resultat ist ein Pixelbild bestehend aus  $M \times N$  Pixeln der Größe  $\Delta x \Delta y$ , das sich durch eine  $N \times M$ -Matrix beschreiben läßt (siehe Abb. 36).<sup>4</sup> Bei der Digitalisierung von Bildsignalen wird die Bildintensität über die Pixelfläche aufintegriert. Dies steht im Gegensatz zu der bisher betrachteten Digitalisierung von Zeitsignalen, bei der die Diskretisierung darin bestand, daß ausschließlich zu den Abtastzeitpunkten dem Signal Abtastwerte entnommen wurden.

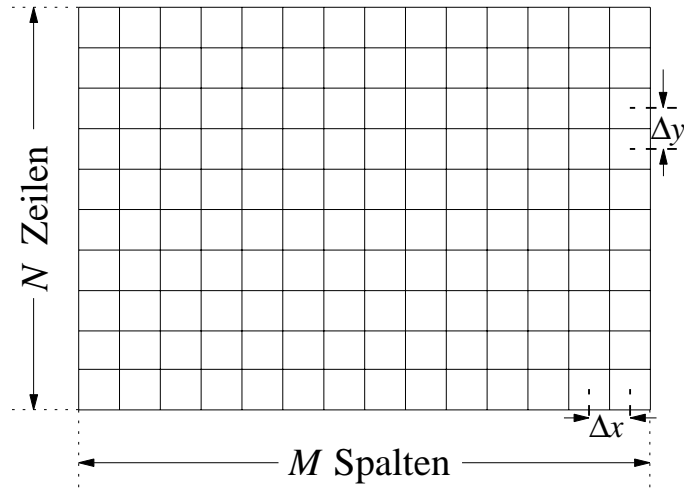
Bei der Digitalisierung eines Bildes erfolgt zunächst eine zweidimensionale Abtastung, die sich in Analogie zur Abtastung von Zeitsignalen durch eine Multiplikation des kontinuierlichen Intensitätssignals  $I(x, y)$  mit einem auf zwei Dimensionen erweiterten Dirac-Kamm der Form

$$\text{comb}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m \Delta x, y - n \Delta y)$$

beschreiben läßt. Hinzu kommt die Integration über die Pixelfläche, die mathematisch einer Faltung des punktwise abgetasteten Intensitätssignals  $I(x, y) \text{comb}(x, y)$  mit der durch die

<sup>4</sup>Vereinfachend wird hier und im weiteren angenommen, daß die zur Bildaufzeichnung verwendete Kamera einen **Füllfaktor** von 1 habe, so daß Pixelabstand und Pixelbreite jeweils identisch sind. Allgemein bezeichnet der Füllfaktor das Verhältnis aus photosensitiver Fläche zur gesamten von Pixeln überdeckten Fläche einer Kamera. Heutige CCD-Kameras erreichen Füllfaktoren von nahezu eins.





**Abb. 36:** Ein Pixelbild setzt sich aus  $N$  Zeilen und  $M$  Spalten zusammen, der Pixelabstand beträgt in horizontaler Richtung  $\Delta x$ , in vertikaler Richtung  $\Delta y$ .

Pixelgröße gegebenen Rechteckfunktion

$$\text{rect}(x/(\Delta x/2), y/(\Delta y/2)) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{\Delta x}{2} \leq x < \frac{\Delta x}{2}, -\frac{\Delta y}{2} \leq y < \frac{\Delta y}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (90)$$

entspricht.

Diese über die Pixelfläche integrierende Intensitätserfassung hat zur Konsequenz, daß das Spektrum des Bildes mit der Fouriertransformierten der Rechteckfunktion

$$\text{rect}(x/(\Delta x/2), y/(\Delta y/2))$$

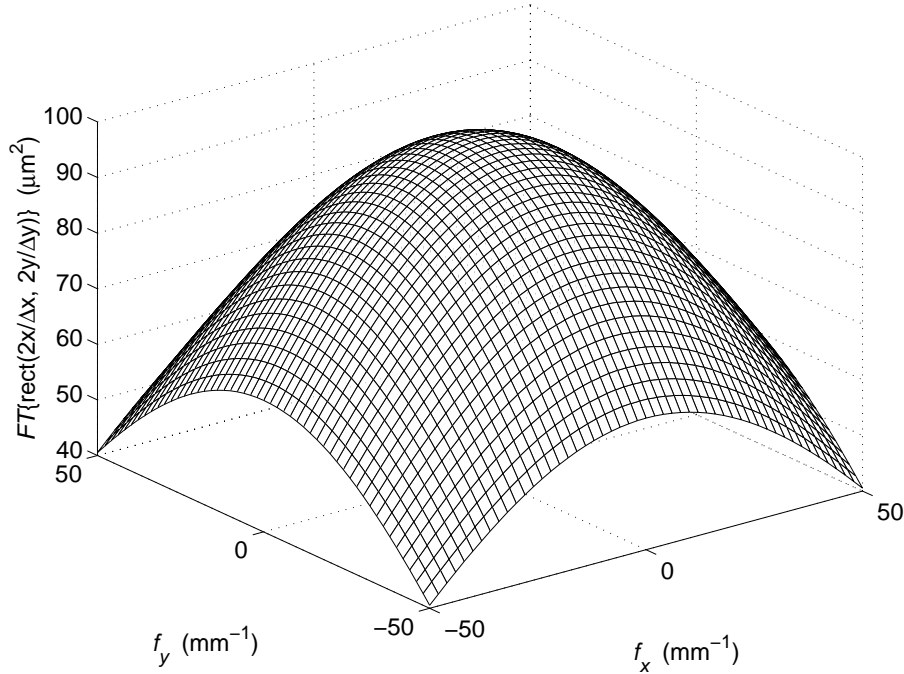
multipliziert wird. Die zugehörige zweidimensionale Fouriertransformierte ist in Abbildung 37 dargestellt. Die dadurch bedingte Abschwächung der hochfrequenten Signalanteile läßt sich kompensieren, in dem das Spektrum des digitalisierten Bildes mit der zu Abb. 37 reziproken Funktion multipliziert wird.

Liegt ein Bild in digitaler Form vor, so gibt es vielfältige Möglichkeiten, mittels digitaler Bildverarbeitung die Bildinformation zu analysieren oder das Bild zu manipulieren. Je nach Größe des Bildbereiches, auf den die einzelnen digitalen Operationen wirken, unterscheidet man zwischen

- Punktoperationen,
- lokalen Operationen,
- globalen Operationen.

In den folgenden Abschnitten werden diese unterschiedlichen Operationen anhand von Beispielen erläutert.

In der konventionellen Bildverarbeitung besteht das Ziel derartiger Operationen darin, zunächst eine **Segmentierung** und darauf basierend eine **Merkmalsextraktion** vorzunehmen. Bei der Segmentierung wird der interessierende Teil des Bildes, das „Objekt“, vom



**Abb. 37:** *Fouriertransformierte der durch ein quadratisches Pixel der Breite  $\Delta x = 10\mu\text{m}$  vorgegebenen Rechteckfunktion.*

Hintergrund separiert. Der Merkmalsextraktion kommt die Aufgabe zu, charakteristische Objekteigenschaften zu bestimmen, die es erlauben, das Objekt einer bestimmten Klasse zuzuordnen.

Beispielsweise kann die Aufgabe der Bildverarbeitung darin bestehen, Äpfel und Birnen zu identifizieren. Dafür ist „das Obst“ zunächst im Bild auszumachen (Segmentierung). Dann sind bestimmte Merkmale zu ermitteln (z.B. die Farbe, das Verhältnis aus der Länge der Umrandung zur Fläche des Objektes, das Verhältnis aus minimaler Ausdehnung zur maximalen Ausdehnung des Objektes), auf deren Grundlage zwischen „Apfel“ und „Birne“ unterschieden werden kann.

## 6.2 Punktoperationen

Punktoperationen stellen den einfachsten Fall der digitalen Bildverarbeitung dar. Ein zu einem Pixel, das durch die Koordinaten  $(m, n)$  der digitalen Bildmatrix festgelegt ist, gehörender Intensitätswert  $I_{\text{in}}(m, n)$  wird anhand einer Rechenvorschrift in einen neuen Intensitätswert  $I_{\text{out}}(m, n)$  umgerechnet. Der neu zugewiesene Grauwert hängt dabei ausschließlich von dem ursprünglichen Wert ab. Ein typisches Beispiel einer Punktoperation ist die Kontrastverstärkung. Der Kontrast  $K$  eines Bildes kann als

$$K = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{\Delta I_{\text{max}}}$$

definiert werden, wobei  $I_{\text{max}}$  den maximalen Intensitätswert des Bildes,  $I_{\text{min}}$  den minimalen und  $\Delta I_{\text{max}}$  die maximal mögliche Intensitätsdifferenz bezeichnet.

Bilder werden häufig mit einer Auflösung von 8 Bit digitalisiert. Das bedeutet, daß - im Fall eines Schwarz/Weiß-Bildes - Grauwerte zwischen 0 und 255 zur Verfügung stehen, wobei einem Grauwert 0 die Intensität 0 (schwarz) entspricht, einem Grauwert 255 die maximale Intensität (weiß).

Wird beispielsweise angenommen, ein reales Bild weise als maximalen Grauwert  $I_{\max}$  den Wert 150 auf, als minimalen Grauwert  $I_{\min}$  den Wert 50 auf, so resultiert für den Kontrast der Wert  $100/255$ . Der Kontrast ist maximal ( $K = 1$ ), wenn sich die gesamte Grauwertskala von 0 bis 255 in dem Bild wiederfindet. Dies läßt sich erreichen, wenn jeder Eingabe-Intensitätswert  $I_{\text{in}}(m, n)$  gemäß der Rechenvorschrift

$$I_{\text{out}}(m, n) = (I_{\text{in}}(m, n) - I_{\min}) * \Delta I_{\max} / (I_{\max} - I_{\min})$$

in einen Ausgabe-Intensitätswert  $I_{\text{out}}(m, n)$  überführt wird.

Mit  $\Delta I_{\max} = 255$  wird im obigen Beispiel der Eingangs-Intensitätswert  $I_{\min} = 50$  auf den Grauwert 0 abgebildet, der Eingangs-Intensitätswert  $I_{\max} = 150$  auf den Grauwert 255. Die dazwischen liegenden Werte werden gleichmäßig, d.h. linear, auf das Intervall  $0 < I < 255$  aufgeteilt, so daß der zur Verfügung stehende Wertebereich vollständig ausgenutzt wird.

Ist die Abbildungskennlinie, mit der die Abbildung der Eingangs-Grauwerte auf die Ausgangswerte beschrieben wird, nichtlinear, so spricht man von einer **Gammakorrektur** des Bildes, die durch einen  $\gamma$ -Wert mit  $0 < \gamma < \infty$  festgelegt ist. Wenn die Kennlinie zu größeren Intensitätswerten hin gewichtet ist, d.h. die Kennlinie zeigt mit der konkaven Seite nach oben (zweite Ableitg.  $> 0$ ), gilt  $\gamma < 1$ . Ist die Kennlinie zu kleineren Intensitätswerten gewichtet, d.h. die Kennlinie zeigt mit der konkaven Seite nach unten, so gilt  $\gamma > 1$ . (Für eine lineare Kennlinie folgt also  $\gamma = 1$ .)

Ein weiteres Beispiel einer Punktoperation ist die **Binarisierung** eines Pixelbildes. Dabei wird ein Schwellwert  $I_0$  festgelegt und die vorhandenen Intensitätswerte werden gemäß der Rechenvorschrift

$$I_{\text{out}}(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{für } I_{\text{in}}(m, n) \geq I_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

umgerechnet. Das resultierende Binärbild besteht folglich nur noch aus zwei Graustufen, nämlich 0 und 1.

## 6.3 Lokale Operationen

Lokale Operationen sind solche, bei denen zusätzlich zu dem Eingangswert  $I_{\text{in}}(m, n)$  auch die Intensitätswerte in der Nachbarschaft des an der Position  $(m, n)$  lokalisierten Pixels zur Berechnung des Ausgangswertes herangezogen werden. Der Ausgangswert muß dabei nicht dieselbe physikalische Bedeutung haben wie die Eingangs-Intensitätswerte.

### 6.3.1 Maskenkorrelation

Ein Beispiel einer lokalen Operation ist die in Abschnitt 5.4.2 beschriebene Kreuzkorrelation zwischen einem lokal begrenzten Bildbereich (in dem Beispiel aus Abschnitt 5.4.2  $128 \times 128$  Punkte) und einer Maske (die im Beispiel aus Abschnitt 5.4.2 durch den Bildausschnitt gemäß Abb. 33 repräsentiert wird). Die Ausgangswerte dieser lokalen Operation sind die

Funktionswerte der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion gemäß Gl.(88). Es liegt nahe, daß eine Kreuzkorrelation mit einer vorgegebenen Maske zur Mustererkennung verwendet werden kann. Beispielsweise lassen sich auf diese Weise Buchstaben identifizieren. Damit ein entsprechender Algorithmus problemlos funktioniert, sollte jedoch die Schriftart der Maske mit der des zu identifizierenden Buchstabens übereinstimmen. Ferner sind die Schriftgrößen aneinander anzupassen.

### 6.3.2 Grauwertglättung

Ein weiteres wichtiges Beispiel einer lokalen Operation stellt ein **Median-Filter** dar. In praktischen Anwendungen kommt es häufig vor, daß die Intensitätswerte einzelner Pixel „ausreißen“. Diesen Effekt bezeichnet man als „Salz-und-Pfeffer-Rauschen“. Ein Median-Filter hat die Aufgabe, das „Salz-und-Pfeffer-Rauschen“ zu unterdrücken. Dabei wird ein lokaler Bildbereich mit ungerader Zeilen- und Spaltenanzahl gewählt, in dessen Zentrum sich das zu ersetzende Pixel befindet, z.B. ein Bereich von  $3 \times 3$  Pixeln mit dem zu filternden Pixel in der Mitte (vgl. Abb. 38). Sodann werden die Grauwerte dieses Bereichs gemäß der Häufigkeit ihres Auftretens in Klassen eingeteilt. Der Grauwert des zu filternden Pixels wird durch den Grauwert, der innerhalb des lokalen Bereiches am häufigsten auftritt, ersetzt. Auf diese Weise lassen sich einzelne „Ausreißer“ mit großer Zuverlässigkeit eliminieren.

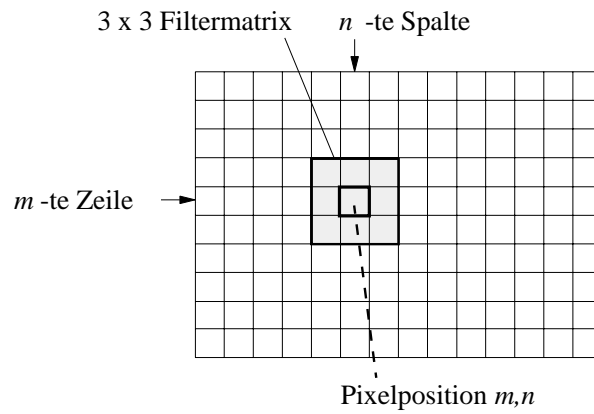
Wird die digitale Filterung, die in Abschnitt 5.1 behandelt wurde, auf zwei Dimensionen erweitert, so handelt es sich ebenfalls um eine (vielfach ausgeführte) lokale Operation, bei der ein räumlich begrenzter Bildbereich mit Hilfe einer Gewichtsfunktion, der charakteristischen Filterfunktion, in einen neuen Grauwert umgerechnet wird. Ein auf diese Weise realisiertes Tiefpaßfilter entspricht einer „gleitenden Mittelwertbildung“ und führt letztlich zu einer Grauwertglättung.

### 6.3.3 Kantenfilterung

Eine häufige Aufgabe der digitalen Bildverarbeitung besteht darin, in einem aufgenommenen Bild Objekte zu identifizieren, die sich aufgrund ihres mittleren Grauwertes von der Umgebung abheben. Zu diesem Zweck ist im Bild die „Umrandung“ eines interessierenden Objektes zu bestimmen, z.B. die Lage des Winkels in Abb. 39. Dies wird durch sogenannte **Kantenfilter** realisiert.

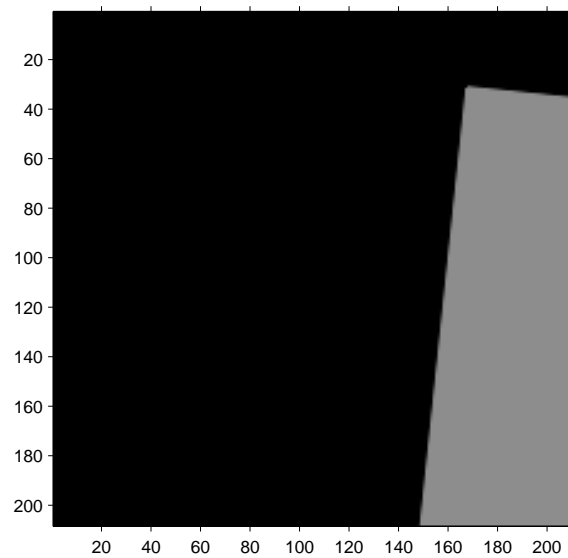
Die Kantenfilterung ist in diesem Zusammenhang - ähnlich wie die oben erwähnte digitale Filterung - als diskrete Faltung des Eingangsbildes mit einer Filtermatrix von geringer Ausdehnung, z.B.  $3 \times 3$  Matrix, zu verstehen. Dabei wird die Filtermatrix um die Pixelposition zentriert, für die ein neuer Ausgangswert berechnet werden soll (vgl. Abb. 38). Im zweiten Schritt werden die sich überlappenden Elemente der Bildmatrix und der Filtermatrix miteinander multipliziert und die resultierenden Produkte werden aufaddiert, so daß schließlich der Ausgangswert resultiert.

Durch ein Kantenfilter läßt sich ein Grauwertsprung in einer durch die **Filtermatrix** festgelegten Richtung feststellen. Die Filtermatrix wird dabei so definiert, daß die Ausgangsmatrix z.B. für Bildpositionen, an denen Grauwertsprünge von „dunkel“ nach „hell“ auftreten, Werte  $\gg 0$  aufweist, für Bildpositionen, an denen Grauwertsprünge von „hell“ nach „dunkel“



**Abb. 38:** *Filterung eines Eingangsbildes mit Hilfe einer  $3 \times 3$  Filtermatrix, in deren Zentrum sich das zu filternde Pixel mit der Pixelposition  $(m,n)$  befindet.*

auftreten, Werte  $\ll 0$  aufweist, während die Ausgangswerte für Bereiche konstanter Grauwerte des Eingangsbildes  $\approx 0$  sind.



**Abb. 39:** *Eingabebild.*

Um horizontale Kanten zu detektieren, kann die Filtermatrix  $F_h$  wie folgt definiert werden:

$$F_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

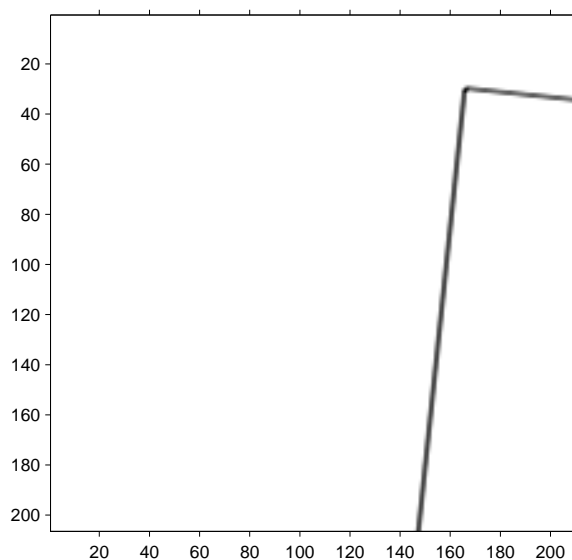
Diese Filtermatrix ist unter dem Begriff **Sobel-Filter** bekannt.

Analog können vertikale Kanten mit Hilfe der Filtermatrix

$$F_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

detektiert werden.

Abb. 40 zeigt das Resultat der Kantenfilterung von Bild 39. Das dargestellte Ergebnis zeigt die Summe aus der Kantenfilterung mit der Filtermatrix  $F_h$  in horizontaler Richtung und der Filtermatrix  $F_v$  in vertikaler Richtung. Die in Abb. 40 schwarz dargestellte Linie gibt den sichtbaren Teil der Umrandung des Objektes in Abb. 39 wieder.



**Abb. 40:** *Resultat der Kantenfilterung mit dem Sobel-Filter.*

## 6.4 Globale Operationen

Globale Operationen basieren auf allen Pixeln des Eingabebildes. Einfache Beispiele für globale Operationen sind die Bildung des arithmetischen Mittelwertes aller Grauwerte eines Bildes oder die Berechnung des Grauwert-Histogramms.

Zwei weitere Beispiele, die zweidimensionale Fouriertransformation und die Radon-Transformation, werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

### 6.4.1 2D-Fouriertransformation

Ein wichtiges Beispiel einer globalen Operation ist die diskrete Fouriertransformation (DFT) in ihrer Erweiterung auf zwei Dimensionen. Die Definitionsgleichung der 2D-DFT wurde bereits in Abschnitt 5.4.2, Gl. (89) angegeben.

Die 2D-DFT ist die diskrete Form der kontinuierlichen 2D-Fouriertransformation, die durch die Gleichung

$$G(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi f_x x} e^{-j2\pi f_y y} dx dy \quad (91)$$

beschrieben wird. Die inverse 2D-Fouriertransformation folgt dementsprechend der Gleichung:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) e^{j2\pi f_x x} e^{j2\pi f_y y} df_x df_y. \quad (92)$$

Als Beispiel sei in diesem Zusammenhang erneut die Fouriertransformierte  $\text{RECT}(f_x, f_y)$  der zweidimensionalen Rechteckfunktion gemäß Gl.(90) angeführt, für die gilt:

$$\begin{aligned} \text{RECT}(f_x, f_y) &= \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} e^{-j2\pi f_x x} e^{-j2\pi f_y y} dx dy \\ &= \Delta x \Delta y \frac{\sin(2\pi f_x \Delta x/2)}{2\pi f_x \Delta x/2} \frac{\sin(2\pi f_y \Delta y/2)}{2\pi f_y \Delta y/2} \\ &= \Delta x \Delta y \text{sinc}(2\pi f_x \Delta x/2) \text{sinc}(2\pi f_y \Delta y/2) \end{aligned} \quad (93)$$

Das Ergebnis ist mit  $\xi = 2\pi f_x \Delta x/2$  und  $\eta = 2\pi f_y \Delta y/2$  in Abb. 41 dargestellt (der Vorfaktor  $\Delta x \Delta y$  wurde gleich 1 gesetzt). Es ist eine Erweiterung der Fouriertransformierten einer eindimensionalen Rechteckfunktion: Die Rechteckfunktion in  $x$ -Richtung ruft die sinc-Funktion in  $\xi$ -Richtung hervor, die Rechteckfunktion in  $y$ -Richtung die sinc-Funktion in  $\eta$ -Richtung. (Abb. 37 stellt einen Ausschnitt aus Abb. 41 in der Umgebung des Ursprungs der Ortsfrequenzebene dar. Die Größe dieses Ausschnitts ergibt sich gemäß dem Abtasttheorem aus der maximalen Ortsfrequenz für ein gegebenes Abtastintervall, d.h. für einen gegebenen Pixelabstand)

Die Bedeutung der 2D-Fouriertransformation für die Bildverarbeitung wird anhand der Bildfolge 42 bis 45 deutlich. Das Eingangsbild (Abb. 42) setzt sich aus drei dominierenden Geometrieelementen zusammen:

1. einer von oben links nach unten rechts schraffierten, näherungsweise rechteckigen Fläche,
2. einer von unten links nach oben rechts schraffierten, vorwiegend horizontal verlaufenden Fläche,
3. einer einfarbigen Grundfläche mit zwei kleineren ovalen Elementen.

Abb. 43 zeigt den mittels FFT berechneten Betrag der Fouriertransformierten der Eingangsbildmatrix. Der Ursprung der  $f_x, f_y$ -Ebene liegt in der Bildmitte.

Bei der 2D-DFT werden im Prinzip dieselben Mechanismen wirksam, die bereits im Zusammenhang mit der Signalverarbeitung erläutert wurden. Die 1. Fläche läßt sich vereinfacht als Produkt einer 2D-Rechteckfunktion mit einer schräg verlaufenden Sinusfunktion, die die Schraffur repräsentiert, interpretieren. Gemäß dem Faltungstheorem entspricht dies im Ortsfrequenzbereich einer Faltung der Fouriertransformierten der 2D-Rechteckfunktion (vgl. Abb. 41) mit drei  $\delta$ -Peaks, einem am Koordinatenursprung (bedingt durch den Offset), einem bei der positiven Ortsfrequenz der Sinusfunktion (im rechten oberen Quadranten von

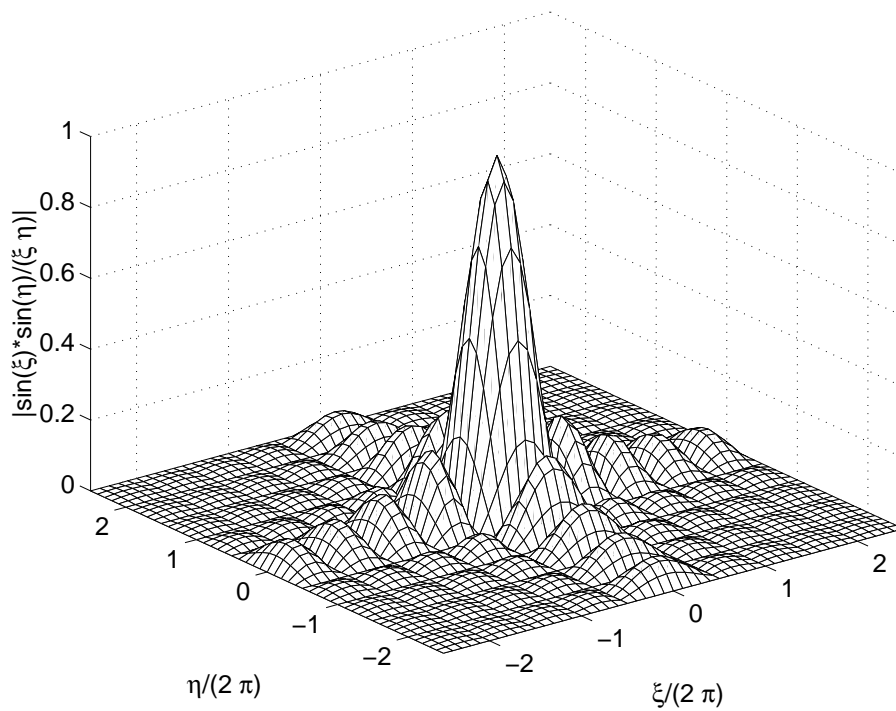


Abb. 41: *Absolutbetrag der 2D-Fouriertransformierten einer Rechteckfunktion.*

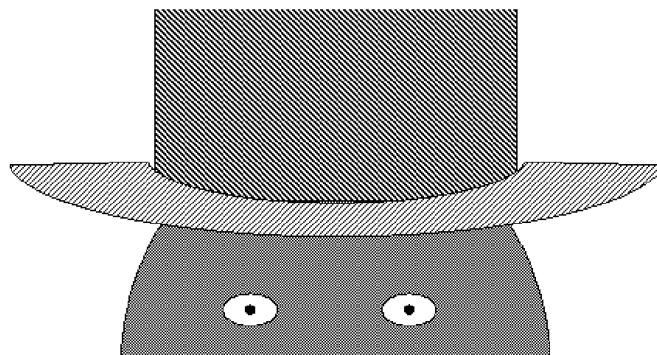
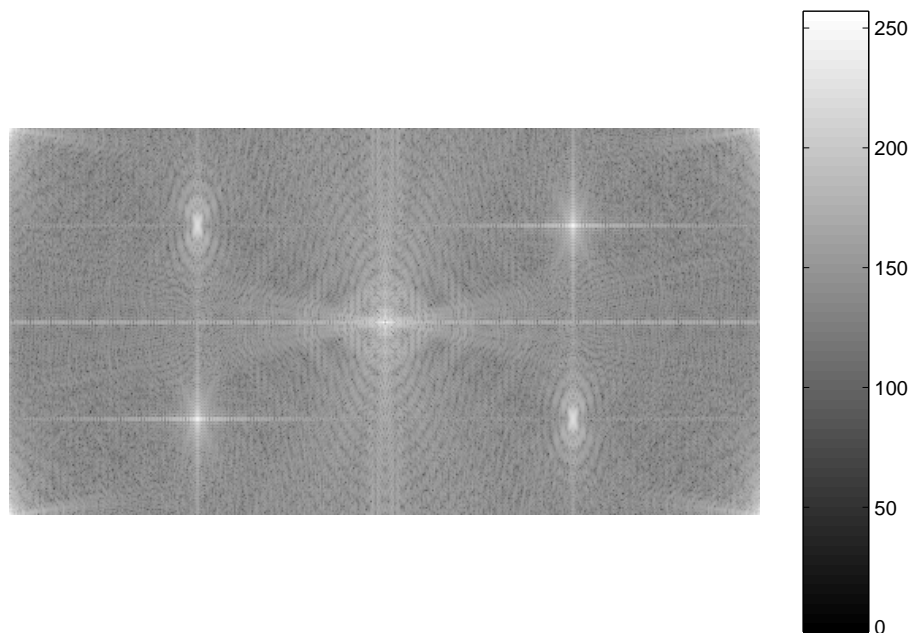


Abb. 42: *Eingangsbild.*



Abb. 43) und einem bei der negativen Ortsfrequenz der Sinusfunktion (im linken unteren Quadranten von Abb. 43). Deutlich sind im rechten oberen Quadranten und im linken unteren Quadranten von Abb. 43 die 2D-sinc-Funktionen als Kreuze zu erkennen.



**Abb. 43:** Betrag der 2D-Fouriertransformierten des Eingangsbildes.

Analog entstehen durch die Schraffur der 2. größeren Fläche in Abb. 42  $\delta$ -Peaks in der Mitte des linken oberen Quadranten und in der Mitte des rechten unteren Quadranten von Abb. 43. Die dort sichtbare Struktur entspricht der 2D-Fouriertransformierten der zugehörigen Fläche.

Die dritte, näherungsweise einfarbige Fläche zeigt keine höherfrequenten Anteile. Die 2D-Fouriertransformierte dieser Fläche nimmt daher nur in der Umgebung des Ursprungs der Ortsfrequenzebene von null verschiedene Werte an.

In Abb. 44 werden alle höherfrequenten Bildanteile, die außerhalb des erkennbaren Kreises um den Ursprung der Ortsfrequenzebene liegen, gleich null gesetzt. Damit wird die Bilddaten-Menge auf einen Bruchteil des ursprünglichen Umfangs reduziert.

Das Ergebnis der Rücktransformation des auf diese Weise gefilterten Eingangsbildes ist in Abb. 45 dargestellt. Die wesentlichen Geometrieelemente bleiben erhalten, die hochfrequenten Feinstrukturen (Schraffuren) wurden jedoch herausgefiltert. Auch die mittleren Grauwerte der drei dominierenden Flächenelemente haben sich geändert.

Das Beispiel offenbart eine Reihe von Anwendungsmöglichkeiten der FFT in der Bildverarbeitung:

- die Analyse charakteristischer Strukturen des Bildes in der Ortsfrequenzebene,
- die gezielte digitale Filterung des Bildes,
- die Kompression von Bilddaten z.B. zur Reduzierung der benötigten Speicherkapazität.

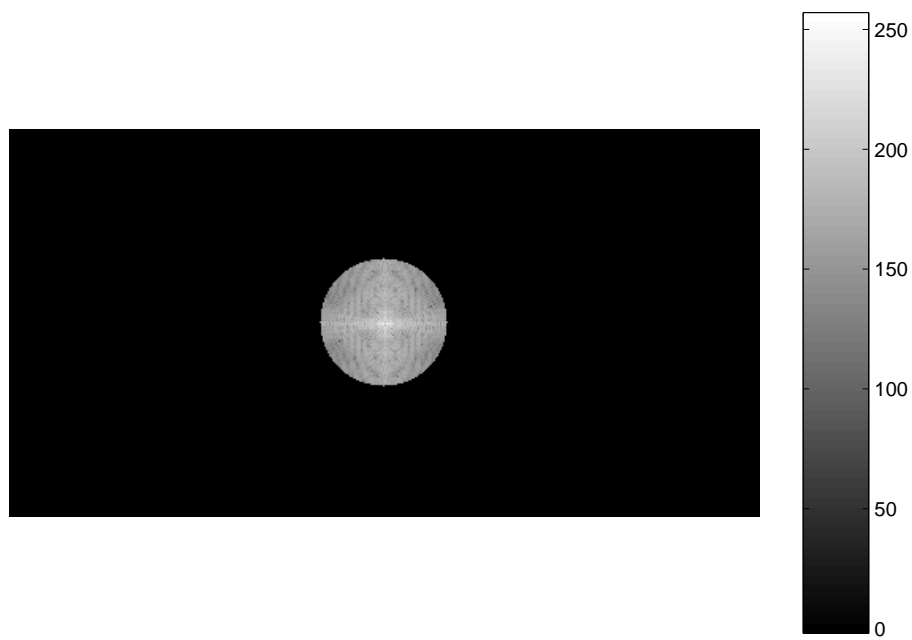


Abb. 44: *Multiplikation mit 2D-Tiefpaß-Filterfunktion.*

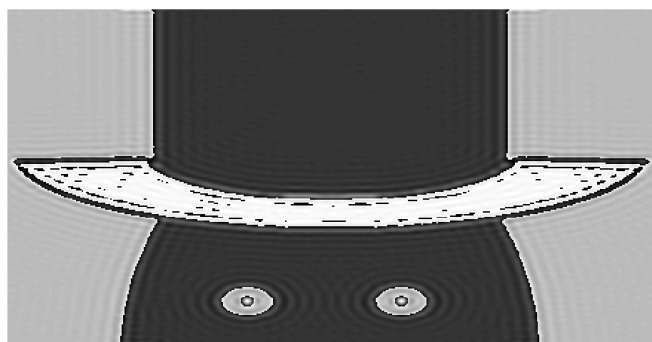


Abb. 45: *Resultat nach Rücktransformation.*

Wie in Abschnitt 5.4.2 demonstriert, erweist sich die FFT darüber hinaus auch als nützliches Hilfsmittel zur schnellen Berechnung von 2D-Korrelationsfunktionen.

### 6.4.2 Radon-Transformation

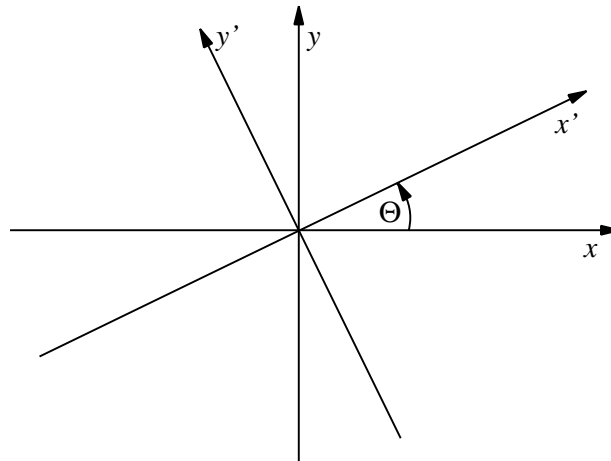
Insbesondere bei Bildern wie Abb. 40, in denen Linien als charakteristische Merkmale zu erkennen sind, bietet sich die Bildanalyse mittels der Radon-Transformation an. Die Matrix  $g$  der Bilddaten wird dabei erneut als Funktion der beiden Variablen  $x$  und  $y$  aufgefaßt, d.h.  $g = g(x, y)$ . Die der Radon-Transformation zugrunde liegende Geometrie ist in Bild 46 dargestellt. Die Radon-Transformierte  $R_\Theta(x')$  der Funktion  $g(x, y)$  berechnet sich wie folgt:

$$R_\Theta(x') = \int_{-\infty}^{\infty} g(x', y') dy', \quad (94)$$

mit  $x' = x \cos \Theta + y \sin \Theta$  und  $y' = y \cos \Theta - x \sin \Theta$ .

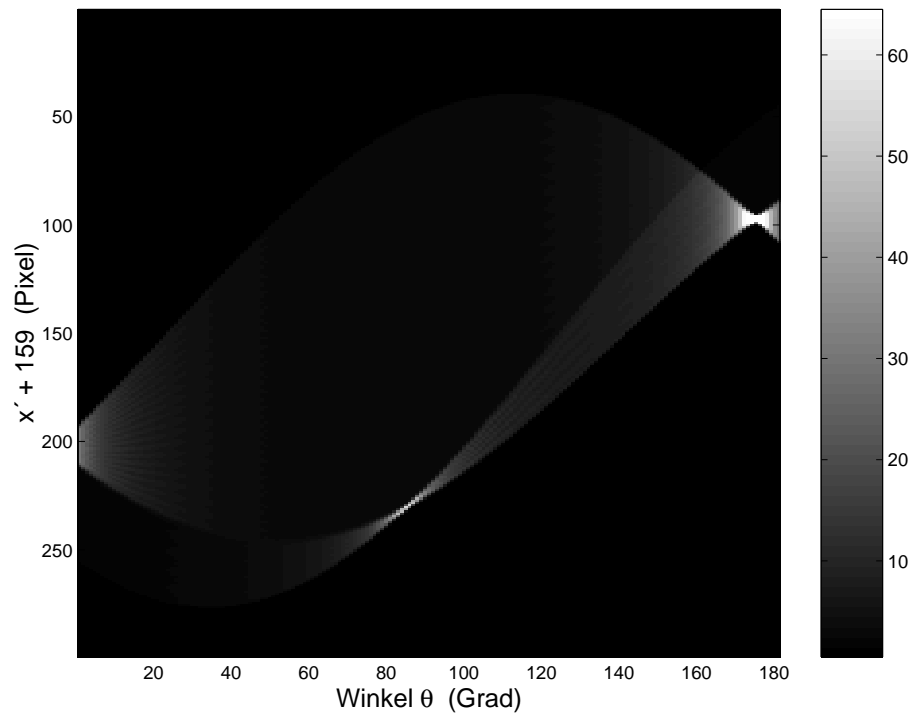
Aus der Funktion  $R_\Theta(x')$  läßt sich ablesen, in welchen Bildbereichen „Geraden“ vorliegen und wie stark diese ausgeprägt sind. Weist die Funktion  $g(x, y)$  beispielsweise entlang einer zur  $y'$ -Achse parallelen Geraden relativ große Funktionswerte auf, so resultiert für die Radon-Transformierte  $R_\Theta(x')$  für den entsprechenden Drehwinkel  $\Theta$  an der Stelle  $x'_0$ , an der die im Bild vorhandene Geradenstruktur die  $x'$ -Achse schneidet, ein gegenüber der Umgebung deutlich erhöhter Funktionswert.

Als praktisches Beispiel ist in Abb. 47 die entsprechende Matrix  $R(\Theta, x')$  für die in Abb. 40 gezeigten Kanten dargestellt. Jede Kante wird in Abb. 47 auf einen hellen Bereich abgebildet. Für die kurze Kante oben rechts in Abb. 40 resultiert der helle Bereich bei  $\theta \approx 85^\circ$ . Die lange, näherungsweise senkrechte Kante in Abb. 40 führt auf den hellen Bereich bei  $\theta \approx 175^\circ$ .



**Abb. 46:** Bei der Definition der Radon-Transformation zugrunde gelegte Geometrie.

Die Rekonstruktion von Gewebestrukturen in der Computer-Tomographie stellt ein weiteres wichtiges Anwendungsfeld der Radon-Transformation dar, auf das hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.



**Abb. 47:** *Resultat der Radon-Transformation des gefilterten Bildes.*

### Weiterführende Literatur

- E. O. Brigham: *FFT - Schnelle Fourier Transformation*. Oldenbourg-Verlag, München 1995
- A. Papoulis: *Signal Analysis*. McGraw-Hill, New-York 1984
- K. D. Kammeyer, K. Kroschel: *Digitale Signalverarbeitung - Filterung und Spektralanalyse*. Teubner-Verlag, Stuttgart 1992
- A. Oppenheim, R. W. Schaefer: *Discrete-Time signal processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1989
- N. Fliege: *Systemtheorie*. Teubner-Verlag, Stuttgart 1991
- R. C. Gonzalez, P. Wintz: *Digital Image Processing*. Addison-Wesley Publishing Company, Mass. 1987
- H. Bässmann, J. Kreyss: *Bildverarbeitung Ad Oculos*. Springer-Verlag, Berlin 1998

Physikalisches Praktikum

Schenk, W.; Kremer, F.; Beddies, G.; Franke, Th.;

Galvosas, P.; Rieger, P. - Schenk, W.; Kremer, F. (Hrsg.)

2014, XIV, 397 S. 325 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-00665-5