

Universität Bayreuth

Fachbereich Mathematik und Physik

*Das Michelson - Interferometer als
Fourierspektrometer*

*(Aufbau eines Versuches für das Fortgeschrittenen-
praktikum für Physiker)*

Vorgelegt von: Hanswolff Popp

Fachvertreter: Prof. Dr. W. Kiefer

Fachgebiet : Physik

- Bayreuth 1980 -

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	1
II. Theorie des Michelson-Interferometers und Zusammenhang zwischen zeitlicher, bzw. räumlicher Kohärenz des Lichtes und dem Interferogramm	
II.1 Theorie des Michelson-Interferometers	3
II.2 Endliche zeitliche Kohärenz	6
II.3 Zusammenhang zwischen Interferogramm und Wellenfeld des einfallenden Lichtes	10
II.4 Interferogramm eines Ensembles unabhängiger Lichtquellen	13
II.5 Dispersion	17
II.6 Interferenz dünner Schichten im Strahlteiler	19
II.7 Zusammenhang zwischen Auflösungsvermögen und endlichem Spiegelweg	21
II.8 Einfluß der räumlichen Kohärenz auf Gangdifferenz und Apertur	23
II.9 Auswirkung nichtidealer Spiegel auf das Interferogramm	29
II.10 Ungenauigkeiten in der Spiegelbewegung	30
III. Lichtquellen und ihre Interferogramme	
III.1 Quasimonochromatisches Licht	32
III.2 Kohärenzlänge	34
III.3 Das Interferogramm einiger Modelle thermischer Lichtquellen	
III.3.1 Natürliche Linienbreite	36
III.3.2 Dopplerverbreiterung	38
III.3.3 Stoßverbreiterung	41
IV. Entwurf und Aufbau eines Michelson-Interferometers	
IV.1 Konstruktive Erfordernisse	46
IV.2 Konstruktionsbeschreibung	48
IV.3 Aufnahmetechnik des Interferogramms	56

	Seite	
V.	Meßergebnisse	
V.1	Bestimmung der Interferometercharakteristik	61
V.2	Spektrallinien	
	Grüne Quecksilberlinie (546,07 nm)	
V.2.1	Das Linienprofil bei einer Hochdrucklampe als Quelle	68
V.2.2	Das Linienprofil einer Hg-Spektrallampe niederen Druckes	73
V.2.3	Vergleich der beiden Hg-Lampen	76
V.2.4	Gelbe Heliumlinie (587,56 nm)	77
V.2.5	Natrium-D-Linie (588,995 nm/ 589,592 nm)	82
V.3	Zusammenstellung der Meßergebnisse	93
V.4	Verbesserungsvorschläge	94
VI.	Zusammenfassung	94
VII.	Literaturverzeichnis	96

I. Einleitung

Unter Fourierspektroskopie versteht man ein erst seit relativ wenigen Jahren entwickeltes Verfahren, in welchem man experimentell ein Zweistrahl-Interferogramm der zu untersuchenden Strahlung aufnimmt und ein Spektrum rechnerisch durch eine Fouriertransformation gewinnt. Das Interferogramm enthält dann mit seinen Interferogramm-Amplituden bei Kenntnis der Zuordnung zu den Gangunterschieden (Phasen) zwischen den beiden Interferometerbündeln die gesamte Information über das unbekannte Spektrum.

Hauptanwendungsgebiet ist das infrarote Spektralgebiet, insbesondere das ferne Infrarot zwischen 20 und 1000 μm Wellenlänge geworden. In diesem Gebiet hat man es im allgemeinen mit sehr intensitätsschwachen Strahlungsquellen zu tun. Durch eine räumlich spektrale Zerlegung, wie es z.B. in einem Monochromator der Fall ist, wird die Intensität so gering, daß die ohnehin schwierigen Nachweismöglichkeiten versagen.

Multiplex- (Fellgett¹⁾ advantage) und Jacquinot²⁾-Vorteil (Throughput advantage) begründen hier die Überlegenheit der Zweistrahl-Interferometer.

Der Multiplex-Vorteil besteht darin, daß alle Elemente des Spektrums gleichzeitig gemessen werden, was zu einer Reduzierung des Anteils des Detektorrauschens am Signal führt. Überwiegen andere Rauschquellen, so kommt dieser Vorteil nicht zum Tragen.

Der Jacquinot-Vorteil beruht im wesentlichen darauf, daß das Interferometer, bauartbedingt, keine aperturbegrenzenden und damit zu Beugungerscheinungen führenden Blenden benötigt, was gegenüber dem Detektorspalt des Monochromators zu einem erhöhten Energiedurchsatz führt. Darüber hinaus gestattet das Interferometer eine genaue Untersuchung des Linienprofils und der Kohärenzlänge einer Lichtquelle.

Zur Demonstration der Wirkungsweise eines Interferometers wurde ein Michelson-Interferometer aufgebaut, das im sichtbaren Bereich arbeitet, weil hier durch die Beobachtbarkeit der Interferenz mit dem Auge eine besondere Anschaulichkeit gegeben ist. Als Quellen werden quasimonochromatische, symmetrische Spektrallinien verwendet. Dadurch vereinfacht sich zum einen die Rücktransformation, und man kann, ohne einen Computer zu verwenden, bereits aus der Hüllkurve des Interferogrammes Aussagen über das Linienprofil der Quelle erhalten. Zum anderen gestattet das Gerät gerade dadurch, daß man sich auf "einfache" Quellen beschränkt, eine eindrucksvolle Demonstration der Fourier-Beziehung zwischen Interferogramm und Spektrum.

II. Theorie des Michelson-Interferometers und Zusammenhang zwischen zeitlicher, bzw. räumlicher Kohärenz des Lichtes und dem Interferogramm.

II.1 Theorie des Michelson-Interferometers

Das Prinzip des Michelson-Interferometers ist in Abb. 1 dargestellt:

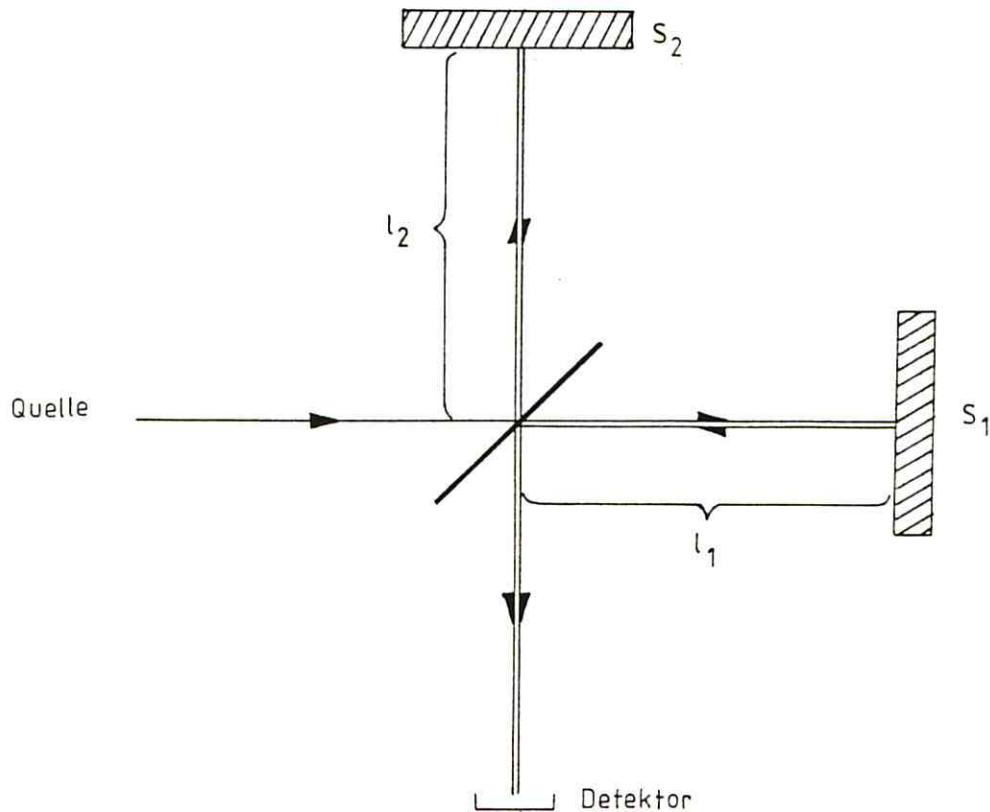


Abb. 1

Prinzip eines Michelson-Interferometers

Die Lichtstrahlen einer Punktlichtquelle P werden im Strahlteiler ST jeweils in zwei gleichphasige Teilstrahlen zerlegt, die senkrecht aufeinander zu den Spiegeln S_1 und S_2 gelangen und, dort reflektiert, im Strahlteiler wieder zu einem Strahl vereinigt werden. Sie interferieren an der Stelle des Detektors.

Da sich eine exakte Darstellung der Wirkungsweise von Zweistrahlinterferometern als sehr kompliziert erweist 3) und 4), ist man gehalten, zunächst einige Idealisierungen vorauszusetzen, welche die mathematische Behandlung des Problems vereinfachen.

So betrachtet man das Modell eines idealen Interferometer-Versuchsaufbaus, wobei die aufgelisteten Punkte später bei Bedarf schrittweise aufgehoben und die Konsequenzen behandelt werden: 5)

- Quelle:
1. Monochromatisches Licht
 2. Paralleles Lichtbündel

- Interferometer:
1. Unendlich dünner Strahlteiler
 2. Amplitudenteilung 1 : 1
 3. Ideale Spiegel (100 % Reflektivität, exakt plan)
 4. Senkrechter Einfall
 5. Symmetrie der Interferometerarme bzgl. Dispersion und Absorption
 6. Unendlicher Spiegelweg
- Detektor:
1. Konstante spektrale Empfindlichkeit
 2. Linearität bzgl. Intensitätsmessung
 3. Ansprechzeit Null.

Von der Lichtquelle wird zeitlich und räumlich kohärentes Licht der Wellenlänge λ_0 eingestrahlt. Zeitliche Kohärenz bezeichnet die Monochromasie der Lichtquelle, während räumliche Kohärenz Parallellicht meint. (Letzterem äquivalent ist eine Punktlichtquelle - siehe auch II.8 -; räumliche Kohärenz ist also ein Maß für die räumliche Ausdehnung der Lichtquelle).

Zwischen den Spiegeln und dem Strahlteiler, die die Abstände l_1 und l_2 voneinander haben (s. Abb. 1), legen die Teilstrahlen entsprechend l_1 und l_2 unterschiedliche Wege zurück, so daß sie eine Phasendifferenz Δ zueinander haben.

Zur Verdeutlichung betrachte man das sogenannte Ersatzschaltbild des Interferometers (Abb. 2). Für das Auge des Beobachters scheint das Auftreten von Interferenz von einer planparallelen Platte der Dicke $\frac{l}{2} = |l_1 - l_2|$ herzurühren.

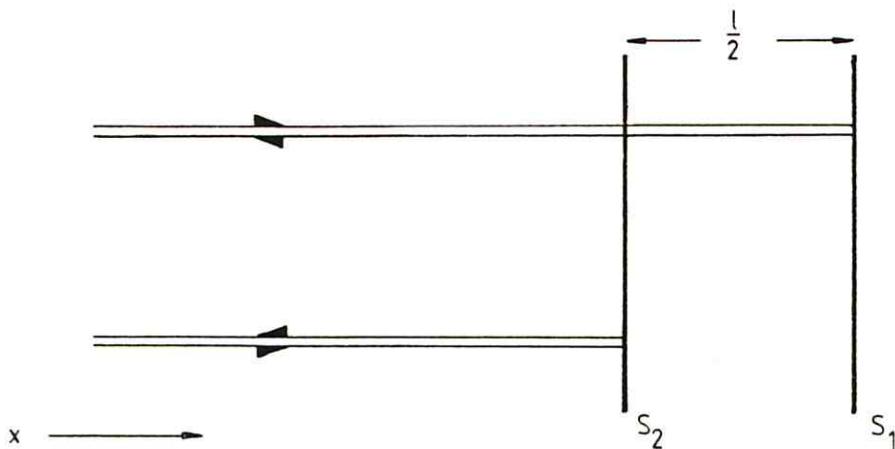


Abb. 2

Ersatzschaltbild des Interferometers

Für senkrechten Einfall in Luft ($n=1$) haben die reflektierten Strahlen eine Gangdifferenz von $\Delta = l$. Das einfallende Licht kann man durch eine ebene Welle beschreiben: $E(t, x) = 2 E_0 \cos(\omega t - kx)$, wobei $k := \frac{2\pi}{\lambda_0}$ den Betrag des Wellenvektors bezeichnet.

Zeitliche Mittelung ergibt folgende Gestalt der Teilstrahlen nach ihrer Vereinigung:

$$E_1 = E_0 \cos k(x + \frac{\Delta}{2}) \quad \text{und}$$

$$E_2 = E_0 \cos k(x - \frac{\Delta}{2}).$$

Die Intensität der interferierenden Strahlen erhält man als:

$$\begin{aligned}
 \bar{I} &= (E_1 + E_2)^2 \\
 &= E_0^2 (\cos(kx)\cos(k\frac{\Delta}{2}) - \sin(kx)\sin(k\frac{\Delta}{2}) + \sin(kx)\sin(k\frac{\Delta}{2}) \\
 &\quad + \cos(kx)\cos(k\frac{\Delta}{2}))^2 \\
 &= \underbrace{4E_0^2 \cos^2(kx) \cos^2(k\frac{\Delta}{2})}_{:= I_0} \\
 &= I_0 \frac{1 + \cos(k\Delta)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos(k\Delta))
 \end{aligned}$$

Für unseren Spezialfall ergibt sich dann $\Delta = l$, und damit die Intensität $\bar{I}(l)$ als

$$\bar{I}(l) = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos kl) \quad (1)$$

Der allgemeine Fall wird in II.8 diskutiert.

III.2 Endliche zeitliche Kohärenz

Hebt man die Bedingung der Monochromasie auf und strahlt Licht der Wellenlängen λ_1 und λ_2 mit den Intensitäten I_{o1} und I_{o2} ein, so erhält man die Gesamtintensität aus der Superposition der beiden Interferenzfunktionen:

$$\bar{I}(l) = \frac{I_{o1}}{2} (1 + \cos k_1 l) + \frac{I_{o2}}{2} (1 + \cos k_2 l)$$

$$\text{wobei } k_1 := \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad \text{und } k_2 := \frac{2\pi}{\lambda_2} .$$

Für n eingestrahlte Wellenlängen λ_i und den Wellenzahlen k_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), erhält man die Superposition der

Einzelinterferenzfunktionen $\bar{I}_i(l)$:

$$\bar{I}(l) = \sum_{i=1}^n \bar{I}_i(l) \quad \text{mit } \bar{I}_i(l) = \frac{I_{oi}}{2} (1 + \cos k_i l) \\ \text{und } k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}.$$

Im allgemeinen Fall liegen unendlich viele Wellenlängen vor, die mit einer kontinuierlichen spektralen Intensitätsverteilungsfunktion, dem Spektrum $G(k)$, beschrieben werden können. Für $i \rightarrow \infty$ geht die Summe in ein Integral über:

$$\bar{I}(l) = \frac{I_o}{2} \int_0^\infty G(k)(1 + \cos kl) dk, \quad (2) \\ \text{wobei die Normierung } \int_0^\infty G(k) dk = 1 \text{ gelte.}$$

Schreibt man $G(k)$ symmetrisch, lässt sich das Integral komplex darstellen, was mitunter die Rechnung vereinfacht; aber auch eine allgemeinere optische Aussage darstellen kann. Der Imaginärteil verschwindet dann aus Symmetriegründen.

$$\bar{I}(l) = \frac{I_o}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k)(e^{ikl} + 1) dk \quad (3)$$

(2) und (3) stellen Fouriertransformationen dar. Die dazu gehörenden Inverstransformationen ergeben das Spektrum.

$$G(k) = \int_0^\infty (\bar{I}(l) - \frac{I_o}{2}) \cos(kl) dl \quad (4) \\ \text{(modulo multiplikativer Konstanten)}$$

oder komplex:

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{I}(l) - \frac{I_o}{2}) e^{-ikl} dl \quad (5)$$

Von Bedeutung sind noch die Beziehungen zwischen I_o und $\bar{I}(0)$ beziehungsweise $\bar{I}(\infty)$.

$$\bar{I}(0) = \frac{I_o}{2} \int_0^\infty G(k) \cdot 2 dk = I_o \quad (6)$$

$$\bar{I}(0) = I_o ;$$

$$\begin{aligned} \bar{I}(\infty) &= \frac{I_o}{2} \left(\int_0^\infty G(k) dk + \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^\infty G(k) \cos(kl) dk \right) \\ &= \frac{I_o}{2} + \lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} \frac{\sin Rl}{l} \\ &= \frac{I_o}{2} ; \end{aligned}$$

$$\bar{I}(\infty) = \frac{I_o}{2} ; \quad (7)$$

Nur an der Stelle $l=0$ überlagern sich alle eingestrahlten Frequenzen konstruktiv. Dies bedeutet, daß hier das Maximum der Funktion $\bar{I}(l)$ liegt und somit nach Gleichung (6) die gesamte Quellenintensität den Detektor erreicht. Für den Fall großer Wegdifferenzen ($l \rightarrow \infty$) folgt aus Gleichung (7), daß nur die halbe Intensität am Detektor ankommt. Die andere Hälfte wird zur Quelle zurückgestrahlt.

Mit Gl.(6) ergibt sich aus Gl.(2) :

$$\bar{I}(l) - \frac{1}{2} \bar{I}(0) = \int_0^\infty G(k) \cos(kl) dk$$

Die links stehende Meßgröße heißt Interferogramm.

Mit der Abkürzung

$$I(l) := \bar{I}(l) - \frac{1}{2} \bar{I}(0) \quad (8)$$

• stellt sich das Fourier-Transformierten-Paar Interferogramm und Spektrum folgendermaßen dar:

$$I(l) = \int_0^\infty G(k) \cos(kl) dk \quad \text{und}$$

$$G(k) = \int_0^{\infty} I(l) \cos(kl) dl .$$

Anhand der Interferogramme einfacher Spektren lassen sich die Schritte zur Gewinnung der Fouriertransformation verdeutlichen (s. Abb. 3)⁶⁾.

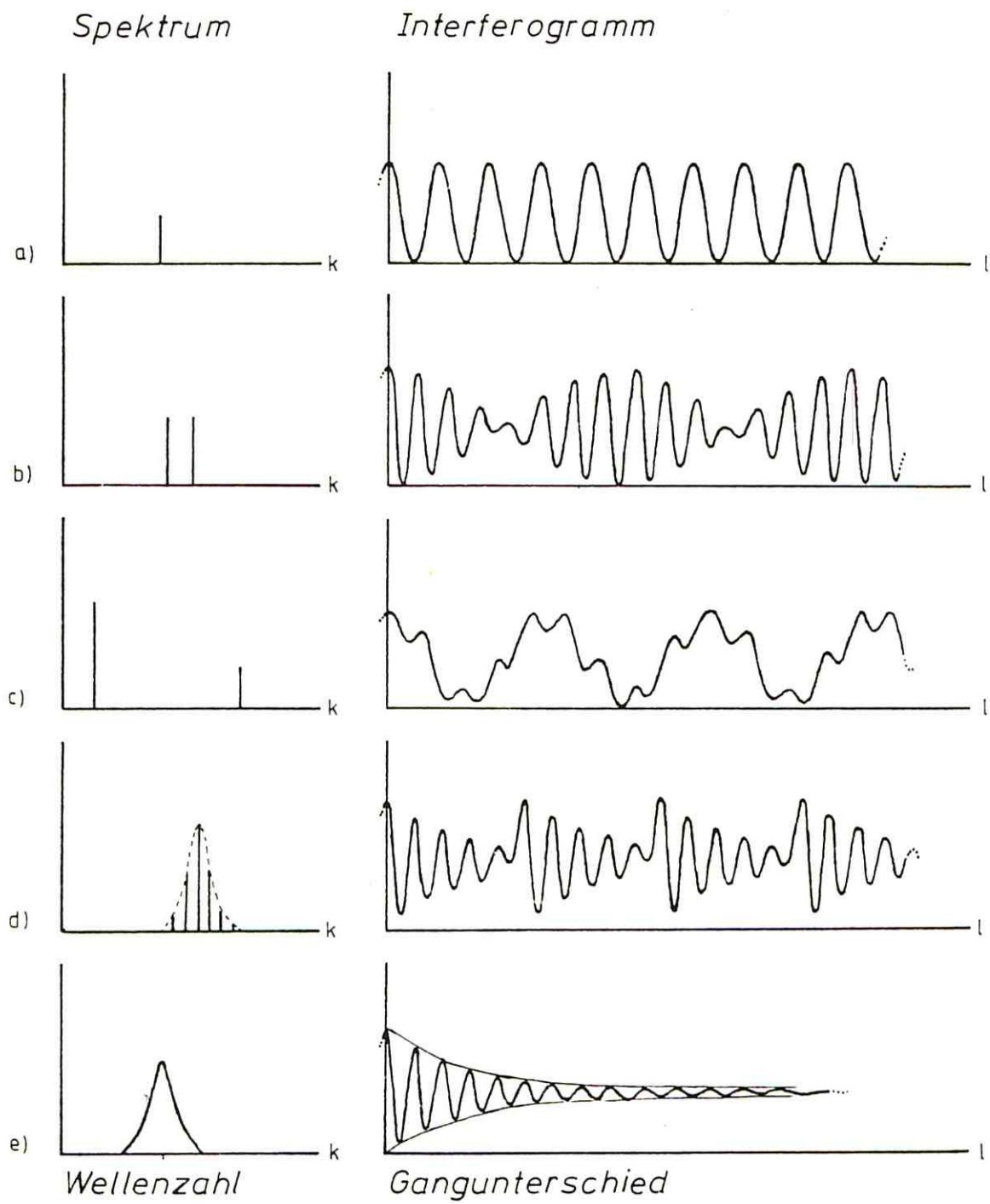


Abb. 3

Zusammenhang zwischen Spektrum und Interferogramm
für verschiedene Beispiele

Abb. 3a) zeigt den Kosinusverlauf des Spektrums einer monochromatischen Lichtquelle. In Abb. 3b) ist die Schwebung von zwei kohärenten monochromatischen Lichtquellen gleicher Intensität dargestellt. Das Interferogramm wird "unübersichtlicher", wenn die Intensitäten voneinander verschieden sind (Abb. 3c). Die Periodizität des Interferogramms hingegen bleibt auch dann noch erhalten, wenn man wie in Abb. 3d) eine Reihe scharfer Spektrallinien betrachtet. Es zeigt sich hier aber auch schon eine große Ähnlichkeit mit dem Interferogramm des, die Spektrallinien einhüllenden, kontinuierlichen Spektrums (Abb. 3e).

II.3 Zusammenhang zwischen Interferogramm und Wellenfeld des einfallenden Lichtes

Seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei Funktionen und $F(f_1)$ und $F(f_2)$ ihre Fourier-Transformierten.

Man definiert das Faltungsprodukt von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ wie folgt⁷⁾:

$$f_1 * f_2 := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) \cdot f_2(x-u) du \quad (9)$$

(Falls f_2 eine gerade Funktion ist, läßt sich (9) auch so schreiben:

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2(u-x) du .$$

Das Faltungstheorem sagt aus, daß die Fourier-Transformierte des Faltungsproduktes von f_1 und f_2 gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten von f_1 und f_2 ist:

$$F(f_1 * f_2) = F(f_1) \cdot F(f_2) \quad (10)$$

Die wesentliche Funktion eines Interferometers besteht darin, zwischen zwei Wellenfeldern eine definierte Phasenbeziehung herzustellen. Diese ist durch die Laufzeitdifferenz $\tau = l/c$ gegeben. Für die Erzeugung des Interferogramms genügt also der Einfall einer zeitabhängigen Amplitudenfunktion $E(t)$, über die keinerlei weitere Voraussetzungen notwendig sind, außer daß sie gerade sein soll. (Insbesondere sollen keine Voraussetzungen über spektrale Energieverteilung und räumliche Ausdehnung der Quelle und damit über die zeitliche und räumliche Kohärenz gemacht werden).

Bezeichnet man das von dem einen Interferometerarm kommende Lichtsignal mit $E(t)$, und das vom anderen Arm mit $E(t-\tau)$, so ergibt sich als Überlagerung der beiden Felder

$$\begin{aligned}\bar{I}(\tau) &= \langle (E(t) + E(t-\tau))^2 \rangle \\ &= \langle E(t)^2 \rangle + \langle E(t-\tau)^2 \rangle + 2 \langle E(t)E(t-\tau) \rangle\end{aligned}\quad (11)$$

Der zeitliche Mittelwert $\langle \rangle$ sei dabei wie folgt definiert:

$$\langle E(t)^2 \rangle := \frac{1}{t'} \int_{t_o-t'/2}^{t_o+t'/2} E(t)^2 dt$$

t' ist die Meß- und damit die Integrationszeit. Man wählt nun t' so groß, daß der Mittelwert nicht mehr von t_o abhängt, d.h. man betrachtet den Grenzwert $t' \rightarrow \infty$. Daß dies erlaubt ist, möge folgende Abschätzung verdeutlichen:

Gilt die Ungleichung $t' > \tau_{\max} = \frac{2L}{c}$, wobei L , hier vorweggenommen, die Kohärenzlänge bedeutet (s. III.2), so ergibt sich, daß die kohärenten Wellenfelder im Zeitintervall $(t_o - t'/2, t_o + t'/2)$ interferieren können, und außerhalb nur noch einen konstanten Wert

annehmen. Die größten Kohärenzlängen erreicht man mit Lasern.

$$L_{\text{Laser}} \approx 1000 \text{ m} \Rightarrow t' > 10^{-5} \text{ sec}.$$

Die Integrationszeit sowohl des Detektors als auch die des menschlichen Auges ist wesentlich größer.

$$\text{Aus } t' \rightarrow \infty \Rightarrow \langle E(t)^2 \rangle = \left\langle E(t-\tau)^2 \right\rangle \\ (= \frac{I_0}{4}; \text{ siehe II.1}).$$

Damit kann sich eine weitere Betrachtung auf dem Term $2 \langle E(t)E(t-\tau) \rangle$ beschränken, der alle Interferenzeffekte enthält. Normiert man ihn durch Division mit $\frac{1}{2}I_0$, d.h. definiert man

$$\gamma(\tau) := \frac{\langle E(t)E(t-\tau) \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)E(t-\tau) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)^2 dt}, \quad (12)$$

so ergibt sich

$$\gamma(\tau) = \frac{I(\tau)}{I_0/2} = \frac{E(t) * E(t)}{\frac{1}{2} I_0}.$$

Das Interferogramm ist demnach die Autokorrelationsfunktion^{+) des elektrischen Wellenfeldes, und hängt nur noch von τ ab. Vergleicht man mit dem in (II.2) gewonnenen Interferogramm, so erhält man (mit $k = \frac{2\pi v}{c}$ und $\tau = \frac{1}{c}$):}

$$E(t) * E(t) = I(\tau) = \frac{I_0}{2} \cdot \int_0^{\infty} \bar{G}(v) \cos(2\pi v \tau) dv$$

Formal ergibt sich diese, auch unter dem Namen WIENER-KHINTCHINE-Theorem bekannte⁸⁾, Relation durch Anwendung des Faltungstheorems für Fouriertransformationen (Gl. 10).

+)

Faltungsprodukt einer Größe mit sich selbst

Anzumerken wäre noch, daß die hier vorkommende Größe $\bar{G}(\nu)$ wesentlich mehr Information über die Lichtquelle enthält als die in (II.2) eingeführte Größe $G(\nu)$, da für die Berechnung von $\bar{G}(\nu)$ keinerlei Voraussetzungen über die Lichtquelle notwendig sind. Ideale räumliche Kohärenz würde bedeuten $\bar{G}(\nu) = G(\nu)$.
 (Siehe auch II.7).

II.4 Interferogramm eines Ensembles unabhängiger Lichtquellen

Betrachtet man mehrere Quellen, von denen jede einzelne Wellenfelder der im vorausgehenden Abschnitt beschriebenen Bauart emittiert, und untersucht das von ihnen erzeugte Interferogramm, so kann mit folgendem Ansatz an das Problem herangehen:

Jedes einzelne Quellgebiet liefert ein Interferogramm von der Art

$$I = \langle E(t)E(t-\tau) \rangle .$$

Das von N Quellgebieten beobachtete Interferogramm I_N lässt sich so darstellen:

$$I_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\langle \left\langle E_i(t)E_j(t-\tau-t') \right\rangle_t \right\rangle_{t'} \quad (14)$$

Wobei $\langle \rangle_t$ wie bisher die Mittelung über t , der Laufzeit der Wellenfelder, darstellt, die innere Mittelung $\langle \rangle_{t'}$, hingegen die Mittelung über t' , dem Zeitunterschied zwischen der Emission der Wellenfelder E_i und E_j . Zur Berechnung des Interferogramms benötigt man außerdem noch a) die Zeitdifferenz, die durch das Interferometer erzeugt wird ($=: \tau$) und

b) die Integrationszeit des Detektors ($=: T$).

Innerhalb der Integrationszeit T über t' sollen nun eine Vielzahl von Wellenfeldern E_i , E_j miteinander interferieren. Letztere sollen sich nur in t' unterscheiden. Das Interferogramm kann umso genauer mit statistischen

Mitteln beschrieben werden, je höher die Anzahl dieser Wellenfelder ist. Dies gilt insbesondere für die große Anzahl emittierender Atome in einer Spektrallampe!

Unter dieser Voraussetzung ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(t')$ zu suchen, aus der sich die Wahrscheinlichkeit $W(t')$ für das Auftreten eines Zeitunterschiedes aus dem Intervall $(t' - \Delta t', t' + \Delta t')$ ergibt.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- A) Einmal nimmt man an, daß die von verschiedenen Quellgebieten stammenden Wellenfelder ohne jegliche feste Phasenbeziehung sind; d.h. die Quellgebiete strahlen unabhängig. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $W_1(t')$, daß je zwei verschiedene Quellgebiete ($i \neq j$) Wellenfelder eines Zeitabstandes aus dem Intervall $(t' - \Delta t', t' + \Delta t')$ emittieren, für alle t' innerhalb der Integrationszeit gleich und damit konstant. Wellenfelder mit einem Zeitabstand $t' > T$ werden vom Detektor nicht zusammen erfaßt, weshalb die Wahrscheinlichkeit $W_1(t')$ für $t' > T$ gleich Null ist.

$$W_1(t') = \int_{t' - \Delta t'}^{t' + \Delta t'} P_1(t) dt = \text{konst. für alle } t'$$

$$\Rightarrow P_1(t') = P_0 = \text{konst.}$$

Mit der Normierung $\int_{-T}^{+T} P_1(t') dt' := 1$ ergibt sich

$$2P_0 T = 1 \quad \text{oder} \quad P_0 = \frac{1}{2T}, \quad (15)$$

also der bisher verwendete Mittelwert!

- B) Betrachtet man Wellenfelder, die vom selben Quellgebiet kommen ($i=j$), so ist t' stets identisch Null.

$$\Rightarrow W_2(t') = \begin{cases} 0 & \text{für } t' = 0 \\ 1 & \text{für } t' \neq 0 \end{cases}$$

Zufällig von zwei verschiedenen Quellgebieten mit dem Zeitabstand $t' = 0$ emittierte Wellenfelder werden wegen ihrer Seltenheit bei hinreichend großer Integrationszeit vernachlässigt.

Damit erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_2(t')$ aus der Normierung

$$w_2(t') = \int_{-\Delta t'}^{+\Delta t'} P_2(t') dt' := 1 ;$$

$$\text{denn mit } \int_{-\infty}^{-\Delta t'} P_2(t') dt' = \int_{\Delta t'}^{+\infty} P_2(t') dt' = 0$$

$$\Rightarrow P_2(t') = \delta(t') . \quad (16)$$

Die Summenglieder aus Gleichung (14) berechnen sich nun folgendermaßen:

$$\left\langle \left\langle E_i(t) E_j(t - \tau - t') \right\rangle_t \right\rangle_{t'} = \left\langle E_i(t) \left\langle E_j(t - \tau - t') \right\rangle_t \right\rangle_{t'}$$

Man kann E_j mittels einer Fouriertransformation durch sein Spektrum darstellen:

$$E_j(t - \tau - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \tau - t')} Q_j(\omega) d\omega \quad (17)$$

Wichtet man Summenglieder mit $i \neq j$ mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_1(t')$,

$$\text{also } \left\langle E_j(t - \tau - t') \right\rangle_{t'} = \int_{-T}^{+T} P_1(t') E_j(t - \tau - t') dt' ,$$

so erhält man mit Gl. (17) und (15):

$$\begin{aligned}\langle E_j(t-\tau-t') \rangle_{t'} &= \int_{-\infty}^{+\infty} Q_j(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} \frac{\sin \omega T}{\omega T} d\omega \\ &= E_j(t-\tau) * S\end{aligned}$$

wobei S^+) wie folgt definiert sei:

$$S := \begin{cases} \frac{\pi}{T} & \text{für } T > t-\tau \\ 0 & \text{für } T < t-\tau \end{cases}$$

Da wegen des Detektors die Integrationszeit über t gleich der über t' ist, nämlich T , gilt $t \leq T$ und, weil τ positiv definiert werden kann, $t-\tau \leq t \leq T$.

Damit ist $S = \frac{\pi}{T}$ physikalisch sinnvoll.

Für $T \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E_j(t-\tau) * S &= \langle E_j(t-\tau-t') \rangle_{t'} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \langle E_i(t) \langle E_j(t-\tau-t') \rangle_{t'} \rangle_t &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Für große Integrationszeiten verschwinden demnach die Summenglieder für $i \neq j$!

Für Summenglieder $i=j$ ist $E_j(t-\tau-t')$ mit $P_2(t')$ gewichtet zu mitteln.

$$\begin{aligned}\langle E_j(t-\tau-t') \rangle_{t'} &= \int_{-T}^{+T} P_2(t') E_j(t-\tau-t') dt' \\ &= \int_{-T}^{+T} \delta(t') E_j(t-\tau-t') dt' \\ &= E_j(t-\tau)\end{aligned}$$

+

S ist nach 9) die Fouriertransformierte von $\frac{\sin \omega T}{\omega T}$

Das Interferogramm von N Quellgebieten I_N wird nur noch durch die Superposition der N Einzelinterferogramme gebildet. (Siehe ¹⁰⁾).

$$I_N = \sum_{j=1}^N \langle E_j(t) E_j(t-\tau) \rangle \quad (18)$$

Sind alle Einzelinterferogramme gleich, so ist

$$I_N = N \langle E(t) E(t-\tau) \rangle \quad \text{mit } E_j(t) = E(t) \quad (19)$$

für alle $j \in \{1, \dots, N\}$

Das beobachtete Interferogramm aller Quellgebiete ist also bis auf einen Intensitätszuwachs gleich einem Einzelinterferogramm!
(Siehe auch Lit. ¹¹⁾: CAMPBELLtheorem).

II.5 Dispersion

Unter den in II.1 aufgelisteten Idealisierungen war auch die Forderung nach Dispersionsgleichheit der Interferometerarme. Läßt man diese Voraussetzung fallen, d.h. betrachtet man ein Interferometer, in dessen beiden Armen Medien von unterschiedlichem Brechungsindex durchsetzt werden, so erhält man anstelle von Gleichung (2):

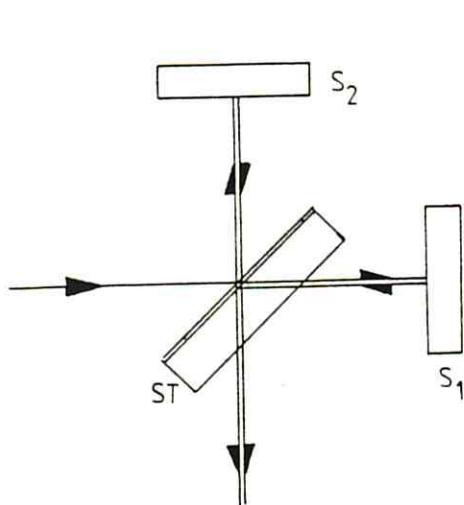
$$I(l) = \frac{I_0}{2} \int_0^\infty G(k) \cos(kl + \phi(k)) dk$$

$\phi(k)$ ist die Phasenverschiebung durch den Dispersionsunterschied in den Interferometerarmen. (Siehe auch II.8 und II.9).

Hieraus erhält man eine vollständige Fouriertransformation:

$$I(l) = \frac{I_0}{2} \int_0^\infty G(k) (\cos kl \cos \phi(k) - \sin kl \sin \phi(k)) dk \quad (20)$$

a)



b)

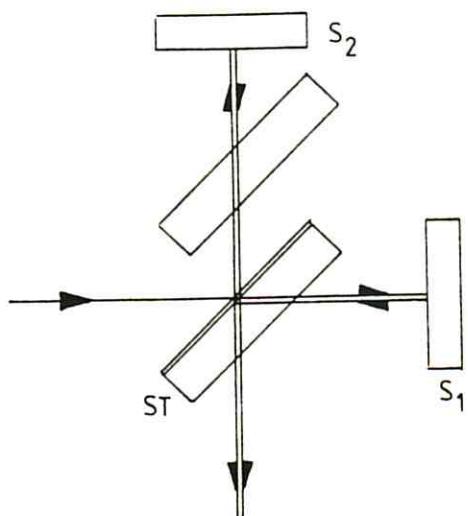


Abb. 4

4 a) zeigt das Interferometer ohne Ausgleichsplatte. Eine Ausgleichsplatte in Strahlengang 2 eingebracht, beseitigt Dispersions- und Absorptionsunterschiede in den Interferometerarmen (4 b) .

Da uns nur das Spektrum $G(k)$ interessiert, sollten die Interferometerarme dispersionsgleich sein!

In unserem Fall ist aber das einzige disperse Element die Glasplatte, auf der die Strahlteilerschicht aufgedampft ist.

Wie in Abbildung 4a) angedeutet, durchsetzt der von Spiegel S_1 reflektierte Strahl dreimal die Teilerplatte, der von S_2 kommende hingegen nur einmal. Bringt man nun vor S_2 eine Ausgleichsplatte in den Strahlengang, von gleicher Beschaffenheit wie die des Strahlteilers, aber ohne Spiegelschicht, so hat man zum einen den Dispersionsunterschied und zum anderen auch noch die Absorptionsungleichheit in den Interferometerarmen aufgehoben. (Siehe auch II.9) .

II.6 Interferenz dünner Schichten im Strahlteiler

Als nächstes soll auf die in II.1 getroffene Idealisierung des unendlich dünnen Strahlteilers und damit verbunden auf die (1:1)-Amplitudenteilung eingegangen werden. Im einfachsten Fall verwendet man als Strahlteiler eine Glasplatte (von endlicher Dicke und mit der Brechzahl n_1). Ihre Oberfläche hätte jedoch ein zu geringes Reflexionsvermögen, um möglichst hohe und gleich große Amplituden auf beide Interferometerarme zu verteilen. Um den oben erwähnten Idealfall so weit wie möglich zu verwirklichen, wird eine dünne ($\frac{\lambda}{4}$) - Schicht (Homosil) der Brechzahl $n_2 > n_1$ auf die eine Seite der Glasplatte aufgedampft. Bei vorgegebenen Wellenlängen und festem Einfallswinkel entsteht durch die optische Dicke von $\frac{\lambda}{2}$ der zweimal durchlaufenden Schicht und wegen des Phasensprunges von π bei Reflexion an der optisch dünneren Glasplatte eine Wegdifferenz von λ , und somit eine Verstärkung des Signals¹²⁾.

Auf der Rückseite der Glasplatte und auf beiden Seiten der Ausgleichsplatte wird ebenfalls eine $\frac{\lambda}{4}$ - Schicht aufgebracht. Ihre Brechzahl n_3 ist allerdings kleiner als die von Glas ! Diese Schicht wirkt reflexmindernd, da die an ihren Grenzflächen reflektierten Strahlen eine Wegdifferenz von $2 \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$ haben und sich deshalb auslöschen. Auf diese Weise unterbindet man störende, d.h. kontrastsenkende, Vielstrahlinterferenzen.

Dies gilt natürlich nur für eine feste Wellenlänge λ . Andere eingestrahlte Wellenlängen haben wiederum Vielstrahlinterferenzen zur Folge und auch das Amplitudenverhältnis des Strahlteilers ändert sich. Deshalb verwendet man eine Kombination mehrerer solcher dünner Schichten, abgestimmt auf eine Reihe von Wellenlängen.

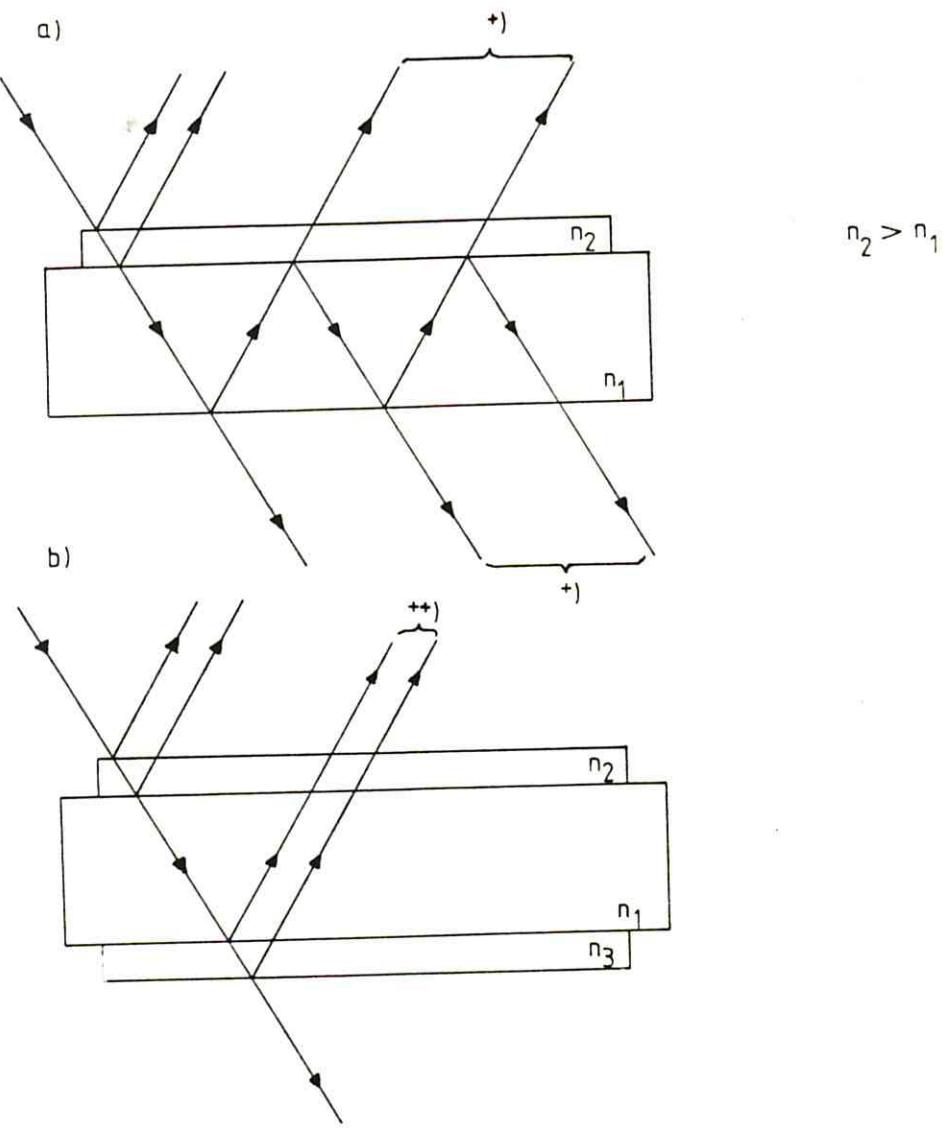


Abb. 5

5 a) zeigt den Strahlteiler (Glasplatte + Teilerschicht) ohne reflexmindernde Schicht. Mit +) sind hier die nicht zu vermeidenden Vielstrahlinterferenzen angedeutet.

5 b) skizziert einen Strahlteiler mit reflexmindernder Schicht. ++) bedeutet gegenseitiges Auslöschen der Teilstrahlen.

Eine Teilerplatte der zuletzt beschriebenen Art gibt einem die Gewähr, daß die spektrale Durchlässigkeit $U(k)$ des Strahlteilers über den gesamten sichtbaren Bereich einigermaßen konstant ist. Das gemessene Spektrum $G_{\text{obs}}(k)$ ist dann

$$G_{\text{obs}}(k) = G(k) \cdot U(k) \quad (21)$$

$U(k)$ kann in guter Näherung als konstant angenommen werden, wenn mit $G(k)$ das Spektrum einer Spektrallinie gemeint ist.

Abschließend sei noch erwähnt, daß sich im Fernen Infrarot diese Technik mehrerer dünner Schichten wegen deren Absorption nicht anwenden läßt. Hier verwendet man als Strahlteiler einen dünnen Kunststofffilm (z.B. Mylar¹²⁾).

II.7 Zusammenhang zwischen Auflösungsvermögen und endlichem Spiegelweg

Das mit einem endlichen Spiegelweg gemessene Interferogramm $I_{obs}(l)$ erhält man aus dem unendlich ausgedehnten Interferogramm durch Multiplikation mit einer Blendenfunktion $B(l)$. Dieses Verfahren der zusätzlichen Modulation eines Interferogramms bezeichnet man als Apodisation¹³⁾.

$$I_{obs}(l) = I(l) \cdot B(l) \quad (22)$$

Fouriertransformation und Anwendung des Faltungstheorems auf $I_{obs}(l)$ ergeben das gemessene Spektrum $G_{obs}(k)$:

$$G_{obs}(k) = G(k) * \beta(k) ; \quad (23)$$

wobei $\beta(k)$ die Fouriertransformierte von $B(l)$ sei.

Als ein nichttriviales Problem für die Messung erweist es sich nun, ein $\beta(k)$ mit möglichst geringen Störeinflüssen auf das Spektrum zu finden.

Im einfachsten Fall wählt man $B_1(l)$ als eine Rechteckblende:

$$B_1(l) = \begin{cases} 1 & \text{für } l \leq M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{M sei der maximale Gangunterschied})$$

⇒

$$B_1(k) = 2M \frac{\sin kM}{kM} \quad (\hat{=} \text{ Spaltfunktion der konventionellen Monochromatoren !}) \quad (24)$$

Das Auflösungsvermögen, charakterisiert durch die Halbwertsbreite von $B_1(k)$, ist umgekehrt proportional zum maximalen Gangunterschied.

$$\Delta k = \frac{2,4\pi}{M} \sim \frac{1}{M} \quad (25)$$

(Bei $M = 40 \text{ cm} \Rightarrow \Delta k_{\text{theor.}} \approx 0,2 \text{ cm}^{-1}$).

Die Apparatefunktion $B_1(k)$ hat aber den schwerwiegenden Nachteil, daß sie beträchtliche Nebenminima hat (s. Abb. 6). Diese können dadurch Fehler verursachen, daß die Nebenextrema zur Intensität interessierender Spektralanteile in der Nähe des Hauptmaximums beitragen und so eine quantitative Auswertung verfälschen.

Wählt man $B_2(l)$ als Dreiecksblende, so verliert man an Auflösungsvermögen, hat jedoch keine störenden Nebenminima:

$$B_2(l) = \begin{cases} 1 - \frac{|l|}{M} & \text{für } |l| \leq M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$B_2(k) = 2M \left(\frac{\sin \frac{kM}{2}}{\frac{kM}{2}} \right)^2 \quad (26)$$

Für den jeweiligen Anwendungsfall lassen sich optimale Funktionen $B(l)$ finden. (Optimale Apodisationsfunktionen¹⁴⁾).

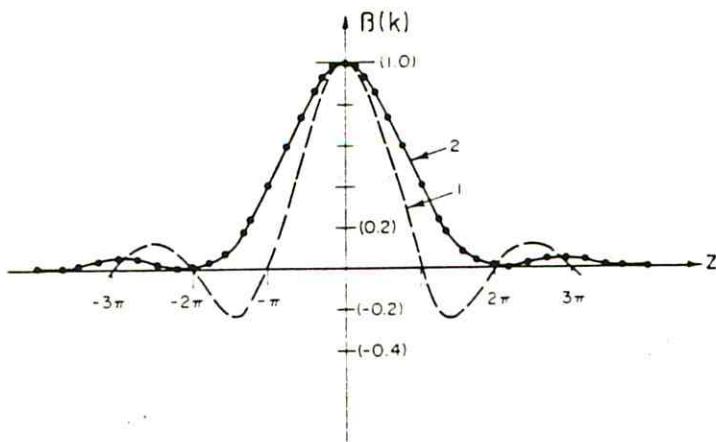


Abb. 6

Die Apparatefunktionen $\beta_1(k)$ und $\beta_2(k)$ aufgetragen
über $z = kM$ ¹³⁾.

II.8 Einfluß der räumlichen Kohärenz auf Gangdifferenz und Apertur

Im Vorangegangenen war die Voraussetzung senkrechter Einstrahlung parallelen Lichtes in das Interferogramm getroffen worden. Paralleles Licht wird z.B. von einer Punktlichtquelle im Brennpunkt eines idealen Objektivs erzeugt. (Idealer Kollimator).

Befindet sich die Punktlichtquelle an einer anderen Stelle der Brennebene, so erhält man immer noch paralleles Licht, allerdings unter einem Winkel ε zur optischen Achse. Dies bewirkt eine Veränderung der optischen Wegdifferenz $\Delta = \Delta(\varepsilon)$.

Ist darüber hinaus die Quelle flächenhaft ausgedehnt, so treten verschiedene Winkel ε gleichzeitig auf und die zugehörigen Interferogramme überlagern sich. Fehler des Objektivs (A) erzeugen eine gleichartige Verfälschung des Interferogramms.

Außerdem weitet sich ein derartiges Strahlenbündel auf und beeinflußt so die Apertur (B). Diese beiden Effekte werden nun im folgenden diskutiert.

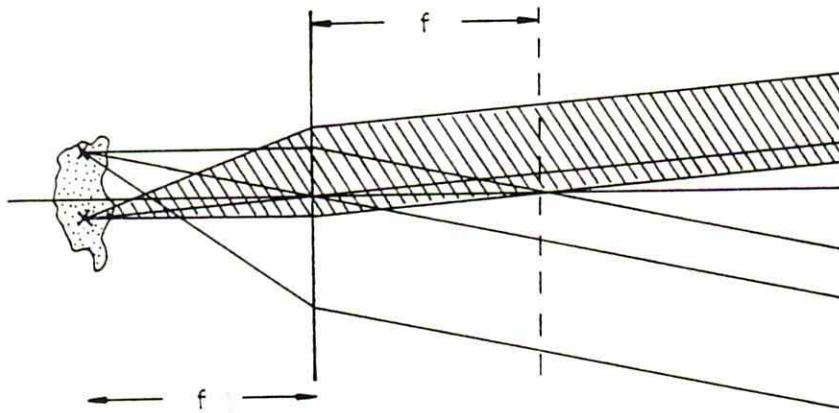
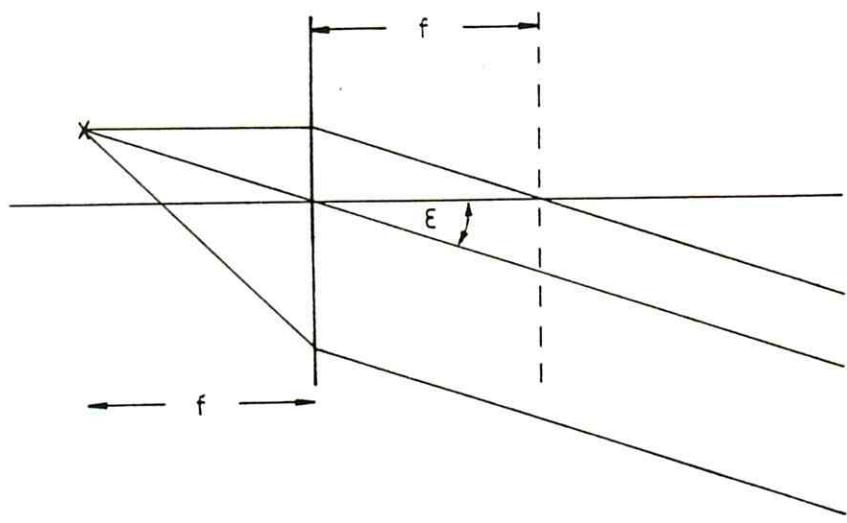
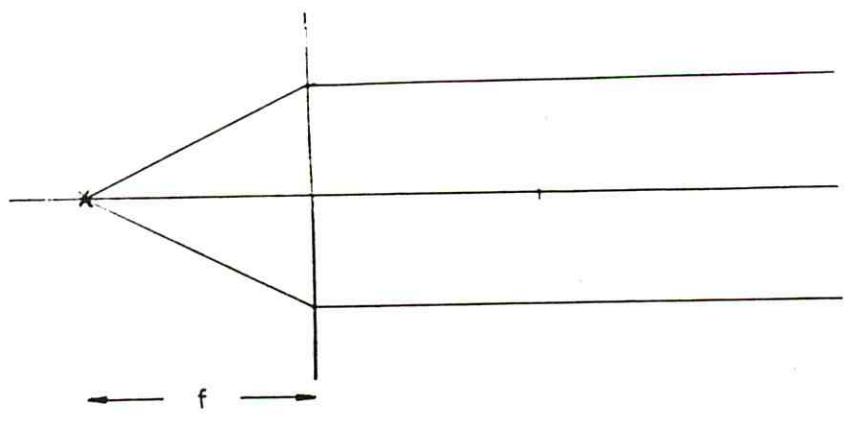


Abb. 7

- a) Punktlichtquelle im Brennpunkt eines idealen Objektivs;
- b) Punktlichtquelle in der Brennebene verschoben;
- c) flächenhaft ausgedehnte Quelle.

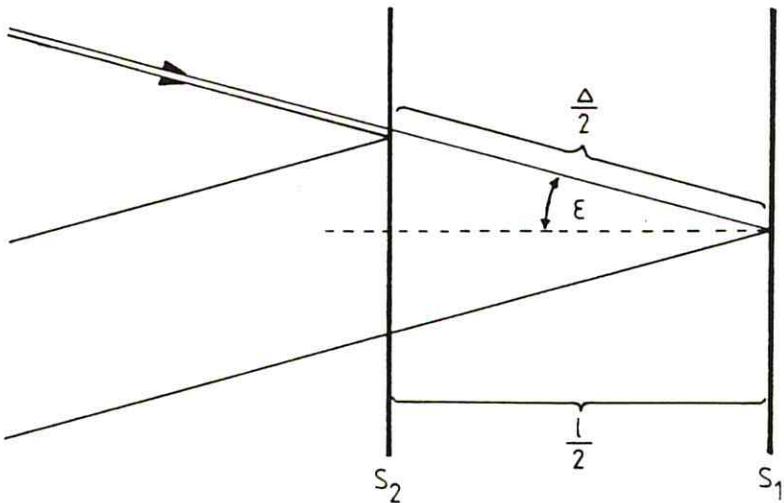


Abb. 8

Ersatzschaltbild des Interferometers für
schrägen Lichteinfall

- A) Betrachtet man den schrägen Einfall von parallelem Licht in das Interferometer (siehe Abb. 7b und 8), so erhält man für die optische Gangdifferenz ($n=1$ vorausgesetzt):

$$\Delta = l \cos \varepsilon + \frac{\lambda}{2} \quad (27)$$

Die konstante Phasenverschiebung von $\frac{\lambda}{2}$ wird im folgenden durch die Festlegung der optischen Gangdifferenz 0 für $l=0$ berücksichtigt.

Man beobachtet das Interferogramm

$$I(l) = \frac{I_0}{2} \int_0^{\infty} G(k) \cos(k_0 l \cos \varepsilon) dk$$

Um möglichst paralleles Licht zu erzeugen, verwendet

man einen Kollimator mit Kreisblende (Abb. 9).

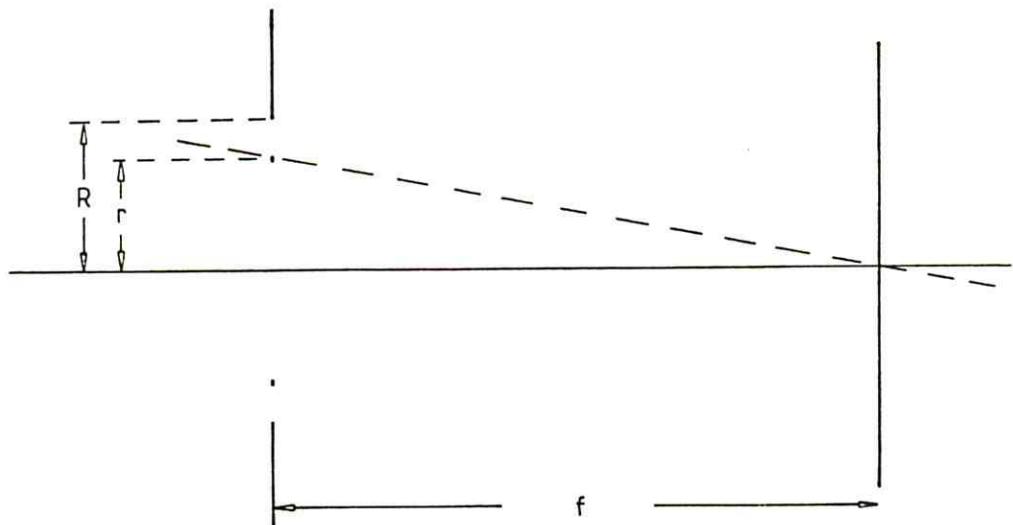


Abb. 9

Kollimator mit Kreisblende

Jeder konzentrische Kreisring vom Radius r innerhalb der Blendenöffnung bewirkt, daß ein Parallellichtbündel unter dem Winkel ε und mit dem Umfang $(2\pi r)$ ansteigender Intensität aus dem Objektiv austritt.

$$\cos \varepsilon = \frac{f}{\sqrt{r^2 + f^2}} \approx 1 + \frac{r^2}{2f^2} \quad \text{für kleine } \varepsilon .$$

Das Interferogramm ist dann ¹⁵⁾:

$$\begin{aligned} I(l) &= I_o \int_0^R 2\pi r \int_0^\infty G(k) \cos(k_o l(1 + \frac{r^2}{2f^2})) dk dr \\ &= 2\pi I_o f^2 \int_0^\infty G(k) \cos kl(1 - \frac{R^2}{4f^2}) \frac{\sin(\frac{R^2 kl}{2f^2})}{kl} dk . \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation ergibt die ursprüngliche Form der Fouriertransformation:

$$k' = k \left(1 - \frac{R^2}{4f^2} \right) \quad (27)$$

Das aus der Fouriertransformation erhaltene Spektrum ist von k nach k' verschoben und muß durch $1/(1 - R^2/4f^2)$ in der Lage korrigiert werden.

$$I(l) = 2\pi I_0 f^2 \int_0^\infty G\left(\frac{k'}{1 - \frac{R^2}{4f^2}}\right) \sin\left(\frac{R^2 k' l}{2f^2(1 - \frac{R^2}{4f^2})}\right) \frac{\cos k' l}{k' l} dk' \quad (28)$$

Zur Abschätzung der Wirkung dieser Fehlerquelle betrachtet man das Interferogramm für monochromatische Einstrahlung:

$$I(l) = 2\pi I_0 f^2 \frac{\cos k'_o l}{k'_o l} \sin \frac{R^2 k'_o l}{2f^2(1 - \frac{R^2}{4f^2})} \quad . \quad (29)$$

Für kleine l ist die Beeinflussung des Interferogrammes vernachlässigbar.

Nutzt man aber den maximalen Spiegelweg (≈ 20 cm), so ist das Auflösungsvermögen durch die erste Nullstelle l_o des Sinus gegeben¹⁶⁾:

$$\pi = \frac{R^2 k'_o l_o}{2f^2(1 - \frac{R^2}{4f^2})} \quad \text{oder} \quad l_o = \lambda_o \frac{f^2}{R} \quad . \quad (30)$$

Das Auflösungsvermögen, nach II.7 proportional zu l_o^{-1} , wird mit kürzeren Wellenlängen schlechter und ist in unserem Fall am kurzweligen Ende des sichtbaren Bereichs am ungünstigsten. Im folgenden ist eine Übersicht für $\lambda_o = 300$ nm und $f = 200$ mm in Abhängigkeit vom Radius der Kreisblende angegeben:

R/mm	5	2	1	0,2	0,17	0,1	0,05
l_o/cm	0,048	0,3	1,2	30	40	120	480

Hieraus ersieht man, daß zur Ausnutzung des maximalen Gangunterschieds von etwa 40 cm der Durchmesser der Lochblende kleiner als 0,35 mm sein muß. Linsenfehler im Kollimatorobjektiv bewirken aber, daß stets kürzere optische Wegdifferenzen anstatt der berechneten Werte für l_0 gemessen werden!

- B) Man betrachte das Ersatzschaltbild des Michelson-Interferometers bei Beleuchtung mit einem sich aufweitenden Strahlenbündel (s. Abb. 10).

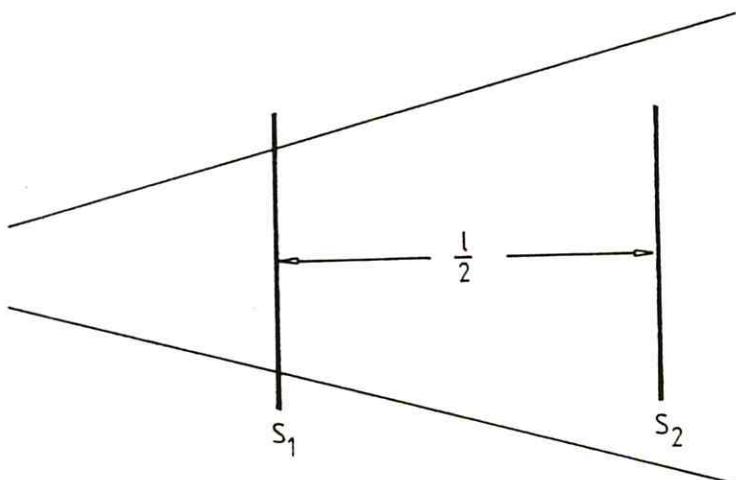


Abb. 10

Ersatzschaltbild des Interferometers bei
divergierendem Strahlengang

Die Apertur des Spiegels S_1 , gegeben durch seine Geometrie, ist in Abhängigkeit von $l/2$ größer als die von S_2 , dem von der Lichtquelle entfernteren Spiegel. Der Unterschied der Aperturen bewirkt, daß nicht alles von S_1 reflektierte Licht interferieren kann, da die entsprechenden

den Partnerwellen fehlen.

Dadurch wird die Intensität des Interferogrammes in Abhängigkeit von $1/2$ verfälscht. Eine geometrische Rechnung¹⁷⁾ ergibt eine Intensitätsveränderung durch einen Faktor $1/(1 + \alpha l)^2$ für eine Punktlichtquelle ohne Kollimator. α ist dabei eine Apparatekonstante.

Dieser Effekt wirkt sich jedoch bei einem guten Kollimator viel geringer aus als der unter A) diskutierte. Die folgende Übersicht¹⁷⁾ möge zur Unterscheidung der beiden Effekte dienen:

Veränderung von Δ	Veränderung der Apertur
durch die Lichtquelle, abhängig von λ .	unabhängig von λ , reine Funktion der Geometrie des Interferometers
Keine Interferenz für $l = l_0 = \lambda_0 \cdot \frac{f^2}{R}$.	Interferenz findet immer statt; aber Apodisation des Interferogrammes.

II.9 Auswirkung nichtidealener Spiegel auf das Interferogramm

Ein Spiegel bewirkt

a) einen Phasensprung und b) eine Absorption der einfalenden Amplitude.

Beide Phänomene sind material- und frequenzabhängig. Deshalb wird ein Reflexionsgrad für den Arm 1 des Interferometers definiert¹⁸⁾:

$$r_1 = \frac{E_1}{E} = r_{o1} e^{i\Phi}, \quad (31)$$

wobei E_1 die Welle sein soll, die aus dem Arm 1 austritt, und E die einfallende Welle bedeutet.

Ebenso wird für den Arm 2 des Interferometers verfahren.

Für dispersionsgleiche Interferometerarme war das Interferogramm (Gl. 13):

$$I(l) = E(l) * E(l), \text{ da } E_1 = E_2 = E.$$

Allgemein ist:

$$I(l) = E_1(l) * E_2(l) \quad (32)$$

Komplex angesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} I(l) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(l_o) E_2(l_o - l) * dl_o \\ &= r_{o1} r_{o2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} E(l_o) E(l_o - l) * dl_o \\ &= r_{o1} r_{o2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} (E(l) * E(l)) \end{aligned} \quad (33)$$

Damit ist die Veränderung durch ungleiche Spiegelreflexionsgrade der Interferometerarme bestimmt durch

- eine konstante Phasendifferenz $\Phi_1 - \Phi_2$, da hier Φ_1, Φ_2 konstant gesetzt werden können, falls ein enger Spektralbereich untersucht wird und
- ein Amplitudenfaktor $r_1 r_2$, der in der selben Näherung wie unter a) konstant ist.

II.10 Ungenauigkeiten in der Spiegelbewegung (siehe auch IV)

Grundsätzlich sind zwei Vorgänge verantwortlich, die zu Unregelmäßigkeiten im Spiegellauf führen können¹⁹⁾:

1) Vorschubsschwankungen

Diese können a) statistisch sein, verursacht durch Gleichlaufschwankungen des Motors, Schmutz im Getriebe oder Dickenschwankungen des Schmierstofffilms;

und b) reproduzierbar sein, durch Steigungsfehler der Antriebsspindel und Unebenheiten der Gleitbahn.

2) Verkippen des beweglichen Spiegels

Dieses kann a) statistischer Art sein, durch Schmutz auf der Gleitbahn oder Schmierfilmdickenänderung;

und b) reproduzierbar sein, durch Unebenheiten der Gleitbahn.

Die reproduzierbar auftretenden Ungenauigkeiten können in einer Eichkurve erfaßt werden. Als Lichtquelle dient ein Laser mit Strahlaufweitungsoptik. Zugehöriges Interferogramm: $I(l) = I_0 \cos k_0 l$. Mit dieser Anordnung misst man Vorschubsschwankungen als reine Schwankungen der Periode des Kosinus

$$I(l) = I_0 \cos(\alpha(l) k_0 l) . \quad (34)$$

Der durch Messung bestimmte Faktor $(\alpha(l))^{-1}$ ist als Korrekturfaktor für anschließend zu messende Interferogramme verwendbar.

Verkippt der Spiegel während der Bewegung, so entstehen auf der in Parallelstellung der Spiegel gleichmäßig erhöhten Detektorfläche Streifen als Interferenz gleicher Dicke. Dies hat einen Kontrastverlust zur Folge.

$$I(l) = I_0 \beta(l) \cos k_0 l \quad (35)$$

$(\beta(l))^{-1}$ ist der gewonnene Amplitudenkorrekturfaktor!

Damit führen Fehler von Typ 1) auf reine Periodenschwankungen, solche vom Typ 2) auf reine Amplitudenschwankungen.

(Eine Verwendung von retroreflektierenden Dreiecksprismen ("Katzenaugen") statt der Spiegel würde Fehler vom Typ 2) auf ein Minimum reduzieren).

III. Lichtquellen und ihre Interferogramme

III.1 Quasimonochromatisches Licht

Licht mit einer spektralen Intensitätsverteilungsfunktion $G(k)$, die auf die Umgebung ihres Maximums k_o beschränkt ist, bezeichnet man als quasimonochromatisches Licht. Dies ist z.B. bei jeder Spektrallinie gegeben.

$$G(k) \begin{cases} \neq 0 & \text{für } k_o - \Delta k < k < k_o + \Delta k \\ \approx 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Berechnung des Interferogrammes beginnt mit der Fouriertransformation

$$I(l) = I_o \int_0^\infty G(k) \cos(kl) dk .$$

Die Substitution $k' = k - k_o$ verschiebt den Koordinatenursprung nach k_o . ($dk' \rightarrow dk$; $G(k) \rightarrow H(k')$):

$$\begin{aligned} I(l) &= I_o \int_{-k_o}^{\infty} H(k') \cos((k'+k_o)l) dk' \\ &\approx I_o \int_{-\infty}^{+\infty} H(k') \cos((k'+k_o)l) dk' , \text{ da } H(k') \approx 0 \text{ in } -\infty < k' < -k_o ! \\ &= I_o \cos(k_o l) \int_{-\infty}^{+\infty} H(k') \cos(k'l) dk' - \\ &\quad - I_o \sin(k_o l) \int_{-\infty}^{+\infty} H(k') \sin(k'l) dk' \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2o)$

$$I(l) = C(l) \cos(k_o l) - S(l) \sin(k_o l) \tag{36}$$

Die Symmetrie zu $l=0$ bleibt erhalten.

Im Vergleich zu $\sin k_0 l$ und $\cos k_0 l$ stellen $C(l)$ und $S(l)$ langsam veränderliche Amplitudenfunktionen dar, die die Gestalt des Spektrums bestimmen. k_0 gibt die Lage des Spektrums im Spektralbereich an.

Der Gleichung (36) äquivalent ist folgende Darstellung des Interferogrammes:

$$I(l) = U(l)\cos(k_0 l + \Phi(l))$$

Dies ist anhand folgender Gleichungen leicht nachzuvollziehen:

$$U(l)\cos\Phi(l) = C(l) ;$$

$$U(l)\sin\Phi(l) = S(l) \text{ und } U(l) = \sqrt{C(l)^2 + S(l)^2} .$$

Der Ortsanteil des Wellenfeldes lässt sich nun folgendermaßen ansetzen:

$$E(l) = A(l)\cos(k_0 l + \Phi(l))$$

Ist die Spektrallinie um k_0 symmetrisch, so entfällt die Sinustransformation, d.h. $S(l) = 0$. Für $I(l)$ ergibt sich dann:

$$I(l) = C(l)\cos k_0 l$$

Das Wellenfeld ist demnach

$$E(l) = A(l)\cos k_0 l = \operatorname{Re} A(l)e^{ik_0 l}$$

Unter Berücksichtigung der komplexen Autokorrelationsfunktion ergibt sich aber auch ²¹⁾:

$$\begin{aligned} I(l) &= E(l) * E(l) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)E(x-l)^* dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)A(x-l)^* e^{i(k_0 x - k_0(x-l))} dx \\ &= \operatorname{Re} e^{ik_0 l} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)A(x-l)^* dx \\ &= \cos k_0 l \cdot C(l) \end{aligned} \quad (37)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß allein der Amplitudenverlauf des Wellenfeldes die Gestaltsfunktion $C(l)$ des Interferogrammes bestimmt.

Dies erlaubt ein besonders einfaches und elegantes Verfahren für die Untersuchung einzelner (symmetrischer) Spektrallinien. Es besteht nämlich die Möglichkeit, k_o und die Einhüllende $C(l)$ getrennt zu messen:

Bewegt man z.B. den einen Spiegel mit konstanter Geschwindigkeit u , so ist der Gangunterschied $l = 2ut$. Der Kosinus des Interferogrammes wird maximal für

$$k_o l = (2\pi/\lambda_o)l = 2\pi n ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Anzahl der durchlaufenen Maxima im Zeitintervall t_o kann mit einem Frequenzzähler bestimmt werden, dem man das am Detektor gewonnene Signal zuführt.

$$k_o = \frac{\pi n}{ut_o} ;$$

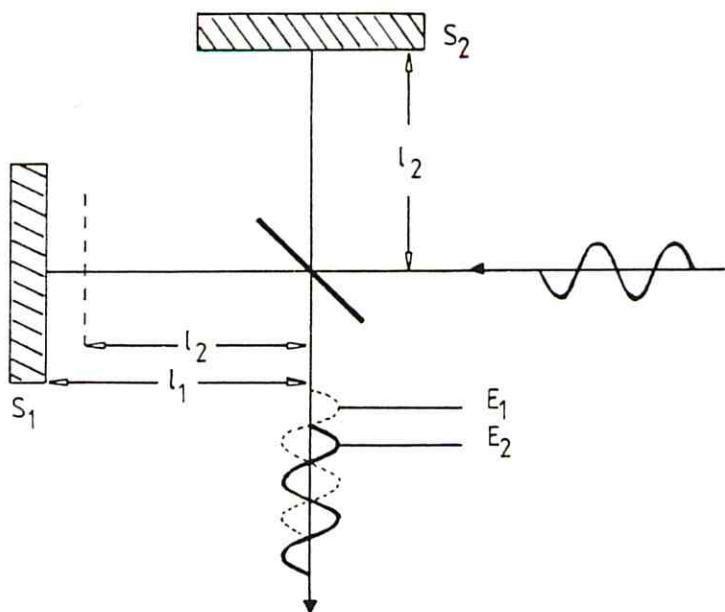
Wegen der Ungenauigkeit ($n = \pm 2$) der Festlegung des Anfangs- und Endpunktes bei der Abzählung, ergibt sich bei 600 - 800 ausgezählten Kosinusperioden aber immer ein systematischer Fehler von $\pm 1,5$ nm bei der Wellenlängenbestimmung!

Die sich langsam mit l verändernde Hüllkurve $C(l)$ läßt sich hingegen mit einem Speicheroszillographen oder einem Amplitudenschreiber aufzeichnen.

III.2 Kohärenzlänge

Zwei Wellensysteme, die von Quellen gleicher Frequenz mit übereinstimmender Phase oder konstanter Phasendifferenz abgestrahlt werden, bezeichnet man als kohärent. Ein Zweistrahlinterferometer liefert kohärentes Licht. Die Strecke L , auf der Interferenzen gemessen werden können, bezeichnet man als Kohärenzlänge. Die zugehörige Kohärenzzeit T erhält man aus

a)



b)

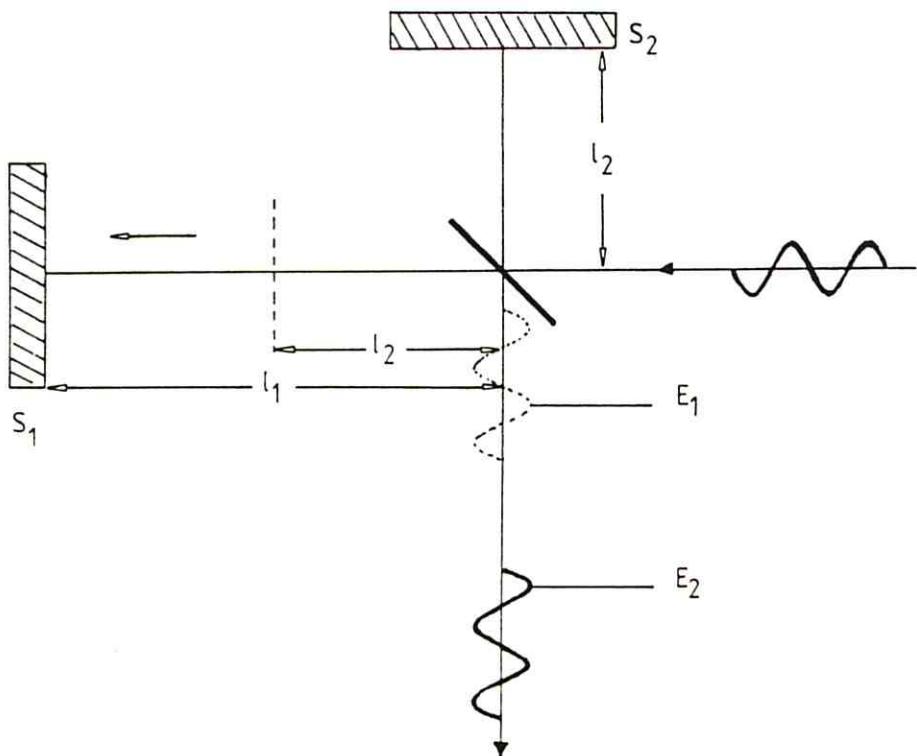


Abb. 11

- a) Interferenz zweier Wellen bei hinreichend
kleinem Gangunterschied.
- b) Keine Interferenz, da der Gangunterschied
größer als die Länge der Wellenzüge ist.
 $I(1) = E_1^2 + E_2^2 = \text{konst.} !$

$$T = \frac{L}{c} \quad \text{mit } c = \text{Lichtgeschwindigkeit.} \quad (38)$$

Wie später gezeigt wird, ist L umgekehrt proportional zur Halbwertsbreite des Spektrums (s.S. 40 und S. 45).

Die Definition sei veranschaulicht anhand der Interferenz von Wellenzügen, die auf einer endlichen Länge konstante Maximalamplitude haben, außerhalb dieser Länge jedoch verschwinden (s. Abb. 11) ²².

III.3 Das Interferogramm einiger Modelle thermischer Lichtquellen

Bei der Messung an Spektrallinien ist es möglich, aus dem Interferogramm oder dem daraus errechneten Spektrum auf die Ursache der Verbreiterung dieser Linien zu schließen. Im folgenden werden einige grundlegende Mechanismen der Linienverbreiterung vorgestellt. (Natürliche, Doppler- und Druckverbreiterung).

Es sei vorweggenommen, daß Doppler- und Druckverbreiterung als Hauptquelle der in unserem Fall gemessenen Linienverbreiterung zu sehen sind. Die Dopplerverbreiterung unterscheidet sich von der anderen dadurch, daß sie nicht den Emissionsvorgang beschreibt, sondern ein Beobachtungsproblem wiederspiegelt.

III.3.1 Natürliche Linienbreite

a) Klassische Interpretation

Ein ungestört strahlender Oszillator strahlt eine gedämpfte Welle ab:

$$E(t) = \begin{cases} A_0 e^{-\frac{t}{t_n}} \cos k_0 l & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 . \end{cases}$$

Hierbei bezeichne t_n die die Dämpfung charakterisierende mittlere Lebensdauer.

Das normierte Interferogramm ist somit:

$$I(l) = e^{-\frac{|l|}{c t_n}} \cos k_0 l .$$

Unter der Annahme, daß alle Oszillatoren gleich sind, stellt dies auch das Interferogramm eines Oszillatorenensembles dar.

Die inverse Fouriertransformation liefert nun das Spektrum:

$$G(k) = \frac{2(t_n c)^{-1}}{(t_n c)^{-2} + (k - k_0)^2} ; \quad (39)$$

$G(k)$ ist eine Lorentzverteilung um k_0 mit der Halbwertsbreite $2/(t_n c)$. (Siehe auch III.3.3).

b) Quantenmechanische Darstellung

Die Strahlungsenergie ist gleich der Differenz der Energieniveaus, zwischen denen der Übergang erfolgte.

$$E = E_1 - E_2 = \hbar k c$$

Es gelten die Unschärferelationen:

$$\Delta E_1 \Delta t \gtrsim \hbar$$

$$\Delta E_2 \Delta t \gtrsim \hbar$$

$$\Delta E \Delta t = (\Delta E_1 + \Delta E_2) \Delta t \gtrsim 2\hbar .$$

Nimmt man für Δt etwa die mittlere Lebensdauer t_n eines angeregten Zustandes, so ist ²³⁾

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 \geq \frac{2\hbar}{t_n} \quad \Rightarrow \quad \Delta k \sim \frac{1}{t_n}$$

Daß diese Abschätzung die Verhältnisse richtig wiedergibt, zeigt sich, wenn man t_n gegen ∞ gehen läßt.

Dies hat eine scharfe Frequenz zur Folge ($\Delta k \rightarrow 0$).

(Das klassisch erhaltene Lorentz-Profil einer Spektrallinie läßt sich auch quantenmechanisch er-

mitteln²⁴⁾.

Erwähnt sei noch, daß die Lebensdauer t_n proportional zur Kohärenzzeit ist. (Siehe auch III.3.2).

III.3.2 Dopplerverbreiterung

Die natürliche Breite einer Spektrallinie kommt bei den Beobachtungen im allgemeinen nicht zur Geltung; einmal, weil - außer bei extrem hohen Verdünnungen - das freie Ausschwingen der Oszillatoren gestört wird (siehe III.3.3), sodann hauptsächlich, weil bei ihrer Berechnung die stillschweigende Voraussetzung gemacht wurde, daß der emittierende Dipol ruht. In Wirklichkeit aber bewegen sich die Atome oder Moleküle mit großen Geschwindigkeiten, die (sofern nicht noch besondere äußere Felder einwirken⁺) von der Temperatur des Gases abhängen. Durch diese Bewegung entsteht der bekannte Dopplereffekt⁺⁺:

Bewegt sich ein Atom oder Molekül, das quasimonochromatisches Licht der Wellenzahl k_0 mit der natürlichen Linienbreite abstrahlt, mit einer Geschwindigkeit v auf einer Geraden zwischen ihm und einem Beobachter, so sieht dieser eine Wellenzahl

$$k = k_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad \Rightarrow \quad v = \frac{k - k_0}{k_0} c .$$

⁺)

Weitere Einflüsse auf das Spektrum, wie koordinierte Wechselwirkung emittierender Atome, Wechselwirkung mit elektrischem Feld (Starkeffekt) und Wechselwirkung mit Magnetfeld (Zeeman-Effekt, Paschen-Back-Effekt) seien nur angeführt.

⁺⁺)

Die natürliche Linienbreite beträgt im allgemeinen im Vergleich zur Dopplerverbreiterung etwa 1 %²⁶⁾.

Befinden sich die Moleküle im Temperaturgleichgewicht, so ist die Geschwindigkeit nach Maxwell verteilt²⁵⁾.

$$P(v) dv = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\beta v^2} dv \quad \text{wobei } \beta := \frac{m}{2k_B T}$$

und

m - Molekülmasse

k_B - Boltzmannkonstante

T - absolute Temperatur.

Damit ergibt sich folgende spektrale Verteilungsfunktion (ohne die natürliche Linienbreite⁺⁺) S. 38):

$$G(k) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} \frac{k_0}{c} e^{-\beta c^2 \left(\frac{k-k_0}{k_0}\right)^2} \quad (40)$$

Nach Koordinatentransformation analog III.1:

$$H(k') = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} \frac{k_0}{c} e^{-\beta c^2 \left(\frac{k'}{k_0}\right)^2} = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} \frac{k_0}{c} e^{-\left(\frac{2}{a}\right)^2 k'^2};$$

wobei mit a die Breite von H(k') gemeint ist, an der H(k') auf $\frac{1}{e}$ H(0) abgefallen ist. ($a^2 := 4\left(\frac{k_0^2}{\beta c^2}\right)$).

Mit der Normierung $\int_{-\infty}^{+\infty} H(k') dk' = 1$ erhält man:

$$H(k') = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{2}{a}\right)^2 k'^2}. \quad (41)$$

Das Interferogramm bestimmt sich nun wie folgt:

$$I(l) = C(l) \cos k_0 l$$

$$\begin{aligned} C(l) &= I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} H(k') \cos k' l dk' \\ &= \operatorname{Re} I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} H(k') e^{ik'l} dk' \\ &\approx \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{2k'}{a}\right)^2 - \left(\frac{ila}{4}\right)^2} dk' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Setze } z := \left(\frac{2k'}{a} - i\frac{1}{4}a \right) \Rightarrow \\
 C(l) &= \frac{2}{a\sqrt{\pi}} I_0 \frac{a}{2} e^{-\left(\frac{1}{4}a\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz \\
 &= I_0 e^{-\left(\frac{1}{4}a\right)^2 l^2} \\
 \Rightarrow I(l) &= I_0 e^{-\frac{a^2}{16} l^2} \cos k_0 l \quad \text{wobei } \frac{a^2}{c^2 m} := \frac{8k_0^2 k_B T}{c^2 m} \quad (42)
 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß die Einhüllende des mit $\cos k_0 l$ schnell oszillierenden Interferogrammes eine Gaußkurve darstellt, die mit wachsender Temperatur T immer schmäler wird.

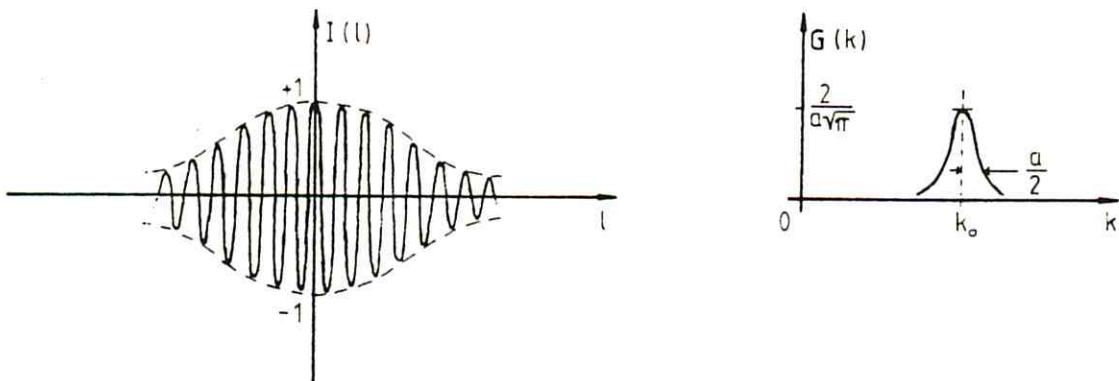


Abb. 12

Interferogramm und Spektrum
einer dopplerverbreiterten Spektrallinie ²⁷⁾.

Die Kohärenzlänge L lässt sich jetzt als die Länge zwischen den Punkten definieren, an denen $I(l)$ auf $\frac{1}{e} \cdot I(0)$ abgefallen ist ²⁸⁾.

$$L := \frac{4}{a} \sim \left(\frac{1}{T}\right)^{1/2}$$

III.3.3 Stoßverbreiterung

In diesem Abschnitt werden unter Stoß- oder Druckverbreiterung alle Störungen der Monochromasie zusammengefaßt, die von der Wechselwirkung emittierender Atome herrühren. Diese Störungen beruhen zwar auf mehreren Mechanismen ⁺), haben aber alle ein Anwachsen der Linientreite mit steigendem Druck zur Folge. Es ist auch nur in einigen Fällen möglich, den Anteil der verschiedenen, gleichzeitig wirksamen Mechanismen zu bestimmen, da letztlich das selbe Kraftgesetz zugrunde liegt (Coulomb-Felder).

Hier sei jetzt ein in Gasentladungslampen wesentlicher Mechanismus herausgegriffen: die Linienverbreiterung auf Grund der Verkürzung der Lebensdauer eines angeregten Zustandes, verursacht durch einen Stoß dieses Atoms mit einem Störatom ⁺⁺). ²⁵⁾ und ²⁹⁾

In einer Gasentladungslampe emittiert jedes strahlende Atom oder Molekül eine Kosinus-Welle der Frequenz $\nu_0 = ck_0/2\pi$. Dieser Strahlungsvorgang wird jedoch ständig durch Stöße unterbrochen, wobei nach jedem Stoß der Emissionsvorgang beendet oder ohne feste Phasenbeziehung zur vorhergehenden Strahlung fortgesetzt wird. Dadurch wird der durch die natürliche Strahlungsdämpfung gegebene Wellenzug in kleine Stücke zerhackt, deren Längen durch den Zeitabstand t zwischen zwei Stößen gegeben sind. Da sich die Amplitude des Wellenzuges auf Grund der natürlichen Strahlungsdämpfung nur geringfügig ändert, kann man sie innerhalb t als konstant ansetzen.

+)

Vor allem Starkeffekte ²⁸⁾ und Stoßprozesse

++)

Dieser überspielt den Dopplereffekt bei schweren Gasen von niedriger Temperatur und hoher Dichte.

Damit ist die Einhüllende eines Wellenzugstückes:

$$A(\tau, \hat{t}) = \begin{cases} A_0 & \text{für } \tau - \frac{\hat{t}}{2} \leq t \leq \frac{\hat{t}}{2} + \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

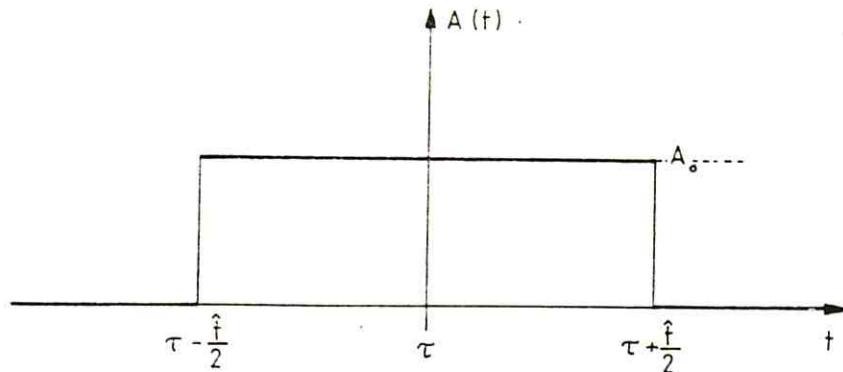


Abb. 13

Einhüllende eines Wellenzugstückes

Hieraus ergibt sich nach Gleichung (37) das Interferogramm der Strahlung des j-ten Atoms:

$$I_j(\tau, \hat{t}) = \cos 2\pi v_0 \tau \cdot \bar{C}_j(\tau, \hat{t})$$

$$\bar{C}_j(\tau, \hat{t}) = A_j(\tau) * A_j(\tau) \quad (\quad A_j(\tau) = A(\tau, \hat{t}) \quad).$$

$$\bar{C}_j(\tau, \hat{t}) = \begin{cases} \int_{-\frac{\hat{t}}{2}}^{\frac{\hat{t}}{2}} A_0^2 dt = A_0^2(\hat{t} + \tau) & \text{für } -\hat{t} < \tau < 0 \\ \int_{\tau - \frac{\hat{t}}{2}}^{\frac{\hat{t}}{2}} A_0^2 dt = A_0^2(\hat{t} - \tau) & \text{für } 0 < \tau < \hat{t} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= A_0^2 (\hat{t} - |\tau|) \quad \text{für } |\tau| < \hat{t}.$$

Für $|\tau| < \hat{t}$ ist also das Interferogramm von 0 verschoben.

$$I_j(\tau, \hat{t}) = \cos(2\pi v_0 \tau) A_o^2 \hat{t} \left(1 - \frac{|\tau|}{\hat{t}}\right).$$

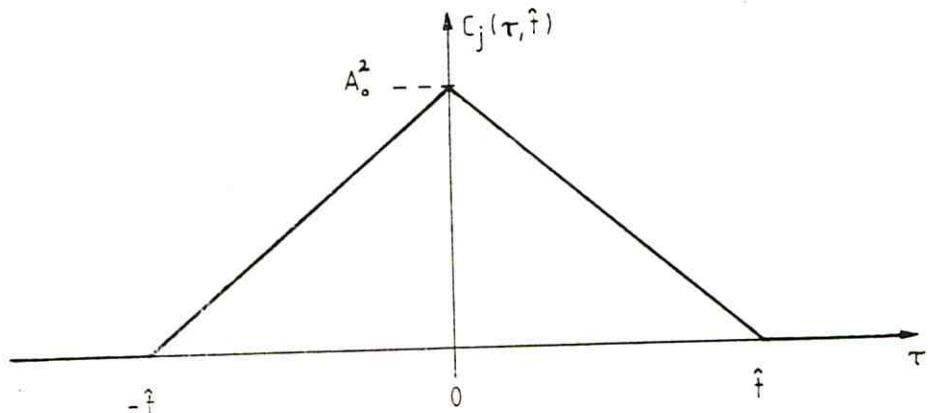


Abb. 14

Interferogrammhüllkurve der Strahlung des
j-ten Atoms

Die Amplitude aller emittierten Wellenzüge ist im Zeitmittel gleich und wird deshalb für alle j gleich angesetzt. Nach Gleichung (18) erhält man das Interferogramm eines Teilchenensembles durch Superposition aller Einzelinterferogramme, wobei hier die Summe wegen der großen Anzahl von Stößen durch ein Integral ersetzt wird. Dabei muß das Interferogramm, das zur Zeit \hat{t} gehört, mit dem Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\hat{t})$, (daß im Intervall $(\hat{t}, \hat{t} + \Delta \hat{t})$ ein Stoß erfolgt), gewichtet werden.

$$\bar{C}(\tau) = \int_0^\infty \bar{C}_j(\tau, \hat{t}) P(\hat{t}) d\hat{t} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{|\tau|}{\hat{t}}\right) \hat{t} P(\hat{t}) d\hat{t}$$

Nach der kinetischen Gastheorie³⁰⁾ ist

$P(t) dt = (e^{-t/\bar{t}}) \frac{dt}{\bar{t}}$; wobei $\bar{t} = \int_0^\infty t P(t) dt$ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen darstellt.

$$\Rightarrow \bar{C}(\tau) = e^{-|\tau|/\bar{t}} = e^{-|l|/\bar{t}_c} = C(l) \quad (43)$$

und

$$I(\tau) = e^{-|\tau|/\bar{t}} \cos 2\pi v_0 \tau .$$

Durch inverse Fouriertransformation erhält man das Spektrum

$$\begin{aligned} H(k') &= \int_0^\infty C(l) \cos k' l dl \\ &= \int_0^\infty e^{-|l|/\bar{t}_c} \cos k' l dl \\ H(k') &= \frac{2/\bar{t}_c}{\left(\frac{1}{\bar{t}_c}\right)^2 + k'^2} . \end{aligned}$$

Eine Rückverschiebung des Koordinatensystems ergibt:

$$G(k) = \frac{2(\bar{t}_c)^{-1}}{(\bar{t}_c)^{-2} + (k - k_0)^2} . \quad (44)$$

$G(k)$ ist eine Lorentzverteilung um k_0 mit der Halbwertsbreite $2/(\bar{t}_c)$.

Drückt man \bar{t} durch die mittlere freie Weglänge \bar{s} aus, so ist:

$$\bar{t} = \frac{\bar{s}}{\bar{v}} = \frac{1}{\sigma p} \left(\frac{\pi m k_B T}{8} \right)^{1/2} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \sigma &- \text{Stoßquerschnitt} \\ p &- \text{Druck.} \end{aligned} \quad (45)$$

Definiert man die Kohärenzlänge L wiederum als die $1/e$ -Breite des Interferogramms, erhält man

$$L = \frac{1}{\pi} c \sim \frac{1}{p} \bar{T} .$$

Im Gegensatz zur Dopplerverbreiterung hängt die Stoßverbreiterung nicht von k ab.

Hier sieht man auch den in III.2 erwähnten Zusammenhang zwischen Kohärenzlänge und Halbwertsbreite Δk des Spektrums:

$$L \sim \frac{1}{\Delta k} .$$

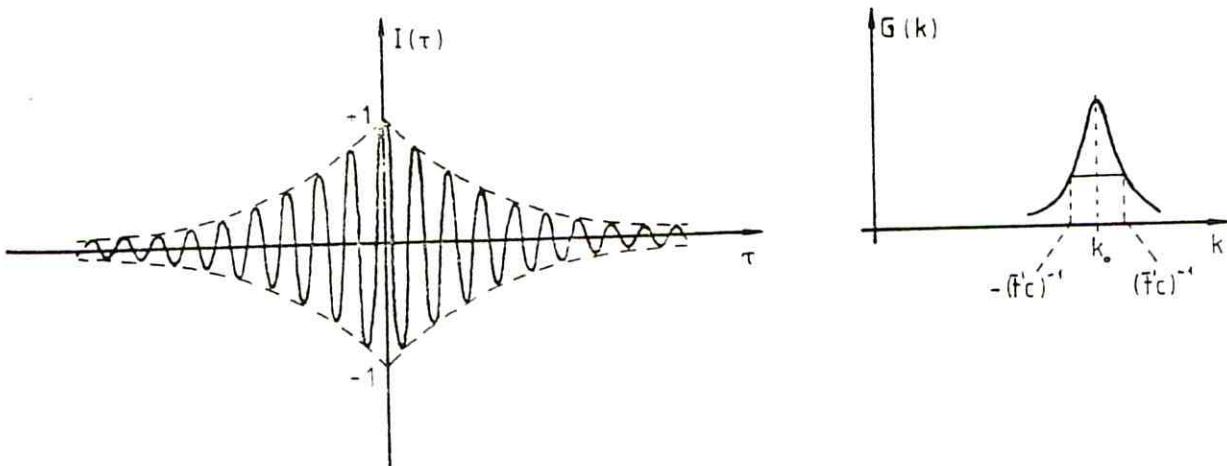


Abb. 15

Interferogramm und Spektrum
einer druckverbreiterten Spektrallinie ³¹⁾.

Mit dem in diesem Abschnitt verwendeten Ansatz erhält man zwar das richtige Profil des Spektrums, muß aber berücksichtigen, daß es zwei- bis dreimal breiter als der berechnete Verlauf ist ³²⁾. Dies ist auf das zusätzliche Wirken anderer Mechanismen der Linienverbreiterung zurückzuführen ⁺).

⁺)

z.B. die bereits erwähnten Starkeffekte

IV. Entwurf und Aufbau eines Michelson-Interferometers

IV.1 Konstruktive Erfordernisse

Um schmalbandige Spektrallinien analysieren zu können, muß der bewegliche Spiegel über eine möglichst große Wegstrecke verschiebbar sein. Eine optische Wegdifferenz von mehr als 2×20 cm ist jedoch nicht sinnvoll, da in diesem Bereich die Auflösungsbegrenzung durch einen hinreichend lichtstarken Kollimator einsetzt (vgl. II.8.A).

Eine genaue Berechnung der Wirkung der einzelnen Fehler-einflüsse auf das durch maschinelle Fouriertransformation bestimmte Spektrum findet sich z.B. bei H. Parsche (33).

Hier sei nur kurz das Wichtigste erwähnt:

Will man die Intensität von Geisterlinien im analysierten Spektrum < 3 % des Hauptmaximums halten, so müssen die Vorschubsschwankungen Δl unter $\lambda/100$ bleiben, wobei zur Nutzung des Jacquinotvorteils für das Verkippen des Spiegels ($\varnothing = 30$ mm) $\Delta\varphi = 10^{-7}$ grad zu fordern ist.

Beschränkt man sich auf quasimonochromatische Lichtquellen, so sinken die Genauigkeitsanforderungen und der Selbstbau eines Interferometers wird möglich. Für die langsam veränderliche Hüllkurve eines Interferogramms ist der Intensitätsmeßfehler, entstanden durch Verstärker und Schreiber, größer als jener, entstanden durch eine Vorschubungenauigkeit von $\Delta l < 20\lambda$ auf der gesamten Verschiebestrecke.

Nimmt man hierzu als Beispiel eine Einhüllende der Gestalt $C(l) = I_0 e^{-\beta|l|}$ (druckverbreiterte Spektrallinie), so ergibt sich für eine Wellenlänge von $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ und einer Breite an $1/e$ von 1 cm, d.h. $\beta = 1 \text{ cm}^{-1}$, folgender Amplitudenmeßfehler³⁴⁾:

$$\Delta C(l) = I_0 \left| e^{-1\text{cm}^{-1}|l + 20\lambda| \cdot 10^2} - e^{-1\text{cm}^{-1}|l - 20\lambda| \cdot 10^2} \right|$$

$$= I_0 \left| e^{-1\text{cm}^{-1}|l + 10\mu| \cdot 10^2} - e^{-1\text{cm}^{-1}|l - 10\mu| \cdot 10^2} \right|$$

\Rightarrow

$$C(l)_{\max} = \Delta C(10 \mu\text{m}) \approx 2 \cdot 10^{-3} I_0 , \quad \text{also}$$

$$\frac{\Delta C(l)_{\max}}{C(l)} \approx 0,2 \% \quad \text{und somit} \quad \frac{\Delta C(l)}{C(l)} \approx 0,2 \%$$

Für eine Vorschubungenauigkeit von $50 \mu \hat{=} 100 \lambda$ erhält man:

$$\frac{\Delta C(l)}{C(l)} \leq 1 \% .$$

Für Teilbereiche der Spindel, z.B. bei der Untersuchung breiter Spektren, in der Größenordnung einiger Wellenlängen ist jedoch eine Genauigkeit von $\Delta l < \lambda/10$ zu fordern, um, wie in III.1 dargelegt, die Periodenzahl noch bestimmen zu können. Die Aufgabe des Jacquinotvorsteils hat zur Folge, daß dies nur auf der ausgeblendeten Detektorfläche erfüllt sein muß. Für eine Kreisblende mit 3 mm Durchmesser ergibt sich als noch zulässiges Verkippen des Spiegels $\Delta\varphi < 2 \cdot 10^{-4}$ grad.

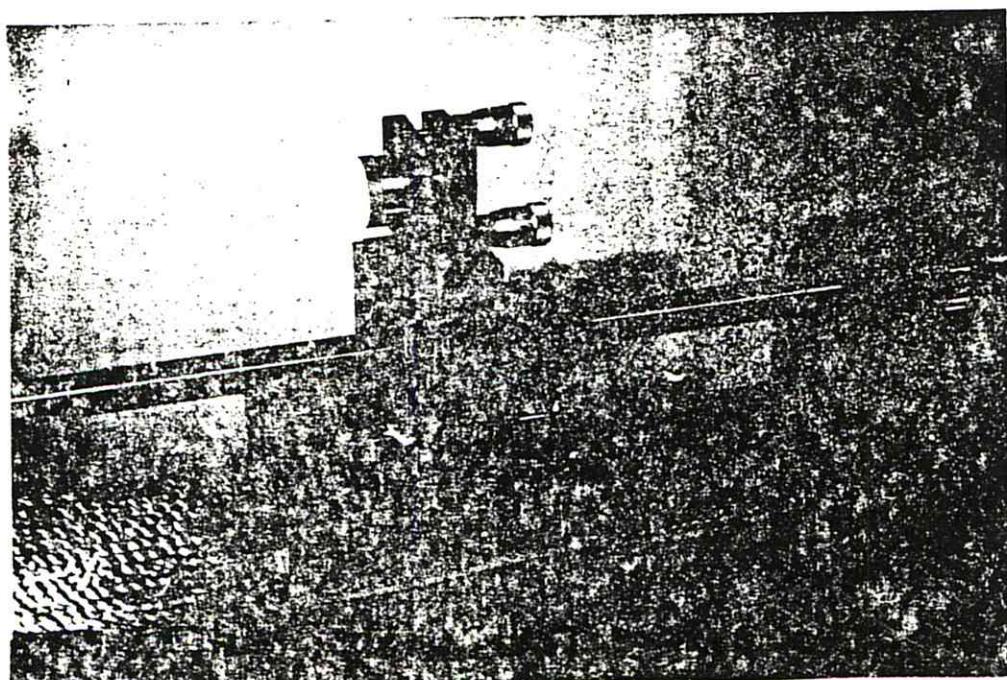


Abb. 16

Blick auf die Mechanik des beweglichen Spiegels

IV.2 Konstruktionsbeschreibung

Die in IV.1 genannten Genauigkeitsanforderungen an die Mechanik des beweglichen Spiegels lassen sich noch mit einem mechanischen Spindelantrieb erfüllen.

Der Aufbau des Interferometers erfolgte im wesentlichen nach einer Vorlage^{19), 5)} der Universität Ulm (+ Verbesserungen). Abb. 17 gibt schematisch die Mechanik des beweglichen Spiegels wieder.

Das vorgeschnittene Gewinde der Stahlspindel (A) wurde nach dem Härteten auf 5μ genau nachgeschliffen. Danach wurde die Spindelmutter (B) mit einem Poliermittel fein eingeschliffen. Dies bewirkt eine derartige Glättung der Gewindeflanken, daß auf einer Strecke von $\approx \lambda$ die Steigungsfehler wie gefordert $< \lambda/10$ bleiben.

Die Spindel (A) ist beidseitig in Kugellagern (C)geführt. Der Antrieb erfolgt entweder mit einer Handkurbel (D) oder über Synchroflex-Zahnräder (E) und Synchroflex-Zahnriemen (F) durch einen der beiden Synchronmotoren (G), die jeweils durch eine Magnetkupplung angekoppelt werden können.

Bezeichnungsschlüssel für Abbildungen 17 - 21:

- A Spindel
- B Spindelmutter
- C Kugellager
- D Handkurbel
- E Synchroflex-Zahnrad
- F Synchroflex-Zahnriemen
- G Synchronmotor
- H Magnetkupplung
- I Prisma (Richtschiene)
- K Schlitten
- L Teflongleitscheibe
- M Topfmagnet
- N beweglicher Planspiegel
- O₁ fester Spiegel (in Stellung 1)
- O₂ fester Spiegel (in Stellung 2)
- P Strahlteiler
- Q Ausgleichsplatte
- R Optische Bank

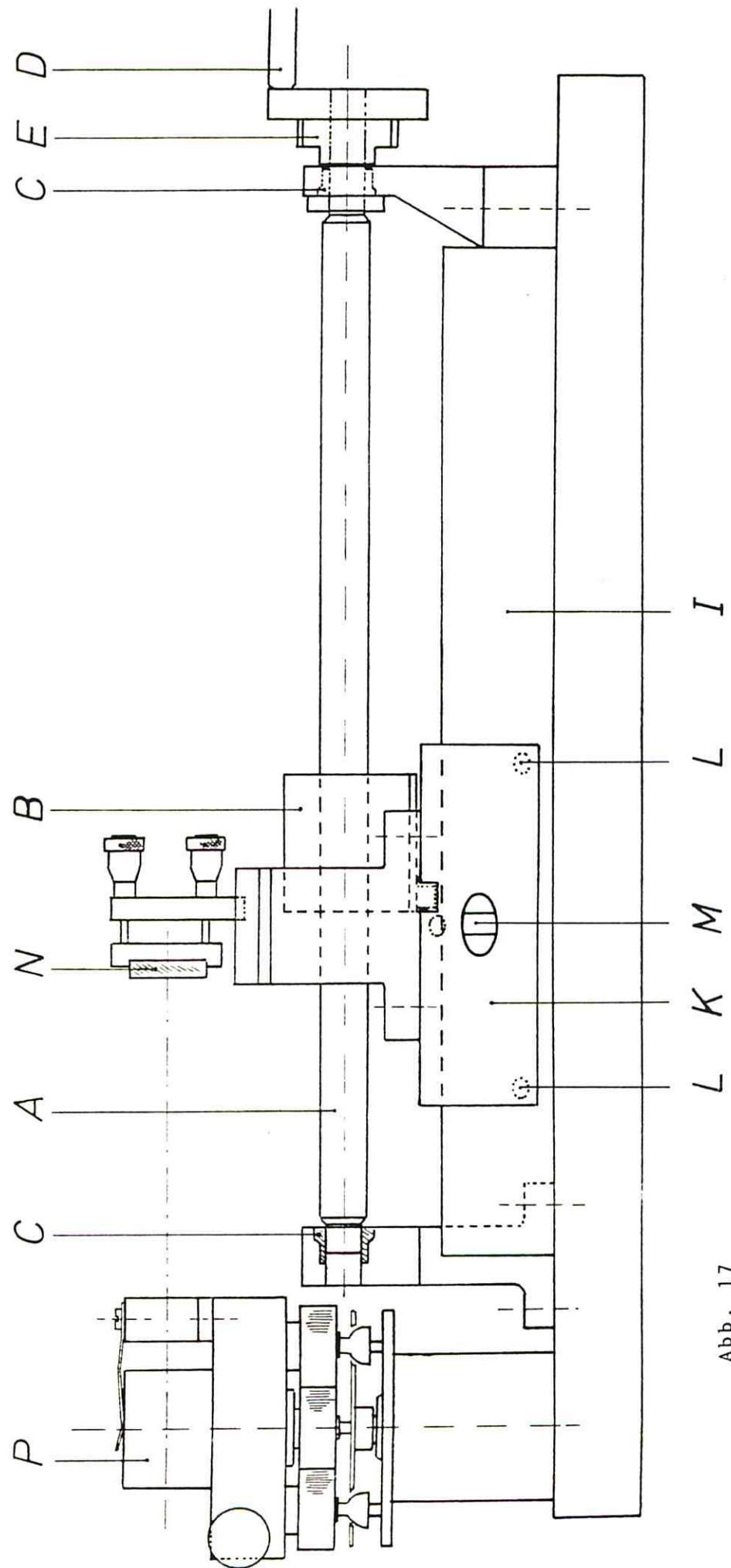


Abb. 17

Mechanik des beweglichen Spiegels (Bezeichnungsschlüssel siehe Seite 48)

Da sich selbst geringe Vibrationen sehr störend auf die Messung auswirken, ist es notwendig, Antriebssystem und Interferometer möglichst gut gegeneinander und gegen Erschütterungen von außen zu isolieren. Die einzige direkte Verbindung zwischen Motor und Spindel erfolgt deswegen auch - wie bereits erwähnt - über einen Synchroflex-Zahnriemen. (Es wurde ein Zahnriemen gewählt, um den Schlupf weitestgehend auszuschalten).

Das Antriebssystem ist mit einer Stütze am Stahlrohrrahmen des Meßtisches befestigt, während die eigentlichen Elemente des Michelson-Interferometers auf eine stabile Grundplatte montiert sind. Damit sich die Platte bei Temperaturänderungen nicht verwirft, wurde eine Ausführung aus dichtem, porenfreiem Guß (mit günstiger Materialverteilung gewählt. Diese Gußgrundplatte steht auf einer 10 cm dicken, in Sand gelagerten Granitplatte. Die Verbindung zum Meßtisch erfolgt dann noch über Schwingmetall-Puffer. (Die Störungen, hervorgerufen durch Erschütterungen von außen, liegen maximal im Bereich einer halben Wellenlänge).

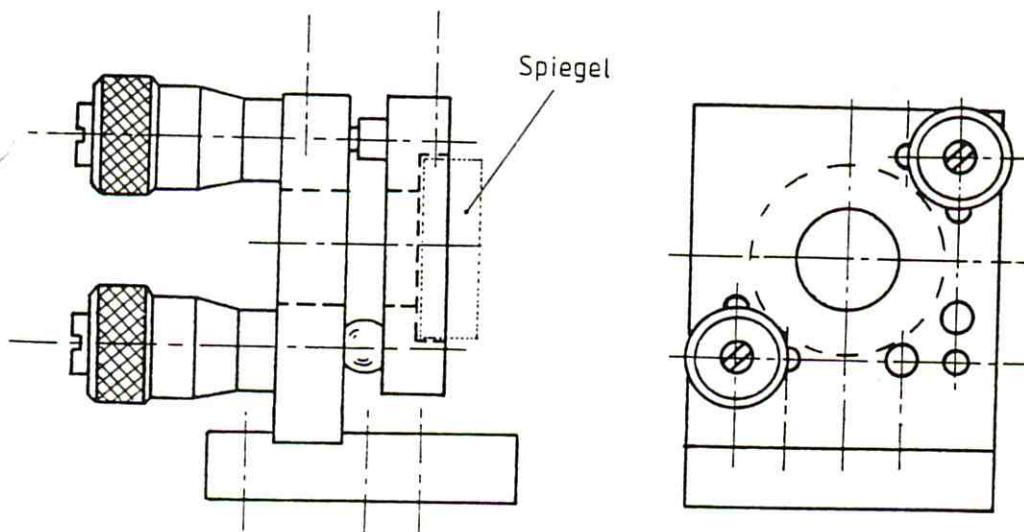


Abb. 18

Justierbare Spiegelhalterung

Der Spiegel (N) des Interferometers ist justierbar auf einem Schlitten (K) befestigt, der, von der Spindelmutter (B) über einen Mitnehmerstift vorgetrieben, auf einer Prismenführung (I) gleitet (vgl. Abb. 17).

Die beiden Interferometerspiegel, bestehend aus einer Glasplatte mit aufgedampfter Spiegelschicht, sind mit einem Zweikomponentenkleber in ihre justierbare Halterung (vgl. Abb. 18) eingeklebt. So können Spannungen vom Metall, z.B. durch Befestigungsschrauben, nicht auf den Glaskörper übertragen werden und den Spiegel verformen.

Für die Linearführung des beweglichen Spiegels wurde eine Prismenführung gewählt, weil

- a) eine solche Führung nur zwei ebene Gleitflächen erfordert und deshalb mögliche Fehlerquellen weitestgehend reduziert,
- b) das abzufangende Mutterndrehmoment nur gering ist,
- c) genaue Prismen als Touchierlineale im Handel erhältlich sind.

Der Winkel von 90° bedingt, daß Unebenheiten auf dem Prisma nur geringstmöglichen Einfluß auf die Linearität der Führung haben. (Maxwellbedingung für Linearführungen s. Lit. ¹¹).

Auf jeder Seite des Touchierlineals wird der Reiter durch je drei Teflon-Gleitflächen geführt (s. Abb. 17). Eine andere Möglichkeit wäre ^{5), 19)}, eine Kombination von Messing und Teflonscheiben zu wählen. Es zeigte sich jedoch, daß es äußerst schwierig ist, bei der Messing-Teflon-Anordnung die Scheiben so genau zu justieren, daß kein störendes Verkippen des Reiters auftrat. Weiterhin hinterließen die Messingscheiben Kratzspuren auf dem Touchierlineal, so daß mit Sicherheit die Qualität des Lineals (die Genauigkeit des Interferometers baut ja auf diesem Präzisionsinstrument) im Laufe der Zeit gelitten hätte. Um den Schlitten noch mehr zu stabilisieren, sind in seine Unterseite zwei Topfmagneten eingelassen, die den Schlitten an die Schenkel des Lineals drücken.

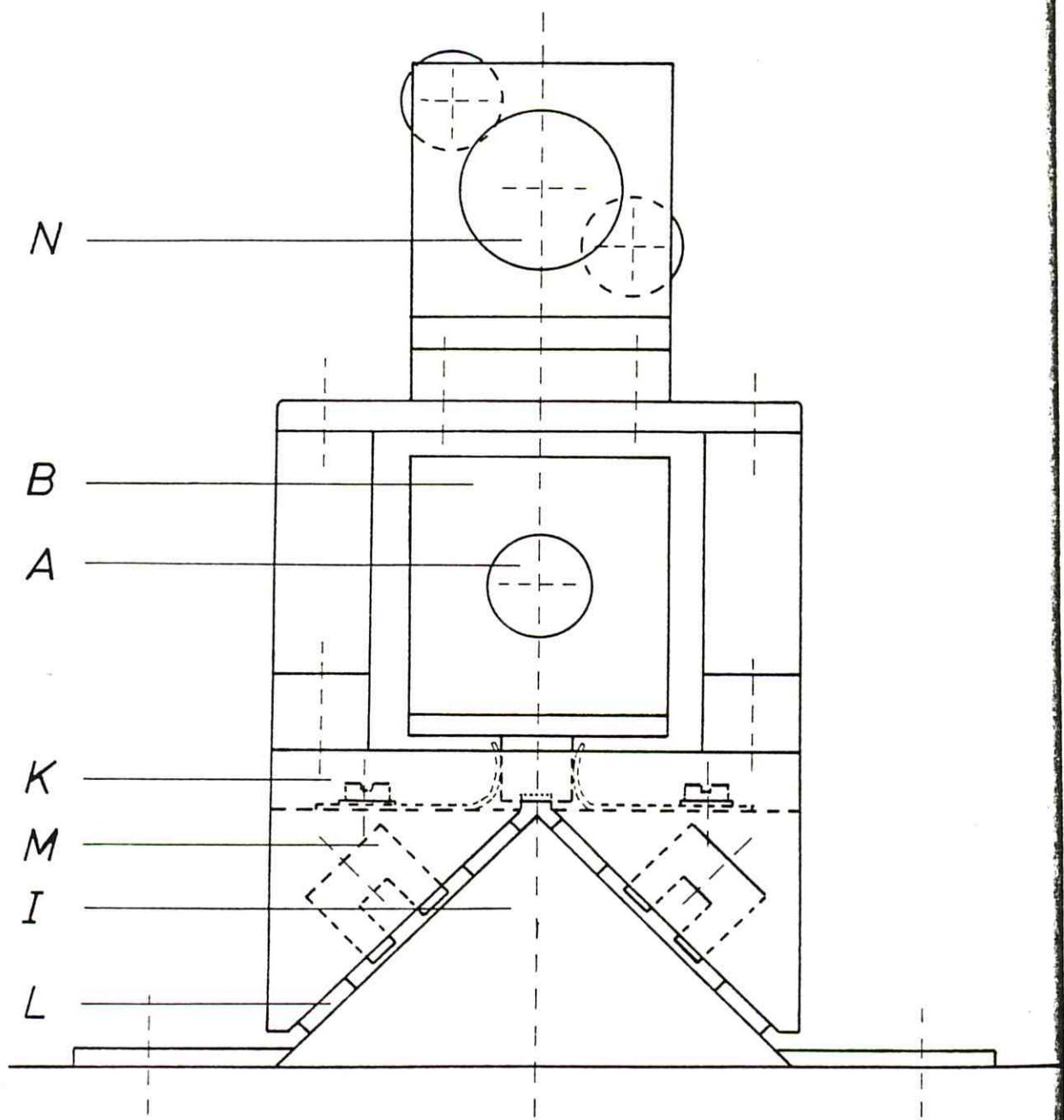


Abb. 19

Blick vom Strahlteiler auf die Mechanik des beweglichen Spiegels. (Bezeichnungsschlüssel s. S. 48)

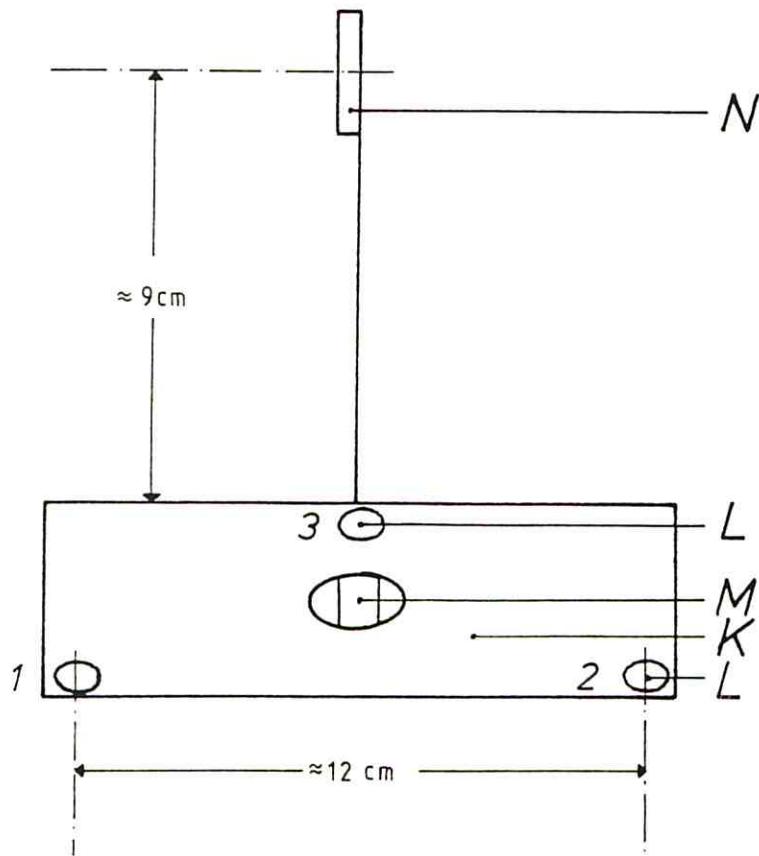


Abb. 2o

Skizze der Seitenansicht des beweglichen Spiegels.
(Bezeichnungsschlüssel s. S. 48)

Auf diese Weise wird ein störendes Verkippen des Reiters nahezu ausgeschaltet. Nur durch Unebenheiten auf der Bahn der weit auseinanderliegenden Punkte (1) und (2) kann ein minimales Verkippen entstehen (s. Abb. 2o). Unebenheiten auf der Bahn der Gleitflächen (3) erzeugen nur ein das Interferogramm nicht beeinflussendes Verkippen des Reiters senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Mit einer Genauigkeit des Touchierlineals von $\pm 2,5 \mu$ (auf die ganze Länge), ergibt sich ein maximales Verdrehen des Reiters:

$$\tan \varphi \approx \varphi = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{12 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \approx 4,2 \cdot 10^{-5}$$

und eine Vorschutungenauigkeit $\Delta l = 12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \tan \varphi$
 $\approx 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ m} \approx 10 \lambda$

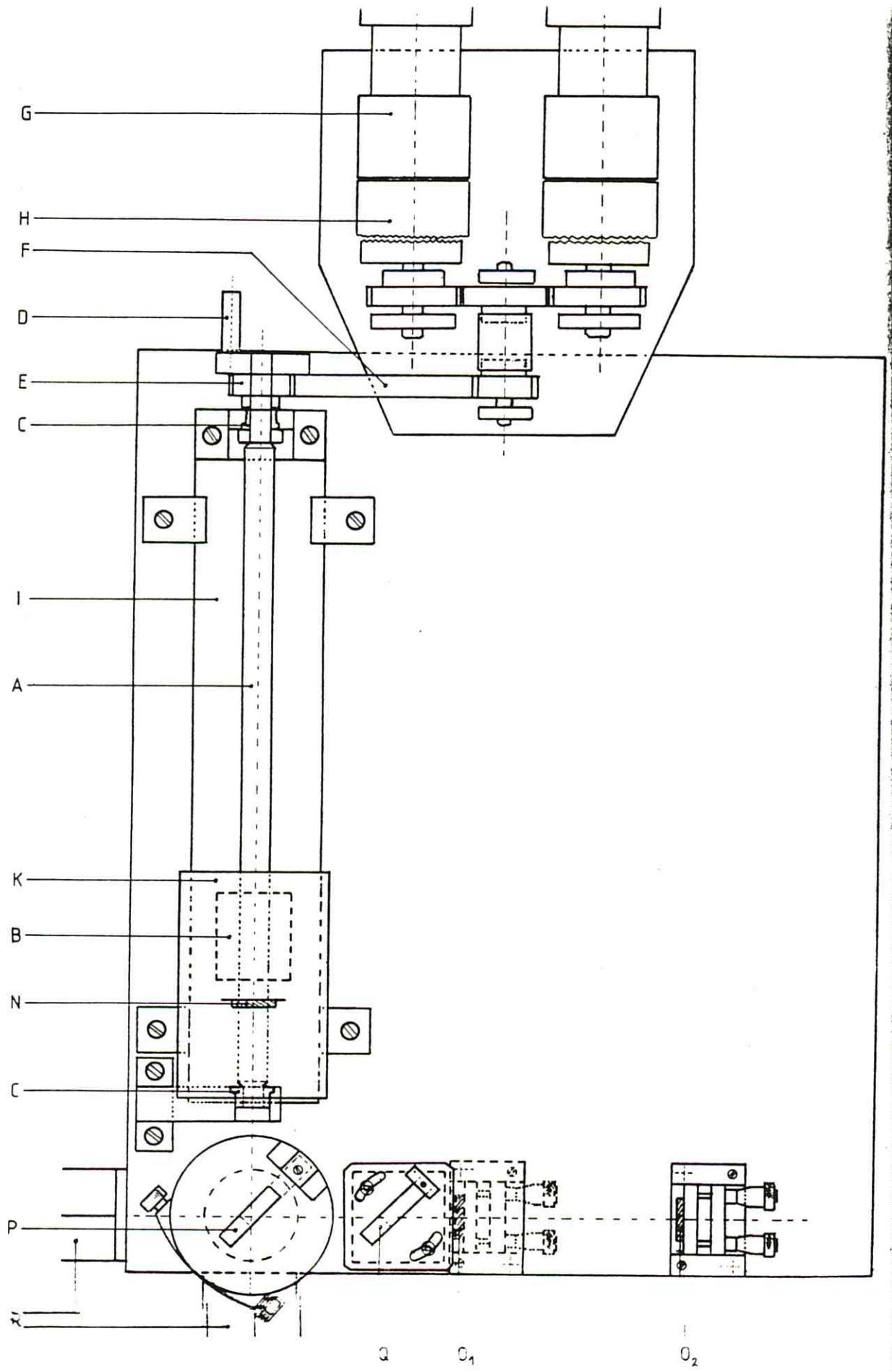


Abb. 21

Interferometer in Aufsicht. (Bezeichnungsschlüssel
s. S. 48)

Strahlteiler und Ausgleichsplatte stehen auf Reitern, die eine Drehvorrichtung besitzen. Die Teilerplatte kann zusätzlich noch mittels einer justierbaren Dreipunktauflage genau ausgerichtet werden. Der feste Spiegel sitzt mit seiner xy-Feinjustiereinheit (s. Abb. 18) auf einem Reiter, der sich in zwei Stellungen auf der Platte befestigen läßt. Eine Stellung (O_1) ist so gewählt, daß die Gangdifferenz $l=0$ dann erreicht ist, wenn der bewegliche Spiegel am Anfang seines Verschiebeweges steht, während die andere (O_2) so eingerichtet ist, daß für $l=0$ der bewegliche Spiegel gerade die Mitte seines Verschiebeweges durchläuft.

Diese zweite Möglichkeit erlaubt ein Überprüfen des Interferogrammes auf Symmetrie bezüglich $l=0$, die im Falle dispersionsgleicher Interferometerarme gegeben ist (both-sided interferogram). Die größte erreichbare Gangdifferenz liegt hier bei $l \approx 20$ cm.

Die erstgenannte Stellung gestattet es, nur eine Hälfte des symmetrischen Interferogramms zu messen. Hierin sind allerdings sämtliche Informationen enthalten. Der Vorteil dieser Anordnung liegt darin, daß die maximale Gangdifferenz $l \approx 40$ cm beträgt, und so das theoretische Auflösungsvermögen doppelt so groß ist. Ein Nachteil dieser Anordnung ist eine zusätzliche Fehlerquelle durch das Auffinden der ($l=0$)-Stellung. Diese kann als deutliches Maximum des Interferogramms von Weißlicht gemessen werden, da die Interferenzbedingung für alle Wellenlängen von Weißlicht nur für $l=0$ erfüllt ist.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß an zwei Stellen der Gußgrundplatte (Beleuchtungs- und Beobachtungsseite) jeweils eine optische Bank angeflanscht ist (R), um den Aufbau der Lichtquelle und des Detektors schnell verändern zu können.

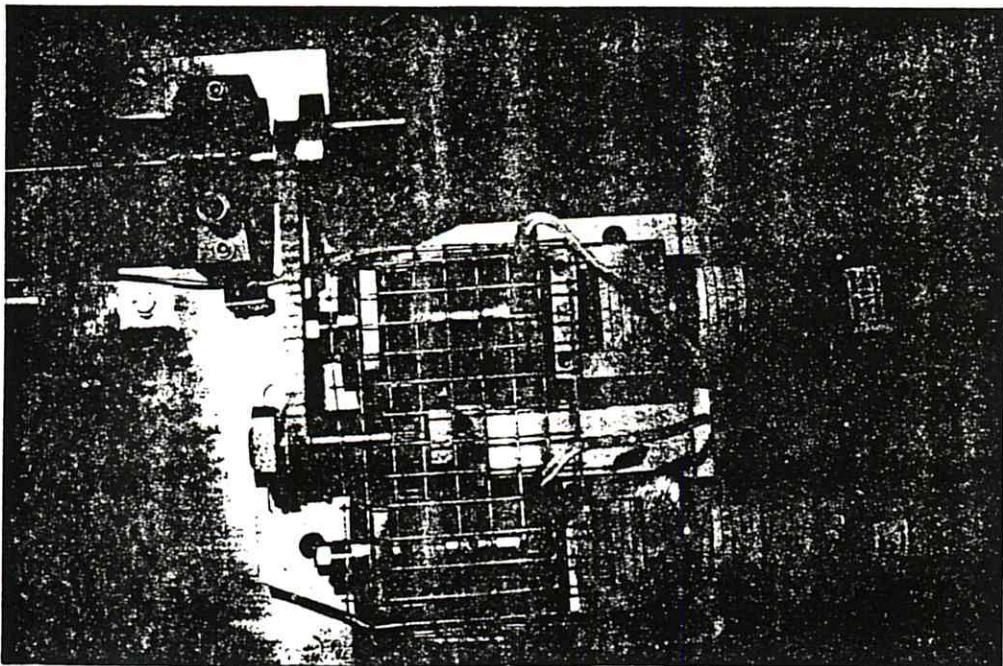


Abb. 22

Blick auf das Antriebssystem des Interferometers

IV.3. Aufnahmetechnik des Interferogramms

Wollte man das am Detektor abnehmbare Interferogramm quasimonochromatischen Lichtes mit einem Amplitudenschreiber unverändert aufnehmen, so müßten für $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ und $l_{\max} = 40 \text{ cm}, 8 \cdot 10^5$ Kosinusperioden gezeichnet werden. Dies ergäbe, bedingt durch die Strichdicke des Schreibers, einen sehr großen Papierverbrauch (Größenordnung 10^3 m), und durch die Trägheit des Schreibers lange Meßzeiten.

Die direkte Aufzeichnung empfiehlt sich also nur bei sehr kurzen Interferogrammen.

Dies sind die praktischen Gründe, die langsam veränderliche Hüllkurve und den schnell oszillierenden Ko-

sinus - wie in Abschnitt III.1 aus theoretischen Überlegungen gefordert - getrennt zu messen:

Ein Motor treibt den Spiegel mit der relativ langsam Geschwindigkeit von $0,8 \frac{\mu\text{m}}{\text{sec}}$ voran. Damit läßt sich aus dem Interferogramm die Wellenlänge bestimmen. Die Aufnahme der Einhüllenden hingegen erfolgt, indem man die Messung mit dem Spiegelvorschub von $125 \frac{\mu\text{m}}{\text{sec}}$ des zweiten Motors laufen läßt und die Zeitbasis des Schreibers passend, (d.h. seine Integriereigenschaften ausnützend), wählt.

Bei der Messung der Einhüllenden ist das gesuchte Signal die Amplitude der Interferenzfrequenz. Um sie zu erhalten, muß man das Ausgangssignal des Detektors (Multialkali-Photomultiplier; Hamamatsu Typ R955; spektrale Empfindlichkeitsverteilung siehe Abb. 23) gleichrichten. Dies geschieht mit einer Ge-Diode.

Es zeigt sich jedoch, daß dem Nutzsignal eine viel stärkere Wechselspannung von 100 Hz überlagert ist. Diese röhrt von der Eigenschaft wechselstromgespeister Lichtquellen her, in ihrer Intensität mit 100 Hz zu oszillieren. Bei der Gleichrichtung hat das eine sehr große Ausgangsspannung zur Folge, die man kompensieren müßte. Deswegen wird bei der Messung ein elektronisches Filter (Sperrfilter für 100 Hz unter Verwendung des Universalfilterbausteins Burr-Brown UAF 31) zwischen Detektor und Gleichrichter geschaltet, welches das Störsignal um etwa 40 dB abdämpft.

Diesem Sperrfilter ist ein Bandpaßfilter nachgeschaltet. Der Durchlaßbereich ist so ausgelegt, daß man maximale Verstärkung erhält für die mittlere Frequenz der Intensitätsveränderung am Detektor bezogen auf die mittlere Wellenlänge der verwendeten Quellen. Die Geschwindigkeit des schnellaufenden Motors wird so gewählt, daß die Intensitätsveränderung am Detektor nicht in die Nähe von 100 Hz zu liegen kommt.

Abb. 23

Spektrale Empfindlichkeitscharakteristik des verwendeten Photomultipliers:

HAMAMATSU Typ R 955

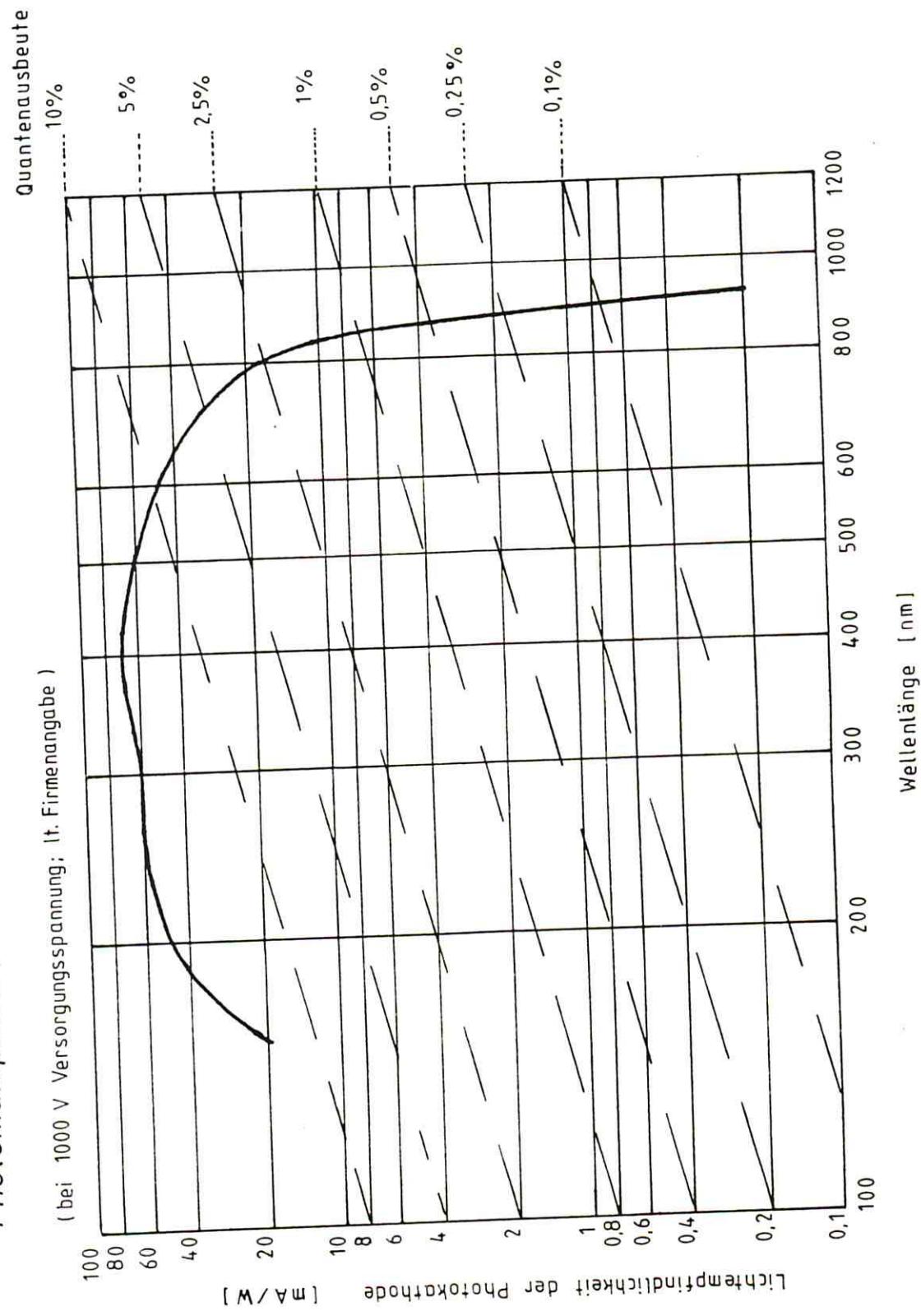




Abb. 24 Frequenz [s^{-1}]

Charakteristik des Filtersystems: Unterdrückung des Signals bei $f = 100$ Hz; f ist die mittlere Frequenz der Intensitätsveränderung am Detektor bezogen auf die mittlere Wellenlänge der Quelle

Die Charakteristik des gesamten Filtersystems ist in Abb. 24 dargestellt.

Abb. 25 zeigt ein Blockdiagramm des Detektorsystems. Hierzu sei noch erwähnt, daß das Filter drei Ausgänge

- besitzt: A nach dem 100 Hz Sperrfilter,
B nach dem Bandpaß,
C nach dem Gleichrichter.

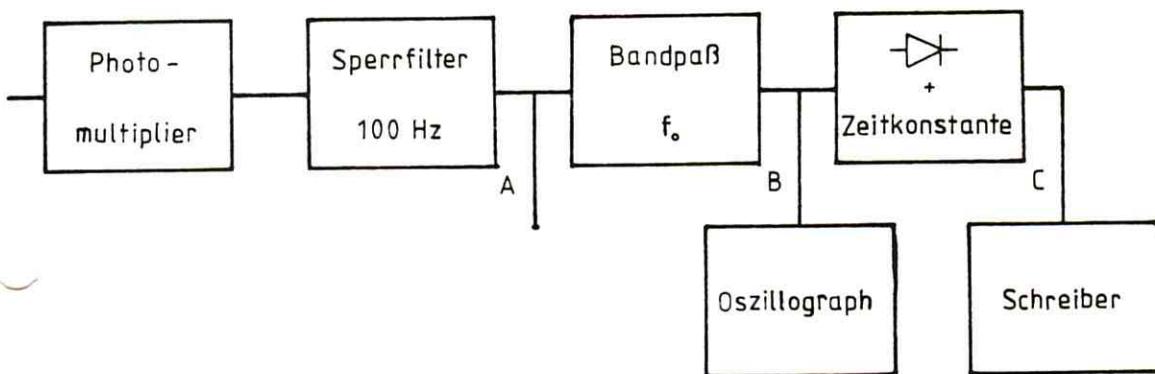


Abb. 25

Blockdiagramm des Detektorsystems

Auf diese Weise ist es möglich, den Verlauf des Signals mit einem Oszillographen zu verfolgen. Insbesonders bietet der Ausgang B eine nützliche Justierhilfe für das Auffinden der Weißlichtposition.

I. Meßergebnisse

I.1 Bestimmung der Interferometercharakteristik

Zunächst ist es notwendig, die wahre Vorschubgeschwindigkeit der beiden Motoren zu kennen. Hierzu wird ein Laser als Lichtquelle verwendet (Spectra Physice; Modell 156; He-Ne) und seine genau bekannte Wellenlänge (632,8 nm) als Grundlage für die Eichung herangezogen. Die Einstrahlung erfolgt über einen Kollimator ($f = 200 \text{ mm}$, $R = 100 \mu\text{m}$).

- 1.1 Die Vorschubgeschwindigkeit unter Verwendung des schnellen Motors M1 ist nach Angabe des Herstellers $125 \mu\text{m/sec}$.

Die Durchlauffrequenz v der Interferenzstreifen wurde mit einem Frequenzzähler bestimmt. Bei 400 Meßwerten ergab sich $\bar{v} = 395,6 \text{ sec}^{-1}$ mit einer Standardabweichung σ_v von $\pm 7,0 \text{ sec}^{-1}$. Nach III.1 ergibt sich für die wahre Vorschubgeschwindigkeit

$$\bar{v}_{\text{wahr}} = \frac{\lambda \cdot v}{2} = \frac{632,8 \cdot 10^{-9} \cdot 395,6}{2} = 125,2 \mu\text{m/sec}$$

$$\Rightarrow v_{\text{wahr}_1} = 125,2 \pm 2,2 \mu\text{m/sec}$$

- 1.2 Die Geschwindigkeitsbestimmung für den langsamen Motor M2 erfolgt einfach durch Auszählen der Kosinusperioden auf einem kleinen Intervall. Bei genau bekanntem Schreibervorschub erhält man die Zeit t , die zur Registrierung dieses Intervalls nötig war:

$$l_{\text{wahr}} = \frac{\lambda n}{2} \quad n = \text{Anzahl der Kosinusperioden}$$

$$\Rightarrow v_{\text{wahr}} = \underbrace{\frac{l_{\text{wahr}}}{t}}_{\tau} = \frac{\lambda n}{2t}$$

Auch hier gibt es eine geringfügige Abweichung im Vergleich mit der vom Werk angegebenen Geschwindigkeit ($0,8 \mu\text{m/sec}$):

$$v_{\text{wahr}_2} = 0,83 \pm 0,02 \mu\text{m/sec}$$

1.3 Hüllkurve

Für die Hüllkurve des Interferogramms ist der Kollimator von großer Bedeutung.

Das Interferogramm des Laserlichtes unter Berücksichtigung des Kollimators ist für den Fall idealer Linsen nach Formel (29)

$$I(l) = 2\pi I_0 f^2 \cos k_0 l \left(1 - \frac{R^2}{4f^2}\right) \frac{\sin(R^2 k_0 l / 2f^2)}{k_0 l}$$

Die erste Nullstelle des Sinus ist für diese Anordnung:

$$l_0 = \lambda_0 f^2 / R^2$$

In unserem Fall ($f = 200$ mm, $R = 0,1$ mm) würde dies bedeuten:

$$l_0 = 2,53 \text{ m}$$

Abb. 26 zeigt die Hüllkurve des Interferogramms, welches symmetrisch aufgenommen wurde. Die Spiegel wurden in der Nullstellung parallel justiert. Die Justierposition hat, wie Versuche zeigten, bei der Detektoröffnung $< 0,5$ mm nur die Feinstruktur des Interferogramms beeinflußt. Diese wird offenbar durch Verkippen des Spiegels erzeugt und ist für eine bestimmte Justierung reproduzierbar zu messen. Dagegen ist der Amplitudenabfall für größere l eindeutig auf die Divergenz des einfallenden Lichtbündels, erzeugt durch Fehler der Kollimatorlinse, zurückzuführen !

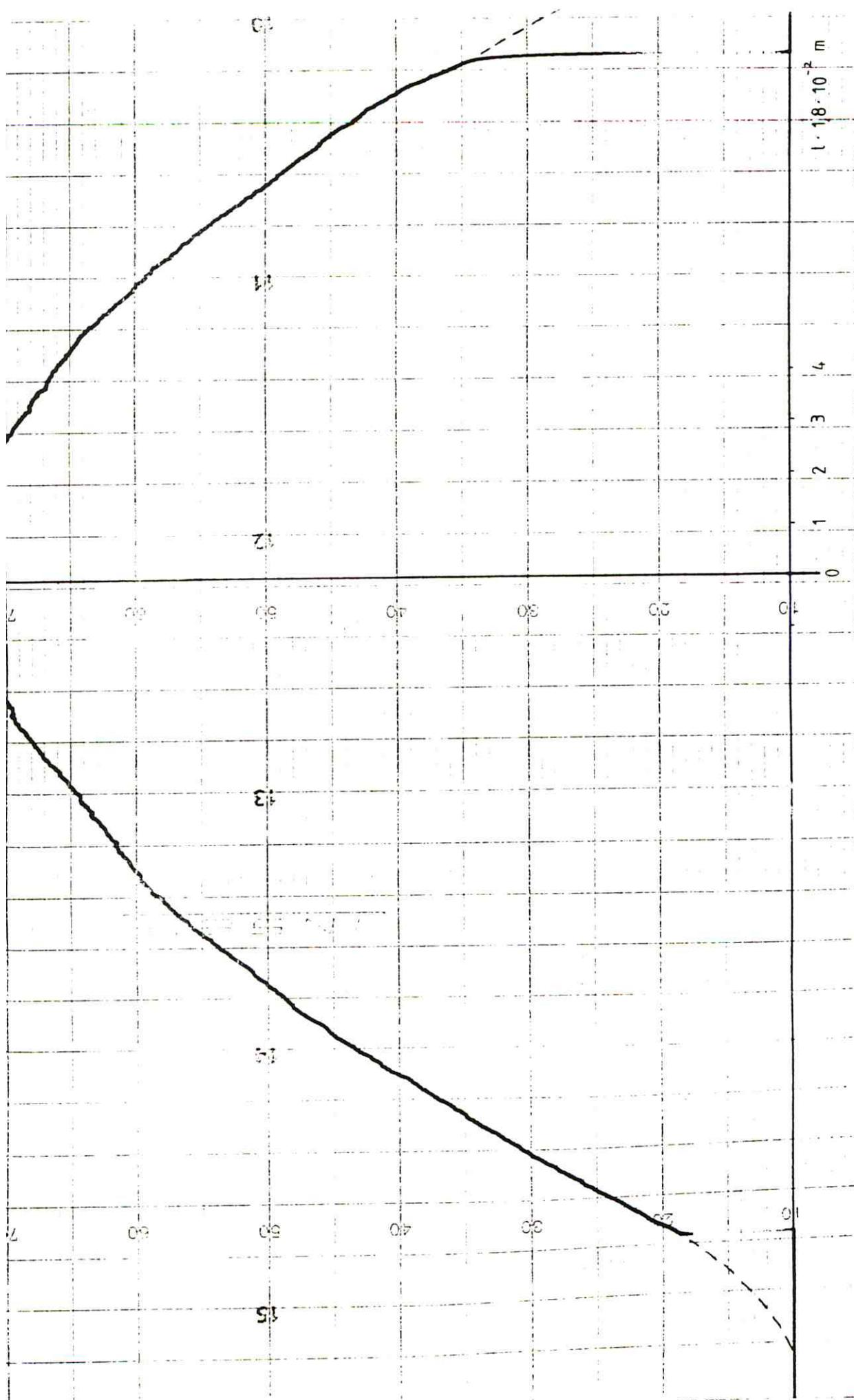
Eine Extrapolation der gemessenen Hüllkurve ergibt für

$$l_0 :$$

$$l_0 \approx 28 \text{ cm}$$

Abb. 27 zeigt einen längeren Ausschnitt aus dem Laserinterferogramm. Da bei den weiteren Messungen nur die Hüllkurven Fourier-transformiert werden, wirken Periodenschwankungen des Kosinus nur als sehr gut vernachlässigbare Amplitudenmeßfehler. Mit der Laserhüllkurve

Abb. 26
Hüllkurve des Laserinterferogrammes



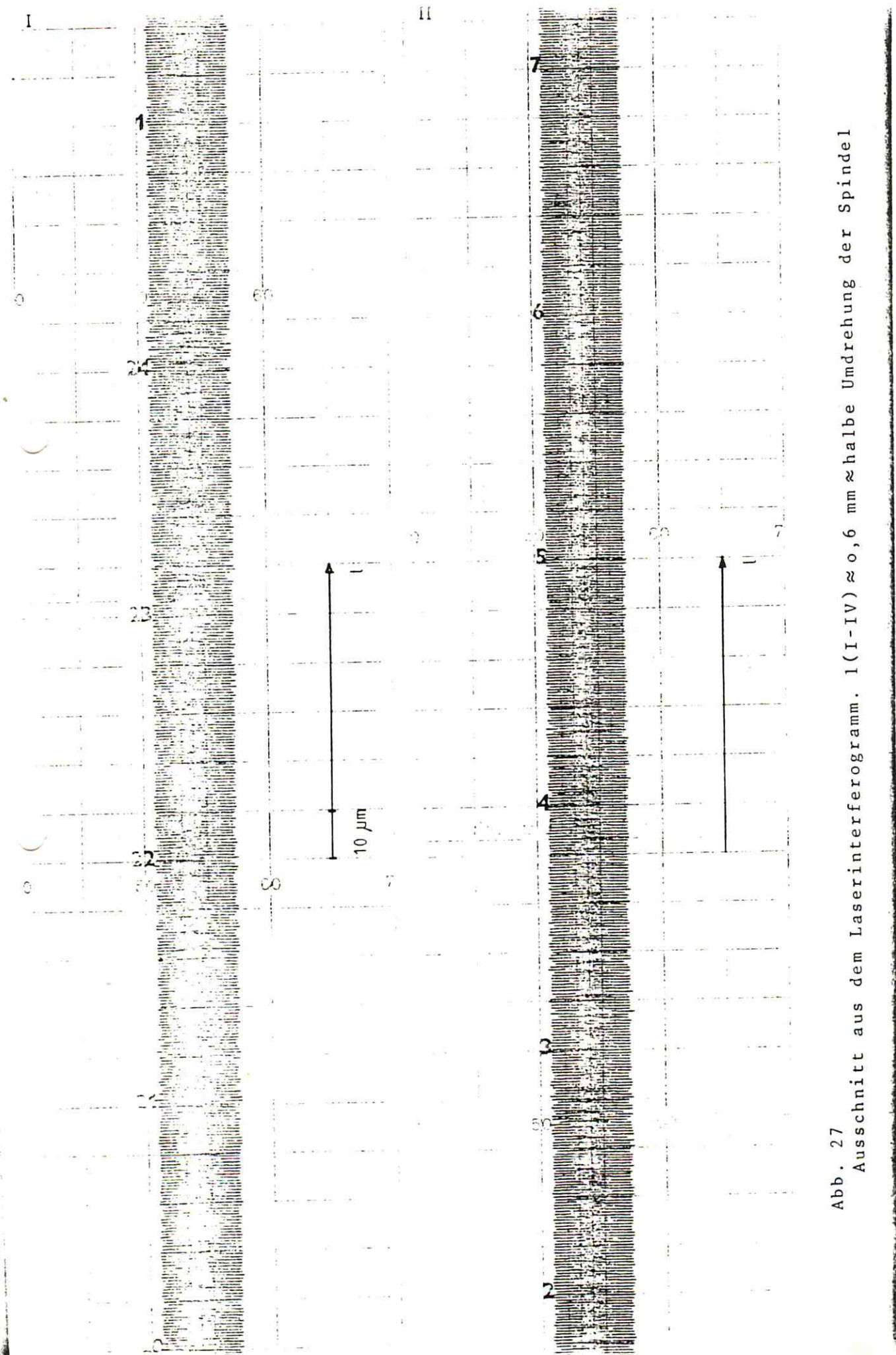
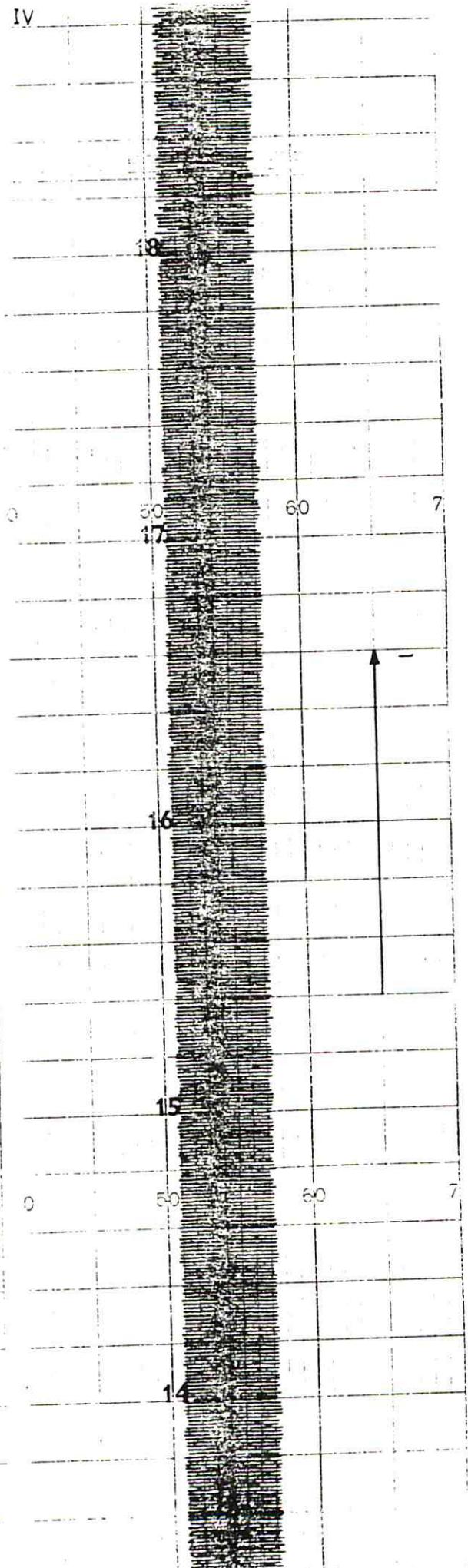
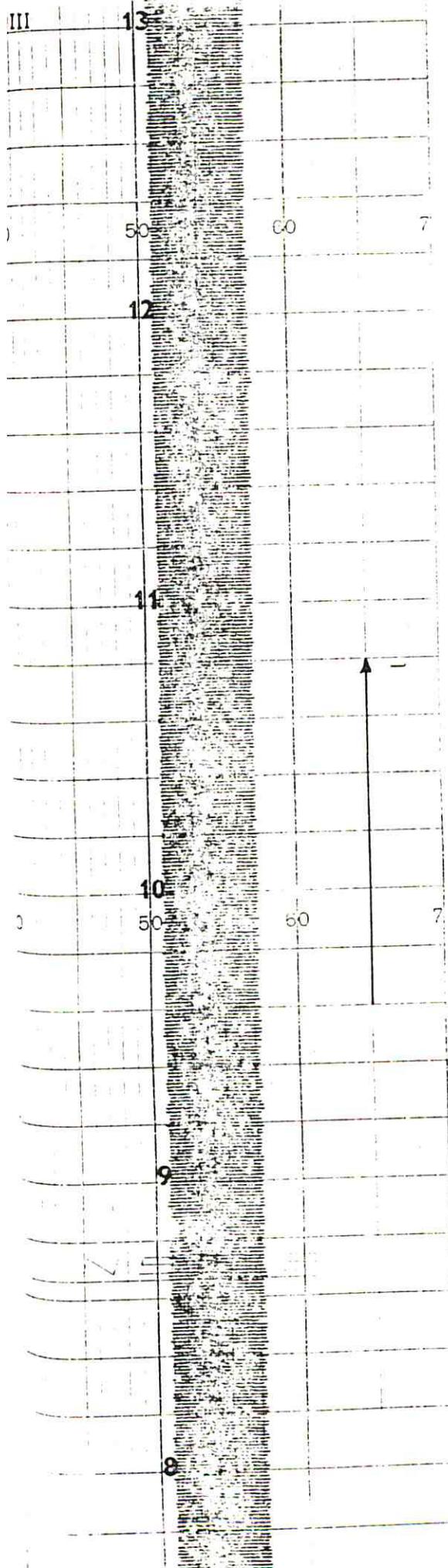


Abb. 27
Ausschnitt aus dem Laserinterferogramm. 1 (I-IV) \approx 0,6 mm \approx halbe Umdrehung der Spindel



sind die Konstanten in der Sinusfunktion, die der Kollimator erzeugt, bestimmt und es kann damit trotz der Amplitudenschwankungen die gesamte Verschiebestrecke des Spiegels zur Aufnahme der Interferogramme beliebiger quasimonochromatischer Lichtquellen genutzt werden.

Zur Abschätzung der Kollimatorwirkung betrachtet man die Größe $R^2/f^2 = \lambda_0/l_0 = 632 \text{ nm}/0,28 \text{ m} \approx 2,3 \cdot 10^{-6}$. Die Verschiebung der gemessenen Wellenzahl k' gegenüber der eingestrahlten k , gegeben durch $k' = k(1 - R^2/4f^2)$ ist also vernachlässigbar.

Nutzt man einen Spiegelweg von 1,5 mm, so bleibt die Amplitude bis auf 3 % konstant. Diese Gangdifferenz reicht zur Untersuchung stark druck- oder/und doppler-verbreiterter Spektrallinien bereits aus. Für quasimonochromatisches Licht ergibt sich das Auflösungsvermögen (siehe Gleichungen 22, 23) durch Multiplikation des Interferogrammes mit einer Rechteckblendenfunktion³⁵:

$$I_{\text{obs}} = I_0 \cdot B(l) \cdot (\cos k_0 l C(l) - \sin k_0 l S(l)) .$$

Das Spektrum ist dann

$$G(k)_{\text{obs}} = B(k) * \delta(k-k_0) + P(k') .$$

Hier ist $B(k) * \delta(k-k_0) = B(k-k_0)$ die die Auflösung Δk bestimmende Apparatefunktion.

Nach Formel (25) ist für $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ optische Gangdifferenz $\Delta k = 25,3 \text{ cm}^{-1}$.

Dies entspricht (mit Formel (46)):

$$\Delta \lambda = 0,16 \text{ nm} .$$

Das Auflösungsvermögen gibt die Genauigkeit an, mit der die Lage des Spektrums bestimmbar ist. Die Gestalt des Spektrums, gegeben durch $P(k')$, ist wesentlich genauer

bestimmbar, wobei hier der Fehler im wesentlichen durch die Meßgenauigkeit der Interferogrammhüllkurve gegeben ist. Aus diesem Grund wird zur Abschätzung des Amplitudenmeßfehlers $\pm 5\%$ angesetzt, um neben $\pm 3\%$ Kollimatorwirkung noch Ablese- und Spindelsteigungsfehler zu berücksichtigen.

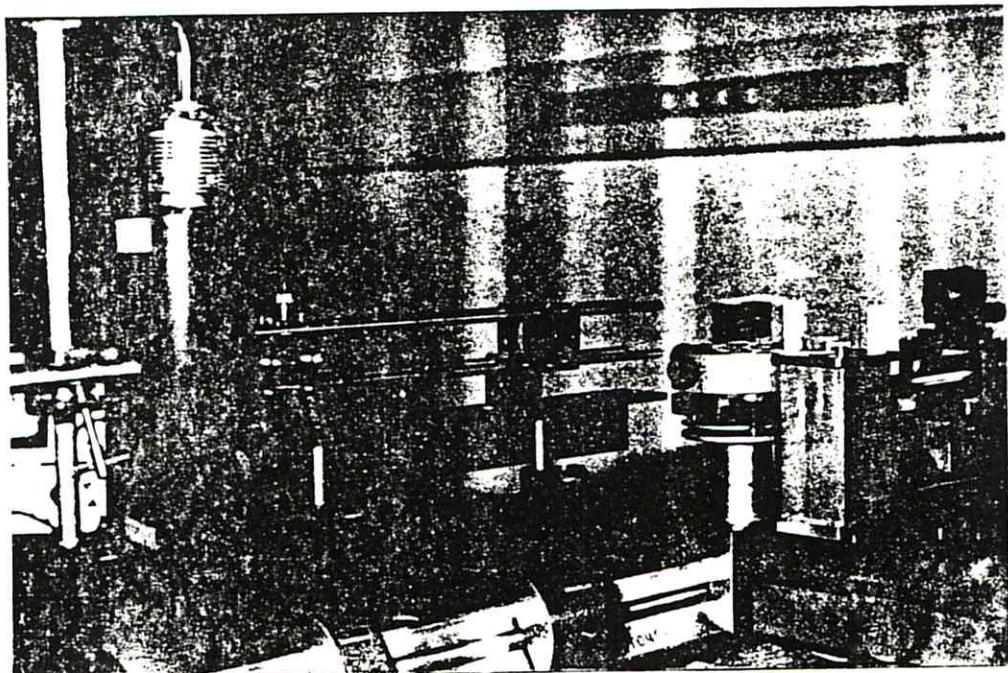


Abb. 28

Blick auf das Interferometer bei Betrieb mit einer Spektrallampe mit Aufweitungsoptik.
(Kollimator: $R = 0,1 \text{ mm}$, $f = 200 \text{ mm}$)

V.2

Spektrallinien

Um das Interferogramm einer einzelnen Spektrallinie aufzunehmen zu können, muß diese aus dem Spektrum der Lampe herausgefiltert werden. Der Durchlaßbereich des Filters ist so eng zu wählen, daß die der interessierenden Linie benachbarten Linien sicher unterdrückt werden.

Grüne Quecksilber-Linie (546,07 nm)

V.2.1

Das Liniensprofil bei einer Hochdrucklampe als Quelle

Das Interferogramm (s. Abb. 29) ist relativ kurz und weist, wie nach III.3 erwartet, ein Lorentzprofil auf. Die Wellenlängenbestimmung erfolgt durch Auszählen (s. S. 61) der Kosinusperioden anhand mehrerer Interferogramme. Es ergibt sich einschließlich der Fehler des Antriebes, eine Wellenlänge von

$$\lambda = 543,6 \pm 13,6 \text{ nm}.$$

Abb. 30 zeigt die Hüllkurve des Interferogrammes. Zum Nachweis der Druckverbreiterung wird sie logarithmisch aufgetragen. Dies müßte, dem theoretisch geforderten exponentiellen Abfall entsprechend, eine Gerade ergeben (s. Abb. 31).

Nach III.3.3 ist die Hüllkurve des Interferogrammes durch Formel (43) beschrieben:

$$C(l) = e^{-|l|/tc}$$

Da das Maximum der Kurve auf Grund von Dispersionsunterschieden, wahrscheinlich hervorgerufen durch die Teilerschicht aus Homosil, verschoben ist, leidet die Qualität der Geraden. Mittels linearer Regression (Methode der kleinsten quadratischen Abweichung) wurde die bestmögliche Gerade bestimmt. Zur Fehlerabschätzung wurden die beiden möglichen Extremlagen herangezogen. Somit ergab

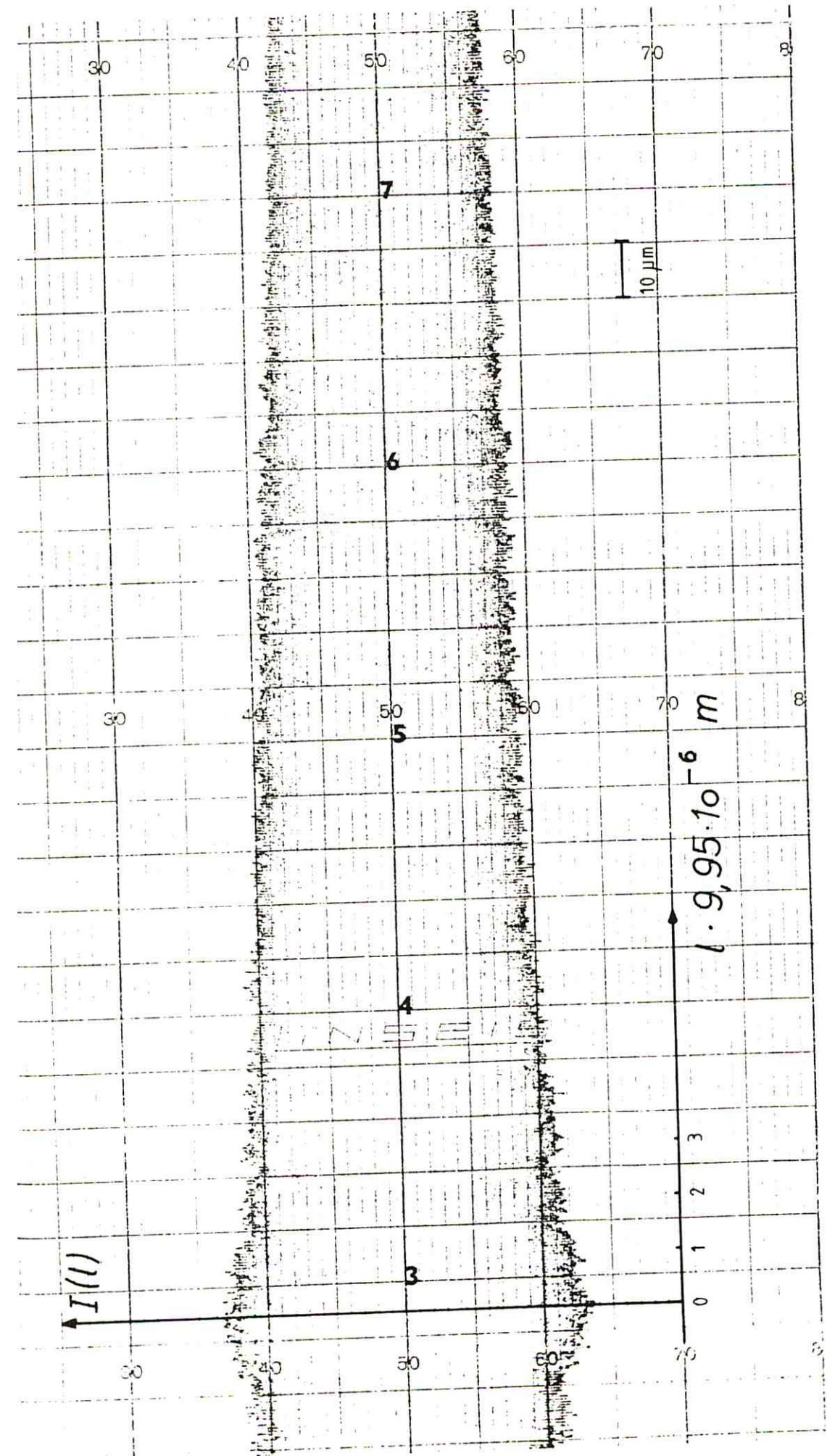
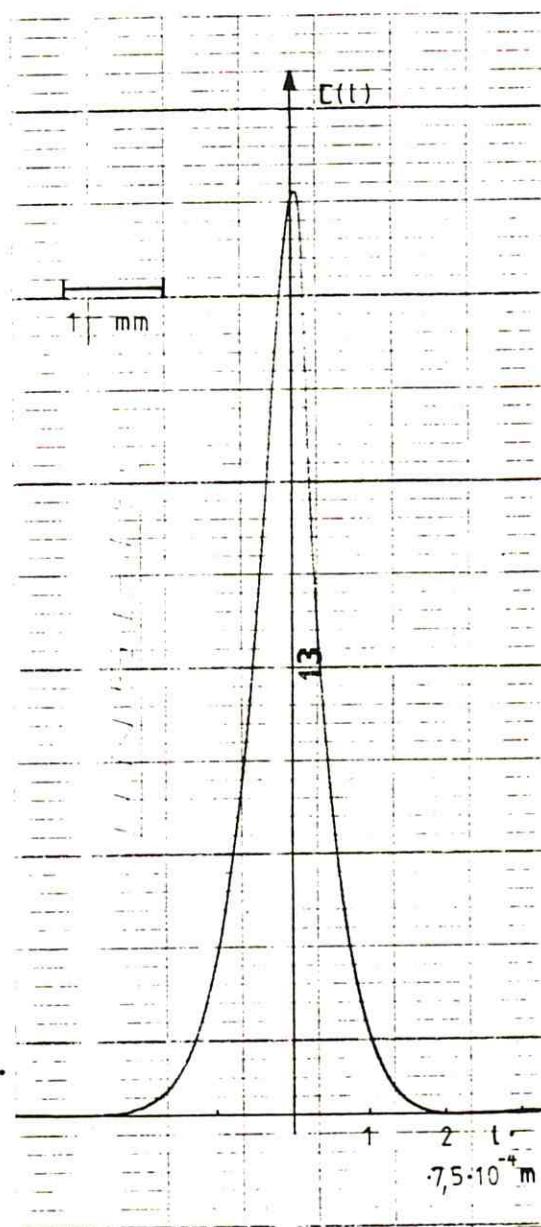


Abb. 29
Ausschnitt aus dem Interferogramm einer Hg-Hochdrucklampe nahe $l=0$

Abb. 3o

Hüllkurve des Interferogrammes einer Hg-Hochdrucklampe



sich als Steigung
der Geraden:

$$\frac{1}{\tau_c} = 31,0 \pm 3,2 \text{ cm}^{-1}$$

Da für die Aufnahme dieses Interferogrammes nur ein

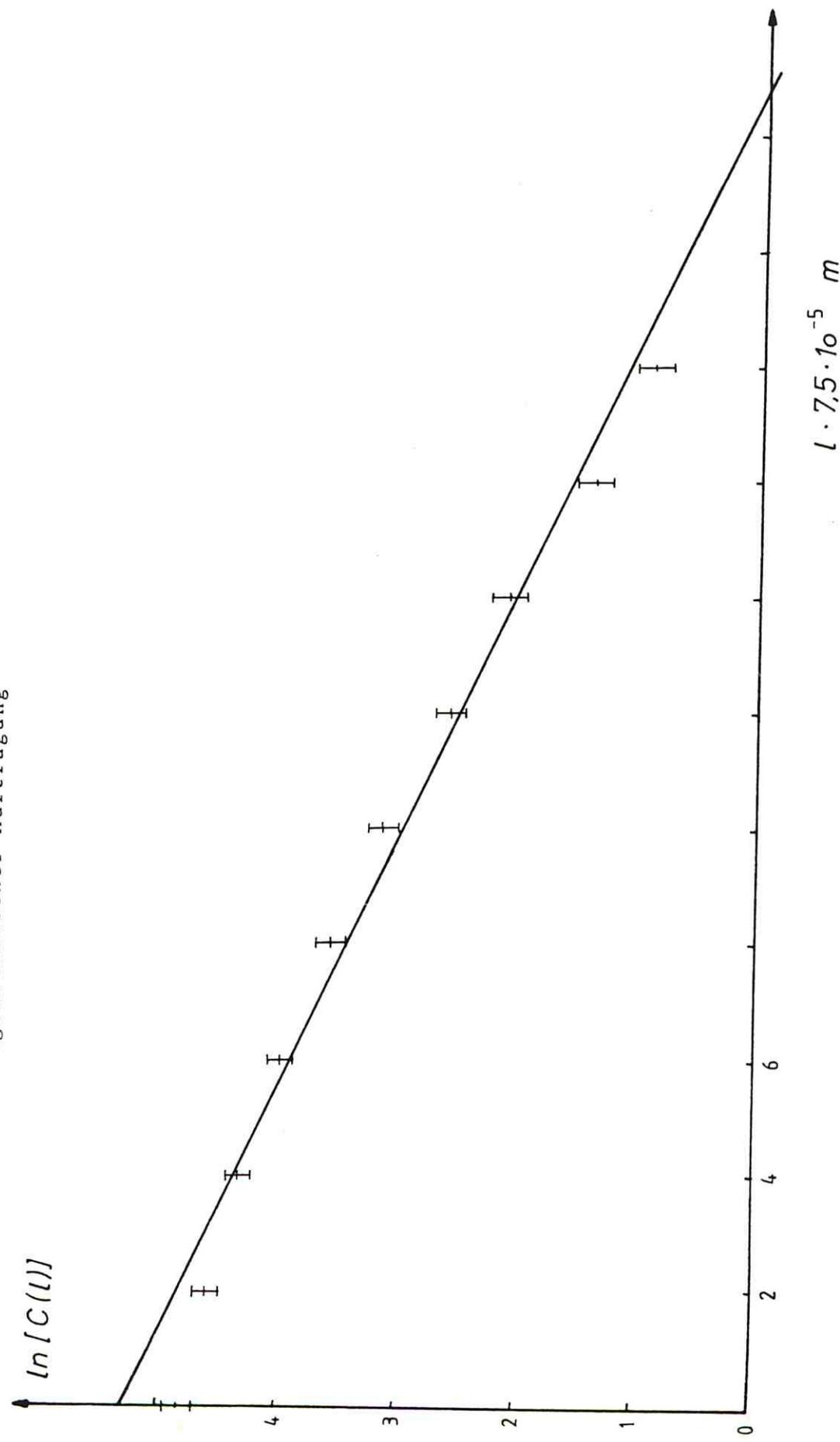
Spiegelweg von etwa 1,5 mm genutzt wurde, ist ein Amplitudenmeßfehler nicht berücksichtigt. Dennoch erscheint der relativ große, graphisch bestimmte Fehler sinnvoll, da noch zu beachten ist, daß nicht statistische Fehlerquellen hier nicht erfaßt werden können, (z.B. nichtlinearer Detektor und/oder Verstärker).

Das oben gewonnene Ergebnis ergibt nach III.3.3, Formel (44) ein Spektrum

$$G(k) = \frac{2/\tau_c}{(1/\tau_c)^2 + (k - k_0)^2}$$

Abb. 31

Hüllkurve des Interferogrammes einer Hg-Hochdrucklampe in logarithmischer Auftragung



mit der Halbwertsbreite $\Delta k_1 = 2/\tau_c = 62,0 \pm 6,4 \text{ cm}^{-1}$

$$\Delta k = \left| \frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2} \right|$$

λ_1 und λ_2 sind die Wellenzahlen an der Halbwertsbreite.
Mit der Näherung $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_0^2$ und der Abkürzung
 $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ erhält man dann die Halbwertsbreite in
Wellenlängen

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta k \lambda_0^2}{2\pi} \quad (46)$$

Mit $\lambda_0 = 543,6 \text{ nm}$ ergibt sich $\Delta \lambda = 0,29 \pm 0,03 \text{ nm}$.

Auch dieses Spektrum hat die Gestalt einer Lorentzverteilung.

v.2.2 Das Linienprofil einer Hg-Spektrallampe niederen Druckes

Auch hier erfolgt die Bestimmung der Wellenlänge aus dem eigentlichen Interferogramm (s. Abb. 33), während die Halbwertsbreite der Linie aus der Interferogrammhüllkurve ermittelt wird (s. Abbildungen 32 und 34).

Für die Wellenlänge ergibt sich $\lambda = 550,7 \pm 16,8 \text{ nm}$.

Da zur Auswertung des Interferogramms etwa 8 mm Spiegelweg genutzt wurden, ist ein Amplitudenmeßfehler von $\pm 5\%$ mit einzubeziehen (s. S. 67). Zusammen mit dem Anpaßfehler der zwei Extremlagen der Geraden erhält man:

$$\Delta k_2 = 3,72 \pm 0,36 \text{ cm}^{-1}; \quad \Delta\lambda = 0,018 \pm 0,002 \text{ nm}.$$

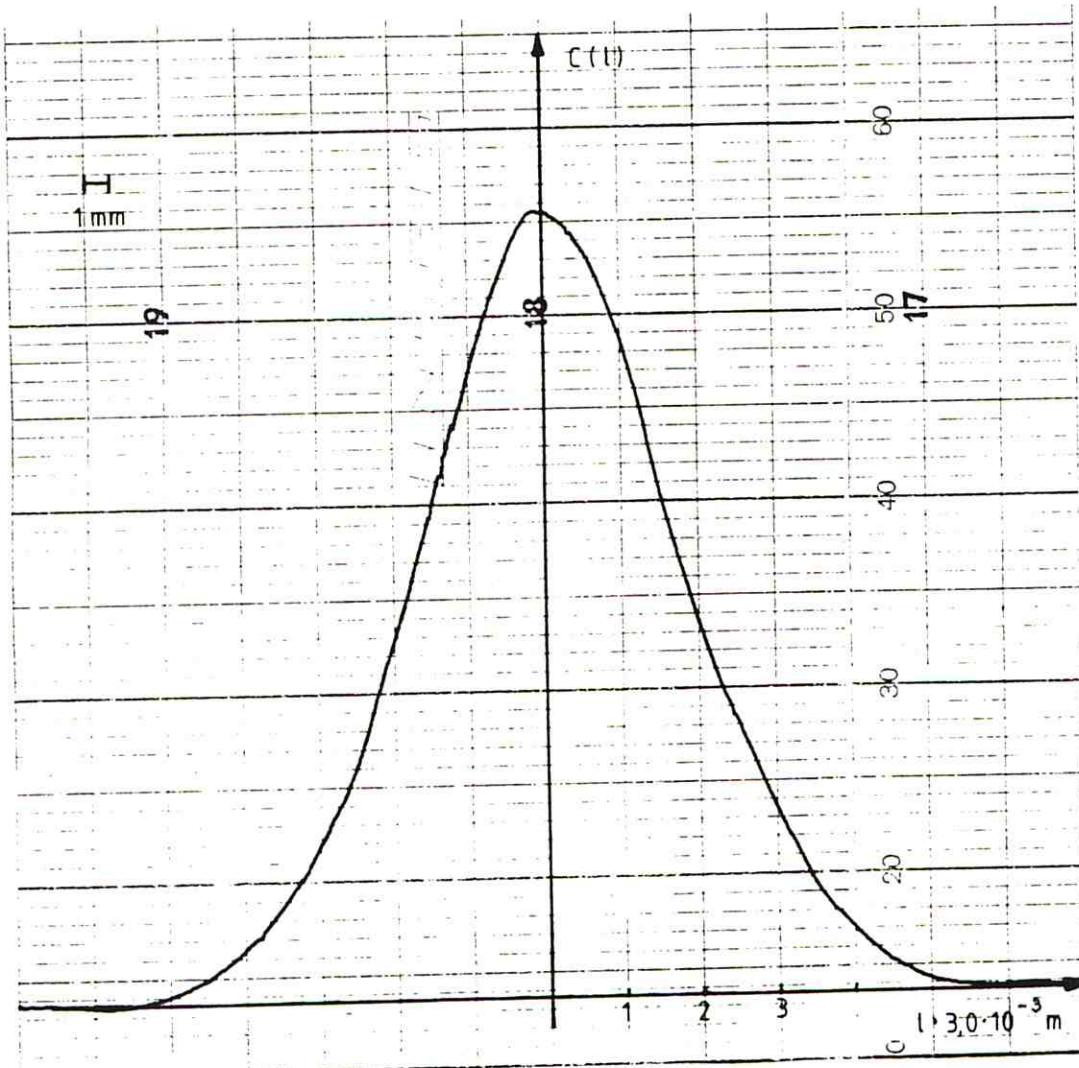


Abb. 32

Hüllkurve des Interferogrammes einer Hg-Spektral-lampe niederen Druckes

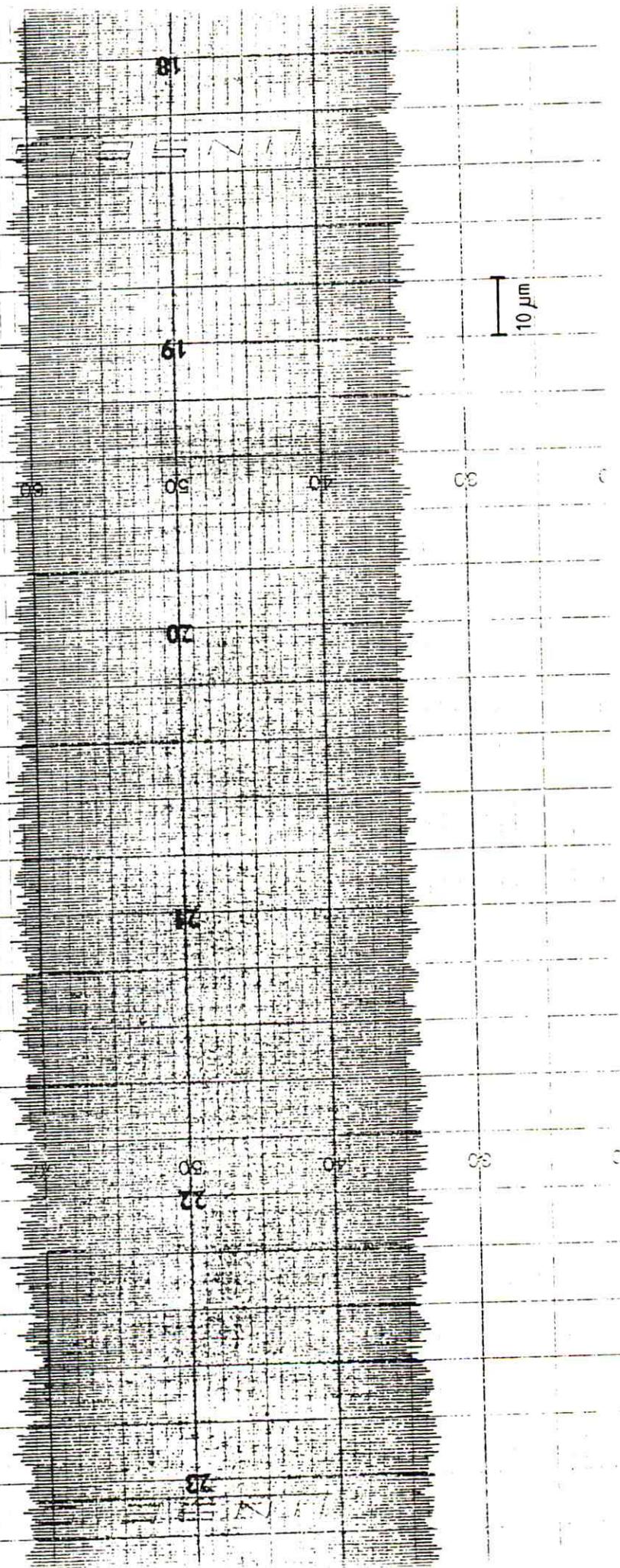


Abb. 33

Ausschnitt aus dem Interferogramm einer Hg-Spektrallampe niederer Druckes

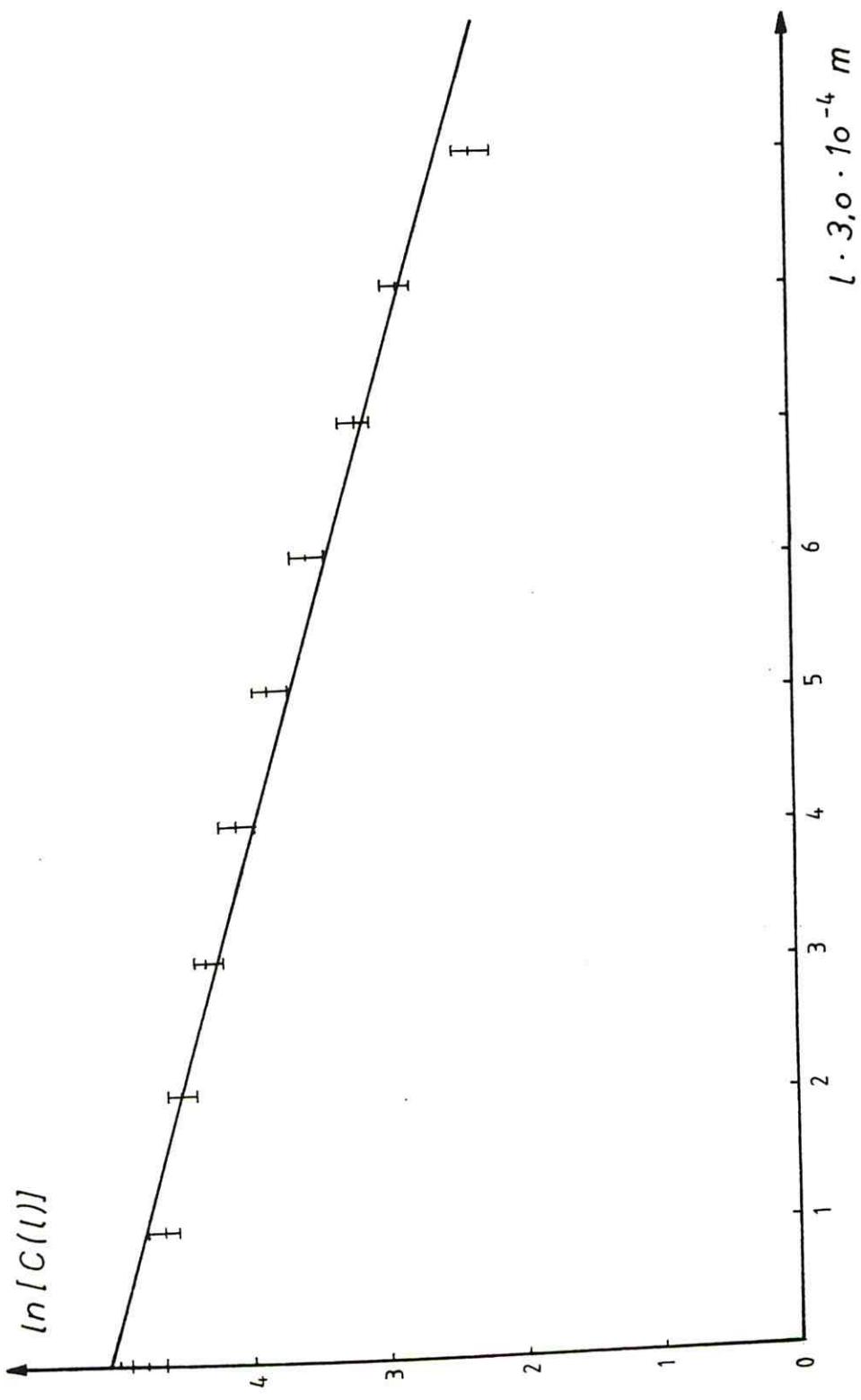


Abb. 34
Hüllkurve des Interferogrammes einer Hg-Spektrallampe niederen Druckes in logarithmischer Auftragung

V.2.3 Vergleich der beiden Hg-Lampen

In Abb. 35 sind die Interferogrammhüllkurven von Nieder- (C_2) und Hochdrucklampe (C_1) mit normierten Intensitäten übereinander aufgetragen. Dieses Bild gibt in etwa auch die Verhältnisse im Spektrum wieder, wenn man sich klar macht, daß dort zur Hochdrucklampe die breitere Kurve gehört.

Zum Vergleich seien die beiden ermittelten Kohärenzlängen aufgeführt:

$$\Delta k_1 = 62,0 \pm 6,4 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow L_1 = \frac{2}{\Delta k_1} = 0,32 \pm 0,03 \text{ mm}$$

$$\Delta k_2 = 3,72 \pm 0,36 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow L_2 = \frac{2}{\Delta k_2} = 5,38 \pm 0,52 \text{ mm}.$$

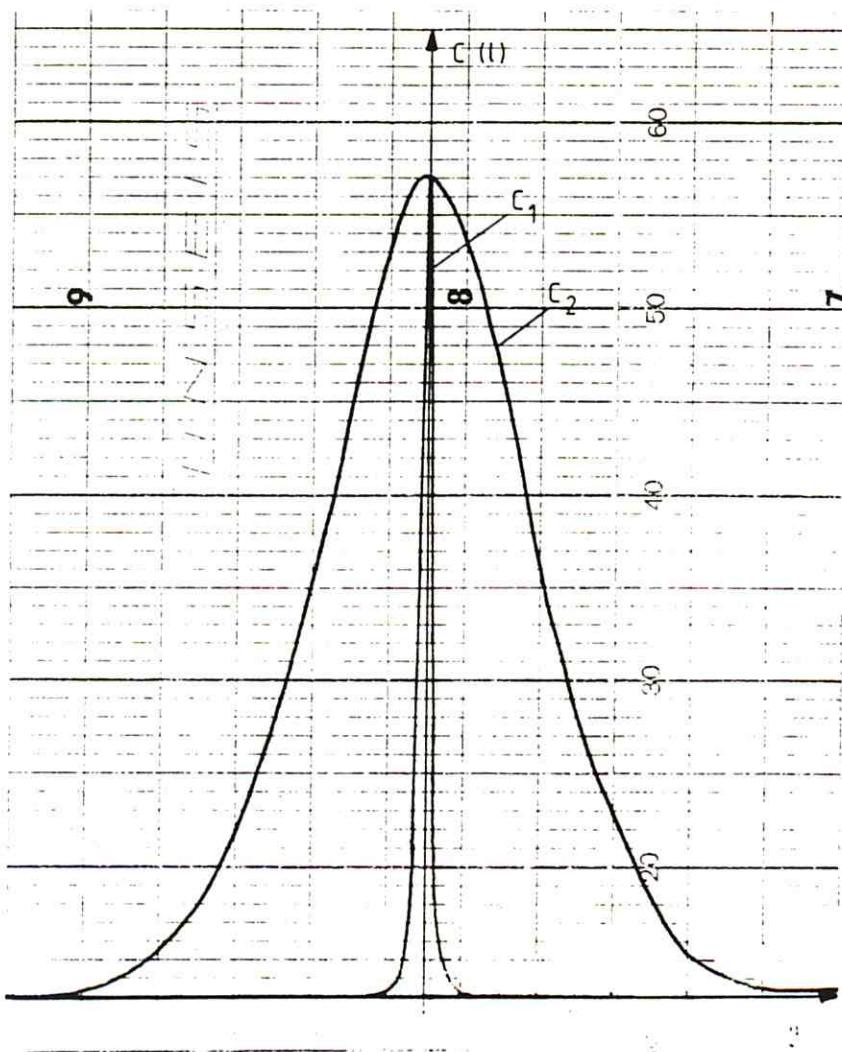


Abb. 35

Vergleich der Interferogrammhüllkurven von Nieder- (C_2) und Hochdrucklampe (C_1). (Normierte Intensitäten).

V.2.4 Gelbe Heliumlinie (587,56 nm)

Auch hier wird die Wellenlänge aus Auszügen mehrerer Interferogramme bestimmt (siehe dazu Abb. 36). Unter Einbeziehung des Fehlers im Antrieb erhält man:

$$\lambda = 590,2 \pm 18,4 \text{ nm}.$$

Für die leichten Heliumatome wird bei mäßigem Druck ein vorwiegend dopplerverbreitertes Spektrum erwartet. Dies ergäbe nach III.3.2 als Hüllkurve des Interferogrammes eine Gaußfunktion.

$$C(l) = I_0 e^{-a^2 l^2 / 16} \quad \text{und mit der Normierung } I_0 = 1 \\ = e^{-a^2 l^2 / 16}.$$

Abb. 37 zeigt den gemessenen Hüllkurvenverlauf.

Zur Überprüfung des Hüllkurvenverlaufs und zur Anpassung des Parameters a wird die Hüllkurve über l^2 logarithmisch aufgetragen.

Die Näherungsgerade wird wie in V.2.1 bestimmt. Aus ihrer Steigung w lässt sich der Faktor $-(a/4)^2$ bestimmen.

Es gilt:

$$w = - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

Aus Abb. 38 entnimmt man:

$$w = - 4,49 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$$

Zur Fehlerabschätzung werden wieder die Steigungen zweier entgegengesetzt extrem durch die Meßpunktreihe gezogener Näherungsgeraden verwendet. Zusammen mit einem Amplitudenmeßfehler von $\pm 5\%$ erhält man dann:

$$\frac{a^2}{16} = 4,49 \pm 0,58 \text{ cm}^{-2}$$

Nach III.3.2, Gleichung (41) hat das zugehörige Spektrum

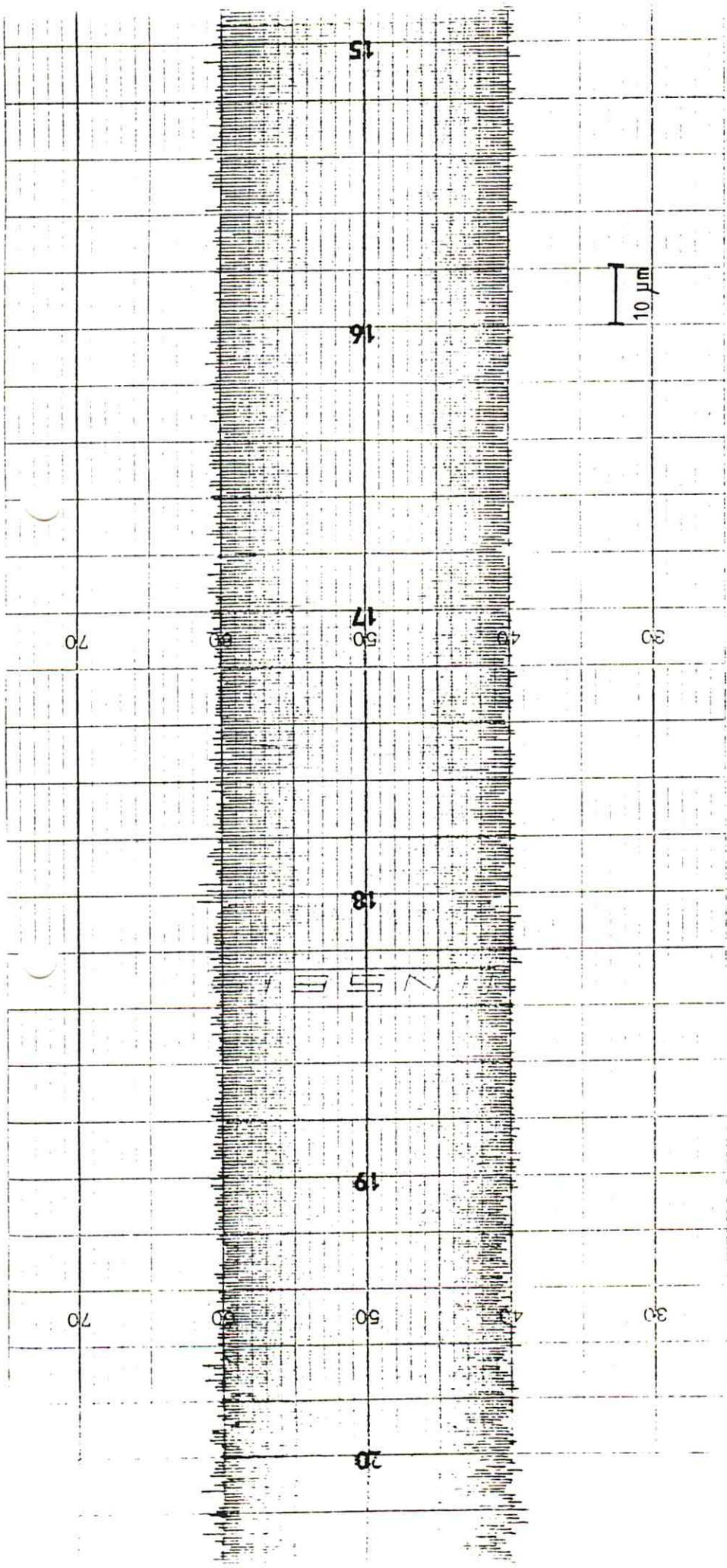


Abb. 36

Auszug aus dem Interferogramm einer He-Spektrallampe

die Gestalt:

$$H(k') = \frac{2}{a} e^{-\left(\frac{2}{a}\right)^2 k'^2}$$

a ist dabei die Breite der Gaußfunktion an der Stelle, an der $H(k')$ auf $1/e$ von $H(0)$ abgefallen ist.

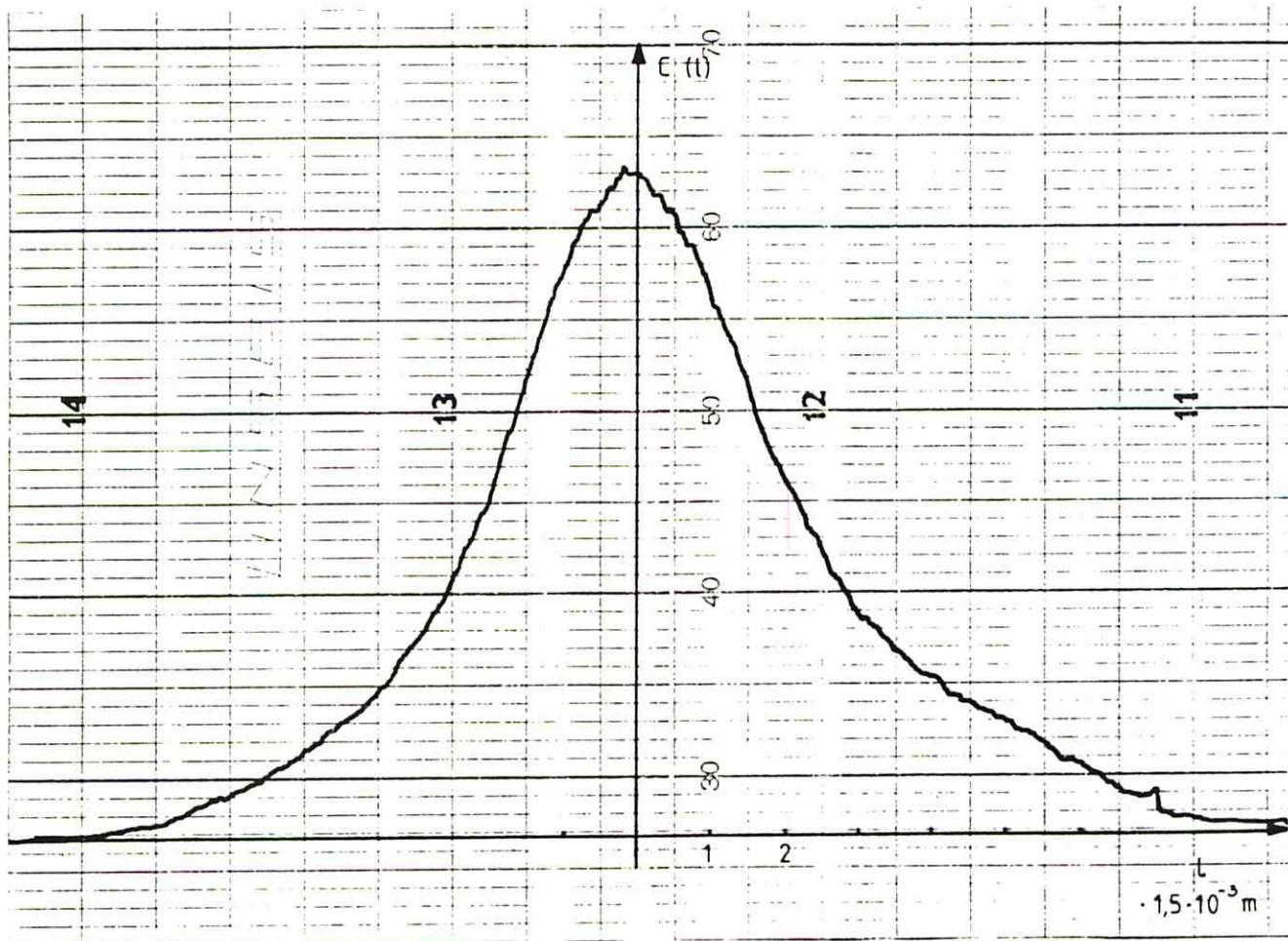


Abb. 37

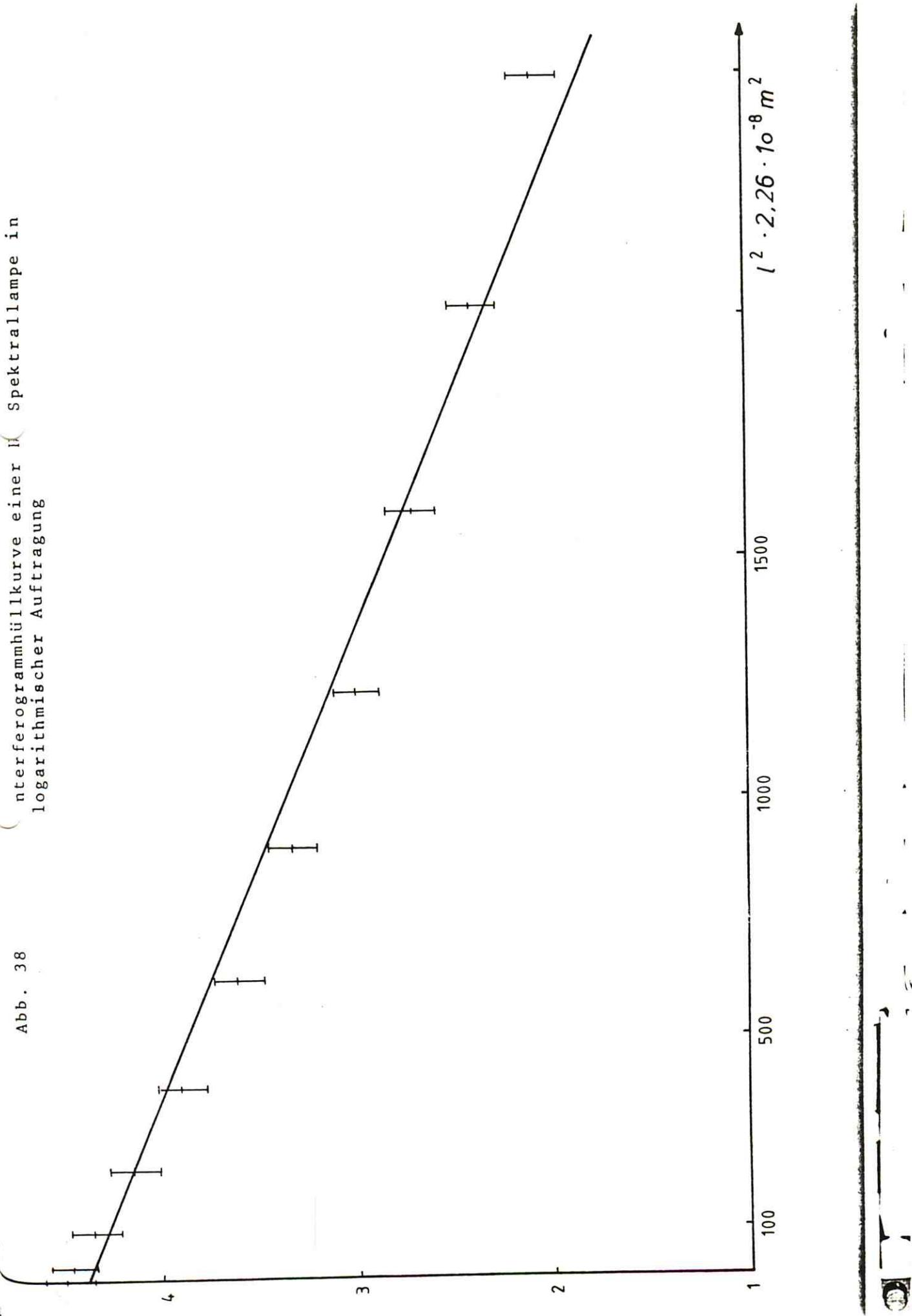
Interferogrammhüllkurve einer He-Spektrallampe

Mit dem aus dem Interferogramm bestimmten Wert ergibt dies:

$$a = -8,48 \pm 1,10 \text{ cm}^{-1}$$

Damit ergibt sich für die spektrale Linienbreite der

Abb. 38



gelben Heliumlinie:

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta k \lambda_0^2}{2\pi} = 0,047 \pm 0,006 \text{ nm}.$$

Als Kohärenzlage erhält man:

$$L = \frac{4}{a} = 4,72 \pm 0,61 \text{ mm}.$$

Zusätzlich kann jetzt mit $a = 2 \frac{k_0}{\sqrt{\beta c}}$ und $\beta = \frac{m}{2k_B T}$

die Temperatur bestimmt werden!

$$T = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \frac{2mc^2}{k_0^2 k_B} \quad \text{mit Lichtgeschwindigkeit}$$

$$c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}^{-1}$$

$$\text{Molekülmasse } m = 6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Boltzmannkonstante}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

$$\text{mittlere Wellenzahl}$$

$$k_0 = (2\pi / 590,2 \cdot 10^{-9}) \text{ m}^{-1}$$

$$(a/4)^2 = 4,49 \cdot 10^4 \text{ m}^{-2}.$$

⇒

$$T = 3,43 \cdot 10^4 \text{ K}$$

Diese Temperatur ist prinzipiell höher als die tatsächliche Plasmatemperatur der He-Gasentladungslampe; da zum einen eine stets überlagerte Druckverbreiterung bewirkt, daß nicht die gesamte Linienverbreiterung auf Temperatureinflüsse zurückzuführen ist, und zum anderen die Berechnung der Dopplerverbreiterung für Gase im Temperaturliegengewicht erfolgte. Letzteres ist hier nicht gegeben. Zum Vergleich sei ein Literaturwert angeführt 36) und 37):

$$T_{\text{lit}} = 2,64 \cdot 10^4 \text{ K}$$

v.2.5 Natrium - D - Linie (588,995 nm/ 589,592 nm)

Abbildung 39 zeigt einen Ausschnitt aus dem Interferogramm nahe $l=0$. Deutlich ist eine Schwebung, verursacht durch die bei 589 nm gelegene Doppellinie (Na-D-Linie), zu erkennen.

Aus den gezählten Perioden mehrerer Interferogramme wird die mittlere Wellenlänge $\bar{\lambda}$ bestimmt. In die Fehlerangabe geht die Vorschubungenauigkeit ein.

$$\bar{\lambda} = 589,4 \pm 8,6 \text{ nm}$$

Die weitere Auswertung geht von folgendem Modell³⁸⁾ des Spektrums aus:

Das Spektrum bestehe aus zwei eng beieinanderliegenden Linien der Wellenzahlen k_1 und k_2 mit den Intensitäten a_1 , bzw. a_2 . Wegen des engen untersuchten Spektralbereiches gelte die Annahme, Druck- und/oder Dopplerverbreiterung beider Linien seien gleich.

Dieses Spektrum ist darstellbar als Faltungsprodukt des "Spektrums" $G_1(k)$ einer verbreiterten Einzellinie der mittleren Wellenzahl $k=0$ (nur zur mathematischen Berechnung, physikalisch sinnlos!) mit einem Spektrum $G_2(k)$ bestehend aus zwei δ -Funktionen. Diese δ -Funktionen bestimmen die Lage und die Intensität des Linienprofils.

$$G_2(k) = a_1 \delta(k - k_1) + a_2 \delta(k - k_2) .$$

$$G(k) = G_1(k) * G_2(k) = a_1 G_1(k - k_1) + a_2 G_1(k - k_2) .$$

Nach dem Faltungstheorem für Fouriertransformationen (s. Gl. (10)) gilt:

$$I(l) = \int_0^\infty G(k) \cos kl dk = \int_0^\infty G_1(k) \cos kl dk \cdot \int_0^\infty G_2(k) \cos kl dk$$

Demnach ist das gemessene Interferogramm das Produkt der Interferogramme der Spektren $G_1(k)$ und $G_2(k)$, nämlich:

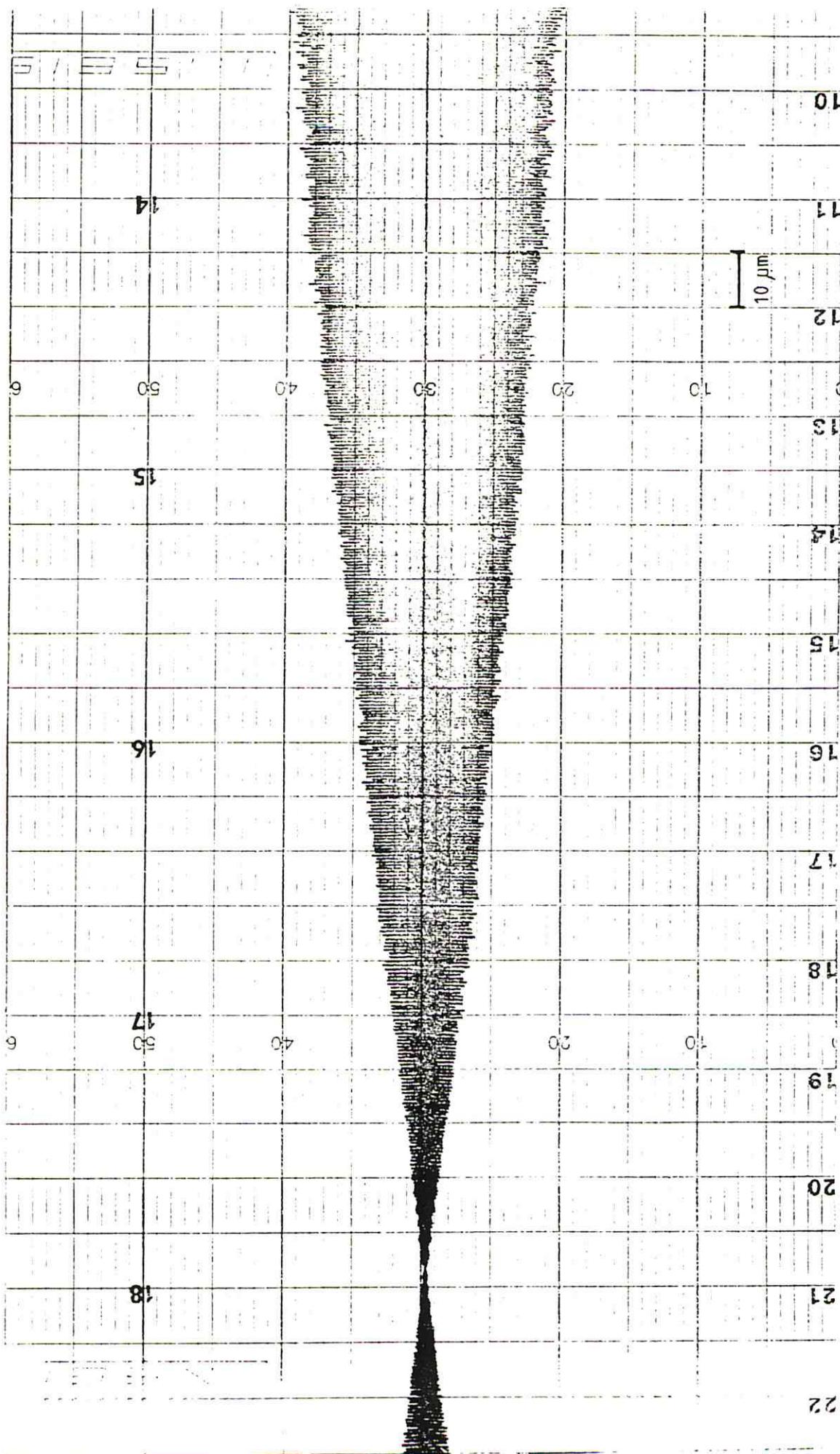
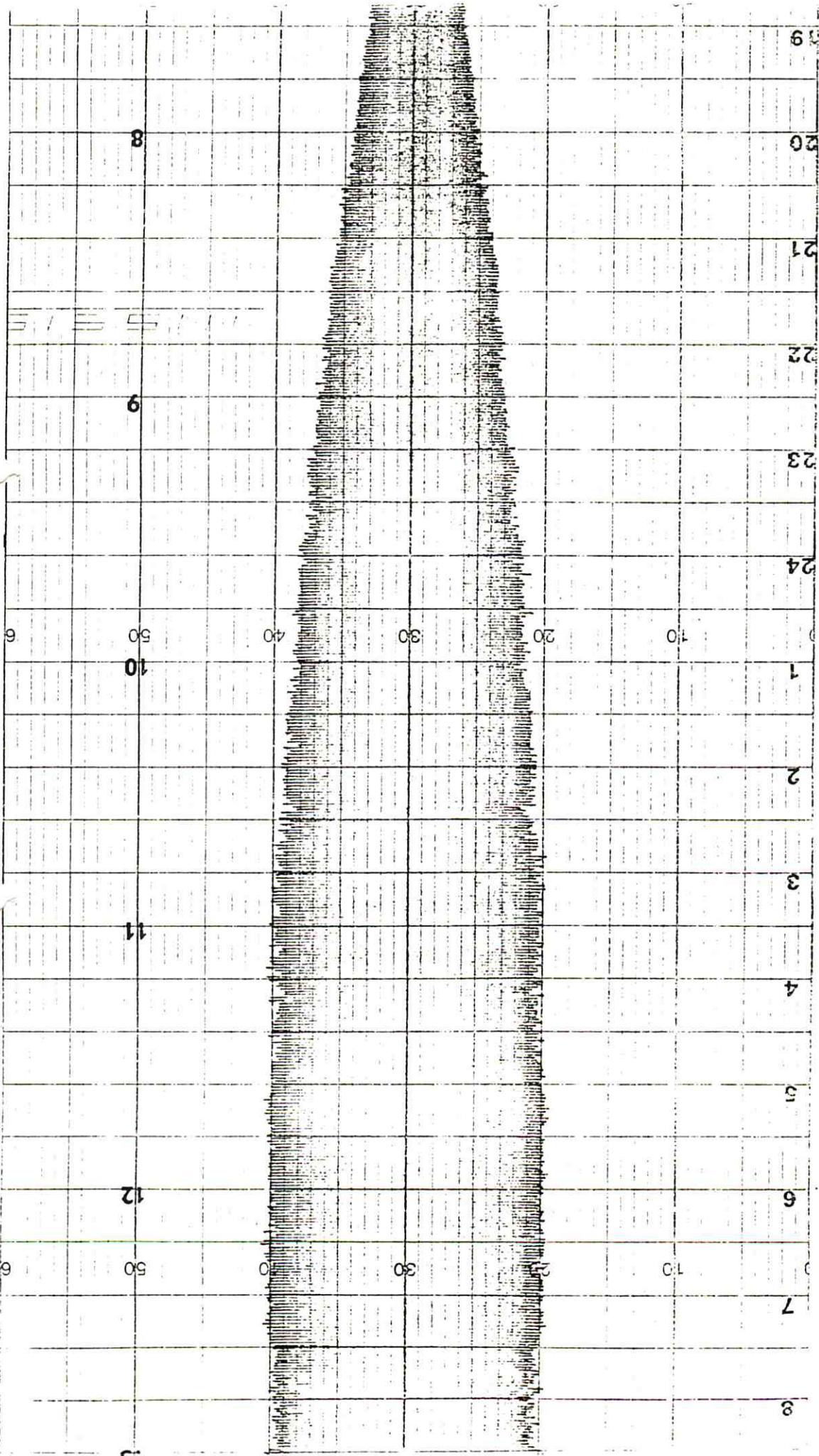
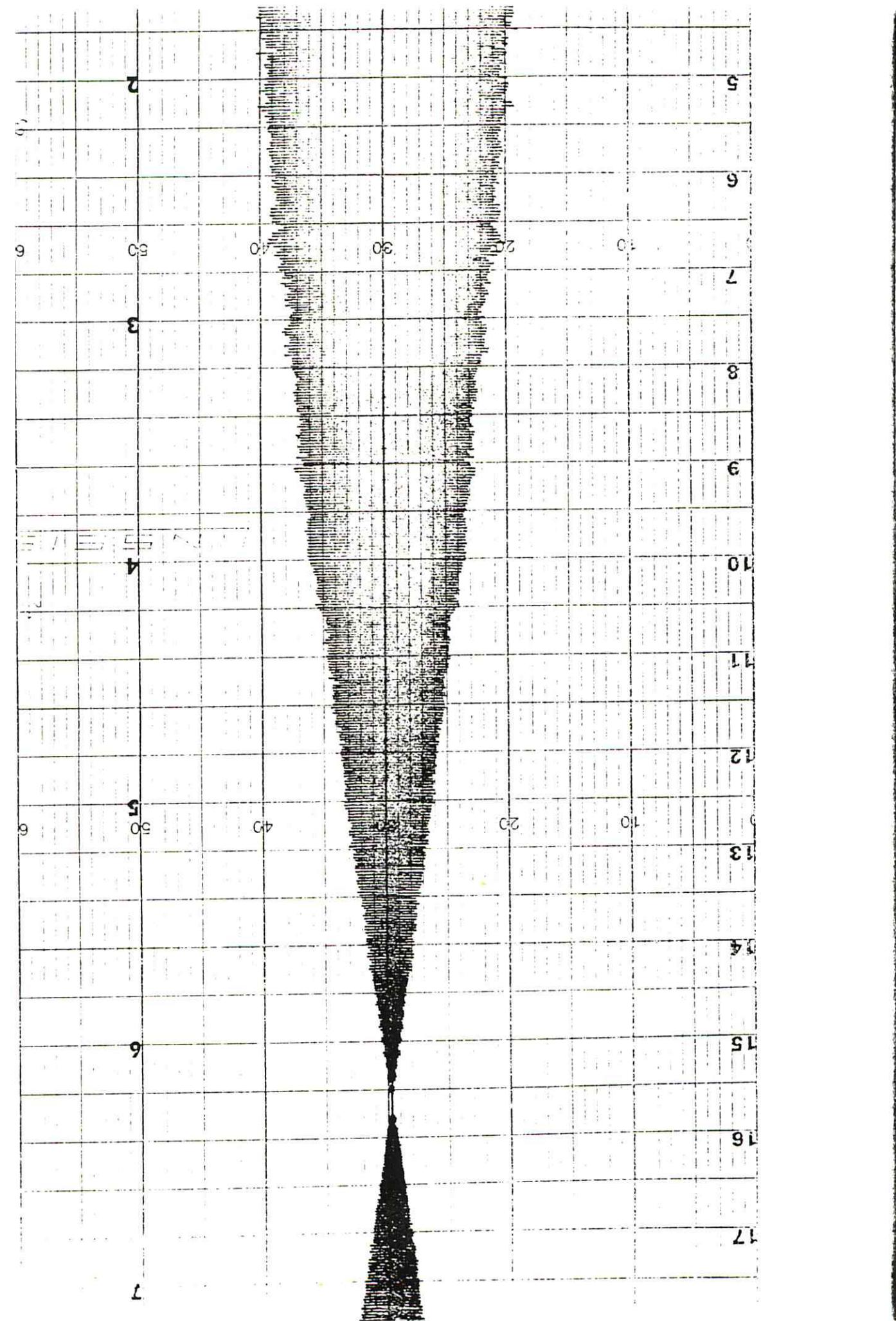


Abb. 39
Ausschnitt aus dem Interferogramm einer Na-Spektrallampe





$$I(l) = I_1(l) \cdot I_2(l) \quad \text{mit} \quad I_1(l) = \int_0^{\infty} G_1(k) \cos k l \, dk =: C(l)$$

$C(l)$ wurde als Interferogrammhüllkurve einer verbreiterten Linie eingeführt.

$$I_2(l) = I_0(a_1 \cos k_1 l + a_2 \cos k_2 l)$$

Nach 4o) ist $a_1 > a_2$.

\Rightarrow

$$\begin{aligned} I_2(l) &= I_0 [(a_1 - a_2) \cos k_1 l + a_2 (\cos k_1 l + \cos k_2 l)] \\ &= I_0 [(a_1 - a_2) \cos k_1 l + 2a_2 (\cos \frac{k_1 + k_2}{2} l \cos \frac{k_1 - k_2}{2} l)] \\ &= I_0 [(a_1 - a_2) \cos k_1 l + 2a_2 \cos \bar{k} l \cos \Delta k l] \\ &\text{mit } \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \text{und} \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}. \end{aligned}$$

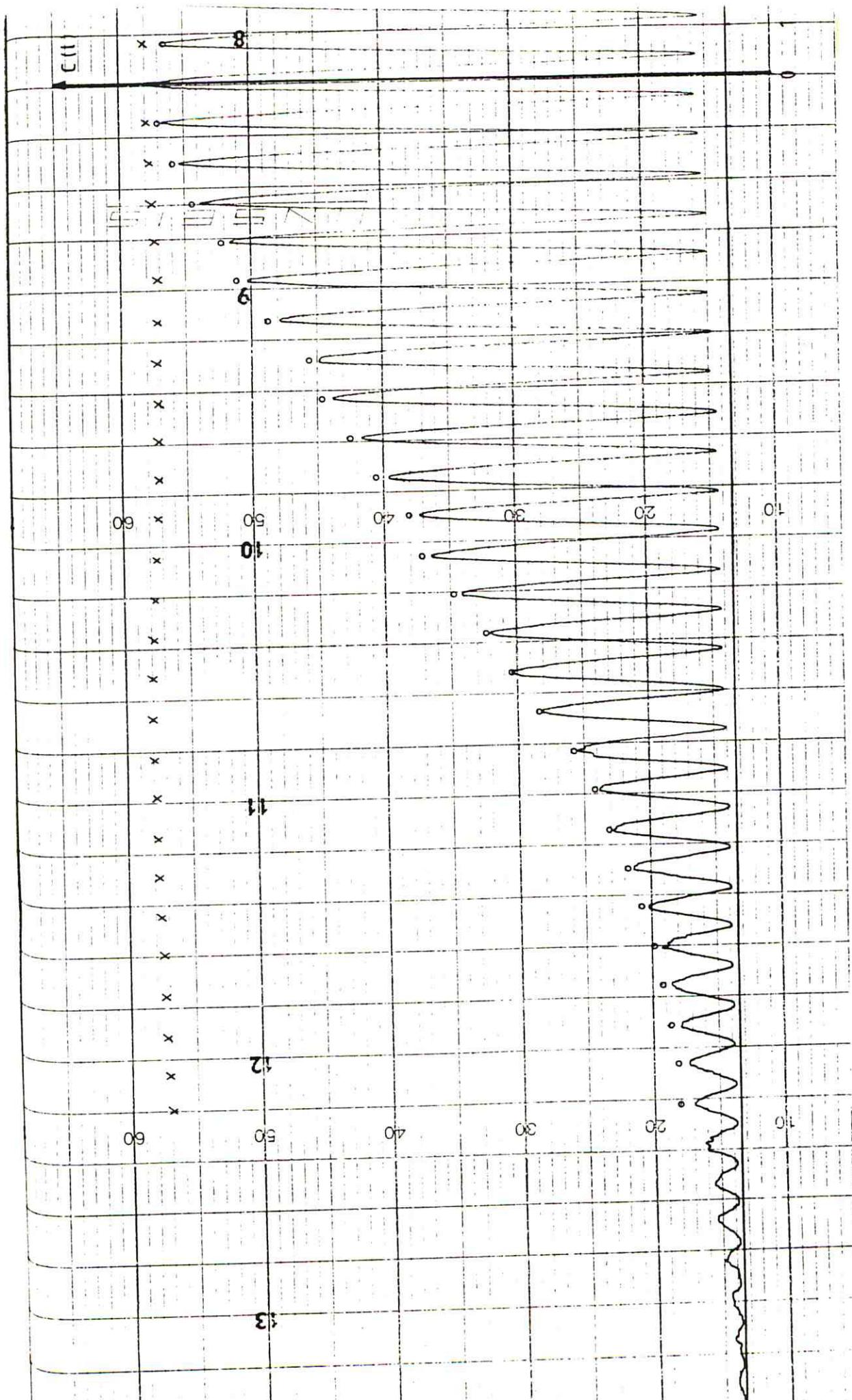
Das Interferogramm hat also eine konstante Schwebungsamplitude!

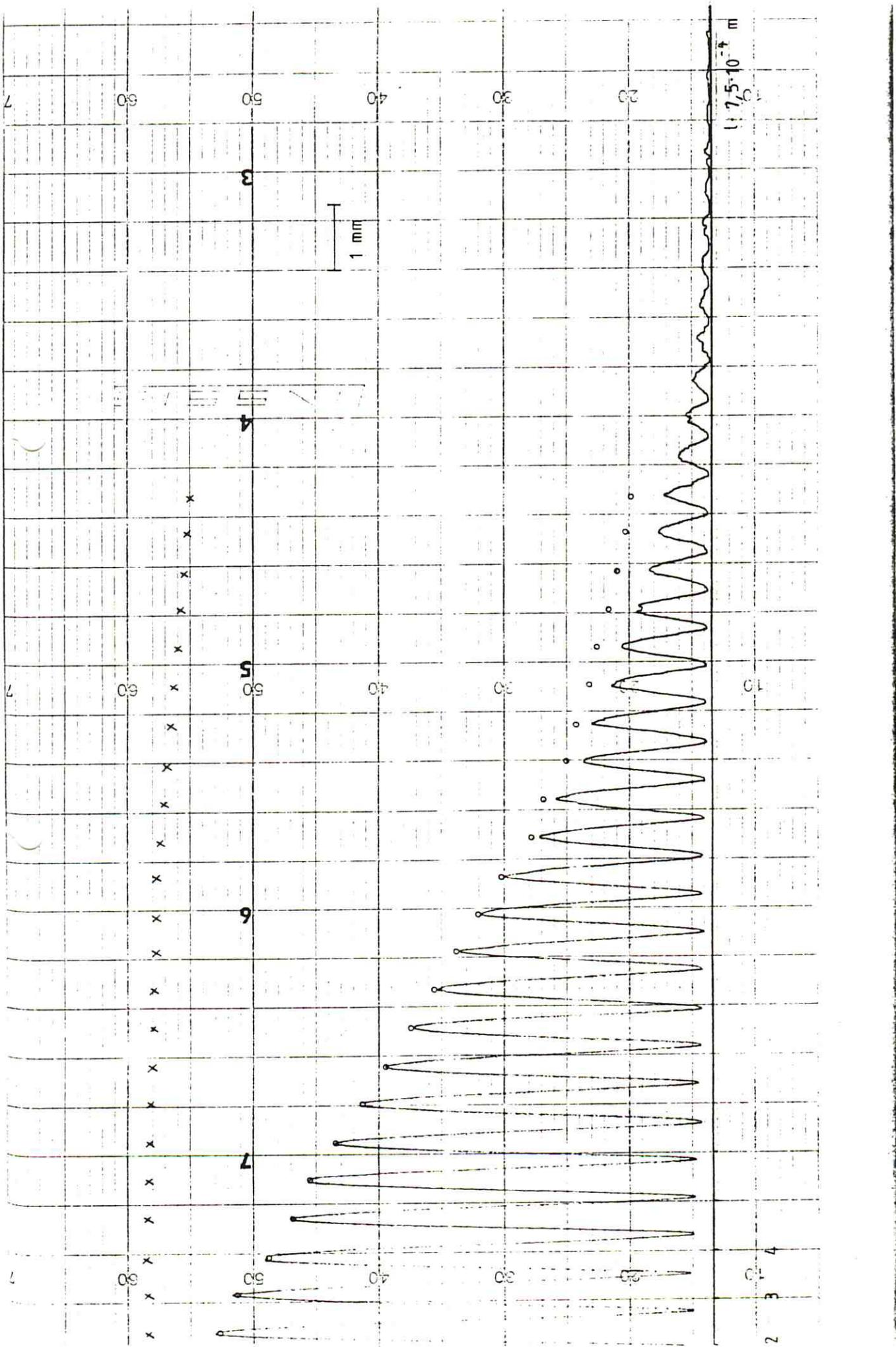
Die Abnahme der als Hüllkurve des Interferogrammes gemessenen Schwebungsamplitude (s. Abb. 4o) kann demnach nur auf $I_1(l) = C(l)$ zurückgeführt werden. Der Verlauf der Amplitude der Schwebungmaxima lässt auf eine Druckverbreiterung schließen ⁺). Da der genutzte Spiegelweg aber bereits ≈ 2 cm beträgt, wird das Interferogramm des Lasers, das unter gleichen Bedingungen aufgenommen wurde, zur näherungsweisen Korrektur des Kollimateureinflusses und der Ungenauigkeiten im Lauf des beweglichen Spiegels herangezogen. Hierzu wird an jedem Schwebungmaximum die normierte Amplitude des Laserinterferogramms (vgl. Abb. 26)

+)

Eine Überlagerung von Druck- und Dopplerverbreiterung führt auf die sog. VOIGT-Funktion, die man als Faltung der zu erwartenden Einzelspektren erhält ³⁹⁾.

Abb. 40
Nan-D-Dublette





eingetragen (in Abb. 40 als "x"). Die mit den Laserinterferogramm-Amplituden korrigierten Werte (in Abb. 40 als "o") werden dann logarithmisch aufgetragen (s. Abb. 41).

Analog zu den Auswertungen unter V.2.1 erhält man aus der Steigung der Geraden die Halbwertsbreite Δk der Na-Spektrallinien (Lorentzprofil):

$$\Delta k = 2 \cdot 1,38 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$$

und mit der Fehlerabschätzung durch Extremlagen der Geraden:

$$\Delta k = 2,75 \pm 0,25 \text{ cm}^{-1} .$$

Dem entspricht eine Kohärenzlänge von

$$L = 7,25 \pm 0,66 \text{ mm} .$$

Bei einer Auftragung in Abhängigkeit von der Wellenlänge hat die Halbwertsbreite folgendes Aussehen:

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta k \lambda_0^2}{2} \quad \underset{\lambda_0 = 589,4 \text{ nm}}{\Rightarrow} \quad \Delta \lambda = 0,015 \pm 0,002 \text{ nm} .$$

Nun ist das Teilspektrum $G_2(k)$ zu bestimmen. Das Interferogramm hat die Gestalt:

$$I_2(l) = I_0 [(a_1 - a_2) \cos k_1 l + 2a_2 \cos \Delta kl \cos \bar{k}l)]$$

Schwebungsminima werden erreicht, wenn gilt:

$$\cos \Delta kl = 0, \text{ also für } \Delta kl = (2n-1) \cdot \pi/2 \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots \\ \Delta k = (2n-1) \cdot \pi/2l .$$

Aus fünf aufgenommenen Interferogrammen ergibt sich folgender Wert für den Abstand der Na-D-Dublettlinien:

$$\Delta k = 53,4 \pm 0,03 \text{ cm}^{-1}$$

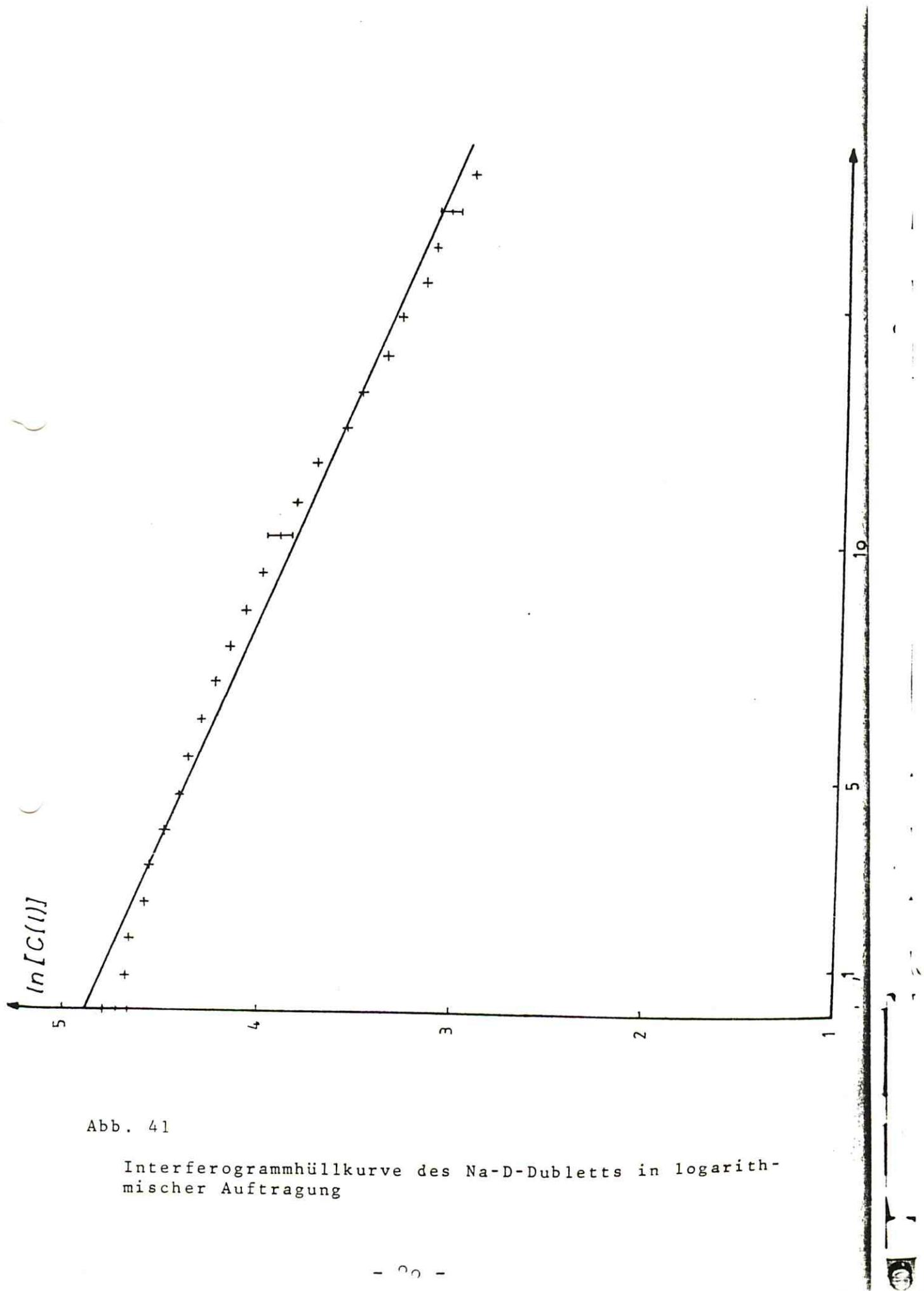


Abb. 41

Interferogrammhüllkurve des Na-D-Dubletts in logarithmischer Auftragung

entsprechend:

$$\Delta \lambda = 0,591 \pm 0,009 \text{ nm} . \quad (\text{Zum Vergleich: Literaturwert nach D'Ans-Lax } 40) \\ \Delta \lambda = 0,597 \text{ nm}).$$

Der Meßfehler ist hier im wesentlichen durch Ungenauigkeiten im Vorschub gegeben, der in V.1.3 mit $\pm 2\%$ für Wellenlängenbestimmungen abgeschätzt ist.

Um das Intensitätsverhältnis a_1/a_2 zu erhalten, betrachtet man das Interferogramm an den Extrema.

An Schwebungsminima erhält man (mit $I_0 := 1$)

$$I_{2 \text{ min}}^{(1)} = (a_1 - a_2) \cos k_1 l$$

als Interferogramm mit der Amplitude $A_{\text{min}} = a_1 - a_2$.

An den Schwebungsmaxima verstärken sich alle Kosinusfunktionen:

$$I_{2 \text{ max}}^{(1)} = (a_1 - a_2) \cos(\bar{k} + \Delta k)l + 2a_2 \cos \bar{k}l \\ = A_{\text{min}} (\cos \bar{k}l \cos \Delta k l - \sin \bar{k}l \underbrace{\sin \Delta k l}_{=0}) + 2a_2 \cos \bar{k}l \\ = (A_{\text{min}} + 2a_2) \cos \bar{k}l .$$

Als Amplitude ergibt sich demnach

$$A_{\text{max}} = A_{\text{min}} + 2a_2$$

$$\text{Somit ist } a_1 = A_{\text{min}} + a_2$$

$$\text{und } a_2 = \frac{1}{2}(A_{\text{max}} - A_{\text{min}})$$

\Rightarrow

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}} .$$

Mit den entsprechenden Meßwerten aus Abb. 4o erhält man:

$$a_1/a_2 = 1,11 \pm 0,004$$

$$a_2/a_1 = 0,90 \pm 0,003$$

Auch hier zum Vergleich der Literaturwert ^{4o)}:

$$\lambda_1 = 588,995 \text{ nm}$$

$$a_1 = 10 \\ \left. \begin{array}{l} a_1 = 10 \\ a_2 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow a_2/a_1 = 0,8 .$$

$$\lambda_2 = 589,592 \text{ nm}$$

Weiterhin muß mit einem systematischen Fehler von 10 % gerechnet werden, da bei einem Vergleich von maximaler und minimaler Intensität Nichtlinearitäten des Detektors und Verstärkers wirken. Überdies erreicht die relative Intensität der Störmodulation des Interferogramms durch nicht hinreichend unterdrückte andere Spektralanteile am Schwebungsminimum ein Maximum, wodurch sich fälschlicherweise A_{\min} erhöht.

V.3 Zusammenstellung der Meßergebnisse

	Wellenlängen Meßergebnis (Literaturwert)	Gestalt des Spektrums	Halbwertsbreite in [nm]	Kohärenzlänge in [mm]
Grüne Hg-Linie einer Hochdrucklampe	543,6 \pm 13,6 (546,07) 41)	Lorentz	0,29 \pm 0,03	0,32 \pm 0,03
Niederdrucklampe	550,7 \pm 16,8 "	Lorentz	(1,8 \pm 0,17) $\cdot 10^{-2}$	5,83 \pm 0,52
Gelbe Heliumlinie	590,2 \pm 18,4 (587,56) 42)	Gauß	(4,7 \pm 0,6) $\cdot 10^{-2}$	4,72 \pm 0,61
Na - D - Linie	589,4 \pm 8,6 (589,30) 40)	Lorentz (Einzel- linie)	(1,5 \pm 0,2) $\cdot 10^{-2}$	7,25 \pm 0,66
Wellenlängenabstand des Dubletts: $0,591 \pm 0,009 (0,597) 40)$				
Intensitätsverhältnis der Linien: $1 : 0,9 (1 : 0,8) 40)$				

V.4

Verbesserungsvorschläge

Es sind im wesentlichen zwei Dinge, die sich störend auf die Meßergebnisse auswirken. Zum einen sind es periodisch auftretende Vorschubsschwankungen, hervorgerufen durch Schlupf, bzw. Verspannungen des Zahnriemens. Bei Verwendung von größeren Zahnrädern ist hier eine Verbesserung zu erwarten. Zum andern leidet besonders die Untersuchung am Laser sehr unter der schlechten Qualität des Kollimatorobjektivs. Der Austausch des vorhandenen gegen ein hochwertiges Kollimatorobjektiv würde auch hier zu einer Verbesserung führen.

VI.

Zusammenfassung

Es wird das Konzept eines Michelson-Interferometers dargelegt, das es gestattet, im Rahmen eines Versuches für das Fortgeschrittenenpraktikum für Physiker, die Wellenlänge, das Linioprofil sowie die Kohärenzlängen verschiedener Spektrallinien zu bestimmen. Dazu werden, ausgehend von der Theorie eines idealisierten Michelson-Interferometers, die beim Selbstbau auftretenden Stör-einflüsse behandelt und daraus die für die Konstruktion notwendigen Genauigkeitsanforderungen abgeleitet. Die das Auflösungsvermögen des Geräts begrenzenden Faktoren werden diskutiert.

Neben einer allgemeinen Betrachtung räumlich ausgedehnter Lichtquellen wird näher auf die Eigenschaften quasimonochromatischer Quellen eingegangen. Insbesondere wird die Linienvbreiterung von Spektrallinien durch Doppler-effekt und/oder Druckverbreiterung behandelt. Es wird eine Aufnahmetechnik für das Interferogramm angewandt, die es ermöglicht, die mittlere Wellenlänge und das Linioprofil getrennt zu messen. Die Theorie hierzu wur-

de dargestellt.

Zur Demonstration der Leistungsfähigkeit des Interferometers werden die Interferogramme verschiedener Spektrallinien, darunter solche, bei denen die Verbreiterung überwiegend durch Stoßverbreiterung (Lorentz-Profil), bzw. Dopplereffekt (Gauß-Profil) gegeben ist, untersucht.

Weiterhin wird die Natrium-D-Emissionslinie untersucht. Es wird gezeigt, daß aus dem Interferogramm, neben der Bestimmung des Linienprofils einer einzelnen D-Linie, sowohl der Linienabstand als auch das Intensitätsverhältnis der Einzellinien ermittelt werden kann.

VII. Literaturverzeichnis

1. Fellgett, P.B. Dissertation,
Cambridge University, England 1951
2. Jacquinot, P. und
Dacfour, C.J.
J.Rech. C.N.R.S. 6, 91 (1948)
3. Chantry, G.W. Submillimetre Spectroscopy,
Academic Press, London u. New York
(1971), S. 43
4. Steel, W.H. Interferometry,
Cambridge University Press, London
(1967)
5. Frank, W., Goerke K.
und Pietralla M. Demonstrating Fourier transform
spectroscopy for students,
Applied Optics, Vol. 17, 9 (1978)
S. 1413
6. Genzel, L. 33. Physikertagung Karlsruhe 1968,
Plenarvorträge, Teubner (1968),
S. 130
7. Spiegel, M.R. Theory and Problems of Fourier
Analysis,
McGraw-Hill, New York (1974), S. 82
8. Klein, M. Optics,
J. Wiley & Sons, New York (1970),
S. 239
9. Handbook of Physics and Chemistry,
53-Ed., CRC - Press (1972/73),
A - 163
10. Klein, M. l.c.,
S. 243
11. Pollermann, M. Bauelemente der physikalischen
Technik,
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,
New York (1972), S. 68

12. Françon, M. Moderne Anwendungen der physikalischen Optik,
Academic Press (1971), S. 15
13. Bell, R.J. Introductory Fourier Transform Spectroscopy,
Academic Press (1972), S. 56
14. Bell, R.J. l.c.,
S. 51 - 58
15. Chantry, G.W. l.c.,
S. 46
16. Chantry, G.W. l.c.,
S. 49
17. Mark, H. und Infrared Physics 15, (1975),
Low, M.J.P. S. 1 - 8
18. Bell, R.J. l.c.,
S. 82
19. Görke, K. Staatsexamensarbeit,
Ulm 1975, S. 31/32
20. Born, M. Optik,
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,
New York (1972),
S. 135
21. Klein, M. l.c.,
S. 240
22. Françon, M. l.c.,
S. 144
23. Schpolski, E.W. Atomphysik Bd. II,
VEB-Verlag der Wissenschaften (1972),
S. 262
24. Bremene, R.G. Shift and Shape of Spectral lines,
Pergamon Press (1961), S. 66
25. Klein, M. l.c.,
S. 250
26. Garbuny, M. Optical Physics,
Academic Press, New York, London
(1965), S. 125

27. Klein, M. l.c.,
S. 236
28. Garbuny, M. l.c.,
S. 128
29. Breene, R.G. l.c.,
S. 17
30. Klein, M. l.c.,
S. 247
31. Klein, M. l.c.,
S. 248
32. Garbuny, M. l.c.,
S. 13
33. Pärsche, H. und Optik 38, 3, (1973),
Luchner, K. S. 298 - 310
34. Görke, K. l.c.,
S. 47
35. Görke, K. l.c.,
S. 75
36. Kapzow, N.A. Elektrische Vorgänge in Gasen und
im Vakuum,
VEB-Verlag der Wissenschaften,
Berlin (1955), Anhang S. 2
37. Garbuny, M. l.c.,
S. 182
38. Görke, K. l.c.,
S. 111/112
39. Traving, G. Über die Theorie der Druckverbreite-
rung von Spektrallinien,
Verlag G. Braun (1960). S. 110
40. D'Ans-Lax Taschenbuch der Physik, Bd. III,
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,
New York (1970), S. 589
41. D'Ans-Lax l.c.,
S. 574
42. D'Ans-Lax l.c.,
S. 568

Ich danke Herrn Prof. Dr. Kiefer für die Stellung des reichhaltigen Themas und für die Betreuung der Arbeit.

Bei Herrn Prof. Dr. Kalus möchte ich mich für die freundliche Aufnahme am Lehrstuhl Experimentalphysik I bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Egger für sein Engagement und für entscheidende Vorschläge zur Verbesserung der Mechanik des Interferometers.

Für sehr hilfreiche Ideen an der zugehörigen Elektronik bin ich Herrn Dr. Göttler zu Dank verpflichtet.

Herrn Meyer und der Werkstatt (insbesondere den Herren Leykam und Neuner) sei Dank gesagt für ihr schnelles und präzises Arbeiten.

Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Frau Sommerfeldt, die einen Großteil der "Tipp-Arbeiten" übernahm.

Erklärung

Die vorliegende Zulassungsarbeit habe ich in allen Teilen selbstständig gefertigt und keine anderen als die in der Arbeit angegebenen Hilfsmittel benutzt. Ich habe sie nicht schon als Doktor- oder Diplomarbeit an einer anderen Hochschule, oder als Teil solcher Arbeiten eingereicht.

Kulmbach 27.2.80
.....,.....

Ort, Datum

August Töpk
.....
Eigenhändige Unterschrift