

Versuch: Kreisel

Marius Kaiser, Felix Mateo Brunabend

12. März 2021

Physikalisches Praktikum
im Sommersemester 2019
Versuch durchgeführt am 28.05.2019



Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	5
2	Fragen zur Vorbereitung	6
2.1	Trägheitsmoment	6
2.2	Trägheitstensor	6
2.3	Beispiel Rad	8
2.4	Nutation	8
2.5	Präzession	9
2.6	Kreiselkompass	11
2.7	Bierdeckel	11
3	Versuchsaufbau	13
4	Auswertung	14
4.1	Qualitative Beobachtungen	14
4.2	Nutation	16
4.3	Präzession	20
5	Zusammenfassung und Fazit	26

1 Motivation

Mit Sicherheit hat sich jeder schon einmal als Kind an einem Kreisel begeistern können. Auch als Physiker sind die dabei auftretenden Kräfte und Impulse von besonderem Interesse. In der klassischen Mechanik lässt sich die Bewegung eines Kreisels vollständig durch überlagerte Translationen und Rotationen beschreiben. Dabei ist der Trägheitstensor eine wichtige Eigenschaft des rotierenden Körpers, welche im Prinzip die 'Unwucht' gegenüber einer der drei Hauptachsen beschreibt. Hat bspw. ein Autorad eine Unwucht in der Felge, so wirken zusätzliche Kräfte auf seine Rotationsachse (parallel zur Autoachse), welche auch im Lenkrad beim Fahren durch zittern zu spüren sind und Beschädigungen im Lager der Achswelle zur Folge haben können. In diesem Versuch untersuchen wir anhand eines luftgelagerten Kreisels dessen Bewegungen und Reaktionen auf äußere Einflüsse. Außerdem wollen wir die Unterschiede zwischen Figurenachse, Drehimpulachse und momentarer Drehachse genauer zu Gemüte führen.

2 Fragen zur Vorbereitung

2.1 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment eines Körpers hängt von seiner Massenverteilung und seiner Drehachse ab. Es ist definiert als:

$$J = \int_V (\vec{r}_\perp)^2 \rho(\vec{r}) dV$$

wobei: V : Volumen des Körpers

\vec{r}_\perp : Radiusanteil senkrecht zur Rotationsachse

ρ : Masseverteilung des Körpers

2.2 Trägheitstensor

Für den Drehimpuls einer Punktmasse gilt:

$$\vec{L} = m (\underline{r} \times \dot{\underline{r}})$$

Für einen starren Körper kann dieser durch die Summation vieler kleiner Masseelemente m_i beschrieben werden. Aus Sicht des Laborsystems gilt dann:

$$\underline{\tilde{L}} = \sum_i m_i (\underline{\tilde{r}}_i \times \dot{\underline{\tilde{r}}}_i)$$

dabei gilt:

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{r}}_i &= \underline{r}_0 + \underline{r}_i \\ \dot{\underline{\tilde{r}}}_i &= \dot{\underline{r}}_0 + (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{L}} &= \sum_i [(\underline{r}_0 + \underline{r}_i) \times (\dot{\underline{r}}_0 + (\underline{\omega} \times \underline{r}_i))] \cdot m_i \\ &= \sum_i (\underline{r}_0 \times \dot{\underline{r}}_0) \cdot m_i + \sum_i (\underline{r}_0 \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)) \cdot m_i \\ &\quad + \sum_i (\underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_0) \cdot m_i + \sum_i (\underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)) \cdot m_i\end{aligned}$$

Mit geeignetem Koordinatensystem

$$\sum_i m_i \underline{r}_i = 0 \quad \text{und} \quad \underline{r}_0 = \dot{\underline{r}}_0 = 0$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\underline{L} &= \sum_i m_i \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \\
&= \sum_i m_i \underline{\omega} (\underline{r}_i \underline{r}_i) - \sum_i m_i \underline{r}_i (\underline{r}_i \underline{\omega}) \\
&= \sum_i m_i (\underline{r}_i^2 \underline{\omega} - (\underline{r}_i \underline{\omega}) \underline{r}_i) \\
&= \sum_i m_i \left[(r_{i1}^2 + r_{i2}^2 + r_{i3}^2) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} - (r_{i1}\omega_1 + r_{i2}\omega_2 + r_{i3}\omega_3) \begin{pmatrix} r_{i1} \\ r_{i2} \\ r_{i3} \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} r_{i1}^2 \omega_1 + r_{i2}^2 \omega_1 + r_{i3}^2 \omega_1 \\ r_{i1}^2 \omega_2 + r_{i2}^2 \omega_2 + r_{i3}^2 \omega_2 \\ r_{i1}^2 \omega_3 + r_{i2}^2 \omega_3 + r_{i3}^2 \omega_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{i1}^2 \omega_1 + r_{i1} r_{i2} \omega_2 + r_{i1} r_{i3} \omega_3 \\ r_{i2} r_{i1} \omega_1 + r_{i2}^2 \omega_2 + r_{i2} r_{i3} \omega_3 \\ r_{i3} r_{i1} \omega_1 + r_{i3} r_{i2} \omega_2 + r_{i3}^2 \omega_3 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} \omega_1 \sum_i m_i (r_{i2}^2 + r_{i3}^2) - \omega_2 \sum_i m_i r_{i1} r_{i2} - \omega_3 \sum_i m_i r_{i1} r_{i3} \\ -\omega_1 \sum_i m_i r_{i2} r_{i1} + \omega_2 \sum_i m_i (r_{i1}^2 + r_{i3}^2) - \omega_3 \sum_i m_i r_{i3} r_{i3} \\ -\omega_1 \sum_i m_i r_{i3} r_{i1} - \omega_2 \sum_i m_i r_{i3} r_{i2} + \omega_3 \sum_i m_i (r_{i1}^2 + r_{i2}^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_{i2}^2 + r_{i3}^2) & -\sum_i m_i r_{i1} r_{i2} & -\sum_i m_i r_{i1} r_{i3} \\ -\sum_i m_i r_{i2} r_{i1} & \sum_i m_i (r_{i1}^2 + r_{i3}^2) & -\sum_i m_i r_{i3} r_{i3} \\ -\sum_i m_i r_{i3} r_{i1} & -\sum_i m_i r_{i3} r_{i2} & +\sum_i m_i (r_{i1}^2 + r_{i2}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\
&= \underline{\underline{J}} \underline{\omega} \\
&\rightarrow \underline{\underline{J}} = \sum_i m_i \begin{pmatrix} r_{i2}^2 + r_{i3}^2 & -r_{i1} r_{i2} & -r_{i1} r_{i3} \\ -r_{i2} r_{i1} & r_{i1}^2 + r_{i3}^2 & -r_{i3} r_{i3} \\ -r_{i3} r_{i1} & -r_{i3} r_{i2} & r_{i1}^2 + r_{i2}^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dabei sind die Diagonalelemente die Trägheitsmomente bei Drehungen um die Hauptachsen.

2 Fragen zur Vorbereitung

Eine andere äquivalente Schreibweise ist:

$$J_{\alpha,\beta} = \sum_i m_i (|\underline{r}_i|^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i,\alpha} r_{i,\beta})$$

2.3 Beispiel Rad

Bei einem ausgewuchteten Rad mit Rotationsachse parallel zur Radachse und gewählten Koordinatenursprung im Schwerpunkt des Rades kann der Trägheitstensor durch das Produkt einer diagonalisierten 3x3-Matrix (Tensor 2. Stufe) und der Radmasse beschrieben werden, wobei die Diagonale dieser Matrix dessen Eigenwerte beinhaltet. Diese Eigenwerte beschreiben dann die Trägheitsmomente bzgl. der Hauptachsen. Bei einem unausgewuchteten Rad ist der Trägheitstensor nicht zwangsläufig diagonalisiert bzw. die Diagonalelemente dessen Eigenwerte. D.h. es treten zusätzliche Drehmomente auf die das Rad in seiner Rotation beeinflussen (das Rad 'eiert'). Bei einem ausgewuchteten Rad wirken eben keine zusätzlichen Drehmomente, sodass das Rad 'rund läuft'. Damit wirken nur die vom Hersteller gewünschten Kräfte auf die Radaufhängung (bei Pkw bspw. $\approx \frac{1}{4}$ des Autogewichtes).

2.4 Nutation

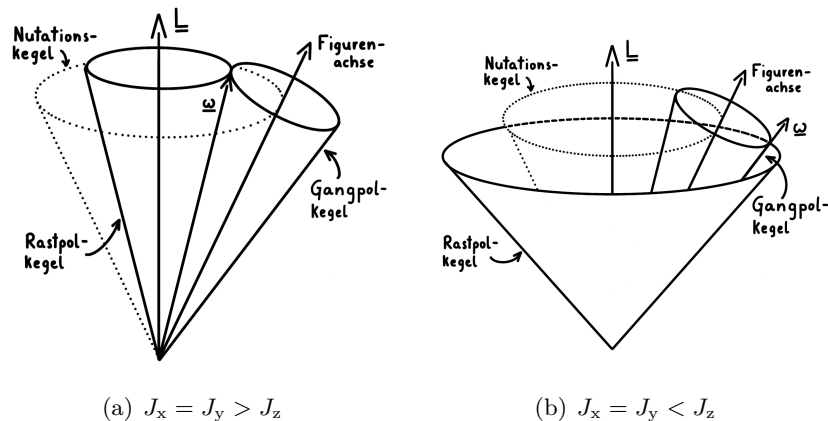


Abbildung 2.1: Rotationen mit Trägheitsmomenten J_i um die Hauptachsen

Der Drehimpuls ist für uns als Beobachter raumfest, wodurch sich die Figurenachse auf dem Nutationskegel um die Richtung des Drehimpulses bewegt. Dabei bewegt sich die Winkelgeschwindigkeit ω (auch momentane Drehachse genannt) auf dem Raspolkegel. Dabei unterscheidet sich die relative Lage der Achsen durch das Trägheitsmoment bzgl. der Drehimpulsachse. Das sieht man schön in den Abbildungen 2.1 a) und b). Bei a) ist das besagte Trägheitsmoment kleiner als das der restlichen

Hauptachsen, der Gangpolkegel 'rollt' sich außen am Rastpolkegel ab, und bei b) ist das Trägheitsmoment bzgl. der Drehimpulsachse kleiner als das der restlichen Hauptachsen, Gangpolkegel 'rollt' sich innen am Rastpolkegel ab.

2.5 Präzession

Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession kann man allgemein schreiben als

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} \quad .$$

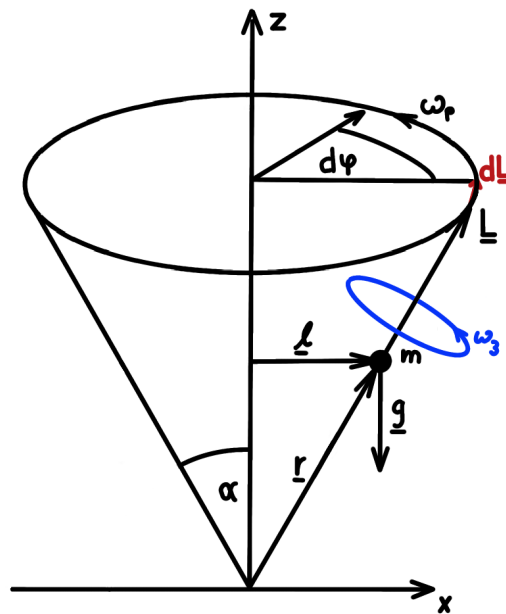
Drück man den infinitesimalen Drehwinkel $d\varphi$ nun als Änderung des Dreimpulses dL aus so ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{dL}{L} \quad \text{mit} \quad dL = M dt \\ \Rightarrow \quad d\varphi &= \frac{M}{L} dt \\ \Leftrightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{M}{L} = \omega_p \end{aligned}$$

Dabei ist M das sich durch das äußere Moment entstehende Drehmoment und der Drehimpuls L ergibt sich hier aus dem Hauptträgheitsmoment bei Rotation um die 3. Hauptachse und der Winkelgeschwindigkeit um diese Achse (vgl. Kapitel 3):

$$\begin{aligned} M &= \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| \cdot |\vec{g}| m \sin(\alpha) = m |\vec{r}| |\vec{g}| \frac{|\vec{l}|}{|\vec{r}|} = m g l \underbrace{|\hat{e}_z| |\hat{e}_x|}_{=1} \\ \text{und} \quad L &= J_3 \omega_3 \\ \rightarrow \quad \omega_p &= \frac{m g l}{J_3 \omega_3} \end{aligned}$$

2 Fragen zur Vorbereitung



Damit folgt, dass die Präzessionsfrequenz unabhängig des Neigungswinkels zwischen Figurenachse und Horizontalen ist.

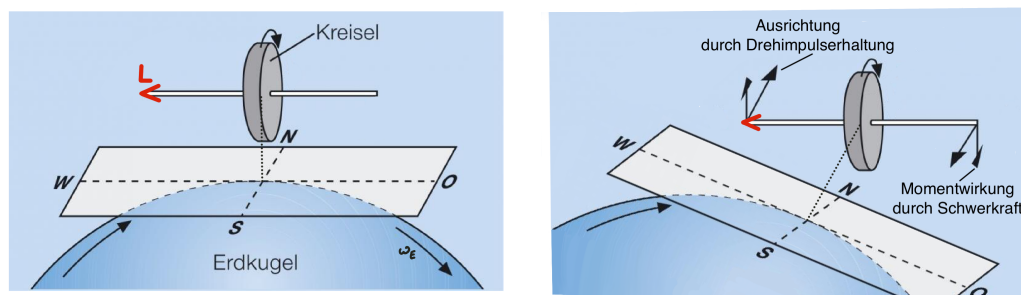
Ebenfalls wird klar, dass die Präzessionsfrequenz nur vom Vorzeichen des Drehimpulses abhängt. Das Drehmoment zeigt immer senkrecht auf $m \vec{g}$ (immer -z-Richtung) und \vec{l} bzw. \vec{r} . Damit folgt für eine positive Präzessionsfrequenz ein in z-Richtung positiver Drehimpuls und umgekehrt für eine negative Präzessionsfrequenz ein in z-Richtung negativer Drehimpuls. D.h. die Richtung der Präzessionsfrequenz ist gleich der Drehimpulsfrequenz ω_3 .

2.6 Kreiselkompass

Ein Kreiselkompass ist ein Kreisel, der durch seine Eigenrotation und die Rotation der Erde seine Drehimpulsachse parallel der Breitengrade ausrichtet. Er wird so aufgehängt, dass er seine Drehimpulsachse in der horizontalen Ebene (Tangentialebene der Erdoberfläche) frei drehen kann. Der Schwerpunkt des Kreisels wird durch die Gravitation stets Richtung Erdzentrum gezogen, wodurch bei Schiefelage des Kreisels ein Drehmoment wirkt. Durch Drehimpulserhaltung richtet sich die Drehimpulsachse dann so aus, dass sie wieder parallel zu den Breitengraden ausgerichtet ist.

Damit weiß man also immer wo die Längengrade verlaufen und weiß je nach Drehimpulsausrichtung des Kompasses, wo Norden und Süden ist. Dadurch hat man einen Kompass, der unabhängig des Magnetfeldes der Erde ist.

Zur Veranschaulichung noch eine Skizze.¹



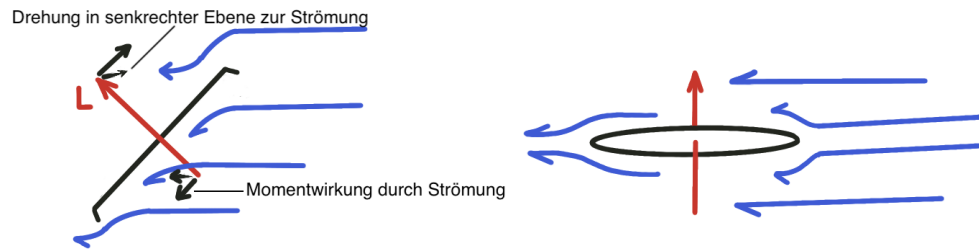
2.7 Bierdeckel

Wirft man einen Bierdeckel schräg nach oben, mit gleichzeitiger Drehung um dessen Figurenachse, so richtet sich diese Achse horizontal aus. Erklärt werden kann das dadurch, dass die Strömung, bzw. dessen Luftwiderstand, eine Kraft auf die Bierdeckelfläche ausübt, sodass der Deckel ein Drehmoment erfährt und kippt. Damit richtet sich die Figurenachse so aus, dass sie senkrecht zur Strömungsrichtung liegt und sich auch hier wegen der Drehimpulserhaltung in dieser Ebene (senkrecht zur Strömungsrichtung) dreht. Diese Drehung hat jedoch keine Relevanz, da in dieser Lage für jede Drehung der Figurenachse in der Ebene (senkrecht zur Strömungsrichtung) ein Reibungsminimum erreicht ist. Damit wirkt dann kein Drehmoment mehr auf die Fläche und er bewegt sich stabil weiter.

Auch hierfür nochmal eine kleine Skizze:

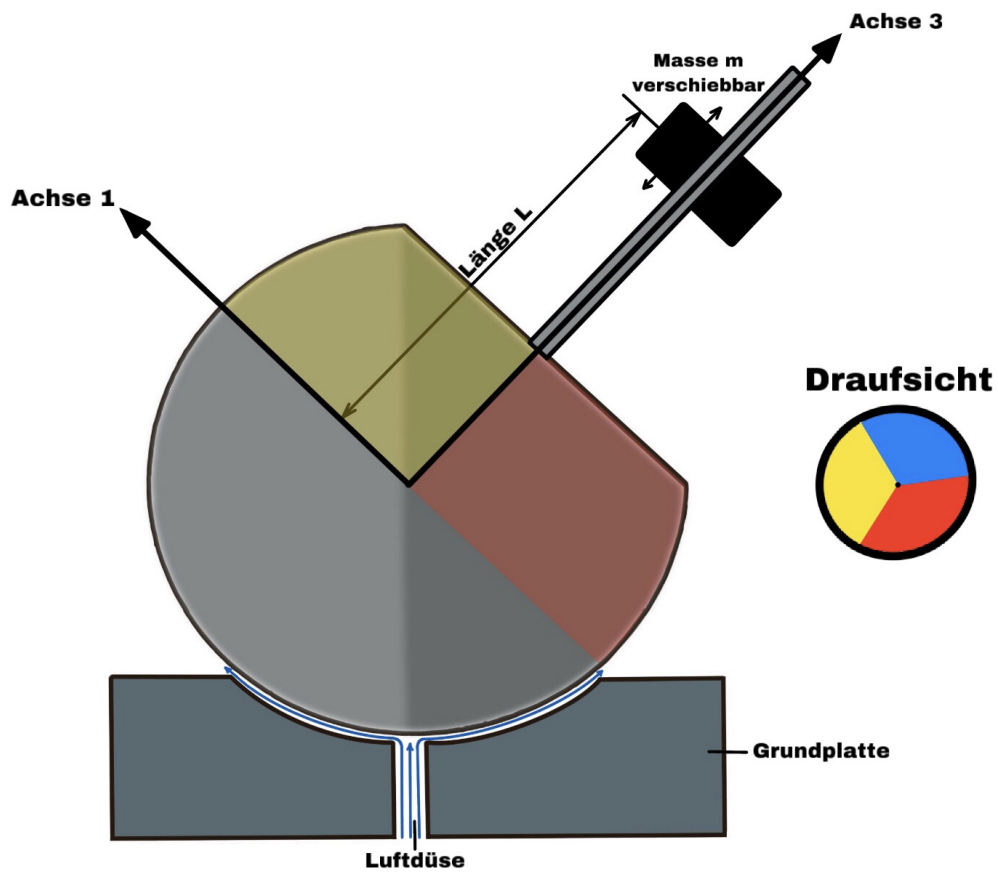
¹Bild auf Grundlage von: <https://www.wissen.de/lexikon/kreiselkompass>, vom 28.06.2019

2 Fragen zur Vorbereitung



Ein Diskus ist so konzipiert, dass seine Hauptmasse einen möglichst großen Abstand zur Figurenachse hat. Dadurch hat er ein großes Trägheitsmoment bzgl. dieser Achse und es bedarf dementsprechend hoher Drehmomente seine Achsenausrichtung zu verändern. Das durch die Luftströmung verursachte Drehmoment ist also nicht ausreichend, den Diskus bis zum aufkommen (auf den Boden) weit genug in die Strömungslinien zu drehen. Natürlich gibt es aber ein Drehmoment, welches man signifikant sehen könnte, würde der Diskus nur wesentlich länger fliegen. Das ist aber mit dessen Trägheit bei normalen Diskusregeln nicht der Fall.

3 Versuchsaufbau



4 Auswertung

4.1 Qualitative Beobachtungen

- Als erstes möchte ich den Fall ohne weitere Einflüsse betrachten. Sobald also der Kreisel angedreht wurde und von der Fixierung gelöst war, konnte man nichts als die Rotation bzgl. der Figurenachse sehen. Dabei liegen Drehimpuls-Figuren- und Drehachse übereinander. Beim Andrehen auf besonders hohe Frequenzen konnte die Fixierung zwar eine leichte Nutation (aufgrund des Spielraumes in der Fixierung) nicht verhindern, aber qualitativ kann man sagen, dass auch da die Achsen übereinander liegen.
In diesem Zustand ist der Kreisel stabil.
- Legt man nun an diesen eben beschriebenen Kreisel mit dem Finger oder einer Linealkante eine Kraft an die Gewindestange an, so kann man eine Bewegung senkrecht auf Krafrichtung und Figurenachse sehen. Ist die Drehrichtung mathematisch positiv von oben betrachtet, so lässt sich die Bewegungsrichtung durch die Rechte-Hand-Regel beschreiben (Daumen $\hat{=}$ Figurenachse und Zeigefinger $\hat{=}$ Krafrichtung \rightarrow Mittelfinger zeigt Richtung der Geschwindigkeit). Analog zum mathematisch negativer Drehsinn gilt die Linke-Hand-Regel. Wie in der Vorbereitung hergeleitet präzidiert der Kreisel immer in gleiche Richtung des Drehimpulses. Genau das war hier also zu sehen, denn von oben betrachtet lenkt die wirkende Kraft die Figurenachse in dieser Richtung aus, worauf hin sich diese in gleiche Drehrichtung des Drehimpulses bewegt, vgl. Abbildung 4.1. Auffällig war hierbei noch, dass mit zunehmender Drehfrequenz, die Bewegungsgeschwindigkeit abnimmt. Auch hier lässt sich auf die Herleitung in Aufgabe 2.5 verweisen, die besagt, je größer die Drehfrequenz bzgl. der Achse 3 (hier also Drehimpulsrichtung), desto kleiner die Präzessionsfrequenz. Das bestätigt sich mit der Relation $v_p = \omega_p r_\perp$, wobei r_\perp der Abschied vom Schwerpunkt zum Punkt der Kraftausübung ist.
- Gibt man nun auf einen stabilen Kreisel nur einen Kraftstoß (Schlag) und stellt das Stroboskoplicht auf die Drehfrequenz des Kreisels ein, so sieht man die Figurenachse entgegen der Rotationsfrequenz wandern. Auch lässt sich die Drehrichtung der Figurenachse ermitteln indem man das Strobolicht auf die Frequenz der Figurenachse einstellt und die Farbfolge betrachtet, die sich um die Drehachse (bzw. innerhalb des Figurenachsenkreises) ändert. Da der Kreisel laut Angabe $J_3 < J_1 = J_2$ hat, folgt aus der Vorbereitung ein Abrollen des Gangpolkegels an der Außenseite des Rastpolkegels, also entgegen des Drehimpulssinnes. Betrachtet man die theoretischen Farbverläufe

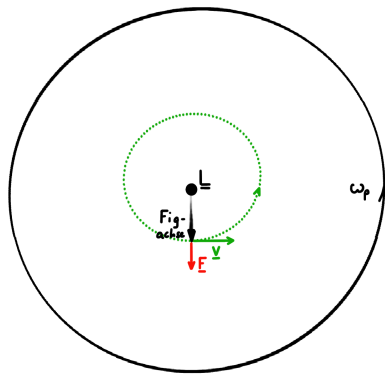


Abbildung 4.1: Präzession Qualitativ

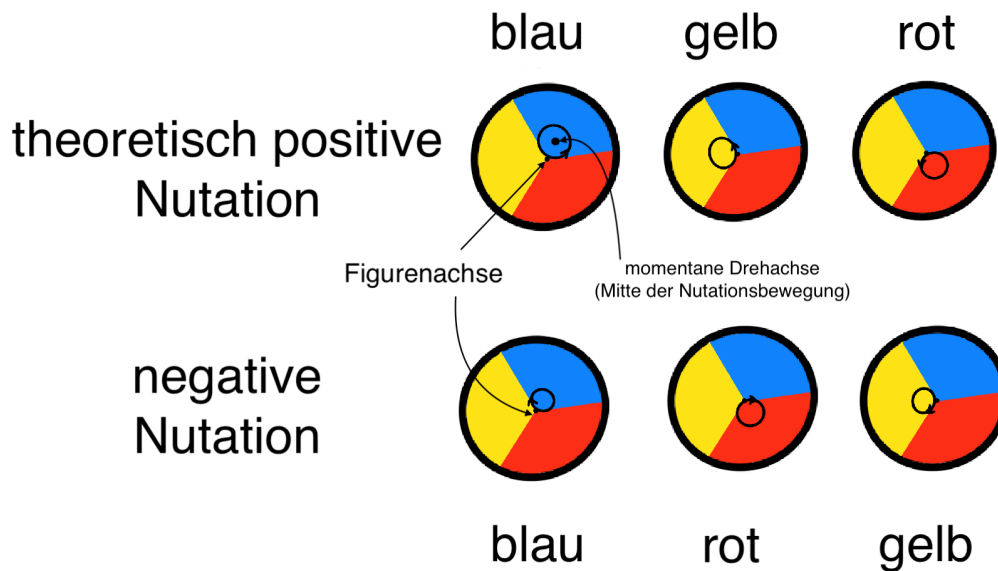


Abbildung 4.2: Farbverläufe theoretischer Nutationen

die für beide Sinne zwischen momentaner Drehachse und Figurenachse zu sehen wären, so erhält man die Abbildung 4.2. Wir haben eine Farbfolge Blau→Rot→Gelb→Blau beobachtet und somit eine mathematisch negative Nutationsfrequenz. Auch das entspricht der theoretischen Formulierung aus dem Skript, denn da wird aus den Euler'schen Gleichungen die Formel $\omega_n = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_3$ hergeleitet. Da $J_3 < J_1$ gilt, folgt bei mathematisch positiver Drehfrequenz ω_3 eine negative Nutationsfrequenz.

4.2 Nutation

Nun untersuchen wir die Nutation des Kreisels und werte die Messdaten aus. Da das Strobolicht seine Frequenz in Hz angab, müssen wir also diese Werte mit 2π multiplizieren ($\omega = 2\pi f$). Für den Fehler bei der Zeitmessung $T_n = \frac{T'_n}{8}$ (8, da anscheinend noch ein Fehler bei der Durchführung getan wurde) kann ich durchaus die abgeschätzte Unsicherheit von $u_T = 0,5 \text{ s}$ verwenden, da der Ablesefehler (und der nicht angegebene Gerätefehler) nicht signifikant dazu beitragen würde und diese Abschätzung sich auf ein Vorbeiziehen am Stiftende bezieht. Für die Unsicherheit der Frequenz des Strobolichtes schätze ich $u_{f_3} = 0,05 \frac{1}{\text{s}}$, da trotz bestmöglichem Konstanthalten der Frequenz die Farbscheibe, bzgl. des Messbeginns, letztendlich leicht verdreht war.

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 2\pi f_3 & ; & & u_{\omega_3} &= 2\pi u_{f_3} \\ \omega_n &= \frac{2\pi}{T_n} = \frac{16\pi}{T'_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n}{\omega_3} &= \frac{16\pi}{2\pi f_3 T'_n} = \frac{8}{T'_n f_3} \\ u_{\frac{\omega_n}{\omega_3}} &= \sqrt{\left(\frac{9 u_T}{(T'_n)^2 f_3}\right)^2 + \left(\frac{9 u_{f_3}}{T'_n (f_3)^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die beiden Tabellen (4.1): Wichtig ist hierbei das Vorzeichen des Verhältnisses zu beachten. Aus den Eulerschen Gleichungen im Skript wurde hergeleitet, dass

$$\omega_v := \frac{\omega_n}{\omega_3} = \frac{J_3 - J_1}{J_1} = \text{konst.} \quad .$$

Mit $J_3 < J_1$ folgt also, dass die Konstante negativ sein muss. Diese berechne ich nun durch den Mittelwert der berechneten Verhältnisse und dessen Unsicherheit:

$$\begin{aligned} \overline{\omega_v} &= u_{\overline{\omega_v}}^2 \sum \frac{\omega_v}{u_{\omega_v,i}^2} & n: \text{Anzahl der Werte} \\ u_{\overline{\omega_v}} &= \left(\sum_i \frac{1}{u_{\omega_v,i}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die jeweilige Messreihe:

$$\begin{aligned} \overline{\omega_{v,1}} &= -0,014\,992\,653 & u_{\overline{\omega_{v,1}}} &= 0,000\,061\,129 \\ \overline{\omega_{v,2}} &= -0,015\,013\,724 & u_{\overline{\omega_{v,2}}} &= 0,000\,061\,302 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_{v,1} &= -0,014\,99 \pm 0,000\,06 \\ \omega_{v,2} &= -0,015\,01 \pm 0,000\,06 \end{cases}$$

Tabelle 4.1: Nutationswerte
Messreihe 1

ω_3	u_{ω_3}	$\frac{\omega_n}{\omega_3}$	$u \frac{\omega_n}{\omega_3}$
68,04689688	0,31415927	-0,01488392	0,00016494
69,49202950	0,31415927	-0,01503799	0,00017046
70,87433026	0,31415927	-0,01481244	0,00016804
77,84866596	0,31415927	-0,01520325	0,00018921
82,37255938	0,31415927	-0,01512695	0,00019617
89,22123136	0,31415927	-0,01494774	0,00020516
94,49910702	0,31415927	-0,01492047	0,00021506
101,22211530	0,31415927	-0,01494840	0,00022972
108,07078728	0,31415927	-0,01515530	0,00025081
116,42742374	0,31415927	-0,01509554	0,00026703
125,03538761	0,31415927	-0,01490582	0,00027887

Messreihe 2

ω_3	u_{ω_3}	$\frac{\omega_n}{\omega_3}$	$u \frac{\omega_n}{\omega_3}$
68,04689688	0,31415927	-0,01489592	0,00016519
69,49202950	0,31415927	-0,01488634	0,00016731
70,87433026	0,31415927	-0,01501948	0,00017241
77,84866596	0,31415927	-0,01532594	0,00019212
82,37255938	0,31415927	-0,01490890	0,00019080
89,22123136	0,31415927	-0,01489636	0,00020380
94,49910702	0,31415927	-0,01510693	0,00022033
101,22211530	0,31415927	-0,01503895	0,00023246
108,07078728	0,31415927	-0,01533013	0,00025654
116,42742374	0,31415927	-0,01488732	0,00025980
125,03538761	0,31415927	-0,01506220	0,00028470

Misst mehrere Messreihen über den selben Kreisel, so sollten die errechneten Mittelwerte dieser Messreihen auch jeweils im Fehlerbereich der anderen liegen. Das bestätigen uns auch unseren beiden Mittewerte mit einem Differenzwert von 0,000 02 in einem Fehlerbereich von 0,000 06. Da auch die verschiedenen Mittelwerte um den 'wahren' Mittelwert streuen, werde ich hier das arithmetische Mittel berechnen (den Fehler aber so beibehalten), um ihn in das Diagramm mit einzufügen. Tragen wir nun diesen und das Verhältnis gegen die Drehfrequenz ω_3 auf, so erhalten wir die Abbildung 4.3.

Auch ohne eingezeichnet Mittelwert sieht man sehr schön das Schwanken um einen konstanten Wert ω_v . Der eingezeichnete Mittelwert mit dessen Unsicherheit trifft

4 Auswertung

also relativ gut diesen konstanten Wert. Dabei überschneiden sich einige Messwerte nicht in ihren Unsicherheiten (sowohl bei Messreihe 1 als auch bei Messreihe 2), was aber nicht weiter schlimm ist. Das deutet eher darauf hin, dass wir bei der Messung einen etwas größeren Fehler hätten abschätzen können, da diese Messmethode doch etwas ungenauer ist als erwartet. Nichts desto trotz lässt sich in beiden Abbildungen relativ gut ein Korrelationskoeffizient gegen Null abschätzen. Das bedeutet also keine (oder wenn dann nur eine sehr schwache) lineare Abhängigkeit der Verhältniswerte ω_v von der Drehfrequenz ω_3 . Das stimmt also gut mit der Theorie überein. Ebenso scheint die Korrelation der Residuen relativ gleichverteilt um den Mittelwert. Auf den ersten Blick könnte man denken, sie verhielten sich nach einem Schwingungsmuster, schaut man aber genauer hin, so sieht man eine sehr unsymmetrische Verteilung der Residuen für beide Messwerte. Das ist auch was wir erwarten, da, wie auch schon erklärt, alle Messreihen über den selben Kreisel gleichverteilt um einen Mittelwert nahe der bereits errechneten streuen müssen.

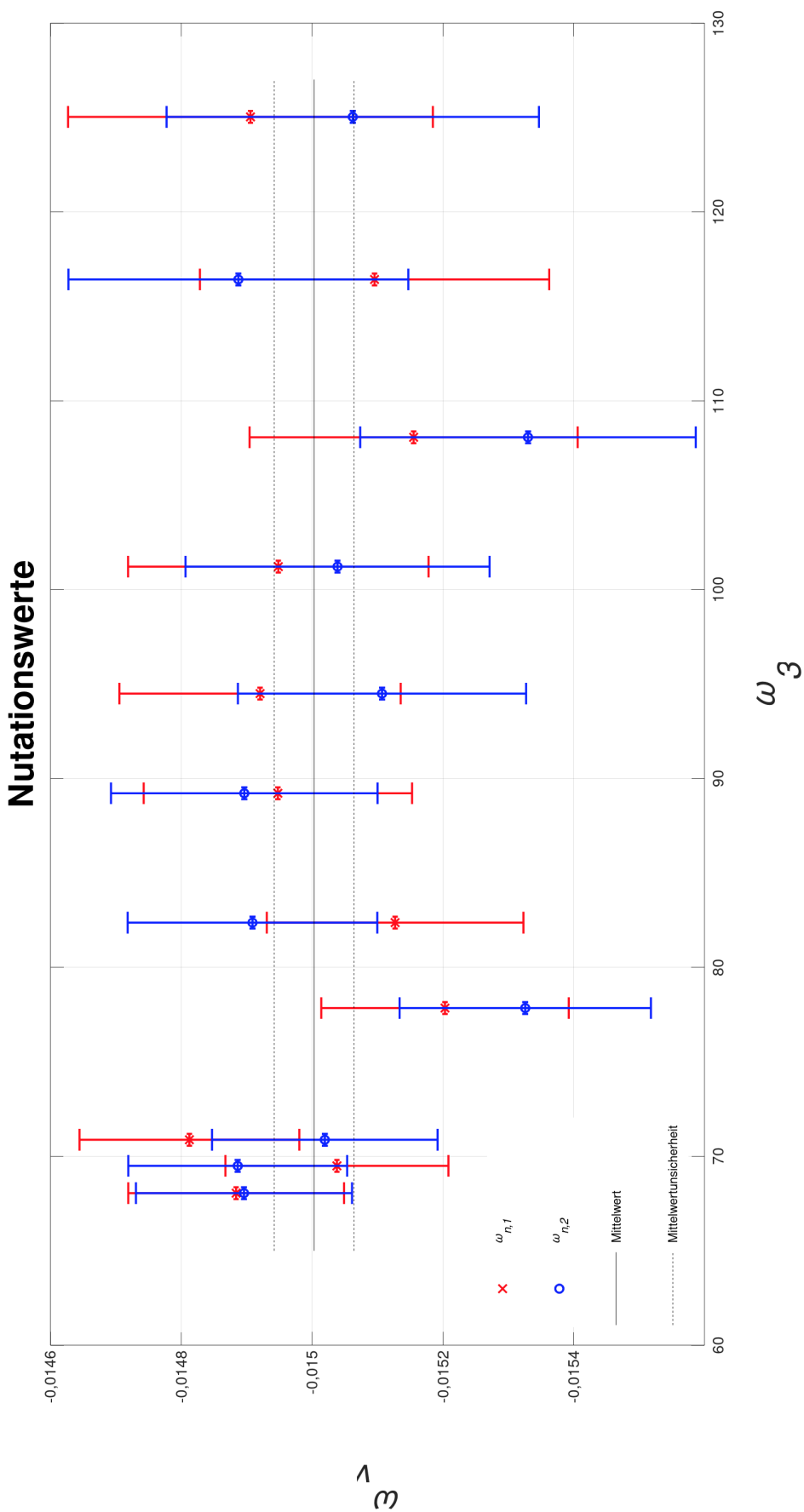
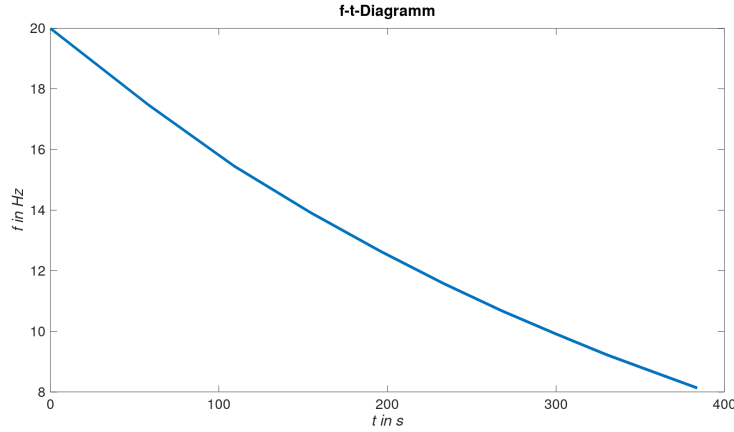


Abbildung 4.3: Nutationswerte

4.3 Präzession

Nun möchte ich die Präzession des Kreisels untersuchen, indem ich das Produkt der Drehfrequenz mit der Präzessionsfrequenz ($\omega_P = \omega_3 \cdot \omega_p$) gegen die Drehfrequenz auftrage. Da wir aber immer nur Drehfrequenzintervalle (also vorher und nachher) gemessen haben, muss ich vorher die jeweilige arithmetisch mittlere Frequenz berechnen. Dies darf ich, weil man in den Werten einen klar linearen Verlauf erkennen kann.



Dabei wird die Unsicherheit der Strobolichtfrequenz wieder auf $u_{f_3} = 0,5 \text{ Hz}$ geschätzt und die Drehfrequenzunsicherheit wird mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet.

$$\omega_{3,i} = 2\pi \frac{f_{3,i} - f_{3,i+1}}{2}$$

$$u_{\omega_{3,i}} = \pi\sqrt{2} u_{f_3}$$

Außerdem müssen wir die jeweiligen Präzessionsfrequenzen berechnen, wobei die jeweiligen Differenzzeiten betrachtet werden müssen. Die zeitliche Unsicherheit hatten wir auf $u_T = 0,5 \text{ s}$ geschätzt:

$$\omega_{p,i} = \frac{2\pi}{T_{p,i+1} - T_{p,i}}$$

$$u_{\omega_{p,i}} = 2\sqrt{2}\pi \frac{u_T}{(T_{p,i+1} - T_{p,i})^2}$$

Die Unsicherheit für das Produkt bildet sich wie folgt:

$$u_{\omega_P} = \sqrt{(u_{\omega_3} \cdot \omega_p)^2 + (u_{\omega_p} \cdot \omega_3)^2}$$

Damit ergibt sich die folgende Tabelle 4.2: Auch hier sieht man schon anhand der Produktwerte beider Messreihen eine Schwankung um einen konstanten Wert. Deshalb berechne ich auch hier den Mittelwert beider Messreihen und trage sie zusammen mit den Produktwerten gegen die Drehfrequenz ω_3 auf, siehe Abbildungen 4.4.

Tabelle 4.2: Präzessionswerte

Messreihe 1

ω_3 in s^{-1}	u_{ω_3} in s^{-1}	ω_p in s^{-1}	u_{ω_p} in s^{-1}	ω_P in s^{-2}	u_{ω_P} in s^{-2}
117,7468927	0,2221441	0,1082375	0,0013184	12,7446261	0,1570932
103,4526461	0,2221441	0,1229105	0,0017001	12,7154176	0,1779901
92,2371603	0,2221441	0,1380920	0,0021461	12,7372125	0,2003095
83,4092850	0,2221441	0,1522089	0,0026073	12,6956394	0,2200831
76,0579581	0,2221441	0,1668398	0,0031326	12,6894914	0,2411242
69,8690206	0,2221441	0,1819631	0,0037262	12,7135825	0,2634686
64,6539768	0,2221441	0,1963495	0,0043388	12,6947787	0,2838885
60,1300834	0,2221441	0,2109867	0,0050097	12,6866507	0,3048607
56,2030926	0,2221441	0,2258514	0,0057405	12,6935458	0,3265122
52,7473407	0,2221441	0,2413825	0,0065572	12,7322826	0,3500052

Messreihe 2

ω_3 in s^{-1}	u_{ω_3} in s^{-1}	ω_p in s^{-1}	u_{ω_p} in s^{-1}	ω_P in s^{-2}	u_{ω_P} in s^{-2}
117,6840608	0,2221441	0,1084055	0,0013225	12,7576046	0,1574936
103,3898142	0,2221441	0,1226705	0,0016935	12,6828848	0,1771988
92,1114966	0,2221441	0,1378194	0,0021376	12,6947489	0,1992632
83,1893735	0,2221441	0,1520984	0,0026035	12,6529714	0,2192017
75,9322944	0,2221441	0,1689482	0,0032123	12,8286280	0,2467858
69,8061888	0,2221441	0,1821213	0,0037327	12,7131948	0,2636898
64,5911450	0,2221441	0,1965338	0,0043469	12,6943426	0,2841453
60,0986675	0,2221441	0,2111995	0,0050199	12,6928089	0,3053128
56,1716766	0,2221441	0,2264211	0,0057695	12,7184524	0,3279630
52,7473407	0,2221441	0,2404587	0,0065071	12,6835559	0,3473628

(Mittelwertbildung analog zu Nutation)

$$\begin{aligned}\overline{\omega_{P,1}} &= 12,716\,539 \frac{1}{s^2} & u_{\overline{\omega_{P,1}}} &= 0,072\,553 \frac{1}{s^2} \\ \overline{\omega_{P,2}} &= 12,715\,059 \frac{1}{s^2} & u_{\overline{\omega_{P,2}}} &= 0,072\,613 \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{P,1} = (12,72 \pm 0,07) \frac{1}{s^2} \\ \omega_{P,2} = (12,72 \pm 0,07) \frac{1}{s^2} \end{cases}$$

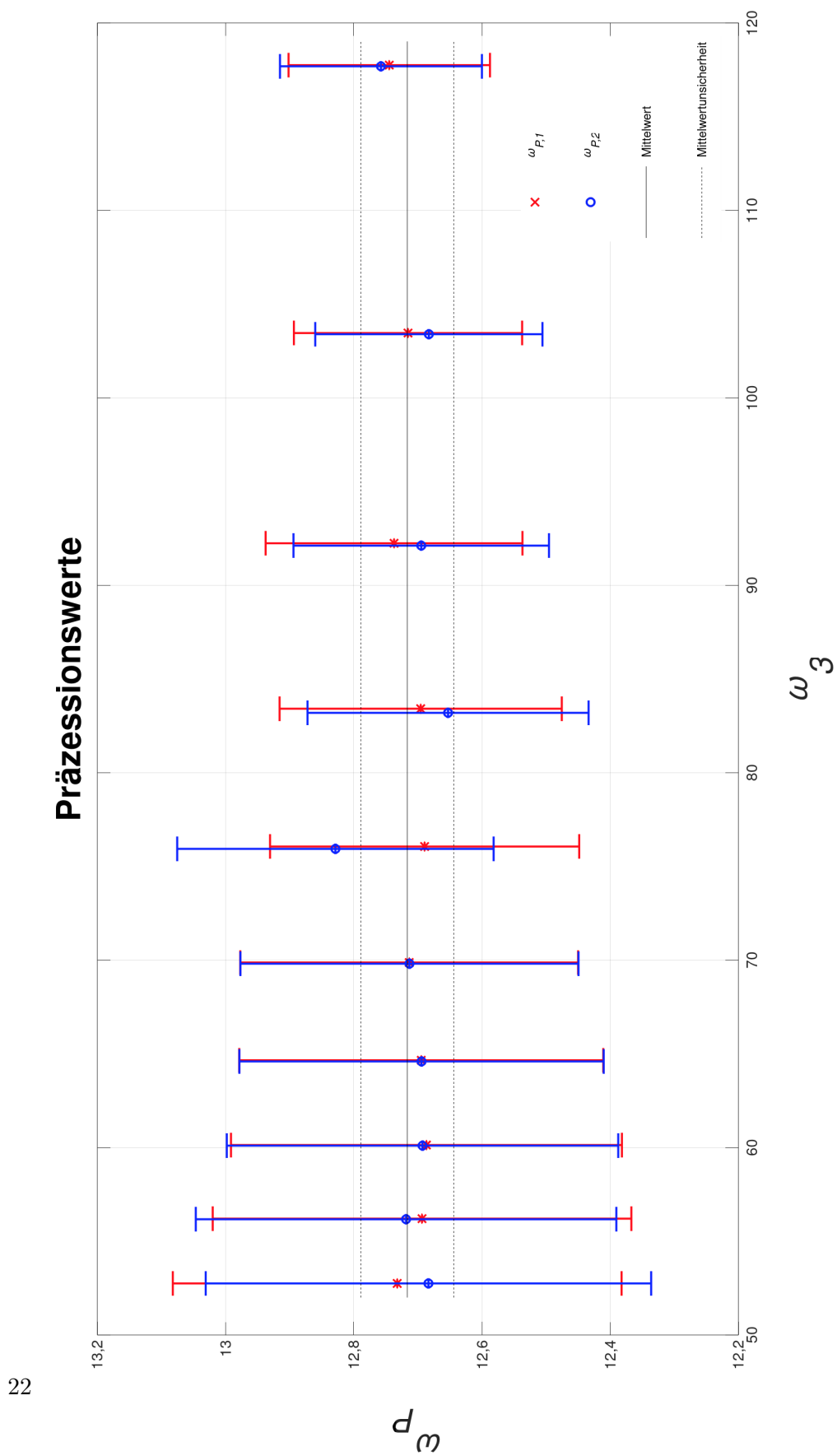


Abbildung 4.4: Präzessionswerte

In dieser Abbildung (4.4) liegen die aus den Messwerte errechneten Produktwerte meist sehr nah aneinander, wodurch der Mittelwert eine relativ kleine Unsicherheit erhält. Die Korrelation der Messwerte verhält sich deutlicher als die der Nutation, der Korrelationskoeffizient lässt sich also deutlich auf Null schätzen. Korrelation der Residuen ist hier sehr klar gleichverteilt. Wesentlich besser erkennbar als bei der Nutation. Das liegt wahrscheinlich an der wesentlich einfacheren Messmethode. (messen über eine lang dauernde Umdrehung, statt über viele sehr kurz dauernde Umdrehungen)

Nun möchte ich das Trägheitsmoment bzgl. der 3. Achse J_3 berechnen (vgl. Versuchsaufbau). Wie in 2.5 hergeleitet gilt:

$$\begin{aligned}\omega_P &= \frac{m g l}{J_3 \omega_3} \\ \Leftrightarrow \quad \omega_P &= \omega_P \cdot \omega_3 = \frac{m g l}{J_3} \\ \Leftrightarrow \quad J_3 &= \frac{m g l}{\omega_P}\end{aligned}$$

Ich muss also die Masse m und die Länge l aus den Maßen berechnen, nehme dabei die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ als fehlerfrei an. Für ω_P verwende ich die gemittelten Mittelwerte über die beiden Messreihen behalte aber die Unsicherheit bei.

$$\begin{aligned}\overline{\omega_P} &= 12,715\,799 \frac{1}{\text{s}^2} & u_{\overline{\omega_P}} &= 0,072\,553 \frac{1}{\text{s}^2} \\ \omega_P &= (12,72 \pm 0,07) \frac{1}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

Da die beiden Massestückchen bis auf zwei Hundertstel gleich sind und der Ablesefehler des Messschiebers größer ist, berechne ich nicht den neuen Schwerpunkt der addierten Massen, da er mit Sicherheit in der Ungenauigkeit der Länge enthalten ist.

$$\begin{aligned}m &= m_1 + m_2 \\ u_m &= \sqrt{s_a^2 + s_r^2} \\ l &= s - \left(\frac{d_k}{2}\right) + a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right) \\ u_l &= \sqrt{\left(u_s\right)^2 + \left(\frac{u_{d_k}}{2}\right)^2 + \left(u_{a_2}\right)^2 + \left(\frac{u_{a_1}}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

Dabei gilt allgemein für die Längenunsicherheiten mit dem Messschieber:

$$u_x = \sqrt{(s_a)^2 + (s_r(x))^2}$$

4 Auswertung

Für die Werte s und d_k werden allerdings wie beschrieben zusätzlich unter der Wurzel ein Term $(0,1 \text{ mm})^2$ addiert berechnet.

Beim Rechnen ist mir dabei für den Wert $s = 197,05 \text{ mm} > d_k = 100,00 \text{ mm}$ ein offensichtlicher grober Fehler aufgefallen! Diese Ungleichung kann geometrisch nicht stimmen, weshalb ich davon ausgehe, dass ich versehentlich die 1 vorn dran geschrieben habe. In der folgenden Rechnung verwende ich dementsprechend $s = 97,05 \text{ mm}$.

Damit folgen die Werte:

$$u_{d_k} = 0,246 \text{ 22 mm}$$

$$u_s = 0,265 \text{ 20 mm}$$

$$u_{a_1} = 0,229 \text{ 39 mm}$$

$$u_{a_2} = 0,241 \text{ 45 mm}$$

$$m = 48,380 \text{ 00 g}$$

$$u_m = 0,015 \text{ 811 g}$$

$$l = 113,825 \text{ 00 mm}$$

$$u_l = 0,383 \text{ 33 mm}$$

Damit können wir nun J_3 berechnen. Dabei muss die Masse in kg und die Länge in m umgerechnet werden. Außerdem gilt für die Unsicherheit:

$$u_{J_3} = \sqrt{\left(\frac{g l}{\omega_P} \cdot u_m\right)^2 + \left(\frac{g m}{\omega_P} \cdot u_l\right)^2 + \left(\frac{m g l}{(\omega_P)^2} \cdot u_{\omega_P}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad J_3 = 0,004 \text{ 248 434 kg m}^2 \quad u_{J_3} = 0,000 \text{ 028 182 kg m}^2$$

$$J_3 = (4,25 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Nun können wir damit J_1 berechnen. Aus dem Auswertungsteil 5.2 wissen wir:

$$\omega_v = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_v + 1 = \frac{J_3}{J_1}$$

$$J_1 = \frac{J_3}{\omega_v + 1}$$

$$u_{J_1} = \sqrt{\left(\frac{u_{J_3}}{\omega_v + 1}\right)^2 + \left(\frac{J_3 u_{\omega_v}}{(\omega_v + 1)^2}\right)^2}$$

Dabei verwende ich das Mittel der $\omega_{v,i}$ und erhöhe die Unsicherheit um 1 Digit, da sie dann beide Bereiche abdeckt:

$$\omega_v = -0,015 \text{ 00} \pm 0,000 \text{ 07}$$

$$\Rightarrow \quad J_1 = 0,004 \text{ 313 145 kg m}^2 \quad u_{J_1} = 0,000 \text{ 028 613 kg m}^2$$

$$J_1 = (4,31 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Diese Werte entsprechen meiner Erwartung vorerst ganz gut, da $J_3 < J_1$ erfüllt ist. Überschlägt man mal grob das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel, so lässt sich die Dichte der verwendeten Kugel errechnen:

$$J = \frac{8}{15} \rho \pi r^5$$

$$\rho = \frac{15 J}{8 \pi r^5}$$

Betrachte ich nun das Trägheitsmoment bzgl. der Achse 3, so erwarte ich eine Dichte der Größenordnung von $7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ergeben¹.

$$\rho = 8113,9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Die von Mateo und mir verwendete Kugel entspricht logischerweise nicht einer symmetrischen Vollkugel, aber diese grobe Abschätzung zeigt, dass wir die richtige Größenordnung erhalten. Mit dieser Messmethode kann man also ausreichend genau die Trägheitsmomente bzgl. der Hauptachsen dieses Kreisels ermitteln.

¹https://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung_Chemie/_Dichte_fester_Stoffe, vom 29.06.2019

5 Zusammenfassung und Fazit

Zuletzt kann nur bestätigt werden, dass wir ein tieferes Verständnis für rotierende Kreisel entwickelt haben. Was teilweise unintuitiv vorkam, ergibt für uns nun viel mehr Sinn. Außerdem lernten wir eine schöne Methode zum ermitteln der Trägheitsmomente bzgl. der Hauptachsen kennen und haben, dank des groben Fehlers beim Ausmessen der Kugel, ein Gespür für sinnvolle Dimensionen dieser entwickelt. Im Prinzip ist dieser Versuch wahrlich einfach gewesen, um so viel nützliche Informationen über diese Kugel zu erhalten. Mit diesen Erkenntnissen lassen sich also bspw. die Berechnung von Planetenmassen oder Aufstellkräfte am Motorad in Schräglage erklären. Dieser Versuch hat mir viel Freude und Wissen bereitet.