

WS2021/22

PPBphys2

Signal-Rausch Verbesserung

Manuel Lippert - Paul Schwanitz

- Seitenlayout: Ränder kleiner bzw. Rand zur Seitenmitte größer
- Schreibt bitte grammatikalisch richtige Sätze !
- Plot: "ticks" spiegeln ; Multiplot
- physikalische Zahl = Zahlenwert + Einheit \rightarrow Abstand \downarrow

Gruppe 11



Informationen

Versuchstag	05.10.2021
Versuchsplatz	B11 0.03
Betreuer	Daniel Sommermann
Gruppen Nr.	11
Teilnehmer	Manuel Lippert (Manuel.Lippert@uni-bayreuth.de) Paul Schwanitz (Paul.Schwanitz@uni-bayreuth.de)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Theoretischer Hintergrund	6
2.1	Rauschen	6
2.1.1	Thermisches Rauschen	6
2.1.2	Schrotrauschen	6
2.1.3	Funkelrauschen	7
2.2	Umwelteinflüsse	8
2.3	Erdschleifen	9
2.4	Möglichkeiten der Signal-Rausch Verbesserung	10
2.4.1	Filter	10
2.4.2	Signalmittelung	12
2.4.3	Lock-In Verstärker	13
2.5	Leistungspegel	16
2.6	Theorem von Nyquist	17
2.7	Fouriertransformation und Schnelle Fouriertransformation	17
2.8	Fourier-Reihe und Effektivspannung	17
3	Messprotokoll	20
4	Auswertung und Diskussion	26
4.1	Mittelung und Fouriertransformation	26
4.2	Theorem von Nyquist	34
4.3	Signalfilterung	37
4.3.1	Verschiedene Tiefpassfilterkurven	37
4.3.2	Filterwirkung auf Rechtecksignal	39
4.3.3	Bandpass 4. Ordnung	43
4.3.4	Einfluss der Ordnung	45
4.3.5	Vergleich: Analoge und digitale Filterung	46
4.3.6	Vergleich Filterung und Mittelung	47
4.4	Lock-In Verstärker	48
5	Fazit	52
A	Berechnungen Fourier-Reihenkoeffizient und Effektivspannung	53
	Literaturverzeichnis	56

1 Einleitung

Durch elektronische Messung ist jede Messung eines Signals ^{mit} einem gewissen Anteil von Rauschen behaftet. Um die Messung so präzise wie möglich durchführen zu können muss man zu den Mitteln der Signal/Rausch-Verbesserung greifen. Dafür ist wichtig die jeweiligen Störquellen zu identifizieren und diese bestenfalls zu eliminieren oder ^{im} praktischsten Fall zu unterdrücken.

In diesem Versuch werden die Methoden und die Auswirkung der Signal/Rausch-Verbesserung diskutiert. Dabei werden unterschiedliche zeitliche Signalformen mit überlagertem Rauschen über die „Fast Fourier Transformationsmethode“ (FFT) und der Mittlung des Signals diskutiert. Zudem werden die grundlegenden Arten von elektronischen Filtern und deren Effekt in der Praxis angewendet und analysiert. Auch das Lock-In Verfahren wird anhand eines Lock-In Verstärkers näher betrachtet.

Was ist Rauschen?

2 Theoretischer Hintergrund

2.1 Rauschen

Dieser Abschnitt soll einen groben Überblick über die verschiedenen Arten von Rauschen und ihre Ursachen ~~gegeben werden~~.

2.1.1 Thermisches Rauschen

kommt drauf an wo ich mess
Das thermische Rauschen wird von den statistischen Bewegungen der freien Ladungsträger, meist Elektronen, verursacht. Das thermische Rauschen ist weiterhin von der Frequenz unabhängig, weshalb es oft als weißes Rauschen bezeichnet wird. Die Rauschspannung u_R , an einem Widerstand R , kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$u_R = \sqrt{4kTRB} \quad \text{mit} \quad B = f_{\max} - f_{\min} \quad (\text{Bandbreite}) \quad (2.1)$$

→ von was?

Wobei T die absolute Temperatur ist und k die Boltzmannkonstante. Da es sich um statistische Schwankungen handelt, ergibt eine Mittelung von u_R über die Zeit Null. Aus obiger Formel 2.1 kann durch die Division durch R eine Formel für die Rauschleistung hergeleitet werden.

$$P_R = 4kTB \quad (2.2)$$

Leistung: P

Es geht klar hervor, dass die Rauschleistung nur von Temperatur und Frequenz abhängt. Somit wäre es also theoretisch möglich das thermische Rauschen, durch Kühlung des Versuchsaufbaus auf den absoluten Nullpunkt, abzustellen. Dies ist jedoch nicht praktikabel, da es mit enormen Kosten und Aufwand verbunden wäre [4].

2.1.2 Schrotrauschen

Wie das thermische Rauschen ist auch das Schrotrauschen ein statisches und von der Frequenz unabhängiges Rauschen, weshalb es ebenfalls ein weißes Rauschen ist. Die Ursache ist jedoch die Quantelung der elektrischen Ladung, welche sich ebenfalls stochastisch bewegen und somit das Schrotrauschen verursachen. Der Effektivwert des Rauschstroms i_R kann durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$i_R^2 = 2eIB \quad (2.3)$$

2.1 Rauschen

von was?

Wobei B wieder die Bandbreite ist, e die Elektronenladung und I der fließende Gleichstrom. Für die Rauschleistung P_R , über einen Übergang mit Widerstand R , gilt:

$$P_R = i_R^2 R = 2eIRB \quad (2.4)$$

Aus dieser Formel ist ableitbar, dass das Schrotrauschen durch die Erniedrigung des Gleichstroms, der durch den Übergang fließt, erreicht werden kann [4].

?

2.1.3 Funkelrauschen

Durch Störstellen im Material kann es zu Funkelrauschen kommen, welches mit zunehmender Frequenz abnimmt. Deshalb wird es auch als $\frac{1}{f}$ Rauschen bezeichnet. Abhilfe schafft hier, die Messungen bei hohen Frequenzen durchzuführen [4].

2.2 Umwelteinflüsse

Häufig ist bei Messungen jedoch nicht nur Rauschen ein Problem, sondern störende Umwelteinflüsse. Unsere Umwelt ist voll von Störquellen wie elektromagnetischen Wellen, beispielsweise von Radiosendern, welche die Messungen verfälschen, ~~da~~ Kabel im Versuchsaufbau für diese als Antenne fungieren können. Eines der stärksten Störeinflüsse ist wohl das Netzbrummen, was durch die öffentliche Stromversorgung bei 50 Hz verursacht wird. Ebenso können diverse elektrische Geräte wie Elektromotoren ~~oder Monitore~~ Störungen verursachen [4].

früher ☺

Um die Einstrahlung von ~~Störenden~~ elektromagnetischen Wellen zu vermeiden ist eine gute Abschirmung von diesen vonnöten. Darum werden die Messgeräte abgeschirmt und Koaxialkabel verwendet. Ein Koaxialkabel besteht aus einem Draht welcher von einer Isolierschicht umgeben ist, welche wiederum durch ein Drahtgeflecht umgeben ist. Als letztes umgibt das Kabel noch eine weitere Isolierung. Der Aufbau wird in Abbildung 2.1 veranschaulicht. Das Drahtgeflecht dient hierbei als Schirm und verhindert somit die Einstrahlung von Störeinflüssen. Des Weiteren dient der Schirm auch dazu, um ein gemeinsames Erdpotential bereitzustellen, was eine Störung durch Erdschleifen verhindert. Erdschleifen werden im nächsten Kapitel genauer erklärt.

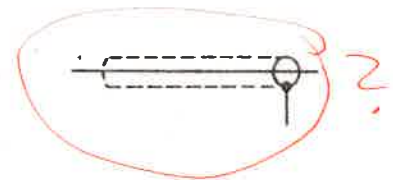
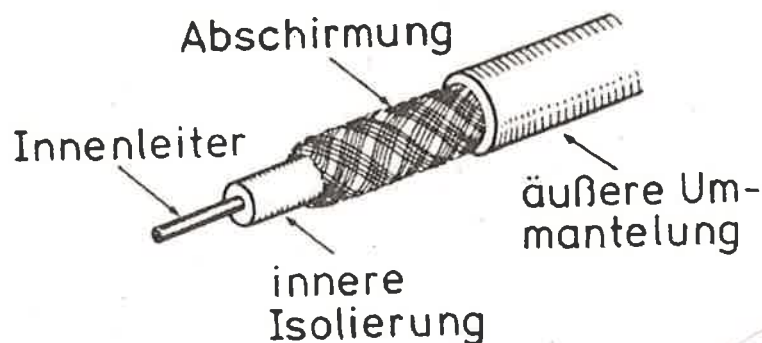


Abbildung 2.1: Aufbau eines Koaxialkabels [4]

2.3 Erdschleifen

Im vorherigen Abschnitt würde bereits der Begriff Erdschleifen genannt, welcher nun genauer Erklärt werden soll. Wenn die Abschirmungen verschiedener Apparaturen nicht miteinander verbunden sind, sondern jede einzeln geerdet ist, dann existieren dennoch kleine Potenzialunterschiede, die elektrostatisch in das System eingekoppelt werden und somit Störungen verursachen. Um Erdschleifen zu vermeiden, sollten alle Abschirmungen verbunden sein und an einem einzigen Erdungspunkt geerdet werden [4]. In Abbildung 2.2 wird dies Schematisch dargestellt.

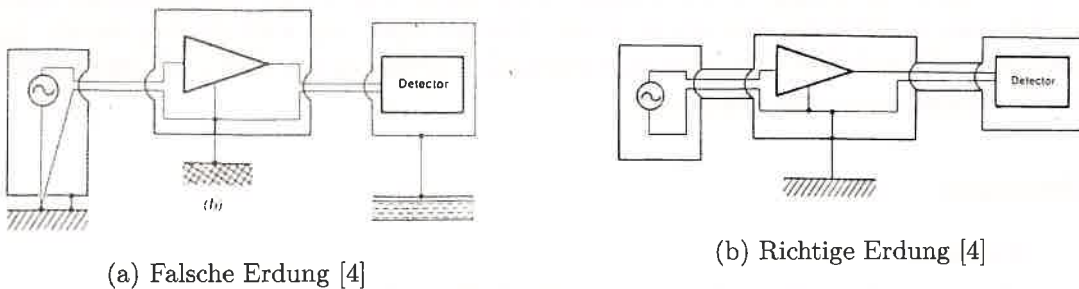


Abbildung 2.2: Beispiele für richtige und falsche Erdung

2.4 Möglichkeiten der Signal-Rausch Verbesserung

Dieser Abschnitt behandelt die Methoden zur Signal/Rausch-Verbesserung und dessen Umsetzung.

2.4.1 Filter

Eine Möglichkeit zur Signal/Rausch-Verbesserung ist der Einsatz eines Filters. Die Aufgabe des Filters ist hierbei die Unterdrückung bestimmter Frequenzen. Dabei ist zu beachten, dass das Signal bei einer anderen Frequenz auftritt als das Rauschen, sonst würden man nämlich das Signal mit filtern. Bei der Filterung wird die Bandbreite das Rauschen stark reduziert (Zu sehen an Gleichung (2.1) und (2.3)), aber auch Störstrahlen aus der Umgebung werden minimiert [4].

Filtertypen

1) **Tiefpass**

Ein Tiefpassfilter filtern Frequenzen **oberhalb** der Grenzfrequenz heraus und lassen Frequenzen unterhalb nahezu ungedämpft durch. Die Grenzfrequenz ist dadurch charakterisiert, dass das Ausgangssignal zu dieser Frequenz um 3dB kleiner ist (ab dort beginnt der Durchlassbereich) [3].

2) **Hochpass**

Ein Hochpassfilter filtern Frequenzen **unterhalb** der Grenzfrequenz heraus und lassen Frequenzen oberhalb nahezu ungedämpft durch. Ein Hochpassfilter ist das Gegenstück zum Tiefpassfilter [3]. Kann verwendet werden, um die 50Hz Brummspannung zu filtern [4].

3) **Bandpass**

Ein Bandpass sperrt Frequenzen **unter- und oberhalb** eines definierten Frequenzbandes. Das Frequenzband ist durch die 3dB-Bandbreite um die Mittenfrequenz charakterisiert. Diese Art des Filters ist eine Reihenschaltung aus Tiefpass- und Hochpassfilter und die Bandbreite wird durch die Grenzfrequenzen der jeweiligen Filter festgelegt [3]. Findet Einsatz bei der Filterung von breitbandigen Rauschen [4].

4) **Bandsperre/Notch-Filter**

Ein Bandsperre sperrt einen schmalen Frequenzbereich innerhalb eines breiten Frequenzbandes und kann wie das Gegenstück zu einem Bandpass angesehen werden [3].

In Abbildung 2.3 ist der generelle Verlauf der jeweiligen Filtertypen im Frequenzbereich dargestellt.

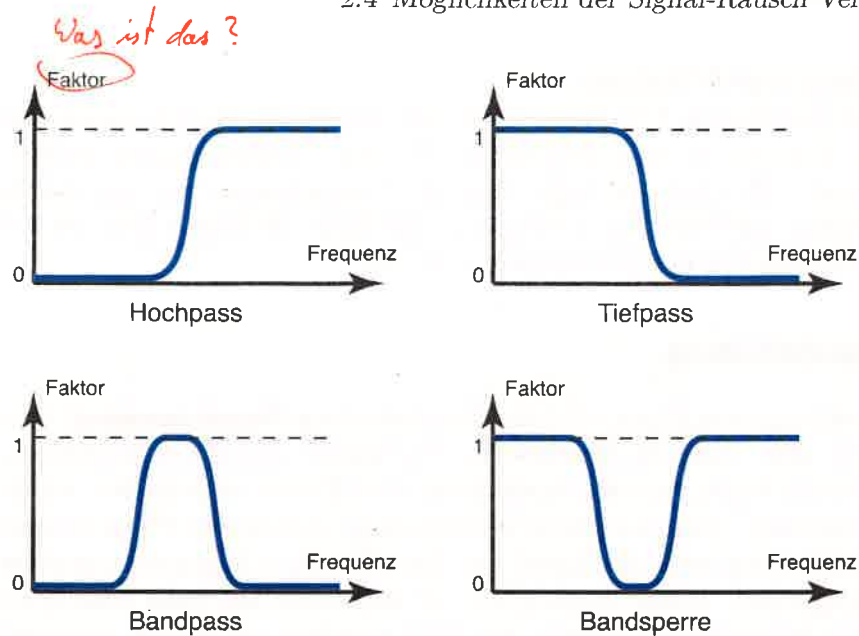


Abbildung 2.3: Verlauf der jeweiligen Filtertypen im Frequenzbereich [2]

Ordnung eines Filters

Die Ordnung eines Filters gibt an wie oft ein Filter hintereinander in Reihe geschaltet wurde. Somit wären zwei Tiefpassfilter in Reihe geschaltet ein Tiefpassfilter 2.Ordnung. Je höher die Ordnung eines Filters ist, desto steiler ist die sogenannte Flankensteilheit (Steigung der Verläufe in Abbildung 2.3). Es ist aber zu beachten, dass sich durch die Ordnung die Verstärkung und die Phase in der Nähe der Grenzfrequenz verändern [3].

Weitere Filtertypen

1) Butterworth-Tiefpassfilter

Der Butterworth-Tiefpassfilter besitzt einen lagen horizontalen Frequenzgang, welcher erst kurz vor der Grenzfrequenz scharf abknickt. In der Sprungantwort lässt sich ein kräftiges Überschwingen (abhängig von der Ordnung) registrieren [4].

2) Tschebyscheff-Tiefpassfilter

Ein Tschebyscheff-Tiefpassfilter besitzt oberhalb der Grenzfrequenz einen noch steileren Abfall als der Butterworth, womit das Überschwingen der Sprungantwort im Vergleich noch stärker ist. Im Durchlassbereich verläuft die Verstärkung aber nicht monoton, sondern wellig mit konstanter Amplitude [4].

3) Bessel-Tiefpassfilter

Der Bessel-Tiefpassfilter besitzt unter der Voraussetzung, dass die Phasenverschiebung in einem bestimmten Frequenzbereich proportional zur Frequenz ist, ein optimales Rechteck-Übertragungsverhalten. Der Frequenzgang knickt aber nicht so stark ein, wie bei den zwei vorher genannten Filter [4].

2 Theoretischer Hintergrund

4) Tschebyscheff-Tiefpass

Beim Tschebyscheff-Tiefpass ist der steilste Knick des Frequenzgangs nach der Grenzfrequenz, wodurch auch dieser Filter eine Überschwingung der Sprungantwort aufweist. Dies hat zur Folge, dass der Frequenzgang im Durchlassbereich eine Welligkeit aufweist. Durch Verminderung dieser Welligkeit geht der Tschebyscheff kontinuierlich in den Butterworth über [4].

** Verb*

2.4.2 Signalmittelung

Bei stark verrauschten Signal wird die Signalmittelung (~~signal averaging~~) verwendet. Zu beachten ist aber, dass die Bandbreiten des Signals und des Rauschens in derselben Größenordnung liegen, was die Anwendung eines Filters ausschließen würde. Auch ist *eine* die Voraussetzung, dass das Signal wiederholbar und dessen Phase bekannt ist. Bei der Signalmittelung wird das Signal mit Rauschen in n Segmente unterteilt und in n Kanälen gespeichert. Dieser Vorgang wird oft wiederholt und jeder neue Durchgang zum vorhandenen Speicherinhalt addiert, was ein Anwachsen des Signals proportional zu den Wiederholungen verursacht und beim Rauschen aufgrund seiner statischen Natur nur den quadratischen Mittelwert addiert ~~wird~~. Allgemein erhält man für N Wiederholungen eine Signal/Rausch-Verbesserung von \sqrt{N} [4]. In Abbildung 2.4 wird die erzielte Signal/Rausch-Verbesserung durch ein Vorher-Nachher-Bild gezeigt.

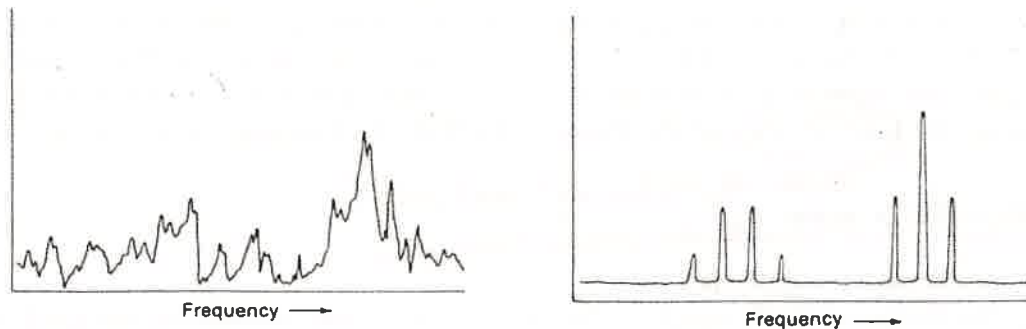


Abbildung 2.4: Anwendung Signalmittelung: Links Vorher und Rechts Nachher [4]

Single Measurement Multiple Measurement

2.4.3 Lock-In Verstärker

Ein Lock-In Verstärker ist ein Detektor zum Auflösen von kleinen Wechselspannungssignalen bis zu ein paar nV. Dabei ist eine akkurate Messung des Signals, welches 1000fach stärkeres Rauschen besitzt, möglich. Es kommt dafür eine sogenannte phasensensitive Detektion zum Einsatz, um eine bestimmte Komponente des Signals bei einer bestimmten Referenzfrequenz f_r und Phase Θ_r zu bestimmen. Dabei wird Rauschen, welches nicht auf der Referenzfrequenz liegt, herausgefiltert und trägt nicht mehr zum Signal bei.

Phasensensitive Detektion

Beim Lock-In wird wie oben erwähnt eine Referenzfrequenz benötigt. Diese Frequenz wird meistens durch das Experiment vorgegeben (z.B. Funktionsgenerator) und der Lock-In detektiert die Antwort des Experiments bei dieser Referenzfrequenz. In Abbildung 2.5 sind schematisch die jeweiligen Signale gezeigt. Als Referenzsignal wird eine Rechteckschwingung mit f_r verwendet und das Experiment selbst wird von einer Sinusschwingung (Input-Signal) mit Funktion $s(t) = U_s \sin(\omega_r t + \Theta_s)$ mit $\omega_r = 2\pi f_r$, Amplitude U_s und Phasenverschiebung Θ_s angeregt. Der Lock-In Verstärker erzeugt dann selbst eine Sinusschwingung mit Frequenz f_l und der Funktion $l(t) = \sin(\omega_l t + \Theta_r)$ mit $\omega_l = 2\pi f_l$ als Signal, das Lock-In-Signal.

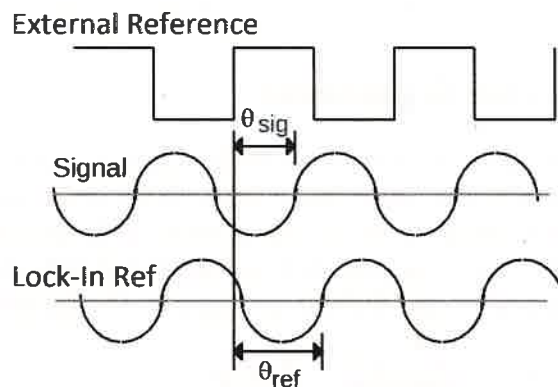


Abbildung 2.5: Signale bei einem Lock-In Verstärker [5]

Nun multipliziert der Lock-In Verstärker das Input-Signal und das Lock-In-Signal mit einem phasensensitiven Detektor (PSD) oder einem Multiplikator. Daraus folgt mit Anwendung des Additionstheorems des Sinus:

$$\begin{aligned} s_x &= s(t) \cdot l(t) = U_s \sin(\omega_r t + \Theta_s) \cdot \sin(\omega_l t + \Theta_r) \\ &= \frac{U_s}{2} [\cos((\omega_r - \omega_l) + (\Theta_s - \Theta_r)) + \cos((\omega_r + \omega_l) + (\Theta_s + \Theta_r))] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Damit ist das Output-Signal s_x zwei Wechselspannungssignale mit unterschiedlichen Frequenzen. Dieses Signal wird durch einen Tiefpassfilter geschickt, welcher alle Wechselspannungssignale eliminiert.

ab f_g

↳ Was ist f_g bzw. wie stellt man sie ein?

2 Theoretischer Hintergrund

Wenn $\omega_r = \omega_l$ ist, ist das Signal mit der Differenz der Frequenz ein Gleichspannungssignal und wird somit nicht gefiltert. Der neue PSD Output ist dann:

$$s_x = \frac{U_s}{2} \cos(\Theta_s - \Theta_r) = \frac{U_s}{2} \cos(\Delta\Theta) \quad (2.6)$$

Bei einem Phasenunterschied von $\Delta\Theta = 0$ lässt sich hierbei das Maximum der Amplitude messen ($\frac{U_s}{2}$) und bei $\Delta\Theta = \frac{\pi}{2}$ misst man überhaupt kein Output-Signal mehr. Solche Lock-In Verstärker mit nur einem PSD werden auch Einphasen-Lock-In genannt. Man kann aber auch ein zweites Lock-In-Signal mit Cosinusschwinung verwenden und dieses mit einem zweiten PSD mit dem Input-Signal multiplizieren. Mit demselben Prozess wie zuvor erhält man die Beziehung:

$$s_y = \frac{U_s}{2} \sin(\Delta\Theta) \quad (2.7)$$

Das Output s_x heißt „in Phase“-Komponente und s_y die „Quadratur“-Komponente, weil bei $\Delta\Theta = 0$ ist $s_y = 0$ und s_x misst das Input-Signal.

Weiterhin kann man mit s_x und s_y wie folgt die Amplitude des Output-Signals bestimmen:

$$A = (s_x^2 + s_y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{U_s}{2} \quad (2.8)$$

Was wird mit einem Lock-In gemessen?

Ein Lock-In Verstärker misst aufgrund der Multiplikation mit einer Sinusschwingung (Cosinusschwingung) den ersten Term der Fourier-Reihe des Input-Signals bei der Referenzfrequenz f_r . Dabei ist aber zu beachten, dass auch Rauschen, welches bei der Referenzfrequenz auftritt, mit gemessen wird und gegebenenfalls abgezogen werden muss. In Abbildung 2.6 ist zusätzlich der Aufbau des Lock-In Verstärkers dargestellt [5].

↓
Rauschen führt
dann zu was im Messsignal?

2.4 Möglichkeiten der Signal-Rausch Verbesserung

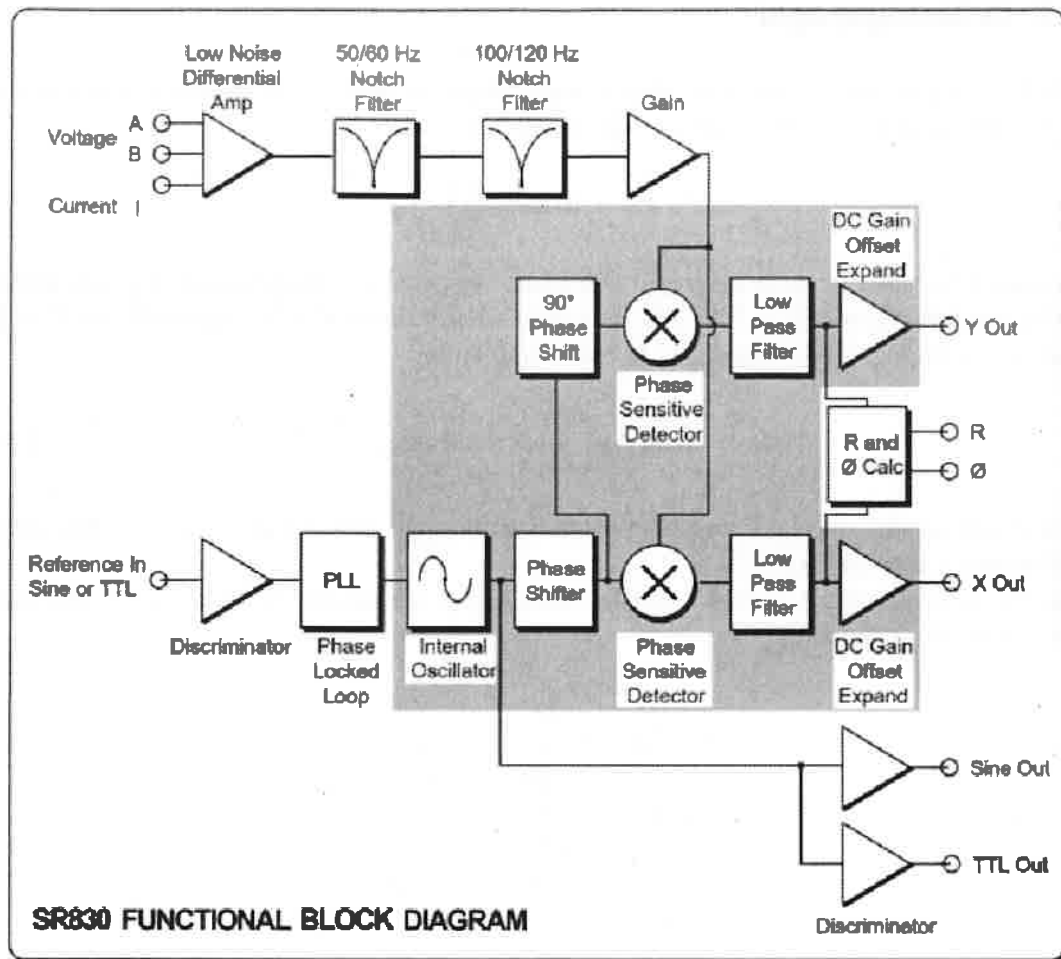


Abbildung 2.6: Blockdiagramm Lock-In Verstärker [5]

2.5 Leistungspegel

Der Leistungspegel L_P gibt das 10fache logarithmische Verhältnis zwischen Nutzleistung P und Bezugsleistung P_0 in dB an und ist definiert als:

$$L_P = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right) \quad (2.9)$$

In diesem Versuch ist vom Interesse den Leistungspegel der Spannungen L_U anzugeben. Dafür wird die Formel $P = U \cdot I$ mit dem ohmschen Gesetz $R = \frac{U}{I}$ umgestellt zu $P = \frac{U^2}{R}$ und in Gleichung (2.9) eingesetzt. Somit erhält man:

$$L_U = 10 \log_{10} \left(\frac{U^2}{U_0^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{U}{U_0} \right) \quad (2.10)$$

Damit entspricht der Leistungspegel der Spannungen das doppelte des herkömmlich definierten Leistungspegel [3].

Um das Verständnis zu vertiefen werden noch einige bestimmte Verhältnisse zu charakteristischen dB angegeben:

L/dB	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{U}{U_0}$
$-n \cdot 10$	$1 \cdot 10^{-n}$	$1 \cdot 10^{-n/2}$
-20	1/100	1/10
-10	1/10	$1/\sqrt{10}$
-6	1/4	1/2
-3	1/2	$1/\sqrt{2}$
0	1	1
3	2	$\sqrt{2}$
6	4	2
10	10	$\sqrt{10}$
20	100	10
$n \cdot 10$	$1 \cdot 10^n$	$1 \cdot 10^{n/2}$

Tabelle 2.1: Leistungspegel und zugehörige Verhältnisse

In Tabelle 2.1 lässt sich sehr gut die Verdopplungsregel des Leistungspegels erkennen. Dabei steigt der Pegel um 3dB an (bei L_U um 6dB), wenn man das Verhältnis verdoppelt. Dies hat damit zu tun, dass der 10er-Logarithmus von 2 ungefähr 0.3 ist und dieser mit der Multiplikation von 10 nach der Gleichung (2.9) dann 3dB ergibt.

2.6 Theorem von Nyquist

Das Theorem von Nyquist oder auch Abtasttheorem besagt, dass aus den Abtastwerten das ursprüngliche Signal (kontinuierlich) fehlerfrei rekonstruiert werden kann, wenn die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß ist wie die höchste Signalfrequenz f_{\max} .

$$f \geq 2 \cdot f_{\max} \quad (2.11)$$

Die Frequenz $2f_{\max}$ wird als *Nyquist-Frequenz* bezeichnet. Aus dem Abtasttheorem folgt auch, dass das Spektrum des Signals *bandbegrenzt* ist [6].

↳ d.h.

2.7 Fouriertransformation und Schnelle Fouriertransformation

Bei einer Fouriertransformation wird ein gegebenes Signal (ggf. eine Funktion) komplett in den Frequenzraum transformiert, dabei wird ein Integral von $-\infty$ bis ∞ ausgewertet. Der Rechenaufwand einer Fouriertransformation ist in der Regel in der Praxis sehr hoch, weswegen meist eine Schnelle Fouriertransformation (engl. Fast Fourier Transformation (FFT)) durchgeführt wird. Unter einer FFT versteht man eine effiziente Realisierung der Diskrete Fouriertransformation (DFT), mit der redundante Rechenschritte vermieden werden. Bei einer DFT wird nur ein abgetastetes Signal in den Frequenzraum überführt. Der Rechenaufwand von N^2 bei einer DFT verringert sich dann bei einer FFT zu $\approx N \log_2(N)$ [6].

etwa

2.8 Fourier-Reihe und Effektivspannung

Allgemeines zur Fourier-Reihe und Effektivspannungen

Eine Fourier-Reihe zerlegt eine gegebene periodische Funktion in ihre jeweiligen Sinus und Cosinusanteile. Die reelle Fourier-Reihe einer bestimmten T -periodischen Funktion lässt sich mit den folgenden Formeln berechnen:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + b_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right] \quad (2.12)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2.13)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2.14)$$

Dabei sind die Grenzen der Integrale von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$ nicht fest, sie können verschoben werden. Es ist aber wichtig, dass über eine Periode integriert wird in diesem Fall über eine komplette Periodendauer T [6].

2 Theoretischer Hintergrund

Um die effektiven Spannungswerte der jeweiligen Schwingungsform zu bestimmen, bildet man das sogenannte „Quadratische Mittel“. Dieses ist wie folgt definiert:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt} \quad (2.15)$$

Hierbei ist es wieder zu erwähnen, dass die Grenzen der Integration nicht fest sind, aber die Integration über eine Periodenlänge erfolgen muss [1].

Die detaillierteren Berechnungen zu jeder Schwingungsform lassen sich in Anhang A nachlesen.

Sinusschwingung

Der Fall der Sinusschwingung ist besonders einfach, da wie vorangegangen erwähnt, die Fourier-Reihe eine periodische Funktion in ihre Sinus und Cosinusanteile zerlegt. Daraus folgt die Fourier-Reihe der Sinusschwingung ist die Sinusschwingung selbst und kann somit trivial angegeben werden als:

$$f(t) = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.16)$$

Die Effektivspannungen der Sinusschwingung:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0,707... U_0 \quad (2.17)$$

5 NKS

Rechteckschwingung

Als Nächstes wird die Fourier-Reihe der Rechteckschwingung bestimmt. Diese hat die Form:

$$f(t) = \begin{cases} +U_0, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -U_0, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.18)$$

Da die Funktion der Rechteckschwingung punktsymmetrisch zum Ursprung ist, fallen alle Cosinusanteile weg, da $a_k = 0$. Somit muss nur b_k wie folgt berechnet werden:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4U_0}{\pi} \frac{1}{2k-1}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.19)$$

doppelt geroppelt

Es werden nur noch Terme mit ungeraden k betrachtet und man erhält:

$$f(t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left((2k-1)\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.20)$$

Die Effektivspannungen der Rechteckschwingung:

$$U_{\text{eff}} = U_0 \quad (2.21)$$

Dreiecksspannung

Als Letztes wollen wir die Dreieckschwingung betrachten. Die Form dieser ist definiert wie folgt:

$$f(t) = \begin{cases} at, & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ a\left(\frac{T}{2} - t\right), & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases} \quad \text{mit } U_0 = \frac{aT}{4} \quad (2.22)$$

Die Funktion ist erneut punktsymmetrisch zum Ursprung, wodurch wieder alle a_k -Koeffizienten 0 sind. b_k ergibt sich dann durch wie folgt:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{8U_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.23)$$

Es werden wieder nur die Terme mit ungeraden k betrachtet. Somit erhält man:

$$f(t) = \frac{8U_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin\left((2k-1)\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.24)$$

Die Effektivspannungen der Dreieckschwingung:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}} = 0, \dots, U_0 \quad (2.25)$$

Benutzt man als Vergleich für Später.

⇒ Unterschiede + Gemeinsamkeiten von Dreieck + Rechteck

Was hier kommen muss ist nicht das Messprotokoll, sondern der Versuchsaufbau!
Teile des Protokolls braucht ihr in der Auswertung
Aufbau kann hier sein: Welche Geräte, Welche Kabel?
Was damit gemacht?

3 ~~Messprotokoll~~ → hört ihr in Anfang packen.

Zu jeder dat-File wird auch eine bmp-File des Fourierspektrums abgespeichert mit selben Dateinamen.

Mittelung der Fouriertransformation

Dateibeginn: Zeit_Datum_G11_averaging_

a) Fourierentwicklung Sinus, Rechteck und Dreieck

Dateinamen:

41a_Sinus_A1V_F1kHz_n10.dat

41a_Dreieck_A1V_F1kHz_n10.dat

41a_Rechteck_A1V_F1kHz_n10.dat

A, F, n = Amplitude, Eingestellte Frequenz (später f), Anzahl der Mittelungen

b) Fourierspektrum Sinus-Signal

Dateinamen:

41b_Sinus_A1V_F1kHz_n100.dat

c) Mittelung und Rauschen

Dateinamen:

41c_Rechteck_A1V_F1kHz_nX_Rau_BW20MHz_AMD120pc.dat

X = 0, 10, 50, 100

Rau, BW, AMD = mit Rauschen, Bandbreite, AM Depth (pc = %)

d)+e) Oberwellen-Abstand + Bandbreite des Rauschens

Dateinamen:

41d_Rechteck_A1V_F1kHz_n0_Rau_BW20MHz_AMDn.dat

N = 120pc, 100pc, 50pc, 10pc

41d_Rechteck_A1V_F1kHz_n0_Rau_BWN_AMD100pc.dat

N = 20MHz, 10MHz, 5MHz, 100kHz, 10kHz, 1kHz

Abtasttheorem

Dateibeginn: *Zeit_Datum_G11_sampling_*

a) Variation Abtastrate + Frequenz

Dateinamen:

42a_Sinus_f20kHz_A1V_fsN.dat $N = 1\text{kHz bis } 100\text{kHz}$

42a_Sinus_fN_A1V_fs20kHz.dat $N = 1\text{kHz bis } 50\text{kHz}$

b) Fourierspektrum bei verschiedenen Abtastraten

Dateinamen:

42b_Dreieck_f3kHz_A1V_fsN.dat $N = 6\text{kHz bis } 9\text{kHz}$

Signalfilterung

Dateibeginn: *Zeit_Datum_G11_filtering_*

a) Frequenzgang von Tiefpassfilter

Dateinamen:

43a_Sinus_f100Hz_A1V_Rau_BW20MHz_AMD120pc_Fil_X_Lopa_OrN_Uf1k.dat

$X = \text{Bu (Butterworth), Ch (Chebyshev), InCh (Chebyshev}^{-1}\text{), El (Elliptic), Be (Bessel)}$

$N = 1, 2, 5, 10$ (Ordnung des Filters)

Lopa, Hipa, Bapa, Fil, Or = Lowpass, Highpass, Bandpass, Filter, Ordnung

Lf, Uf = Lower Frequency, Upper Frequency (1k bedeutet 1kHz)

b) Sprungantwort

Dateinamen:

43b_Rechteck_f100Hz_A1V_Fil_X_Y_OrN_Uf1k.dat

$X, Y, N = (\text{Bu, Ch, InCh, El, Be}); (\text{Lopa, Hipa}); (1, 2, 5, 10)$

3 Messprotokoll

c) Vergleich Analog zu Digital Filterbeschreibung: Ithaco 4302



Abbildung 3.1: Einstellungen des Analogfilters als Bandpass

Dateinamen:

43c_Sinus_f2kHz_A1V_AnalFil_Bu_Bapa_Or1_Lf1kHz_Uf4kHz.dat

43c_Sinus_f2kHz_A1V_DigiFil_Bu_Bapa_Or1_Lf1kHz_Uf4kHz.dat

43c_Rechteck_f2kHz_A1V_AnalFil_Bu_Bapa_Or1_Lf1kHz_Uf4kHz.dat

43c_Rechteck_f2kHz_A1V_DigiFil_Bu_Bapa_Or1_Lf1kHz_Uf4kHz.dat

AnalFil, DigiFil = Analog Filter, Digital Filter

d) Verbesserung mit Bandpass 4.Ordnung

Formel für Spannungsverhältnis in dB:

$$L = 20 \log_{10} \left(\frac{U}{U_0} \right) \quad (3.1)$$

Daraus folgt für ein Signal-Rausch-Verhältnis von $L = 10\text{dB}$: $\frac{U}{U_0} = 3,16$

$\Rightarrow \text{AMD} \approx 70\%$ (Eingestellt nach Gefühl am Oszilloskop). Bester Kompromiss bei einer Lower Frequency von 10mHz und einer Upper Frequency von 55kHz.

Dateinamen:

43d_Rechteck_f1kHz_A1V_Rau_BW20MHz_AMD70pc_DigiFil_Bu_Bapa_Or4_Lf10mHz_Uf55kHz

Lock-In Technik

Modell Lock-In: SR830 DSP Messfehler Lock-In:

- Amplitude = 0,0001 (V, mV, μ V, nV, pV) (Rest- und Ablesefehler)
- Frequenz = 0,0001 (kHz, Hz) (Rest- und Ablesefehler)

Einstellung der dB: Steilheit der Flankensteilheit der Tiefpassfilter

a) Lock-In als Filter

Amplitude = 1,000 V

f/kHz	1	3	5	7	9	11	13
$U_{\text{eff,sin}}/\text{V}$	0,7072	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$U_{\text{eff,square}}/\text{V}$	0,9003	0.3000	0.1800	0.1285	0.1000	0.0817	0.0692
$U_{\text{eff,tri}}/\text{V}$	0,5733	0.0636	0.0229	0.0117	0.0070	0.0047	0.0034

b) Bandbreite Lock-In

Sinusschwingung Amplitude = 100 mV

Schwankungen von ± 0.0005 V

$\tau = 30\text{ms}$ Slope = 6dB		$\tau = 30\text{ms}$ Slope = 18dB	
f/Hz	U_{eff}/V	f/Hz	U_{eff}/V
800	0,0017	950	0,0001
820	0,0020	955	0,0001
840	0,0020	960	0,0001
860	0,0020	965	0,0002
880	0,0030	970	0,0004
900	0,0033	975	0,0006
920	0,0040	980	0,0012
940	0,0060	985	0,0026
960	0,0090	990	0,0070
980	0,0180	995	0,0270
1000	0,0700	1000	0,0706
1020	0,0180	1005	0,0270
1040	0,0090	1010	0,0073
1060	0,0060	1015	0,0026
1080	0,0040	1020	0,0012
1100	0,0033	1025	0,0006
1120	0,0030	1030	0,0004
1140	0,0020	1035	0,0002
1160	0,0020	1040	0,0001
1180	0,0020	1045	0,0001
1200	0,0020	1050	0,0001

3 Messprotokoll

c) Lock-In in der Praxis

Starke Schwankungen bei offener Klappe der Diode. Schwankungen beruhigen sich, wenn die Klappe geschlossen ist.

Je höher die Zeitkonstante und je höher dB, desto genauer die Auflösung des Lock-Ins. Niedrigster Wert der mit Lock-In aufgelöst werden kann: $(255 \pm 5) \text{ nV}$

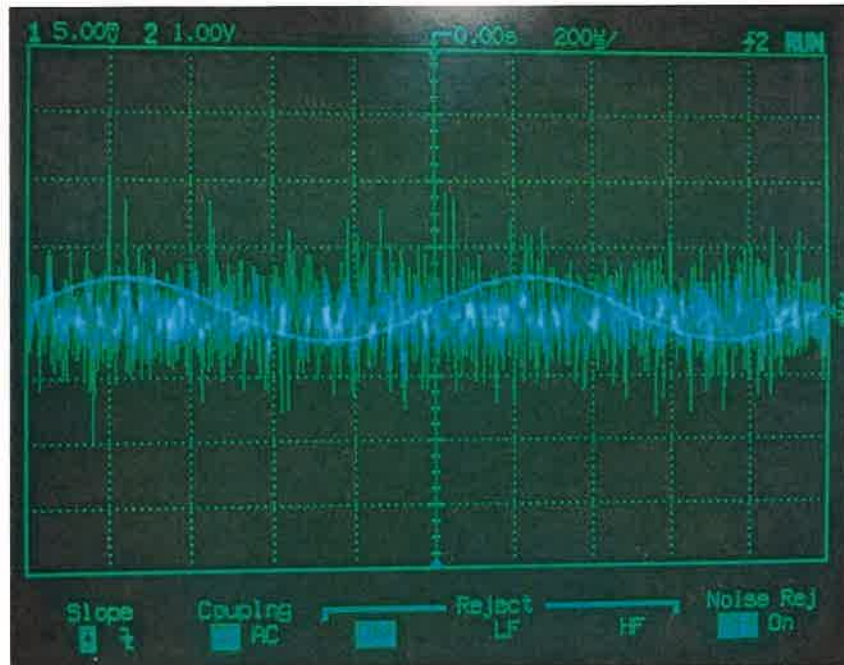


Abbildung 3.2: Signal des Oszilloskops



Abbildung 3.3: Einstellungen Lock-In-verstärker

Aufzeichnungen während Versuch

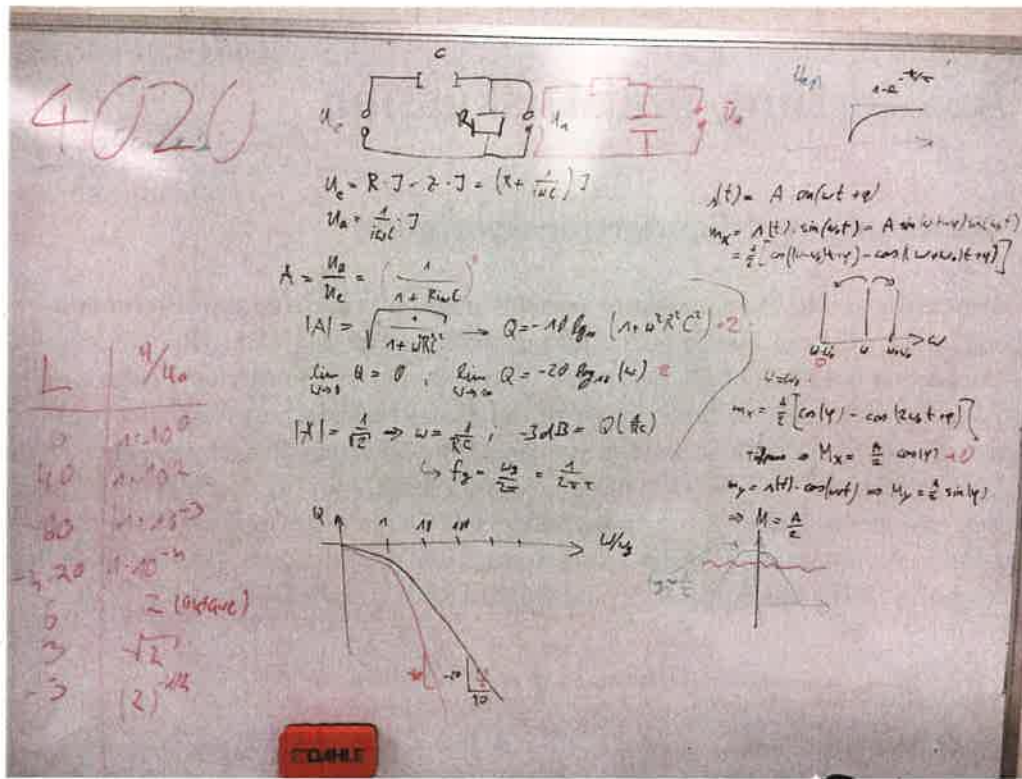


Abbildung 3.4: Aufzeichnungen

Bestimmung Uhrzeit mit Oszilloskop

Mit einem Kabel, welches aus dem Fenster um einen Baum gewickelt wurde und an das Oszilloskop angeschlossen ist, konnte auf dem Oszilloskop eine Art Morse-Signal empfangen werden. Dieses Signal nutzen Digitaluhren, um die Uhrzeit richtig zustellen.

Signal:

.....
 - - - - -

Decodierung:

Zum Decodieren benutzen wir die Vorlage des Betreuers und beginnen mit dem 21. Stelle des Signals und erhalten: 51min 19h 5.Day 2.Weekday 10.Month 21.Year

\Rightarrow Di 5.10.21 19:51

4 Auswertung und Diskussion

4.1 Mittelung und Fouriertransformation

a) Experimentelle Bestimmung der Fourierentwicklungskoeffizienten

Im Folgendem wird die Fourierentwicklungskoeffizienten der Sinus, Rechteck und Dreiecksschwingung experimentelle bestimmt. Dazu werden die einzelnen Peaks im Fourier-spektrum ermittelt, welche dann den Wert der Fourierentwicklungskoeffizienten für diese Frequenz darstellen. Beachtet werden nur ungerade Vielfache der eingestellten Frequenz. Dies folgt aus Kapitel 2.8 bei der nur ungerade Vielfache in der Reihenentwicklung von Rechteck und Dreiecksschwingung vorkommen. Die Daten der Amplitude A wurden dabei in deziBel aufgenommen. Für die Umrechnung der Amplitude in deziBel zu Volt wird die Gleichung (2.10) aus Kapitel 2.5 auf Spannung U umgewandelt und erhält:

$$L_U = 20 \log_{10} \left(\frac{U}{U_0} \right) \Leftrightarrow U = U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}} \quad (4.1)$$

Zu beachten ist noch, dass die Spannung U die gemessene Effektivspannung ist mit dem Faktor aus Kapitel 2.8 umrechnen für die Sinusschwingung, da die Fourierreihe der jeweiligen Schwingung rein aus Sinusschwingungen besteht. Die verwendeten Formeln sind dann:

$$U = U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}} \cdot \sqrt{2} \quad U_0 = ? \quad (4.2)$$

Die Auswertung ergibt dann Tabelle 4.1, in welcher man gut erkennen kann, dass die gemessenen Werte nicht weit von der Theorie abweichen. Die größte Abweichung weisen dabei die Werte bei einer Frequenz von 1000Hz auf. Dies kann aufgrund des höheren Spannungspegels L_U geschehen sein, da bei einem niedrigeren Spannungspegel bei höheren Frequenzen die Abweichung stetig abnimmt.

4.1 Mittelung und Fouriertransformation

Sinus			
k	f/kHz	A_{mess}/V	A_{Theo}/V
1	1	1.0024	1.0000

Rechteck			
k	f/kHz	A_{mess}/V	A_{Theo}/V
1	1	1.276204	1.273240
2	3	0.425216	0.424413
3	5	0.254976	0.254648
4	7	0.181976	0.181891
5	9	0.141379	0.141471
6	11	0.115513	0.115749
7	13	0.097574	0.097942
8	15	0.084397	0.084883
9	17	0.074300	0.074896
10	19	0.066309	0.067013
11	21	0.059820	0.060630
12	23	0.054445	0.055358
13	25	0.049915	0.050930
14	27	0.046045	0.047157
15	29	0.042696	0.043905
16	31	0.039764	0.041072
17	33	0.037185	0.038583
18	35	0.034885	0.036378
19	37	0.032824	0.034412
20	39	0.030967	0.032647
21	41	0.029284	0.031055
22	43	0.027747	0.029610
23	45	0.026338	0.028294
24	47	0.025044	0.027090
25	49	0.023854	0.025984
26	51	0.022747	0.024965
27	53	0.021718	0.024023
28	55	0.020760	0.023150
29	57	0.019863	0.022338
30	59	0.019024	0.021580
31	61	0.018230	0.020873
32	63	0.017489	0.020210
33	65	0.016786	0.019588
34	67	0.016126	0.019004
35	69	0.015501	0.018453

Dreieck			
k	f/kHz	A_{mess}/V	A_{Theo}/V
1	1	0.812606	0.810569
2	3	0.090246	0.090063
3	5	0.032489	0.032423
4	7	0.016573	0.016542
5	9	0.009979	0.010007
6	11	0.006700	0.006699
7	13	0.004805	0.004796
8	15	0.003604	0.003603
9	17	0.002806	0.002805
10	19	0.002247	0.002245
11	21	0.001853	0.001838
12	23	0.001530	0.001532
13	25	0.001298	0.001297
14	27	0.001116	0.001112
15	29	0.000963	0.000964
16	31	0.000846	0.000843
17	33	0.000737	0.000744
18	35	0.000654	0.000662
19	37	0.000591	0.000592
20	39	0.000521	0.000533
21	41	0.000480	0.000482
22	43	0.000433	0.000438
23	45	0.000395	0.000400
24	47	0.000362	0.000367
25	49	0.000335	0.000338
26	51	0.000312	0.000312
27	53	0.000280	0.000289
28	55	0.000264	0.000268
29	57	0.000255	0.000249
30	59	0.000237	0.000233
31	61	0.000218	0.000218
32	63	0.000205	0.000204
33	65	0.000194	0.000192
34	67	0.000181	0.000181
35	69	0.000170	0.000170

Tabelle 4.1: Vergleich Fourierentwicklungskoeffizienten in Theorie und Praxis

Plot, Residuen!
 $\hookrightarrow (A_{\text{mess}} - A_{\text{Theo}})$

4 Auswertung und Diskussion

b) Fourierspektrum Sinusschwingung

Dieser Teil behandelt das Fourierspektrum der Sinusschwingung bei 1V Amplitude.

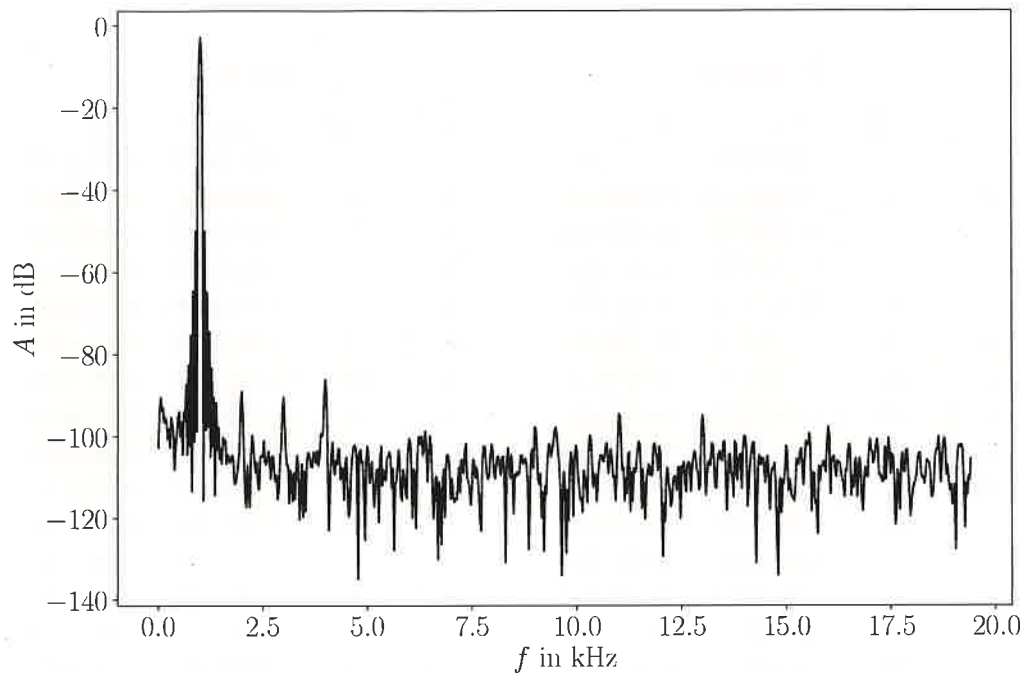


Abbildung 4.1: Fourierspektrum der Sinusschwingung

Wie in Abbildung 4.1 ist deutlich ein ausgeprägter Peak zu erkennen. Dieser Peak ist wie in Tabelle 4.1 die Effektivspannung der Sinusschwingung in deciBel. Nach Kapitel 2.8 sollte aber das Fourierspektrum nur einen Peak bei der eingestellten Frequenz besitzen, aber in Abbildung 4.1 ist neben dem Peak deutlich noch weitere Peaks zu erkennen. Diese Peaks werden durch die Umgebungseinflüsse aus Kapitel 2.2 und durch die Netzspannungsquelle selbst verursacht.

Wo sind diese Peaks?

Hauptpeak verbreitert

c) Einfluss Mittelung auf Rechteckschwingung

Nun wird der Einfluss der Anzahl der Mittelung N auf eine Rechteckschwingung mit einer Amplitude $U_0 = 1\text{V}$ mit einem Bandrauschen der Bandbreite $f_{\text{Band}} = 20\text{MHz}$ und einer AM Depth $d = 120\%$ betrachtet.

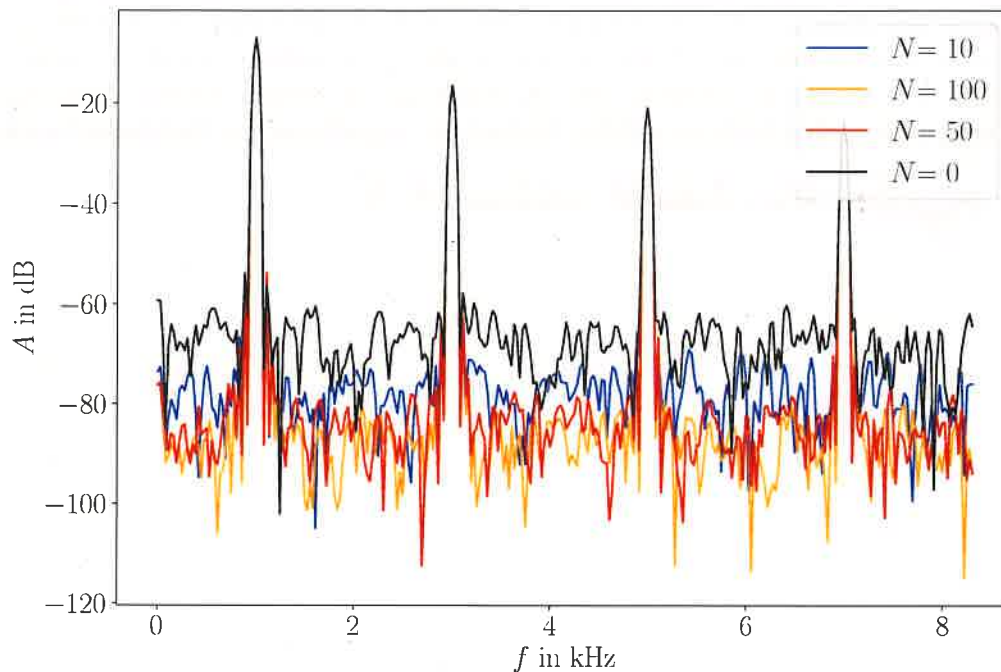



Abbildung 4.2: Einfluss der Mittelung auf Fourierspektrum einer Rechteckschwingung

In Abbildung 4.2 ist zu erkennen, dass sich mit der Zunahme der Anzahl der Mittelungen N die Ausprägung der Peaks zunimmt. Dies war zu erwarten, da schon wie in Kapitel 2.4.2 erklärt, bei der Mittelung das Signal des Rauschens nur um den Faktor \sqrt{N} zunimmt, während das Signal der Rechteckschwingung proportional zur Wiederholung anwächst.

Es war nach einem quantitativen Ergebnis gefragt !

→  *N oder log N oder ...*

4 Auswertung und Diskussion

d) Einfluss Signal/Rausch-Abstand auf zeitliche Signalform

#Vab

Als weiteres wird der Einfluss des Signal/Rausch-Abstands d auf die Signalform einer Rechteckschwingung mit einer Amplitude $U_0 = 1V$ und einer Bandbreite $f_{\text{Band}} = 20\text{MHz}$. In Abbildung 4.3 ist zuerst der Einfluss des Signal/Rausch-Abstands auf die komplette Rechteckschwingung dargestellt. Schon hier erkennt man, dass mit höherem Signal/Rausch-Abstand das „Ausschlagen“ der Amplitude des Rauschens zunimmt. Noch deutlich ist dies zu erkennen in Abbildung 4.4, die ein Ausschnitt aus dem oberen Umkehrpunkt der Rechteckschwingung ist. Die Änderung des Signal/Rausch-Abstands hat aber keinen generellen Einfluss auf den Verlauf der Signalform der Rechteckschwingung.

↳ Physik: Was bedeutet kleines d ?

4.1 Mittelung und Fouriertransformation

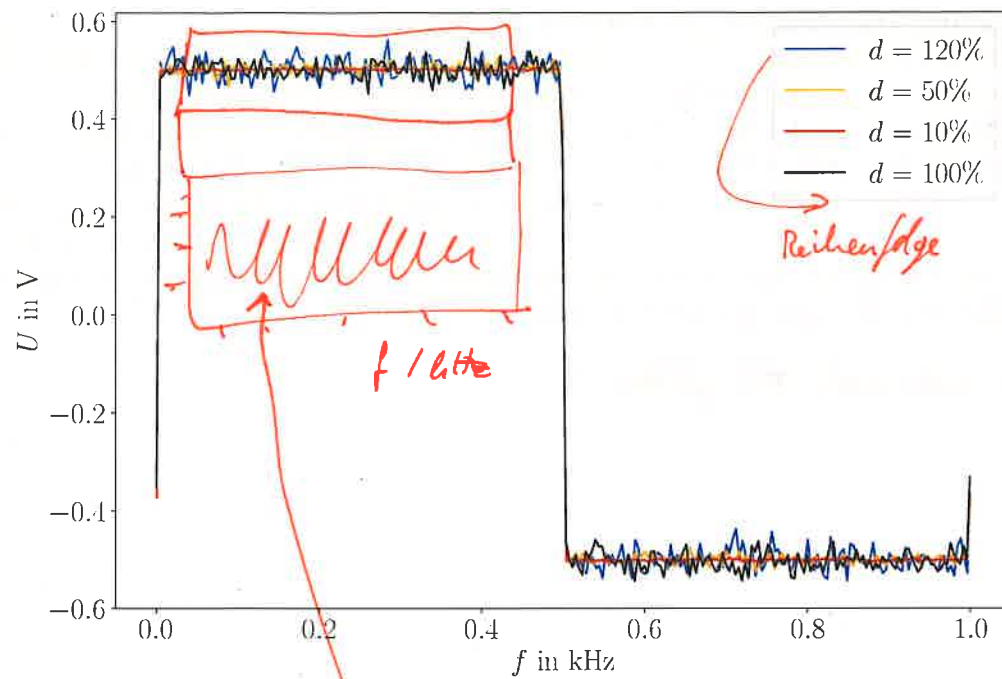


Abbildung 4.3: Einfluss Signal/Rausch-Abstand auf komplette Rechteckschwingung

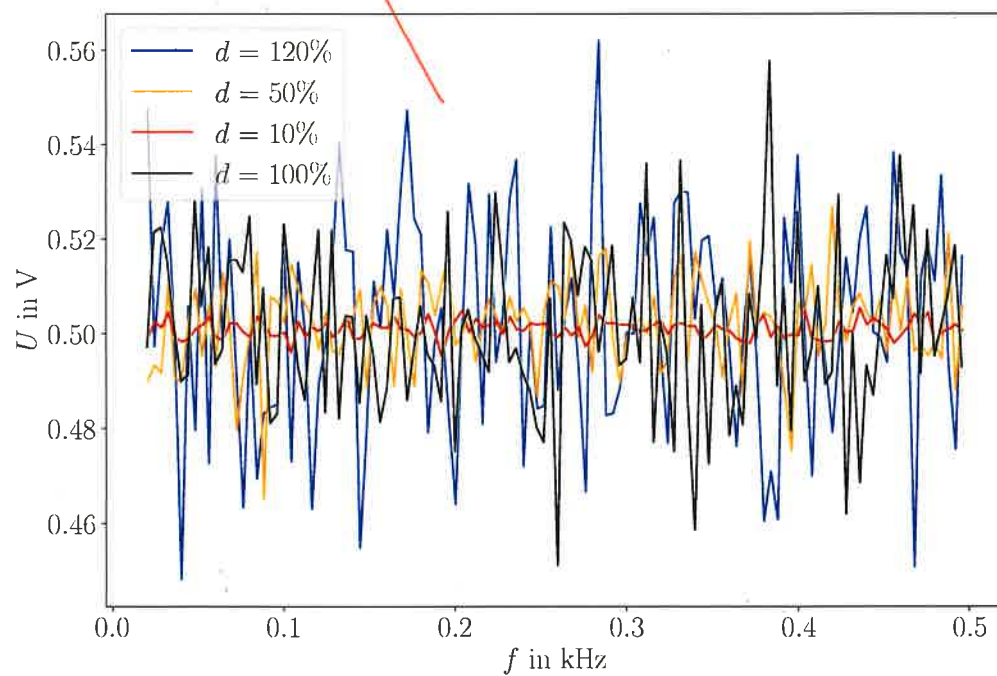


Abbildung 4.4: Einfluss Signal/Rausch-Abstand im Ausschnitt vom oberen Umkehrpunkt der Rechteckschwingung

4 Auswertung und Diskussion

e) Einfluss Bandbreite auf zeitliche Signalform

Zuletzt in diesem Kapitel wird der Einfluss der Bandbreite auf die zeitliche Signalform besprochen. Dabei wird wieder eine Rechteckschwingung mit einer Amplitude $U_0 = 1\text{V}$ und einem Signal/Rausch Abstand $d = 100\%$ verwendet. In Abbildung 4.5 wird erneut eine komplette Rechteckschwingung gezeigt. Darauf erkennt man, dass der Funktionsgenerator die Form des Rechtecksignals mit kleineren Bandbreiten f_{Band} nicht mehr erzeugen kann. Vor allem bei Frequenzen unter 100kHz . Aber auch eine Zunahme des Rauschens ist zu erkennen, wenn die Bandbreite kontinuierlich abnimmt. In Abbildung 4.6 kann man dies noch genauer betrachten.

Hier auch noch FT plotten

4.1 Mittelung und Fouriertransformation

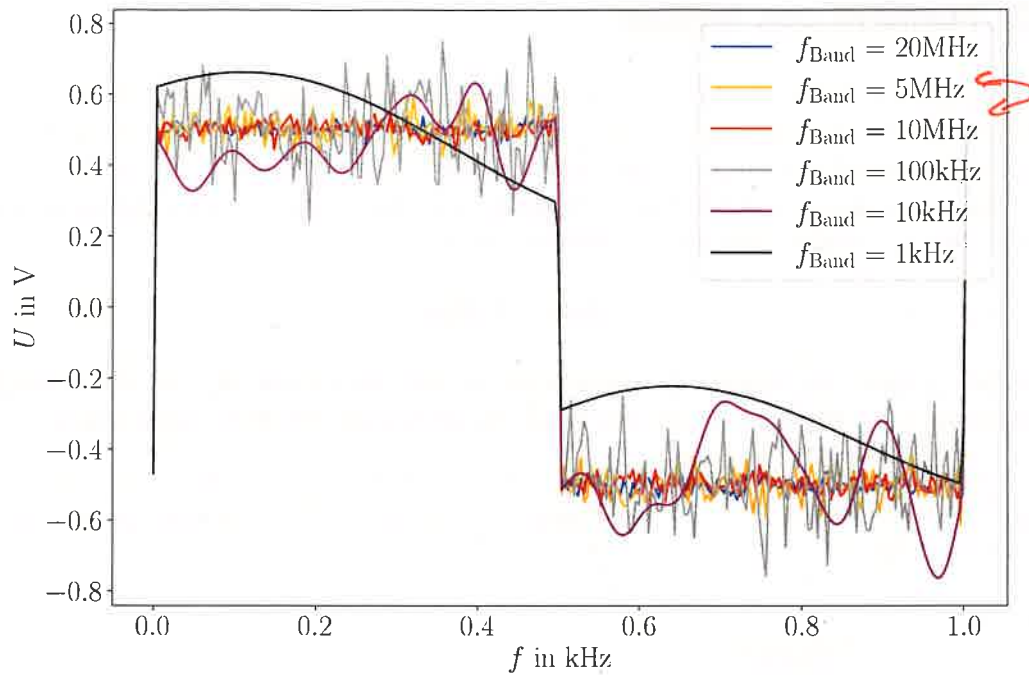


Abbildung 4.5: Einfluss Bandbreite auf komplette Rechteckschwingung

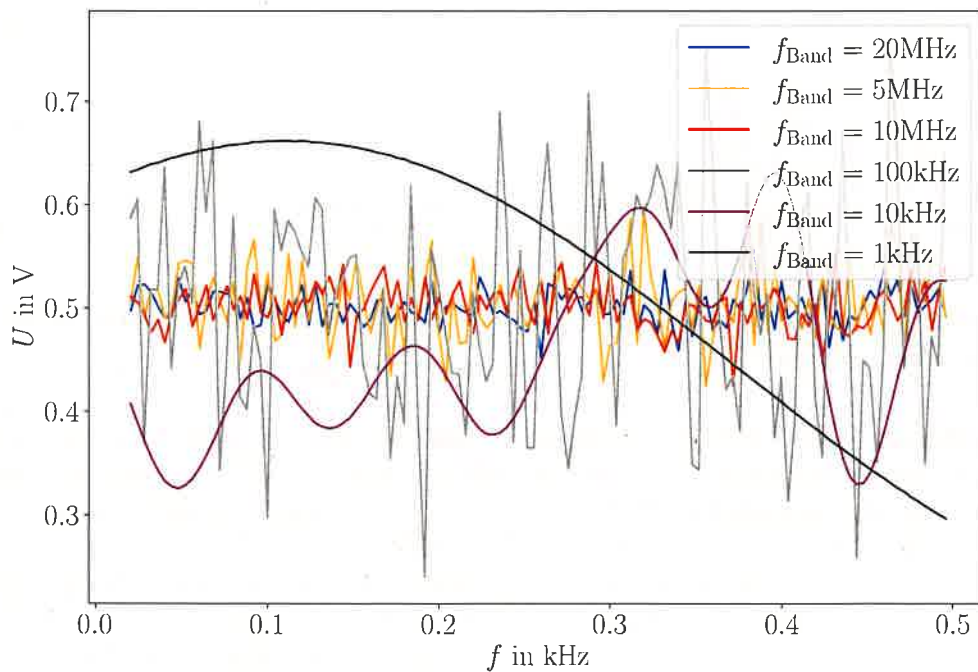


Abbildung 4.6: Einfluss Bandbreite im Ausschnitt vom oberen Umkehrpunkt der Rechteckschwingung

4.2 Theorem von Nyquist

Im Folgenden soll das Theorem von Nyquist genauer betrachtet werden. Dafür wird der Ausgang des Frequenzgenerator direkt mit dem Eingang des Messcomputers verbunden, parallel dazu wird der Ausgang des Generators mit dem Oszilloskop überprüft.

Das Theorem besagt das ein Signal, begrenzt mit f_{\max} , nur mit einer Abtastfrequenz von größer f_{crit} exakt rekonstruiert werden kann.

$$f_{\text{crit}} = 2 \cdot f_{\max} \quad (4.3)$$

Um dies genauer zu untersuchen wurde zuerst die Abtastrate für ein unverraushtes Sinussignal ($f = 20\text{kHz}$) variiert und gegen die gemessene Frequenz aufgetragen.

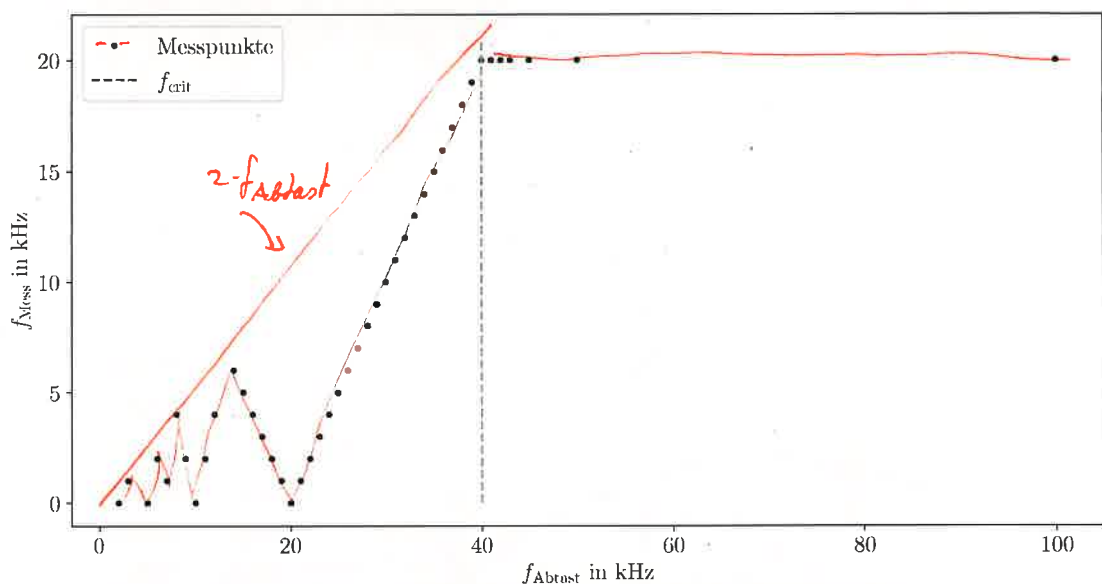


Abbildung 4.7: Variation der Abtastrate gegen die gemessene Frequenz, bei konstanter Generatorfrequenz. *von 20 kHz*

In Abbildung 4.7 ist deutlich zu erkennen, dass für $f_s > f_{\text{crit}}$ die Frequenz korrekt gemessen wird. Bei unterschreiten der kritischen Frequenz fällt die gemessene Frequenz jedoch unter den eigentlichen Wert, bis $f = f_s$. Wenn die Abtastfrequenz gleich der Generatorfrequenz ist, wird eine Frequenz von 0 gemessen, also ein konstantes Signal. Das ist klar, weil der Detektor immer den gleichen Punkt der Signalabfolge erwischt und dies somit als konstantes Signal wahrnimmt. Dies tritt nicht nur für $f = f_s$ auf, sondern immer dann wenn $f_s = n \cdot f$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$. Aus diesem Grund entsteht vor der kritischen Frequenz ein Sägezahn ähnliches Muster.

4.2 Theorem von Nyquist

In der zweiten Messreihe wurde nun die Abtastrate ($f_s = 20\text{kHz}$) konstant gehalten und die Frequenz des Generators wurde variiert, welche wiederum gegen die gemessene Frequenz aufgetragen wurde. In Abbildung 4.8 ist wieder deutlich zu sehen, dass für

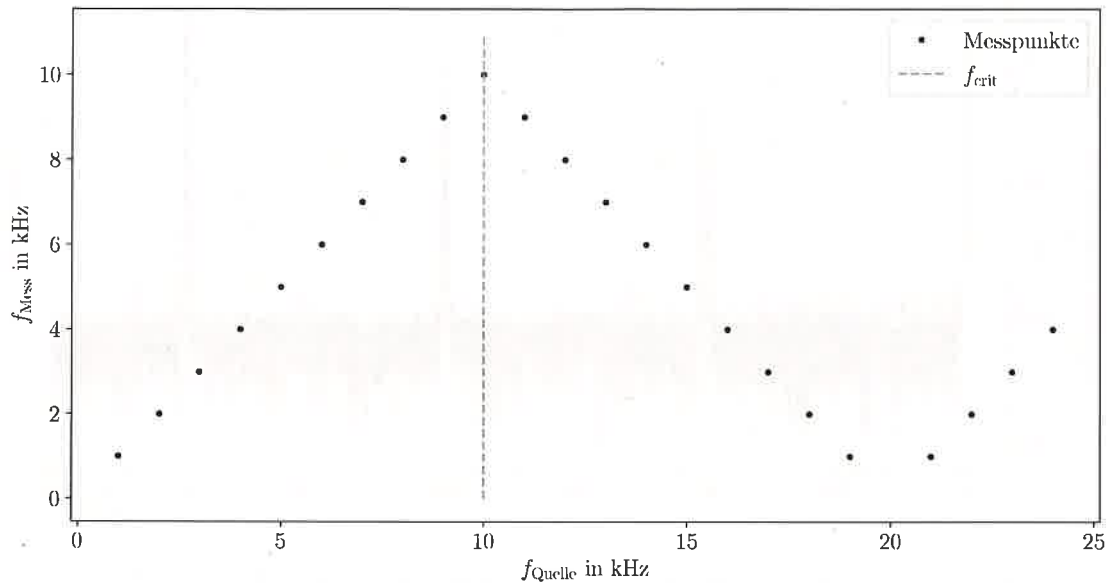


Abbildung 4.8: Variation der Generatorfrequenz gegen die gemessene Frequenz, bei konstanter Abtastfrequenz.

2
< $f_s > f_{\text{crit}}$ die Frequenz richtig gemessen wird. Ist dies jedoch nicht mehr der Fall, so tritt analog zu oben wieder ein Sägezahnmuster auf.

$$f_{\text{max}} = \frac{1}{2} f_{\text{crit}}$$

4 Auswertung und Diskussion

Des Weiteren wurde das Fourierspektrum eines Dreieckssignal ($f = 3\text{kHz}$), mit einer Abtastfrequenz von $f_s = 7\text{kHz}$, aufgenommen.

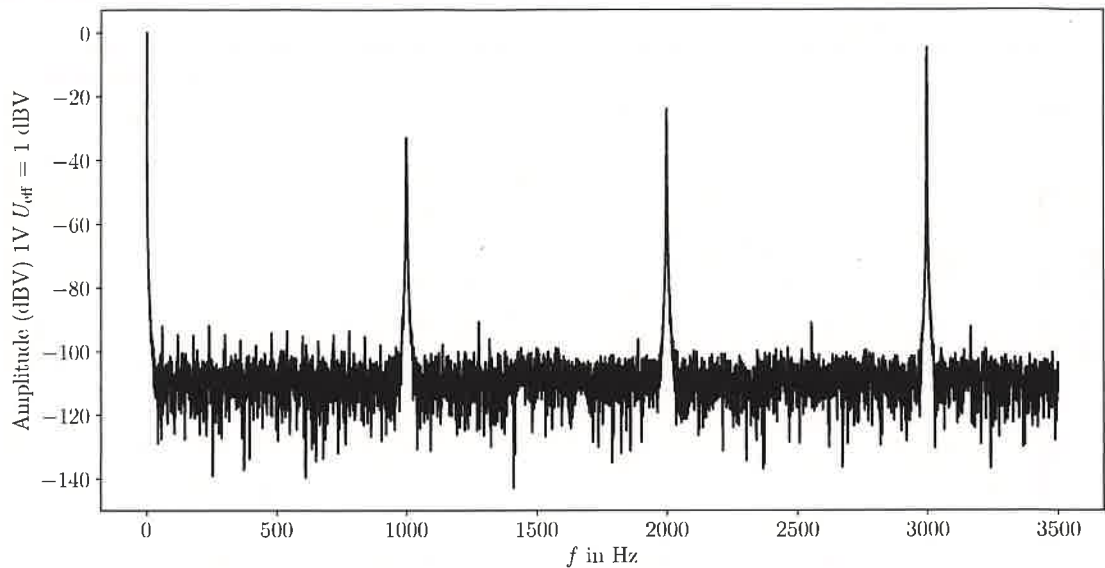


Abbildung 4.9: Fourierspektrum eines Dreieckssignal ($f = 3\text{kHz}$), $f_s = 7\text{kHz}$.

In Abbildung 4.9 ist der Effekt des Aliasing zu erkennen, das heißt der Detektor kann nicht unterscheiden, welche die richtig gemessene Frequenz ist und was die Aliase (falsche zugeordnete Messwerte) der eigentlichen Frequenz sind. Da ~~wie~~ die Generatorfrequenz kennen, wissen ~~wir~~ ~~das~~ die richtige Frequenz $f = 3\text{kHz}$ ist und die Peaks bei $f_1 = 1\text{kHz}$ und $f_2 = 2\text{kHz}$ die Aliase dieser sind. Hat man dieses wissen jedoch nicht, kann dies jedoch zu nicht unerheblichen Messfehlern führen. Um Aliasing zu vermeiden, sollte eine höhere Abtastfrequenz verwendet werden.

Woher kommen die Peaks bei 0 Hz, 1 kHz, 2 kHz?
„Unklappprozesse“

4.3 Signalfilterung

In diesem Abschnitt soll die Signalfilterung genauer betrachtet werden. Dafür wird wieder der Ausgang des Generators mit dem Eingang des Analog-Digital-Wandlers verbunden. Parallel dazu wird der Ausgang des Generators mit dem Oszilloskop überwacht.

4.3.1 Verschiedene Tiefpassfilterkurven

Zuerst sollen die Filterkurven verschiedener Tiefpässe dargestellt werden. Hierzu wird am Generator ein Sinussignal ($f = 100\text{Hz}$) mit einer Rauschbandweite von 20MHz eingestellt.

breite

Für einen groben Überblick und um Unterschiede besser erkennen zu können werden alle Filterkurven in einem gemeinsamen Diagramm dargestellt (Abbildung 4.10).

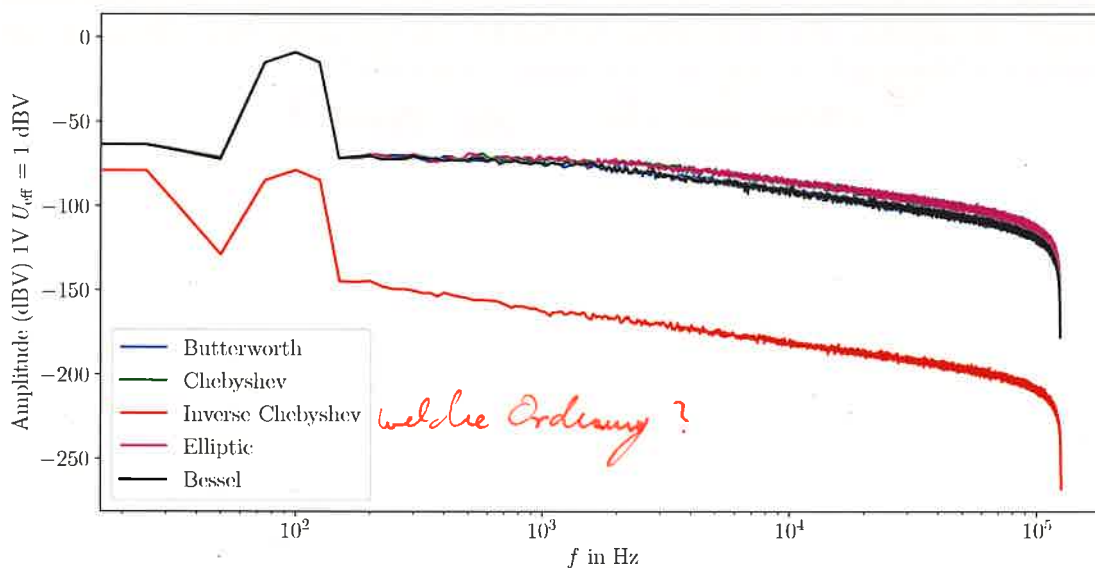


Abbildung 4.10: Fourierspektrum verschiedene Tiefpassfilter

In Abbildung 4.10 fällt auf, dass sich Elliptic- und Chebyshevfilter fast deckungsgleich überlagern. Auch Butterworth- und Besselfilter sind auch fast deckungsgleich mit den oben genannten lediglich für Frequenzen zwischen ca. $1 \cdot 10^3\text{Hz}$ und $1 \cdot 10^5\text{Hz}$ divergieren sie geringfügig. Am stärksten weicht der inverse Chebyshevfilter von den anderen ab. Der Verlauf ist sehr ähnlich, nahezu parallel, jedoch ist sie Kurve nach unten verschoben.

oder Plots mit verschiedenen Parametern?

4 Auswertung und Diskussion

Außerdem soll für jede Filterkurve der 3dB-Punkt und die Steigung, für große Frequenzen bestimmt werden. Dies wurde mithilfe des Diagramms ermittelt.

Filter	3dB-Punkt in Hz	Steigung in dB/Oktave	Steigung in dB/Dekade
Butterworth	1994 ± 50	4 ± 2	16 ± 4
Chebyshev	1975 ± 50	3 ± 3	13 ± 4
inverser Chebyshev	1499 ± 50	4 ± 2	19 ± 3
Elliptic	1499 ± 50	3 ± 4	15 ± 6
Bessel	1801 ± 50	4 ± 2	17 ± 4

Tabelle 4.2: Werte des 3dB-Punktes und der Steigung für verschiedene Filter

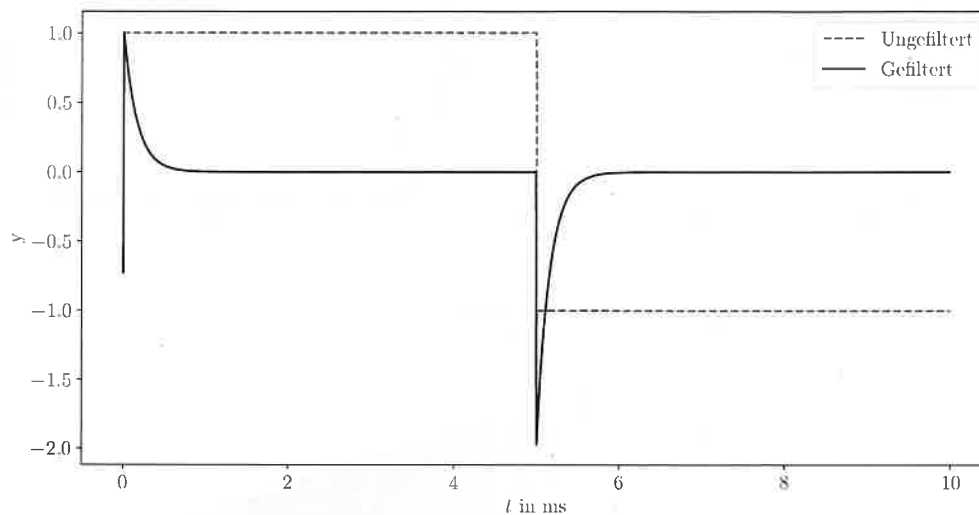
Aus dem Vorbereitungsgespräch, mit dem Betreuer, ist bekannt, dass für einen Filter erster Ordnung 6dB/Oktave (oder 20dB/Dekade) erwartet werden. Trotz einiger Abweichungen stimmen die Größenordnungen, der Werte aus Tabelle 4.2 gut überein. Die großen Fehler sind der graphischen Werteermittlung geschuldet, für eine grobe Beurteilung, ob die vorliegende Messung Sinn ergibt, war dies jedoch ausreichend.

→ warum kein Fit in dem Bereich?

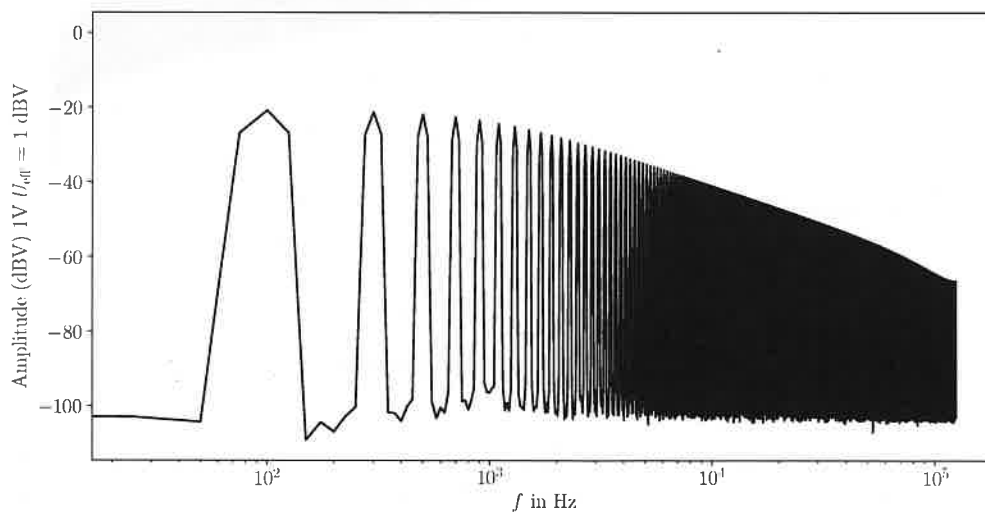
4.3.2 Filterwirkung auf Rechtecksignal

In diesem Abschnitt soll die Wirkung verschiedener Filter auf ein Rechtecksignal ($f = 100\text{Hz}$) untersucht werden.

Hierfür wurde der Butterworthfilter und der inverse Chebyshevfilter ausgewählt, da dieser in Abschnitt 4.3.1 die größte Abweichung von den anderen zeigte.



(a) Signal



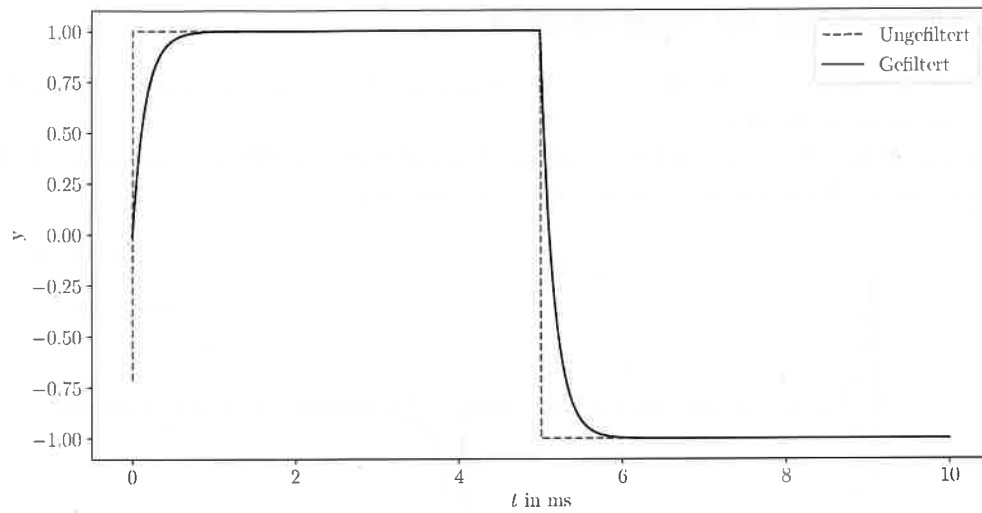
(b) Fourierspektrum

Abbildung 4.11: Butterworthfilter als Hochpass

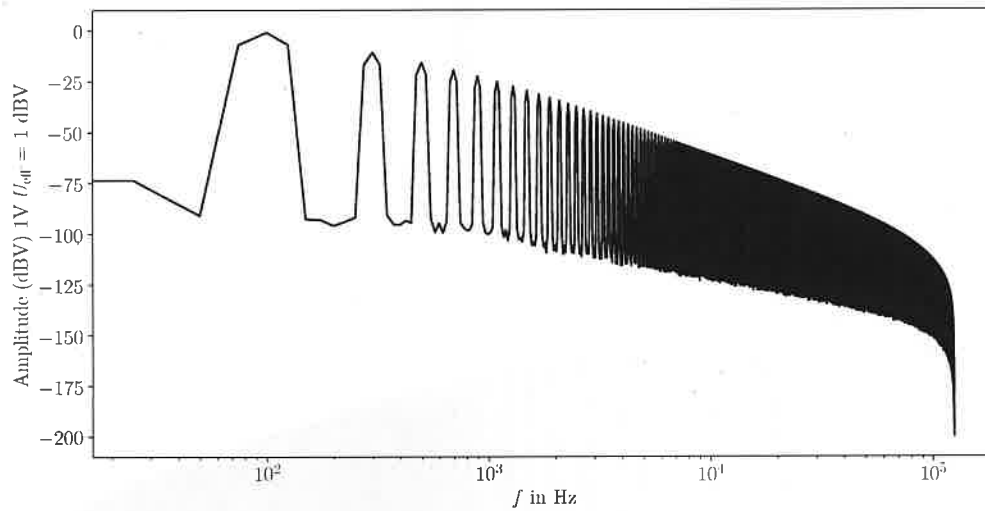
Aus Abbildung 4.11 geht klar die differenzierende Eigenschaft des Hochpasses hervor. Außerdem knickt das Fourierspektrum für große Frequenzen nicht ab.

↳ doch ?

4 Auswertung und Diskussion



(a) Signal



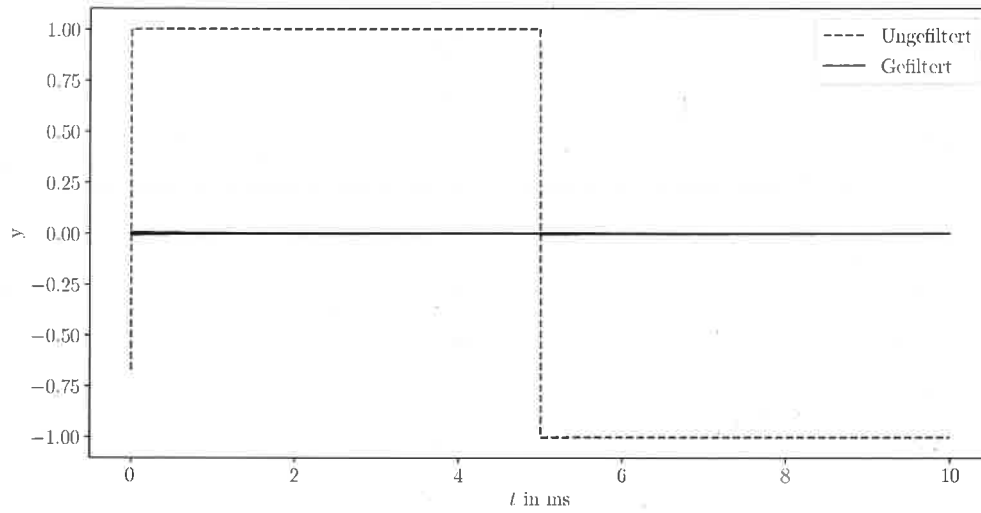
(b) Fourierspektrum

Abbildung 4.12: Butterworthfilter als Tiefpass

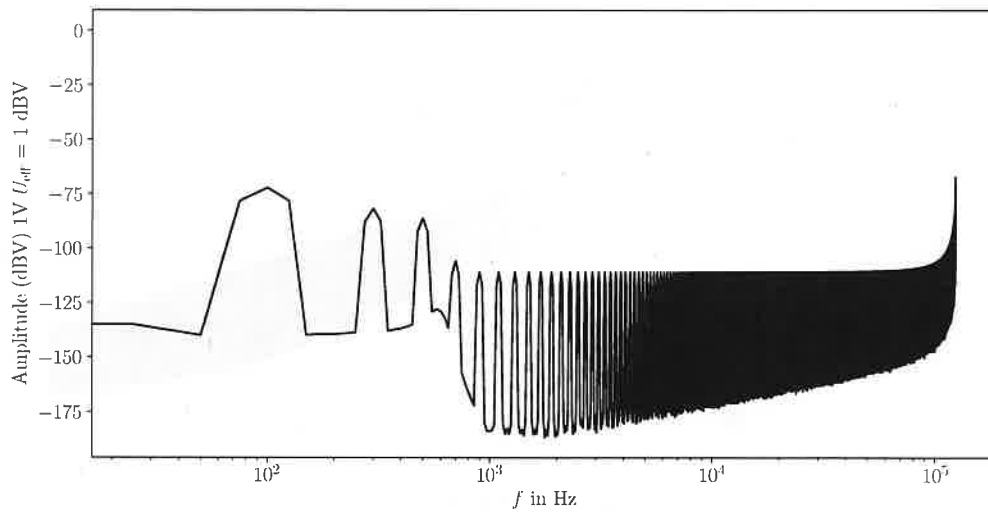
Im Gegensatz zum Hochpass wirkt der Butterworthfilter Tiefpass als Integriere und das Fourierspektrum knickt für große Frequenzen ab, dies ist in Abbildung 4.12 zu erkennen.

4.3 Signalfilterung

Der inverse Chebyshevfilter zeigt vor allem im Signal ein ganz anderes Bild. In Abbildung 4.13 ist beim Signal in der ersten Millisekunde eine gewisse Welligkeit zu erkennen. Im Bezug auf das Fourierspektrum fällt auf, dass dieser Filter, im Vergleich zum Butterworthhochpass, für größere Frequenzen schneller durchlässiger wird.



(a) Signal

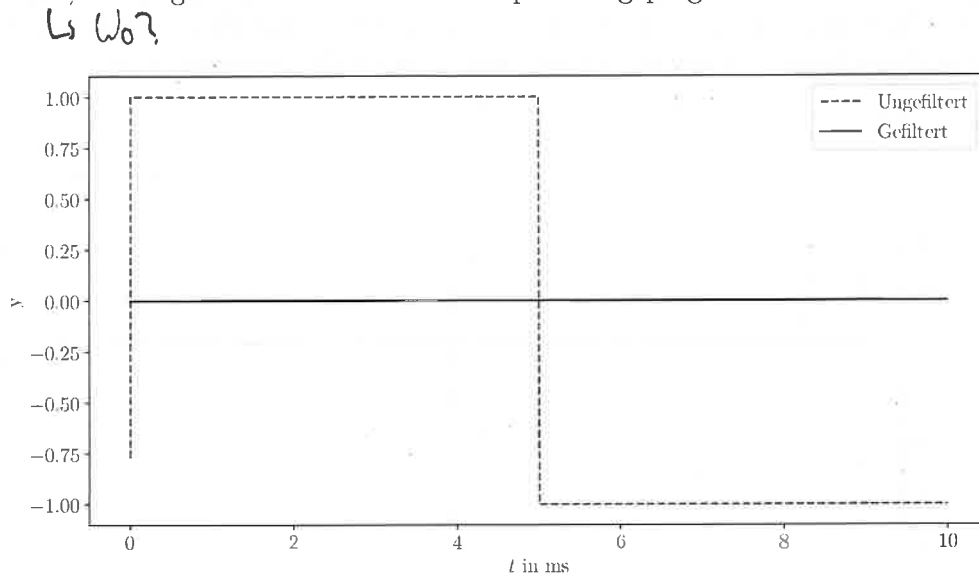


(b) Fourierspektrum

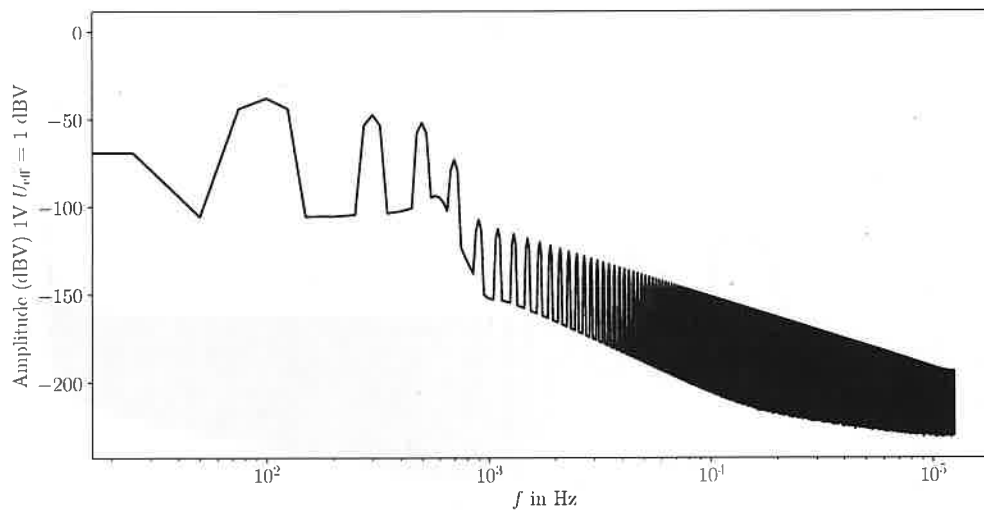
Abbildung 4.13: Inverser Chebyshevfilter als Hochpass

4 Auswertung und Diskussion

In Abbildung 4.14 fällt die konstante Nulllinie beim gefilterten Signal auf, auch ist das abknicken, im Vergleich zum Butterworthtiefpass ausgeprägter.



(a) Signal



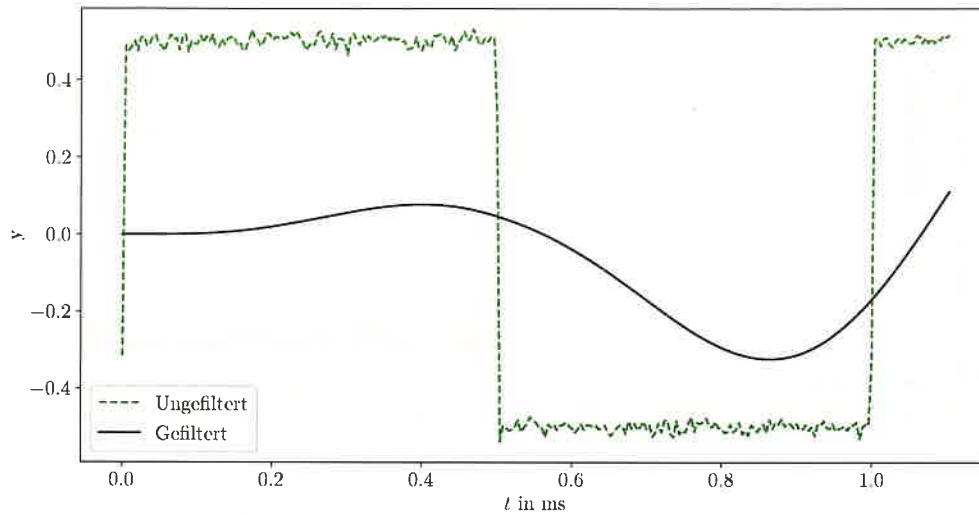
(b) Fourierspektrum

Abbildung 4.14: Inverser Chebyshevfilter als Tiefpass

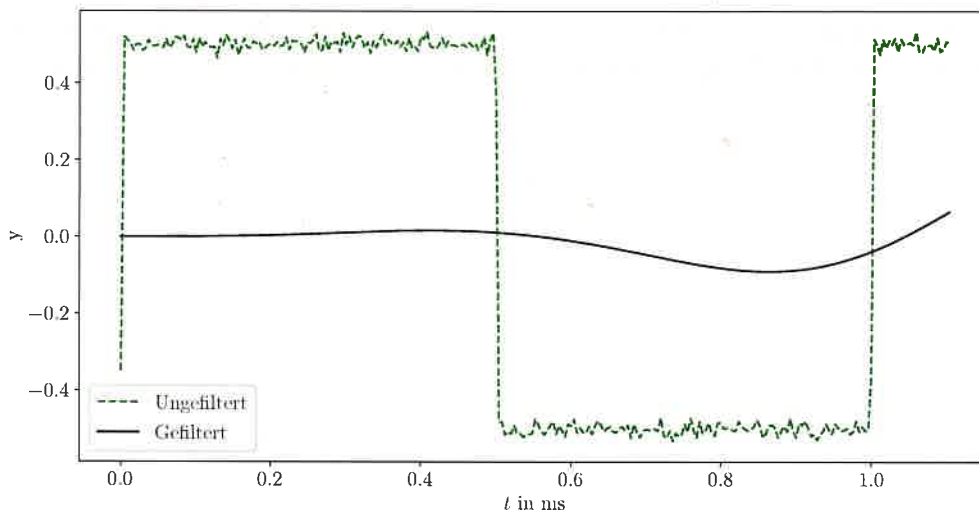
Da die anderen Filter ähnliche Eigenschaften wie der Butterworthfilter aufweisen wurde auf die Abbildung deren Signale und Fourierspektren bewusst verzichtet.

4.3.3 Bandpass 4. Ordnung

In diesem Abschnitt soll die geeignete Einstellung eines Bandpasses (4. Ordnung) gefunden werden, der Rauschen, beim gleichzeitigen Erhalt der zeitlichen Form der Signalfunktion, abgemildert werden.



(a) Bandpass mit Durchlassbereich von 500 bis 1500Hz



(b) Bandpass mit Durchlassbereich von 700 bis 1300Hz

Abbildung 4.15: Signalfunktion verschiedener Bandpässe

Die in Abbildung 4.15 gezeigten Signalfunktionen weichen stark von einer Rechteckfunktion ab und sind daher ungeeignet.

Durch weiteres ausprobieren wurden bessere Einstellungen gefunden, welche die in Abbildung 4.16 dargestellte Signalfunktion ergeben. Hier ist noch deutlich ein Rechtecksignal

4 Auswertung und Diskussion

zu erkennen.

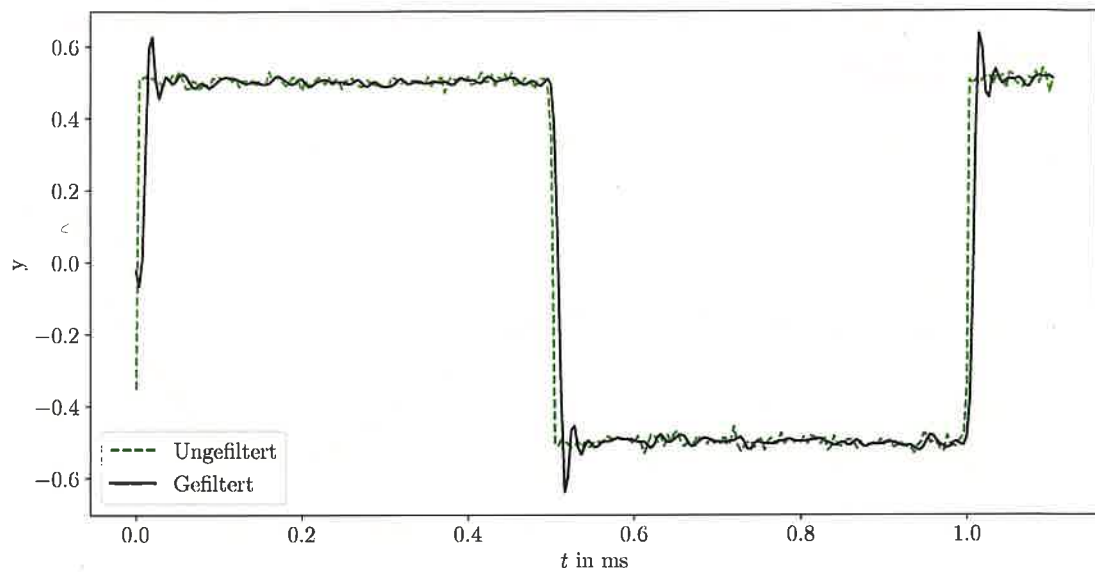


Abbildung 4.16: Bandpass mit Durchlassbereich von 10mHz bis 55kHz

Eine gute Rauschunterdrückung verursacht also eine große Signalverzerrung. Es ist also darauf zu achten, dass dieses Verhältnis, abhängig vom Fokus der Messung, klug gewählt wird. *→ warum?*

4.3.4 Einfluss der Ordnung

Nun Stellen wir uns die Frage, welchen Einfluss die Ordnung eines Filters auf das Ausgangssignal hat.

schon in Vorlesung } Zuerst soll der Begriff Ordnung erklärt werden. Die Ordnung besagt, wie oft der gleiche Filter hintereinander geschaltet wird. Bei einem Filter der Ordnung zwei durchläuft das Signal also zweimal hintereinander einen baugleichen Filter.

Um den Einfluss der Ordnung genauer betrachten zu können werden Fourierspektren von Filtern verschiedener Ordnung miteinander verglichen.

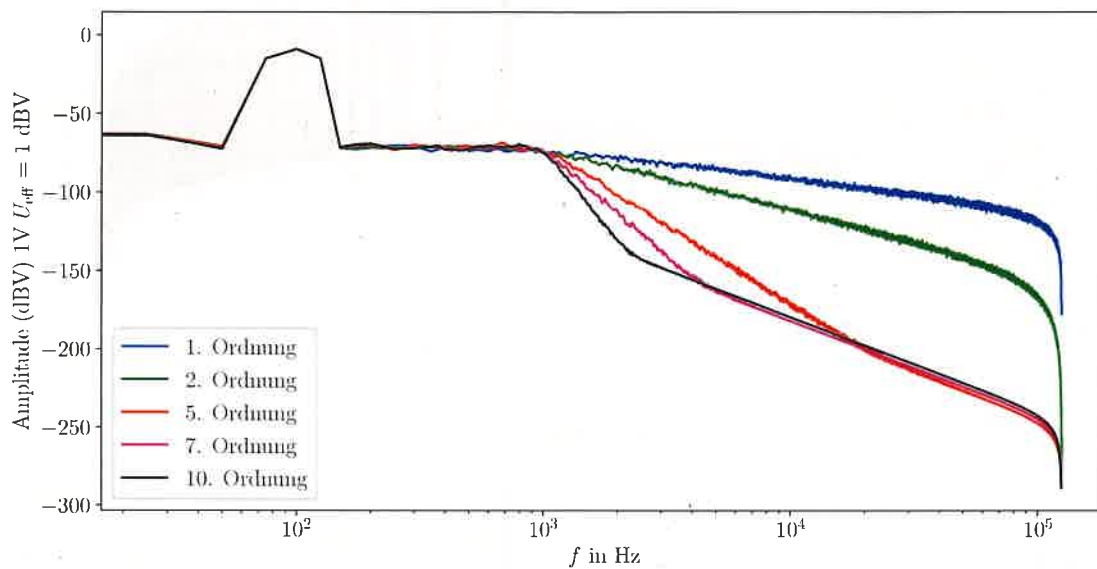
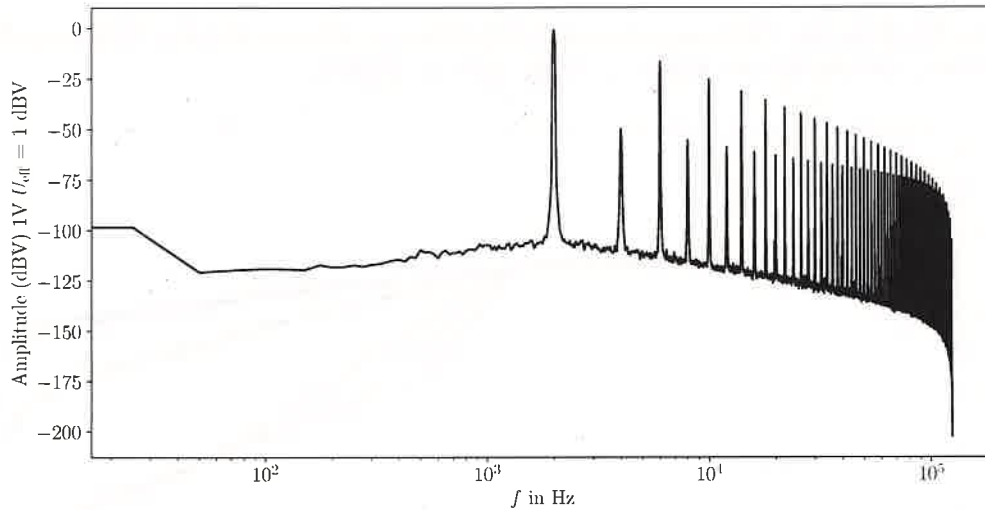


Abbildung 4.17: Butterworthfilter bei verschiedenen Ordnungen

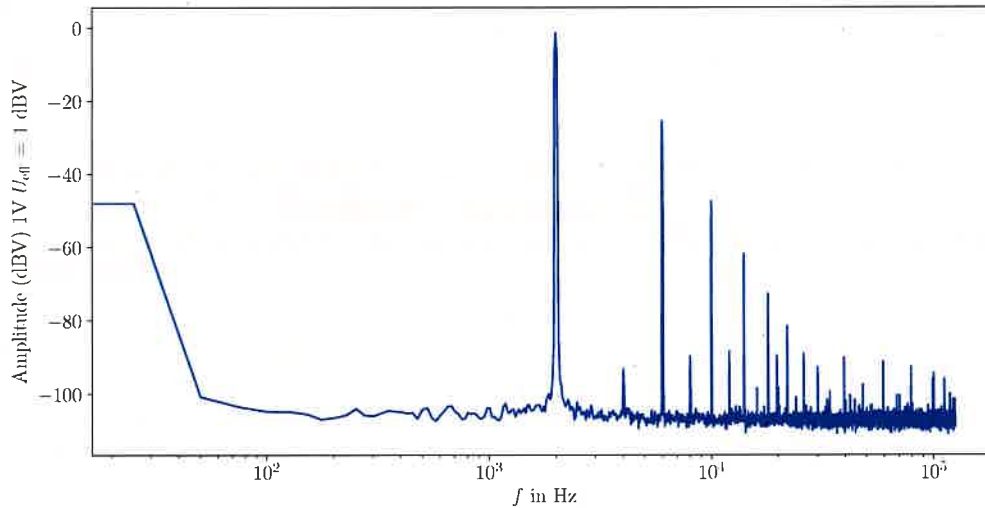
↳ auch noch andere?
Aus Abbildung 4.17 ist zu erkennen, dass mit höherer Ordnung die Funktion steiler Abfällt.

4.3.5 Vergleich: Analoge und digitale Filterung

Um die analoge mit der digitalen Filterung zu Vergleichen wird zuerst eine Messung mit dem gewohnten Messaufbau für den digitalen Filter aufgenommen. Danach wird der digitale Filter über die Messsoftware deaktiviert und zwischen den Generator und Detektor wird ein analoger Filter (Modell: Ithaco 4302) geschaltet, der analog zum digitalen Filter eingestellt wurde.



(a) digitale Filterung



(b) analoge Filterung

Abbildung 4.18: Vergleich von analoger und digitaler Filterung

1 Plot !
(eigentlich Sinus mit starker Rauschen)

4.3 Signalfilterung

In Abbildung 4.18 sind die Fourierspektren nach analoger und digitaler Filterung aufgetragen. Vergleicht man beides, so fällt auf, dass bei der digitalen Filterung auch der Hintergrund die Charakteristik des Bandpasses zeigt, wohingegen bei der analogen Filterung scheinbar nur die Nebenmaxima betroffen sind.

Eine mögliche Erklärung wäre, dass der Hintergrund nach dem analogen Filter einkoppelt oder dass diese Eigenschaft eine Eigenschaft des analogen Filters ist.

Bzw. Auflösung der Filter ab -100 dB abnimmt.

4.3.6 Vergleich Filterung und Mittelung

Wenn man Filterung und Mittelung gegenüberstellt, so ist der größte Unterschied wohl das beim Filtern aktiv bestimmte Frequenzen unterdrückt werden, je nach Einstellung bzw. Dimensionierung des Filters. Dies kann dabei helfen, dass das Messsignal von Störungen wie dem 50Hz Brummen bereinigt werden kann.

Mitteln hingegen ist besonders geeignet um die Messung von bspw. weißes Rauschen zu bereinigen da dies, gemittelt über die Zeit, null ergibt.

4.4 Lock-In Verstärker

a) Lock-In Verstärker als Filter

Im folgenden Teil wollen wir die den Lock-In Verstärker als Filter verwenden und die Ausgangsmesswerte der Sinus, Rechteck und Dreieckschwingung interpretieren.

Die Messungen haben folgende Tabelle ergeben:

f/kHz	1	3	5	7	9	11	13
$U_{\text{eff,Sinus}}/\text{V}$	0,7072	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$U_{\text{eff,Rechteck}}/\text{V}$	0,9003	0.3000	0.1800	0.1285	0.1000	0.0817	0.0692
$U_{\text{eff,Dreieck}}/\text{V}$	0,5733	0.0636	0.0229	0.0117	0.0070	0.0047	0.0034

Tabelle 4.3: Messung Lock-In Verstärker als Filter bei unterschiedlichen Signalen

dt! In der Tabelle 4.3 ist schon angedeutet, dass sich bei den gemessenen Spannungswerte um die Effektivspannungswerte der jeweiligen Schwingung handelt. Wie schon in Kapitel 4.1a) kann man die Effektivspannungswerte in die Werte der Fourierentwicklungskoeffizienten umrechnen, indem man die Messwerte mit dem Faktor $\sqrt{2}$ multipliziert. Zum Vergleich mit der Theorie wird zugleich die errechneten Werte aus Tabelle 4.1 verwendet. Damit erhält man:

Frequenz f/kHz	Sinus		Rechteck		Dreieck	
	U_{Mess}/V	U_{Theo}/V	U_{Mess}/V	U_{Theo}/V	U_{Mess}/V	U_{Theo}/V
1	1.0001	1.0000	1.2732	1.2732	0.8107	0.8106
3	0.0000	0.0000	0.4243	0.4244	0.0899	0.0900
5	0.0000	0.0000	0.2546	0.2546	0.0324	0.0324
7	0.0000	0.0000	0.1817	0.1819	0.0165	0.0165
9	0.0000	0.0000	0.1414	0.1415	0.0099	0.0100
11	0.0000	0.0000	0.1155	0.1157	0.0066	0.0067
13	0.0000	0.0000	0.0979	0.0979	0.0048	0.0048

Tabelle 4.4: Vergleich Theorie und Praxis bei der Messung mit Lock-In Verstärker

In Tabelle 4.4 sieht man ganz deutlich wie präzise die Messung mit einem Lock-In Verstärkers ist. In der Berechnung hat man dabei bewusst auf die Fehlerrechnung verzichtet, da diese Fehler nur in der Größenordnung von $\pm 0,0001\text{V}$ liegt. Im Vergleich zu Tabelle 4.1 hat der Lock-In Verstärker aber eine deutlich höhere Präzession der Messung, da bei der Messung vor allem bei Frequenzen von 1kHz eine Abweichung von ungefähr 0,002V zu verzeichnen war.

woher?

Plot mit Werten aus 4.1 + hier?

b) Bandbreite des Lock-In Verstärkers

i. A. ist τ unabhängig von Ordnung

Als Nächstes wird die Zeitkonstante und die damit verbundene Ordnung des Filters des Lock-In Verstärkers bestimmt. Dafür wurde an dem Lock-In Verstärker eine Sinusschwingung mit einer Frequenz von 1kHz und eine Amplitude von 100mV angelegt. Am Lock-In Verstärker wurde die Flankensteilheit Δ des eingebauten Tiefpassfilters von 6dB auf 18dB verändert und eine Zeitkonstante τ von 30ms eingestellt. Um die Zeitkonstante und Ordnung zu bestimmen wird eine Kurve durch die aufgenommene Messreihe gefittet. Die Form der Kurve wurde ~~uns~~ im Praktikum zur Verfügung gestellt worden und ist speziell für den Lock-In Verstärker SR830 DSP. Die Kurve hat dann die Gleichung:

$$A_{\tau,n}(f) = \left[1 + (2\pi\tau(f - f_0))^2 \right]^{-\frac{n}{2}} \quad (4.4)$$

Diese Gleichung beschreibt hierbei die Filterantwort des Lock-In Verstärkers, wobei n die Ordnung, τ die Zeitkonstante des Filters und A die normierte Amplitude ist. Die Frequenz f_0 ist die eingestellte Frequenz der Sinusschwingung und liegt bei 1kHz. Die Normierung erfolgt über den maximalen Wert der Effektivspannung, welcher bei den Frequenz f_0 liegt. Durch die Normierung muss die Umwandlung von Effektivspannung in tatsächliche Spannung nicht berücksichtigt werden. Es wurde wieder auf eine Fehlerrechnung verzichtet, da die Fehler zu klein sind. Der Fit liefert dann folgende Parameter:

↳ Fehler der Fitwerte?

Δ/dB	τ/ms	n
6	27.35	1.06
18	30.16	3.00

Tabelle 4.5: Ergebnis gefittete Parameter für τ und n

In Abbildung 4.19 und 4.20 sind jeweils die Fit für die jeweilige Messreihe dargestellt. Beim Vergleich der gefitteten Werte der Zeitkonstante τ mit dem tatsächlichen eingestellten Wert von 30ms zeigt, dass die Messung des Lock-In Verstärkers eine genaue Bestimmung der Zeitkonstante τ zulässt. Ein guter Indikator ist hierbei die Ordnung n , da die genau Zeitkonstante τ dann erzielt wurden als n ganzzahlig war.

Auch ist zu erkennen, dass durch eine Verdreifachung der Flankensteilheit Δ auch die Ordnung n des Filters sich verdreifacht hat. Gut zu erkennen ist dies auch in Abbildung 4.21, in der die gefittete Kurve für $\Delta = 18\text{dB}$ viel schmaler ist als die gefittete Kurve für $\Delta = 6\text{dB}$.

Ver

4 Auswertung und Diskussion

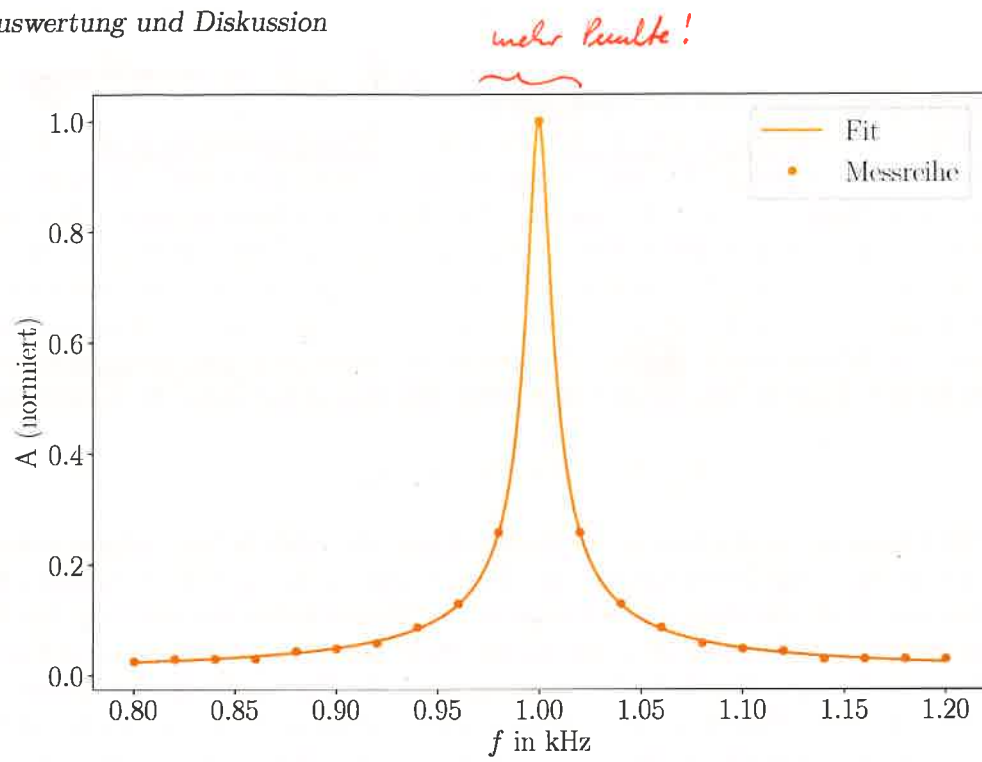


Abbildung 4.19: Fit für die Messung mit $\Delta=6\text{dB}$

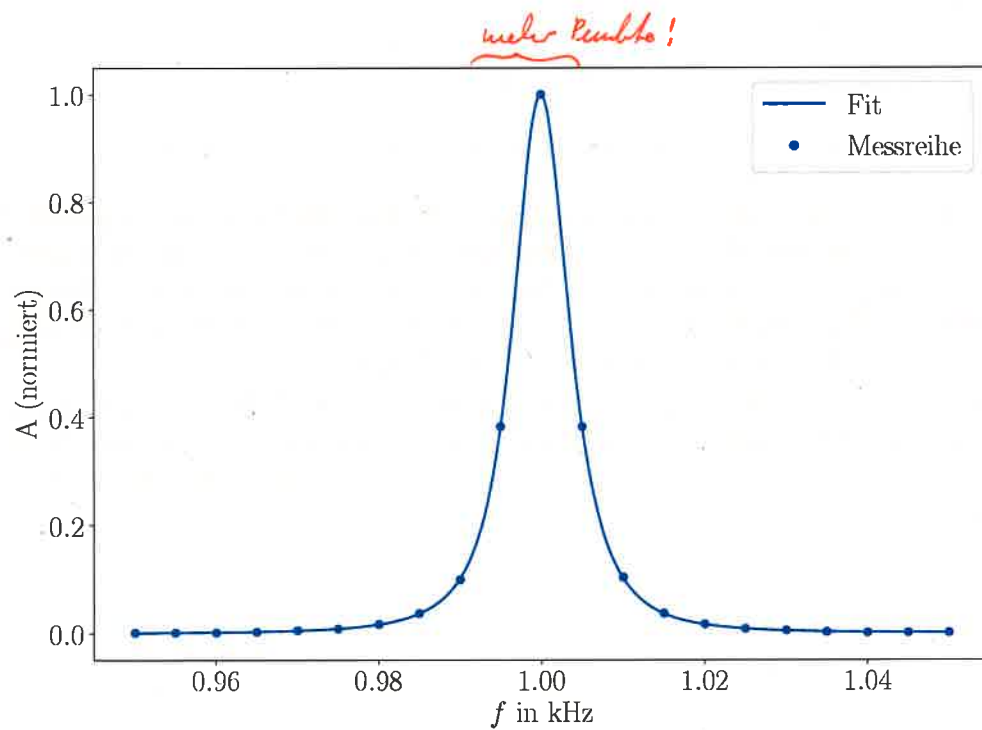


Abbildung 4.20: Fit für die Messung mit $\Delta=18\text{dB}$

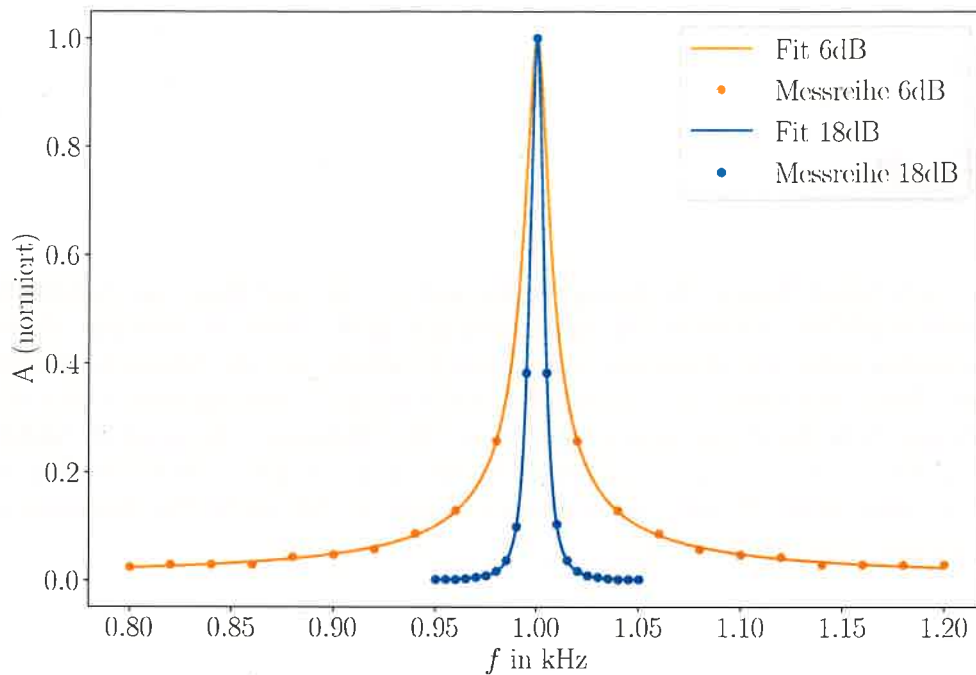


Abbildung 4.21: Vergleich beider Messreihen mit Fit

c) Lock-In in Praxis

Im letzten Abschnitt wird noch die Verwendung eines Lock-In Verstärkers in der Praxis besprochen. Dazu stand eine Leuchtdiode und eine Photodiode in einer Box mit Deckel zur Verfügung. Die Signale von Leuchtdiode und Photodiode wurden dann auf dem Oszilloskop betrachtet. Man konnte beobachten, dass bei offenen Deckel große Schwankungen am Oszilloskop entstanden. Dies kann damit erklärt werden, dass die Photodiode neben dem Signal der Leuchtdiode auch das Licht der Beleuchtung des Raums registriert hat, welches mit 50Hz flackert. Wurde der Deckel geschlossen, ließen die Schwankung nach und die Photodiode detektierte nur noch das Signal der Leuchtdiode, welches trotzdem sehr verrauscht war (zu sehen in Abb. 3.2).

Die Änderung der Zeitkonstante τ und Flankensteilheit Δ am Lock-In Verstärker ergaben eine Veränderung der Auflösung des Lock-In Verstärkers. Dabei war die Auflösung am höchsten, wenn auch die Zeitkonstante und Flankensteilheit am höchsten waren.

Bandbreite in dB

5 Fazit

Der Versuch Signal/Rausch-Verbesserung hat gezeigt, wie signifikant die Auswirkungen der Umwelteinflüsse auf elektronische Messungen sind. Dabei wurden die Methoden der Unterdrückung von Rauschen und deren Einflüsse auf die Messung genauestens studiert. Weiterhin wurde das Verständnis der jeweiligen elektronischen Filter vertieft und erfolgreich in der Praxis angewendet. Auch die Mächtigkeit des Lock-In Verfahrens wurde im Verlauf des Versuchs und dessen Auswertung deutlich. Abschließend lässt sich festhalten, dass dieser Versuch einen guten Grundstock für zukünftige Messungen und deren Verbesserung aufgebaut hat.

A Berechnungen Fourier-Reihenoeffizient und Effektivspannung

Sinusschwingung

Effektivspannung:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt} = \sqrt{\frac{U_0^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{T \sin \left(\frac{4\pi}{T} t \right)}{8\pi} \right]_0^T} = \sqrt{\frac{U_0^2 T}{T} \frac{1}{2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.1})$$

Rechteckschwingung

b_k der Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \sin \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T U_0 \sin \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt \right] \\ &= \frac{2 U_0 T}{T k 2\pi} \left[-\cos \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \cos \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right] \\ &= \frac{U_0}{k\pi} [-\cos(k\pi) + 1 + 1 - \cos(k\pi)] \\ &= \frac{2U_0}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4U_0}{\pi} \frac{1}{2k-1}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Effektivspannung:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} U_0^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T U_0^2 dt \right]} = \sqrt{\frac{U_0^2}{T} \left[\frac{T}{2} + T - \frac{T}{2} \right]} = U_0 \quad (\text{A.4})$$

Dreiecksschwingung

b_k der Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} f(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} at \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} a \left(\frac{T}{2} - t\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\ &= \frac{2a}{T} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} a \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\ &= (I) + (II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{2a}{T} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \Rightarrow \text{Partielle Integration} \\ &= \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[-t \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + t \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right] \\ &\quad + \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\ &= \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[-\frac{T}{4} \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) - \frac{T}{4} \cos\left(-k \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3T}{4} \cos\left(k \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{T}{4} \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (A.5) \\ &\quad + \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\ &= \frac{2a}{T} \frac{T}{k2\pi} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\ &= \frac{2a}{T} \left(\frac{T}{k2\pi} \right)^2 \left[\sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right] \\ &= \frac{2a}{T} \left(\frac{T}{k2\pi} \right)^2 \left[\sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-k \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II) &= \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} a \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{aT}{2\pi} \left[\cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right] \\ &= \frac{aT}{2\pi} \left[\cos\left(k \frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{8aT}{4\pi^2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} = \frac{8U_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (A.6)$$

Effektivspannung:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} (at)^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(a \left(\frac{T}{2} - t \right) \right)^2 dt \right]} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(\frac{T}{2} - t \right)^2 dt \right]} = \sqrt{\frac{a^2}{3T} \left[t^3 \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \left(\frac{T}{2} - t \right)^3 \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right]} \quad (\text{A.7}) \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{3T} \left[\left(\frac{T}{4} \right)^3 + \left(\frac{T}{4} \right)^3 - \left(\frac{T}{2} - \frac{3T}{4} \right)^3 + \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{4} \right)^3 \right]} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{3T} \left(\frac{T^3}{16} \right)} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{aT}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{U_0^2}{3}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Thomas Bühl. *Einführung in die elektrische Messtechnik*. Vieweg + Teubner Verlag, 1. edition, 2001.
- [2] Jörg Cassens. Medieninformatik, 2019. URL <https://mi.kriwi.de/mi/MI-06-Audio-JC-handout.pdf>. Grafikquelle.
- [3] J Gutekunst E. Hering, K. Bessler. *Elektronik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 6. auflage edition, 2014.
- [4] W. Richter. Signal/Rausch-Verbesserung. Versuchsanleitung, physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, Universität Bayreuth, Juli 2012.
- [5] Stanford Research System. Lock-In Amplifier Basics. URL <https://www.thinksrs.com/downloads/pdfs/applicationnotes/Lock-In%20Basics.pdf>.
- [6] Friedrich Kremer Wolfgang Schenk. *Physikalisches Praktikum*. Springer, 2014. URL https://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/7_Fouriertransformation_PB14.pdf?SGWID=0-0-45-1437409-p176436733. Ergänzungen zu Kapitel: Fourier-Transformation und Signalanalyse, Methoden der Messtechnik - Signal und Bildverarbeitung von Prof. Dr.-Ing. habil. P. Lehmann.