2. Fragen zur Vorbereitung

2.1 Unterschiede Beugung / Fraunhofer und Interferenz / Fresnel

Beugung

Bei der Beugung fällt eine ebene Welle auf einen Schirm mit Loch (näherungsweise klein gegen die Wellenlänge). Dabei gelangt Licht in den Schattenraum in Form einer Kugelwelle.

Interferenz

Bei der Überlagerung von zwei Wellen (auch mehrerer) gleicher Frequenz, kann es je nach Phasendifferenz zu Verstärkung oder Schwächung oder Auslöschung kommen. Dieser Vorgang wird als Interferenz bezeichnet.

Fraunhoferbeugung vs Fresnelbeugung

Werden Beugungserscheinungen in einer endlichen Entfernung, die nicht sehr groß gegen die verwendete Wellenlänge ist, ~~dann handelt~~ beobachtet, dann handelt es sich hierbei um eine Fresnel-Beugung. Dabei hängt die beobachtete Lichtverteilung vom ~~es~~ bestrahlten Objekt (Abmessung, Form) als auch vom Abstand zwischen Objekt und Schirm ab.

Wird der Abstand zwischen Objekt und Schirm sehr groß (gegen unendlich), geht die Fresnel-Beugung in die Fraunhofer-Beugung über. Dabei wird näherungsweise die Parallelität der Lichtstrahlen angenommen.

2.2 Intensitätsverteilung (Einzelspalt)

$$I_1(P) = I_0 D^2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2, \quad x = \frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta, \quad y = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta$$

wobei $b=0$ (wegen Einzelspalt)

$$\Rightarrow I_1(\underset{\uparrow\theta}{P}) = I_0 D^2 \left(\frac{\sin(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta)}{\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta}\right)^2 = I_0 \cancel{D^2} \left(\frac{\sin(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta)^2}{\sin\theta^2}\right)\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2$$

Minima entstehen wenn sich Wellen auslöschen, also unter einem Winkel in dem die Intensität gleich Null ist.

$$\Rightarrow I_1(\theta) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta \overset{!}{=} n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{n\lambda}{D} \qquad \text{Minima-Bedingung Einzelspalt}$$

Zentralmaxima bei einem Winkel θ von 0 Grad vor. Dieses Maxima entsteht durch Interferenz von Kugelwellen. Dabei unterscheidet man zwischen ~~die~~ destruktiver und konstruktiver Interferenz, wobei bei destruktiver Interferenz der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge und bei konstruktiver Interferenz ein Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Der Gangunterschied selbst tritt zwischen zwei sich überlagernden Wellen auf. Wenn man nun die Vorstellung der Kugelwellen, die sich gemeinsam überlagern, überlegt wird ersichtlich, dass bei $\theta=0$ sich alle Wellen konstruktiv überlagern, da sie den selben Gangunterschied haben, wodurch das Zentralmaximum entsteht.

$$\lim_{\theta\to 0} I_1(\theta) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\overbrace{\sin(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta)^{\cancel{2}}}^{\to 0}}{\underbrace{\sin\theta^{\cancel{2}}}_{\to 0}}\right)^2 I_0\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2$$

Betrachte nur Quotient!

$$\overset{L'H}{=} \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\overbrace{\cos(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta)\cdot\frac{\pi D}{\lambda}\cos\theta}^{\to \frac{\pi D}{\lambda}}}{\underbrace{\cos\theta}_{\to 1}}\right)^2 I_0\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 = I_0 D^2$$

$\Rightarrow$ Zentralmaxima liegt bei $\theta = 0$ mit $I_1(0) = I_0 D^2$

Winkel von $|\theta| \geq \frac{\pi}{2}$ werden nicht betrachtet.

Abschätzung

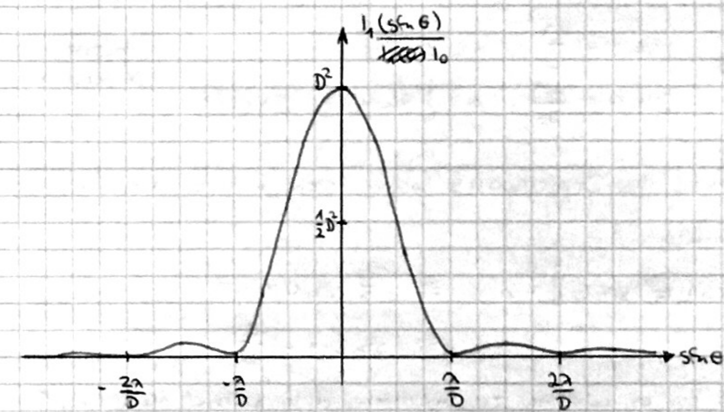
Maxima höherer Ordnung zwischen zwei Minima liegen

$$\rightsquigarrow \frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta \overset{!}{=} n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

$$\rightsquigarrow \frac{I_1(\theta_{max})}{I_1(0)} = \left(\frac{\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{I_1(\theta^1_{max})}{I_1(0)} = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 \approx \frac{1}{22} \Rightarrow \text{Hauptmax 22 mal heller}$$

$$\Rightarrow \frac{I_1(\theta^2_{max})}{I_1(0)} = \left(\frac{2}{5\pi}\right) \approx \frac{1}{62} \Rightarrow \text{-"- 62 -"-}$$



2.3. Doppelspalt

$$I_2(\theta) = I_0 D^2 \left(\frac{\sin(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta)}{\sin\theta\,\frac{\pi D}{\lambda}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(\frac{2\pi b}{\lambda}\sin\theta)}{\sin(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta)}\right)^2$$

mit $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow 2\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$

$$\Rightarrow I_2(\theta) = I_0 D^2 \underbrace{\left(\frac{\sin(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta)}{\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta}\right)^2}_{\text{Einzelspalt}} \cdot \underbrace{\left(2\cos\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)\right)^2}_{\text{Gitterfunktion}}$$

Somit bekommt die Gleichung aus (2.2) noch einen Term dazu, die sogenannte Gitterfunktion. Dabei ist das Argument größer als das des Einzelspalts ($b > D$), wodurch $\frac{2\pi b}{\lambda} > \frac{D\pi}{\lambda}$ gilt.

Daraus folgt, dass die „Schwingung" des Einzelspalts die neue Schwingung einhüllt (moduliert), weshalb es zu jedem Einzelspaltminimum ein Doppelspalt-minimum geben muss.

Dadurch muss nur die dazugekommenen Minimas betrachtet werden, welche durch die Gitterfkt erzeugt werden.

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right) \overset{!}{=} 0 \iff \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta \overset{!}{=} k\pi + \frac{\pi}{2}, \; k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff \sin\theta = \frac{\lambda}{b}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2b}\underbrace{(2k+1)}_{m}, \quad m = \pm1, \pm3, \pm5, \dots$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \sin\theta = \frac{n\lambda}{D}, \; n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ \sin\theta = \frac{m\lambda}{2b}, \; m\in\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\} \end{array}$$

Minima Doppelspalt

Maximas des Doppelspalts lassen sich mittels der Bedingung ermitteln.

$$\left[\cos\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)\right]^2 \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta = n\pi, \; n\in\mathbb{Z}$$

$$\iff \sin\theta = \frac{n\lambda}{b}$$

Dabei ist es wichtig zu beachten, dass keine Maximas an Stellen entstehen, welche durch Term des Einzelspalts ein Minimum besitzen müssen.

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{p\lambda}{b}, \; p\in\mathbb{Z}, \; \theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\alpha\in\mathbb{R} \mid \sin\alpha = \frac{n\lambda}{D}, \; n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$$

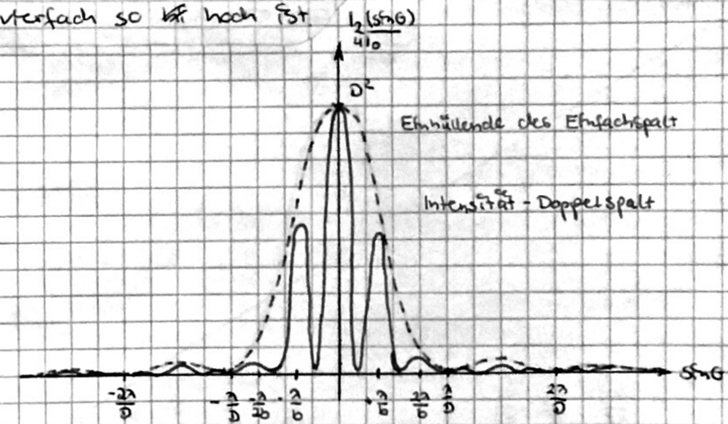
Zentralmaximum

$$I_2(0) = \lim_{\theta\to0} = \lim_{\theta\to0} I_0 D^2 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta}\right)^2}_{\to 1} \underbrace{\left(2\cos\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)\right)^2}_{\to 4}$$

$$I_2(0) = 4 I_0 D^2 = 4 \cdot I_1(0)$$

$\Rightarrow$ Das Zentralmaximum ist 4 mal so hell wie das Zentralmaximum des Einzelspalts

Dies lässt sich erklären, dass bei gleicher Spaltenbreite und gleicher Lichtintensität bei $\theta = 0$ alle Lichtstrahlen in stets in Phase sind (Fraunhoferbeugung), was bedeutet, dass deren Gangunterschied ist Null. Beim Doppelspalt steht nun „doppelt" so viel Licht" zur Verfügung als beim Einzelspalt, wodurch das Maximum vierfach so ~~hoch~~ hoch ist



2.4 Gitter

$$I_N(\theta) = I_0 D^2 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta}\right)^2}_{\text{Einzelspalt}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin\left(N\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}\right)^2}_{\text{Gitterfkt}}$$

Zentralmaximum (Grenzwert $\theta \to 0$)

Betrachte nur Term der Gitterfkt

$$\lim_{\theta\to0} \frac{\sin\left(N\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)} \overset{L'H}{=} \lim_{\theta\to0} \frac{\cos\left(N\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)\cdot N\cdot\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)\cdot\cos\theta} = N$$

$\Rightarrow I_N(0) = I_0 D^2 \cdot N^2 = N^2 \cdot I_1(0)$ (Ergebnisse aus (2.2) ~~2.3~~ verwendet)

$\Rightarrow$ Das ~~Hell~~ Zentralmaximum ist N^2-fach heller als das des Einzelspalts.

Da die Situation grundsätzlich identisch zum Doppelspalt ist, müssen die Minima des Gitters auch ~~bei~~ ~~den~~ an Stellen der Minima des Einzelspalts entstehen. Dies gilt aber nur wenn die Fraunhofer-Beugung vorliegt. Da bei der Fraunhofer-Beugung näherungsweise die Parallelität der Lichtstrahlen angenommen wird (vgl 2.1), kommt es zur konstruktiver Interferenz bei einem Gangunterschied von λ ($\lambda \mathrel{\hat{=}}$ Wellenlänge), wobei diese Bedingung auch beim Doppelspalt gilt, weshalb die Hauptmaxima-bedingung übernommen wird.

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{b} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad \ldots \text{ (vgl. 2.3)}$$

Intensität Hauptmaxima

$$I_N(\theta) = I_0 D^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{n\lambda}{b}\cdot\frac{\pi D}{\lambda}\right)}{\frac{\pi D}{\lambda}\frac{n\lambda}{b}}\right)^2 \left(\frac{\sin\left(N\frac{\pi D}{\lambda}\frac{n\lambda}{b}\right)}{\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda}n\frac{\lambda}{b}\right)}\right)^2$$

$$= I_0 D^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi n D}{b}\right)}{\frac{\pi n D}{b}}\right)^2 \left(\frac{\sin\left(N\frac{n D\pi}{b}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi D}{b}\right)}\right)^2$$

$$\cancel{\text{Sub: } \alpha = \frac{n\pi D}{b} \Rightarrow I_N(\theta) = I_0 D^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin(N\cdot n\pi)}{\sin(n\pi)}\right)^2}$$

$$\text{Sub } \alpha_n = \pi\cdot n \Rightarrow I_N(\alpha_n) = I_0 D^2 \left(\frac{\sin\left(\alpha_n\frac{D}{b}\right)\cdot\sin(\alpha_n N)}{\alpha_n\frac{D}{b}\cdot\sin(\alpha_n)}\right)^2$$

Erstes Hauptmaxima $\rightsquigarrow$ $\alpha_n = \pi$ für $n = 1$ $\rightsquigarrow$ Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{\alpha_n\to\pi} I_N(\alpha_n) = 4 \lim_{\alpha_n\to\pi}\left(\frac{\overbrace{\sin\left(\alpha_n\frac{D}{b}\right)\cdot\sin(\alpha_n N)}^{\to 0}}{\underbrace{\alpha_n\frac{D}{b}\cdot\sin(\alpha_n)}_{\to 0}}\right)^2$$

$$\overset{L'H}{=}$$