

# Inhaltsverzeichnis



# 1 Einleitung

Ein Kreisel ist ein starrer Körper welcher um eine beliebige kräfte- und momentfreie Achse rotiert mit fester Lage im Raum. Dies wird mit einer Unterstützung der Achse in zwei Punkten durch Lager, welche i. Allg. durch Kräfte beansprucht werden, verwirklicht. Kreisel werden häufig in der Technik und im Alltag bei rotierenden Bauteilen in Maschinen verwendet, wobei die Form der Kreisel dabei beliebig sein kann, es aber von Vorteil ist, wenn dieser die Form eines rotationssymmetrischen Körpers annimmt.

In diesem Versuch wird qualitativ das Verhalten eines luftgelagerten, symmetrischen Kreisel (ohne wesentliche Reibung) bei verschiedene Kreiselbewegungen sowie die Reaktion auf äußere Kräfte untersucht. Dabei werden besonders die Figurenachse, Drehimpulsachse und momentane Drehachse eine wichtige Rolle bei der Beobachtung spielen. Des Weiteren wird quantitative die Nutation und Präzession des Kreisels betrachtet. HALLO

## 2 Fragen zur Vorbereitung

### 2.1 Trägheitsmoment $I$ eines Körpers

Das Trägheitsmoment  $I$  eines Körpers wird im Kontinuum anschaulich durch die Gleichung

$$I = \int_V \mathbf{r}_\perp^2 \rho(\mathbf{r}) dV \quad (2.1)$$

dargestellt und gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Winkelgeschwindigkeitsänderung bei einer Drehung um eine vorrausgesetzte Achse an. Dabei ist  $\mathbf{r}_\perp$  der Ortsvektor, welcher senkrecht auf  $\omega$  steht und  $\rho(\mathbf{r})$  die Dichte des Körpers in Abhängigkeit zum Ortsvektor  $\mathbf{r}$ , wobei die Dichte  $\rho$  sich bei homogenen Körper aus den Integral ziehen lässt, da diese in diesem Fall nicht mehr vom Ortsvektor  $\mathbf{r}$  abhängt.

Für einen starren Körper aus  $N$  Massepunkten der Masse  $m_i$  hat (2.1) die Form

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_{i,\perp}^2 \quad (2.2)$$

### 2.2 Trägheitstensor $\mathbf{J}$

Der Drehimpuls eines Körpers der Masse  $m$  ausgehen vom Ursprung des Koordinatensystems mit Ortsvektor  $\mathbf{r}$  und Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  ist angegeben durch die Gleichung

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.3)$$

Weiterhin gilt bei Rotation eines starren Körpers in einen beliebigen Koordinatensystems ein Zusammenhang zwischen Drehimpuls  $\mathbf{L}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\mathbf{w}$  der Form

$$\mathbf{L} = \underline{\mathbf{J}} \mathbf{w} \quad (2.4)$$

### 2.3 Trägheitstensor $\mathbf{J}_{\text{Rad}}$ eines nicht ausgewuchten Rades

Hallo

## **2.4 Lage der Achsen bei Nutation eines momentfreien Kreisels**

## **2.5 Präzessionsfrequenz eines Kreisels**

## **2.6 Kreiselkompass**

## **2.7 Senkrechte Ausrichtung eines in der Luft rotierenden Bierfilz**

### **3 Messprotokoll**

Das Messprotokoll wurde am Versuchstag handschriftlich erstellt und hier als PDF-Datei eingefügt.

## Versuch 1re : Der Kreisel

Versuchsplatz: 2.3.02704, Türplatz

Datum: 22. März 2021

Teilnehmer: Gruppe 4

Leonhard Schall Menperson

Manuel Gippert Auswerteperson

Charlotte Greiger Tischhaltungsperson

### Messinstrumente + Messfehler

• Stroboskop  $u_a = 0,005$

• Kugel

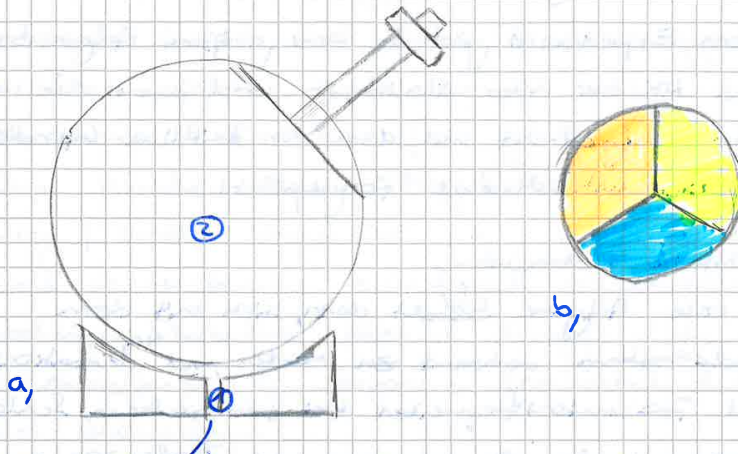
• Luftlagerung

• Gewichte

• Waage Nr. 29206  $u_a = 0,5$

• Stoppuhr  $u_a =$

### Versuchsaufbau



Man hat den Luftdruck (1) durch in einer Form einer negativen Kugel, in der eine Stahlkugel liegt. Diese Kugel ist an einer Seite abgeschnitten. Diese Fläche ist mit drei gleichgroßen Farben codiert und mit quadratischem Linienmuster versehen. Aus der Fläche ragt eine eigene Schraube raus. Diese kann man an einem Feststellmechanismus in der Horizontalen feststellen, sodass die Kugel sich um die Achse der Schraube dreht.

Zusätzlich zum unteren Luftdruck gibt es eine seitliche Luftdrüse, so dass der Wind kontrolliert angetrieben werden kann, oder auf konstanter Geschwindigkeit belassen werden. Zusätzlich hat man einen Holzstift zum Anschließen, verschiedene Gewichte zum Aufhängen auf die Kugelstange, eine Waage zum Abwiegen, eine Stoppuhr zum Zeitstoppen und ein Stoppuhr zum Frequenz messen, zur Laufzeit.



## Versuchsdurchführung

Bei diesem Experiment gibt es drei größere Aufgabenbereiche. Der Beginn ist bei allen ähnlich, so wird zuerst die vertikale Luftzufuhr aufgedreht und dann die seitliche Luftverteilung. Danach wird unterschiedlich fortgeführt.

### 1. Qualitative Beobachtung

- Die erste Aufgabe besteht darin, sich mit dem Versuchsaufbau vertraut zu machen und  $\omega_0$  Mutations- und Präzessionsfrequenzen bei verschiedenen Schlegel-Schneidmethoden zu erkennen und Tendenzen zu sehen.

### 2. Mutation

Durch plötzliche Stops an den schnell drehenden Kreisel bringt man den rotierenden Kreisel zu Mutation. Man wird die Umstände der Figurenradre um die momentane Drehachse und damit die Mutationsfrequenz  $\omega_1$  gemessen. Für eine Kontrolle wird das Stroboskop genutzt.

### 3. Präzession

Für diese Aufgabe werden beide Gewichte in einem bekannten Abstand vom Schwerpunkt gegeneinander verdrängt, die Figurenradre in die Feststellvorrichtung eingespannt und der Kreisel auf eine hohe Drehzahl gebracht. Dann wird der Kreisel aus der Vorrichtung ausgeklippt. Man wird die Kreisel Frequenz mit dem Stroboskop gemessen. Zusätzlich wird die Zeit  $t$  gemessen und somit auch die Präzessionsfrequenz als Funktion von  $\omega_3$ .

### 1. Qualitative Beobachtung

- Je schneller Kreisel wird immer im UZS angedreht
- Seitliche Luftstrom wurde komplett aufgedreht, wodurch die maximale Drehzahl (ca. 20 ~~U/min~~ <sup>Drehungen/s</sup>) erreicht wurde. Dann wurde durch Finger <sup>Drücken/Schlag</sup> ~~konstant~~ (nicht schlagartig) Kräfte ausgeübt → Kreisel weicht aus. Dann wurde Kreisel schrittweise abgebremst und vorherige Prozedur erneut durchgeführt.

Beobachtung: Je langsamer der Kreisel, desto schwächer die Auslenkung.

Wiederholt wurde die gleiche Prozedur mit Schläger gegen Metallstab (hierbei wurde Holzstab genutzt).

Diesmal ist die Beobachtung, dass je langsamer der Kreisel, desto größer die Auslenkung aus dem ursprünglichen Zustand und desto langsamer die Mutationsfrequenz.

Man sieht deutlich, dass sich Figurenachse und Rotationsachse weiter separieren, wenn die Drehfrequenz niedriger ist (der Kreis, den die Spitze des Metallstabes beschreibt, wird größer) außerdem ist zu beobachten, dass die Mutationsfrequenz nimmt zu mit höherer Drehzahl.

Jetzt werden Gewichte an die Stange gehängt <sup>wird ab</sup> und dann Kreisel wieder auf maximale Drehzahl beschleunigt.



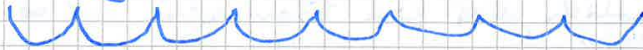
### Versuchsdurchführung

Bei diesem Versuch gibt es drei größere Aufgabenbereiche

#### 1. Qualitative Beobachtung

Abhängig vom Winkel in dem man den Kreisel danach positioniert ist die Präzession unterschiedlich stark (Test 45 und 90 Grad) Wie vorher wird Kreisel langsam abgebremsst und Versuch wiederholt. Unterschiedliche ~~Präzessions-~~ Geschwindigkeiten sind bei verschiedenen Drehzahlen auffällig, was aber unter anderem an der graduellen Verringerung der Drehzahlen liegen kann.

~~Versucht~~ Der Kreisel wird wieder auf Maximalgeschwindigkeit angedreht. Versucht man dieses dann einen Schlag, kann man Nutation und Präzession gleichzeitig beobachten. Ein besonders schönes Phänomen stellt sich ein bei niedriger Drehzahl: die Spitze der Stange beschreibt eine solche Kurve:



kleine Ergänzung: Nutation und Präzession liegen so oben gesehen immer im UZS.

Mit geeignetem Strobooskop kann man die Nutationsbewegung "verlangsamend sichtbar machen" dabei wird das Strobooskop ungefähr auf Rotationsfrequenz gestellt.

### 3 Messprotokoll

2. Mutation [Hz]			
Nr.	Rotationsfrequenz	1. Messwert	2. Messwert
1	10,0	62,69 sec	59,96 sec
2	10,5	58,84 sec	59,50 sec
3	11,0	56,94 sec	59,69 sec
4	12,0	51,53 sec <sup>verzählt</sup>	51,135 sec
5	13,0	38,505 49,63 sec	48,87 sec
6	14,0	44,75 sec	45,56 sec
7	15,0	40,78 sec <sup>verzählt</sup>	40,53 sec
8	16,0	34,28 37,47 sec	38,28 sec
9	17,0	35,71 sec	36,31 sec
10	18,0	34,25 sec	34,65 sec
11	19,0	32,85 sec	33,06 sec
12	20,0	30,75 sec	31,19 sec

Durchführung

Damit die Messperson beide Hände frei hat, um den Kreis <sup>und die Stopuhr zu bedienen</sup> zu präparieren, hilft die Auswerteperson, das Stroboskop zu halten. Dabei wird darauf geachtet, den Mindestkreis möglichst einzuhalten.

Gemein <sup>jeweils</sup> werden 10 Umläufe der Figurenachs. ~~best~~ <sup>den</sup> ~~Fig~~ Die Luftdüse wird ~~schuell~~ <sup>schuell</sup> ~~stärker~~ <sup>stärker</sup> ~~angedreht~~, als es gebraucht wird und mit den Fingern so weit abgebrummt, bis es so schnell ist wie benötigt.

Die Umläufe werden jeweils unten gemein und gezählt.

Zusatzbeobachtung: Frequenz erhöht sich, <sup>leicht</sup> wenn man <sup>den Kreis</sup> ~~Schlag~~ <sup>versetzt</sup>.



### 3. Präzision

- Zuerst werden die beiden Gewichte gezogen

Mass: Gewicht: 48,2 g

- Dann wird die große Kugel vermessen + Gewichte:

Durchmesser: 100 mm

Durchmesser bis zur flachen Seite: 96 mm

Gewicht 1. & Höhe: 10 mm (beides Mal)

Höhe Schraube: 87 mm

Länge <sup>Endschraube</sup> Kugel - Gewicht: 15 mm

- Durchführung:

Schraube wird eingespannt, Kreisel wird auf 18

Umdrehungen / Sekunde eingedreht dann wird der

Kreisel ausgebalanciert (am horizontalen Halterung

(Winkel zu Erdmittelpunkt =  $90^\circ$ )). Der Kreisel

beginnt zu präzessieren, es werden 10 Umdrehungen

beobachtet, wobei mit der Rundfunktion der

Stoppuhr jeweils die Zeit für eine Umdrehung

genommen wird und mit dem Strobuskop die

Drehgeschwindigkeit zu Anfang <sup>und</sup> Ende ermittelt

wird. Die Auswertperson <sup>bedient</sup> Stoppuhr,\*

die Messperson das Strobuskop. Bei diesem Versuch

ist die antreibende Düse nach der Beschleunigungs

phase abgeschaltet.

Gemessen werden Rotationsfrequenz (wobei <sup>Endfrequenz</sup> von

Messung  $n$  gleich der Anfangsfrequenz von Messung  $n+1$  ist)

und Rotationszeit.

\* aus praktischen Gründen wird das Handy statt

einer normalen Stoppuhr genommen

### 3 Messprotokoll

Messung 1:

Nr	Rotationsfrequenz [Hz]		gemessene Zeit bei Umdrehung [sec]
	Anfangs-	End-	
1	19,00	15,79	56,66
2		13,27	46,69
3		11,78	41,21
4		10,48	36,16
5		9,28	32,24
6		8,48	29,09
7		7,78	26,55
8		7,30	24,65
9		6,68	22,58
10		6,12	21,10

Anmerkung: Die Pfeile ↗ bedeuten, dass Endfrequenz von Messung n gleich Anfangsfrequenz von Messung n+1 ist

Nr	Rotationsfrequenz [Hz]		gemessene Zeit bei Umdrehung [sec]
	Anfangs-	End-	
1	20,00	16,40	58,48
2		14,00	49,35
3		12,10	42,64
4		10,71	37,33
5		9,58	33,12
6			→ Abbruch der Messung, da
7			Schraube aus Vertikale gerückt ist.
8			Grund ist evtl. äußere
9			Einwirkung
10			



Nr	Rotationsfrequenz [Hz]		gemessene Zeit Se Verlauf
	Anfangs-	End-	
1	13,00	15,30	55,78
2		13,40	47,73
3		11,70	40,61
4		10,40	36,46
5		9,30	31,53
6		8,41	29,04
7		7,73	26,58
8		<del>7,86</del> 7,86	nur halbe Frequenz 24,21 sec
9		↳ 5,72	
10			

Erreichte Messung ab 6 Hz

Nr	Rotationsfrequenz [Hz]		gemessene Zeit pro Umlauf
	Anfangs-	End	
1	6,00	5,64	→ Abbruch, da kein erneuter Start ab 6,00 Hz
1	6,00	5,38	17,08
2		5,09	16,12
3		4,89	15,49
4		4,63	14,47
		→ ab hier zu langsam → Abbruch	

Charlotte

Schlott

Lippert

### 3 Messprotokoll

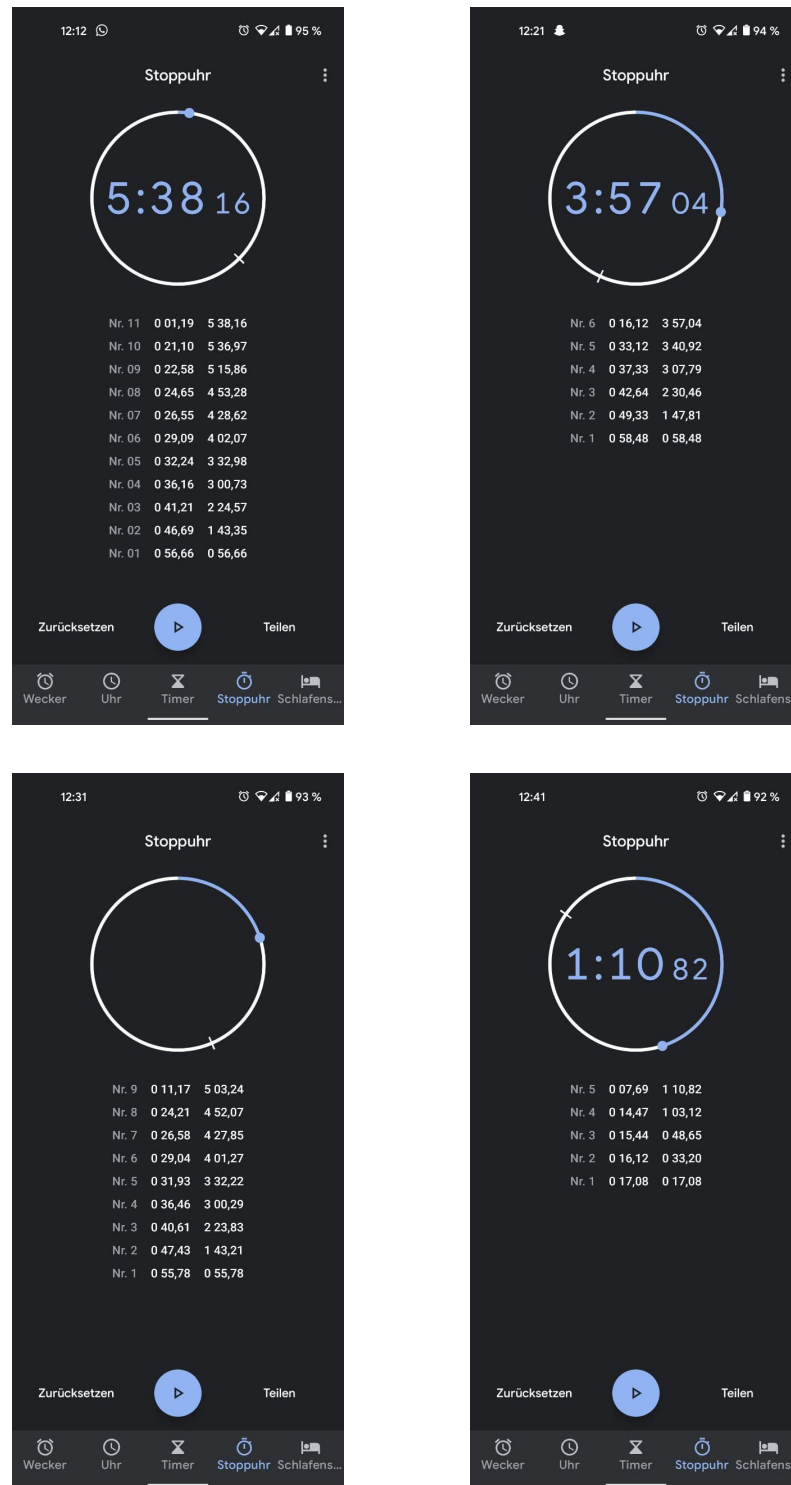


Abbildung 3.1: Zu Präzession: Messung 1, 2, 3, 4



## 4 Auswertung und Diskussion

### 4.1 Qualitative Beobachtung verschiedener Kreiselbewegungen

- Diskussion Beobachtung Stroboskop
- Bewegung Figurenachse im L-System und Drehimpulsachse bei Nutation
- Entspricht Bewegungsrichtung ihren Erwartungen
- Folge von  $J_1 \approx J_3$

Im Nachhinein wurde uns bewusst, dass wir einige Fehler bei der in der quantitativen Beobachtung gemacht haben. Dazu muss erstmal ein Fehler im Protokoll ausgebessert werden. Die Nutation ist nicht wie in Teil 1 fälschlicherweise behauptet, sondern gegen den Uhrzeigersinn, was später in der qualitativen Beobachtung auffiel. Nun zu den Beobachtungen.

- Ohne Stroboskop:  
Nach dem Andrehen wurden auf den Kreisel mit den Fingern Kräfte ausgeübt. Dabei war auffällig, dass je schneller der Kreisel sich dreht, desto stärker waren die Ausweichbewegungen. Vorallem bei langsamen Drehzahlen ist die Reaktion des Kreisels schwach. Dabei war in der qualitativen Messung noch nicht klar ersichtlich, ob das stärkere Ausweichen von der höheren Drehfrequenz und dem damit verbundenen stärkeren Äbrollen an dem Finger oder von der Präzession kommt. Die auftretende Ausweichbewegung war jedoch immer senkrecht zu Rotationsachse und der Richtung in die die Kraft wirkt.  
Im Folgenden wurde das Gewicht an der Achse des Kreisels angebracht. Dabei konnte beobachtet werden, dass wenn der Kreisel geneigt war und das Gewicht an ihm zieht, er auch wieder eine Ausweichbewegung startet. In diesem Fall kann man sehr schön die Richtung der einwirkenden Kraft mit den Richtungen des Drehimpulses und der resultierenden Kraft beobachten. Die durch die Gravitation entstehende Kraft  $F_{Grav}$  kann aufgespalten werden in einen Anteil  $F_{\perp}$ , der senkrecht zur Figurenachse ist, und einen der parallel Anteil  $F_{\parallel}$ . Die

### 4.2 Nutation

- Für jede Frequenz  $\frac{w_n}{w_3} = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \Rightarrow$  Tabelle
- $\frac{w_n}{w_3}$  gegen  $w_3 \Rightarrow$  Zeichnung

#### 4 Auswertung und Diskussion

Die Nutation ist eine zusätzliche Komponente zur Präzession. Bei genauer Beobachtung des Kreisels kann man neben der Präzessionsbewegung erkennen, dass die Kreiselachse nicht komplett ruhig um die Senkrechte läuft, sondern viel mehr kleine Rotationen auf der Bahn der Präzession vollführt. Das ist das Phänomen der Nutation.

Um diese Nutation des Kreisels zu untersuchen, bestimmt man die Nutationsfrequenz des momentfreien Kreisels als Funktion von  $\omega_3$ . Damit es gut darzustellen und auszuwerten ist, betrachtet man  $w_3$  im Bezug zu  $\frac{w_n}{w_3}$ .

Um die Frequenz in die Winkelgeschwindigkeit umzurechnen, muss man die Frequenz mit  $2\pi$  multiplizieren ( $w = f \cdot 2\pi$ ).

Der Fehler des Stroboskoplichts ist der Ablesefehler  $s_a = 0,051/s$ . Auch bei der Zeitmessung muss der Fehler mitbetrachtet werden, dieser beläuft sich auf  $s_a = 0,5s$ .

$$\omega_3 = f_3 \cdot 2\pi s_{\omega_3} = 2\pi \cdot s_{f_3} \quad (4.1)$$

$$(4.2)$$

Um das Verhältnis von  $w_3$  im Bezug zu  $\frac{w_n}{w_3}$  tabellarisch aufzutragen, muss man auf das Vorzeichen achten. Aus den Eulerschen Gleichungen für den momentfreien, symmetrischen Kreisel wurde folgendes im Skript hergelitten:

$$\frac{\omega_n}{\omega_3} = \frac{J_3 - J_1}{J_1} = \textit{konstant} \quad (4.3)$$

Da wir aber nur noch einen symmetrischen Kreisel mit  $J_1 = J_2$  und  $J_3 < J_1$  betrachten, ist das konstante Verhältnis negativ. Nun wird die Konstante durch den Mittelwert der berechneten Verhältnisse berechnet.

$$(4.4)$$

Der hier berechnete Mittelwert ist das arithmetische Mittel beider Messreihen. Diese werden nun in das Diagramm eingefügt und gegen die Drehfrequenz  $\omega_3$  aufgetragen.

### 4.3 Präzession

- Für jede Frequenz  $w_3 * w_p \Rightarrow$  Tabelle
- $w_3 * w_p$  gegen  $w_3 \Rightarrow$  Zeichnung + Erläuterung zur Beschaffung von  $w_3$
- Mit Gleichung (12) Berechnung von  $J_3$  (Zustandsgewicht vernachlässigbar)
- Mit (4.2) Berechnung von  $J_1$
- Größenordnung von  $J_1$  und  $J_3$  erwartet oder nicht?

## **5 Fazit**

# **A Append A**

## **A.1 Teilanhang X**