WS2021/22

PPBphys2

Chaos in einfachen physikalischen Systemen

Manuel Lippert - Paul Schwanitz

Gruppe 11

Informationen

Versuchstag	06.09.2021
Versuchsplatz	B11 | 0.09
Betreuer	Reinhard Richter
Gruppen Nr.	11
Teilnehmer	Manuel Lippert (Manuel.Lippert@uni-bayreuth.de)
	Paul Schwanitz (Paul.Schwanitz@uni-bayreuth.de)

Insgesamt fachlich & experimentell engagiert.
Orthographisch
Typographisch und vom Ausdruck schwach.
Dies bitte verbessern. Vgl. rote Anmerkungen.

Zudem bitte Attraktorrekonst. für chaot. Attr. durchführen.

Literaturverz. ergänzen. "Fictipedia" reicht nicht.

20.9.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

#Beispiele?

Betrachtet man die physikalischen Prozesse, die in unserer Umwelt ablaufen, so fällt schnell auf, dass ein Großteil dieser chaotisch bzw. nicht linear ablaufen. Daher ist es für die Physik sehr wichtig auch diese Prozesse zu verstehen.

#deterministischen

Der folgende Versuch soll daher Einblicke in das äußerst bedeutende Gebiet des Chaos und der nichtlinearen Dynamik geben und uns die grundlegenden Konzepte dieser Versuche verständlich machen.

Chaos ≠ zufällig

2 Hintergrund zum Versuch

2.1 Allgemeines zum Thema Chaos

unwissenschaftlich
da nicht referiert

2.1.1 Dynamische Systeme

Ein ***dynamisches System*** ist ein mathematisches Modell eines zeitabhängigen Prozesses, dessen Verlauf nur vom Anfangszustand abhängt. (Wikipedia, 2021*b*)
Die Formulierung dieses Sachverhaltes in der Physik geschieht anhand von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit dem Vektor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t),..., x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \tag{2.1}$$

dabei beschreibt $\mathbf{x}(t)$ den ***Zustand*** des Systems zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$.
Das dynamische System ist vollständig determiniert, wenn ein Zustand $\mathbf{x}(t)$ angegeben ist. Aus diesem Zustand lassen sich alle vorangegangen und folgenden Zustände des Systems bestimmen. Dynamische Systeme können auch zeitdiskret angegeben werden, worauf aber hier nicht weiter eingegangen wird (Lück, 1995)

1. **Phasenfluss**
   In der Mathematik wird ein dynamisches System durch den ***Fluss*** bzw. ***Phasenfluss*** beschrieben. Unter dem *Fluss* versteht man die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, welche die ***Flussaxiome*** erfüllt (Jänich, 2005):

   $$\begin{aligned} &(1)\ \phi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0 \\ &(2)\ \phi(\phi(\mathbf{x}_0, t), s) = \phi(\mathbf{x}_0, t + s). \end{aligned} \tag{2.2}$$

   Der *Fluss* ϕ ordnet **jedem** Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ einen neuen Zustand zum Zeitpunkt t zu. (Lück, 1995)

2. **Trajektorie**
   Der *Fluss* ϕ kann mit dem *Zustand* $\mathbf{x}(t)$ in Verbindung gebracht werden mit der Beziehung: $\mathbf{x}(t) = \phi_{\mathbf{x}_0}(t) = \phi(\mathbf{x}_0, t)$ mit festem $\mathbf{x}_0$, wobei nach (2.2) $\mathbf{x}(0) = \phi_{\mathbf{x}_0}(0) = \phi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ gilt.
   Hierbei beschreibt $\phi_{\mathbf{x}_0}(t)$ die *Lösungskurve*, welche auch *Bahnkurve*, *Orbit*, *Phasenbahn* oder ***Trajektorie*** des Flusses ϕ genannt wird und eine spezielle Lösung von (2.1) darstellt, welche wiederum die Bewegung des Punktes $\mathbf{x}$ unter Wirkung des Flusses ϕ mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ beschreibt. (Lück, 1995)

Durch die Abhängigkeit der *Trajektorien* vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ kann gefolgert werden, dass sich *Trajektorien* mit unterschiedlichen Anfangszuständen $\mathbf{x}_0$ nicht schneiden können. Es können aber unterschiedliche Anfangszustände $\mathbf{x}_0$ auf derselben *Trajektorie* befinden und sich nur um eine Zeittranslation unterscheiden (Jänich, 2005) .

3. **Phasenraum**
   Der ***Phasenraum*** oder ***Zustandsraum*** beschreibt eine Menge aller Zustände oder eine Darstellung aller Trajektorien eines dynamischen Systems und bietet einen Überblick über das Verhalten der gesamten Differentialgleichung ohne diese explizit lösen zu müssen. (Jänich, 2005)

4. **Attraktor**
   In (2.1) wird ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ im Phasenraum definiert, welches als Geschwindigkeitfeld des Phasenflusses ϕ angesehen werden kann.
   Durch Betrachtung der Divergenz des Vektorfelds $\nabla\mathbf{F}$ kann eine Aussage getroffen werden über die Rate mit dem sich ein Volumenelement V unter der Wirkung des Flusses verändert. Zwei Fälle sind hier besonders hervorzuheben:

$$\begin{aligned} &(1)\ \nabla\cdot\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \dot{V} = 0 \Rightarrow \text{ Konservatives System} \\ &(2)\ \nabla\cdot\mathbf{F} < 0 \Rightarrow \dot{V} < 0 \Rightarrow \text{ Dissipatives System} \end{aligned} \tag{2.3}$$

In einem dissipativen System laufen die Trajektorien nach einer Einlaufsphase (transiente Bewegung) in einem begrenzten Bereich im Phasenraum, welchen man als ***Attraktor*** bezeichnet (Bewegung auf *Attraktor*: permante oder posttransiente Bewegung). Ein Attraktor weist folgende Eigenschaften auf (Lück, 1995):

(1) Kompakte Menge im Phasenraum

(2) Invariant unter der Wirkung des Flusses

(3) Volumen des Attraktors ist Null

(4) Eine beliebige Obermenge des Attraktors schrumpft unter der Wirkung des Flusses auf den Attraktor selbst zusammen

Arten von Attraktor

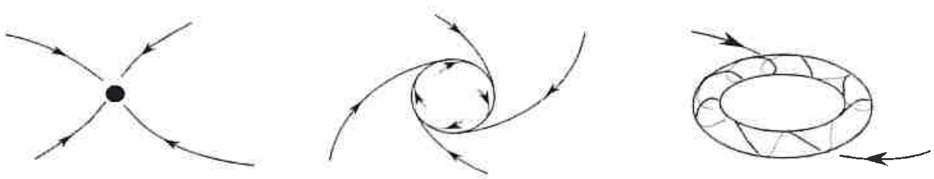


Abbildung 2.1: Fixpunkt, Grenzzyklus, Tours- bzw. Ringattraktor

quelle ? der Abb. ?

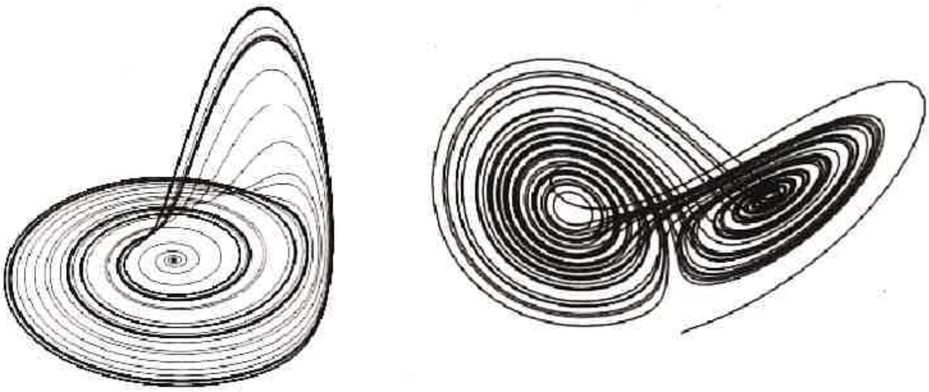


Abbildung 2.2: Seltsame Attraktoren: Rössler- und Lorentzattraktor

quelle?

2.1.2 Deterministisches Chaos

Systeme, die das Verhalten des *deterministischen Chaos* zeigen, weisen ein zufällig erscheinendes Verhalten auf, was jedoch nicht durch äußere Umstände verursacht wird, sondern das Verhalten folgt aus den Eigenschaften des Systems selbst.
Das Verhalten von einem System mit deterministischem Chaos lässt sich langfristig nicht vorhersagen, da ähnliche Uhrsachen langfristig nicht zu ähnlichen Wirkungen führen. Dieser Effekt ist unter dem Namen *Schmetterlingseffekt* bekannt (Wikipedia, 2021*a*).

2.1.3 Fouriertransformation und Leistungsspektrum

Eine Fouriertransformation ist eine Integraltransformation, mit der aperiodische Signale in ein kontinuierliches Spektrum zerlegt werden können.
Fouriertransformation einer Messgröße $x(t)$:

$$\hat{x}(\omega) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int_0^T x(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{2.4}$$

Das Leistungsspektrum $P(\omega)$ kann man nun folgendermaßen aus der Fouriertransformierten des Messwertes berechnen:

$$P(\omega) = |\hat{x}(\omega)|^2 \tag{2.5}$$

Das Leistungsspektrum stellt die Leistungsanteile für unterschiedliche Frequenzen im Zeitsignal dar.
s
Bei chaotischen Systemen beispielsweiße erhält man ein Leistungsspektrum mit kontinuierlichem Verlauf, das für große Frequenzen abnimmt (Lück, 1995). Da jedoch weißes stochastisches Rauschen ebenfalls ein kontinuierlichen Verlauf liefert kann dieser nicht als hinreichender Beweis für Chaos angesehen werden. "1/f"?
ok

en

Allerdings fällt "weißes" Rauschen im Leist.spektr. nicht ab. Sonst wäre es nicht weiß, sondern rosa.

f

2.1.4 Darstellungsweisen eines chaotischen Attraktor

1. **Phasenraumdarstellung**
   Die ***Phasenraumdarstellung*** wie in (2.1) erwähnt, gibt einen Überblick über den Verlauf der Bewegung des dynamischen Systems. Dabei trägt man je an eine Raumachse eine Phasenraumvariabel auf (z.B. $x, \dot{x}$), wobei der Phasenraum dabei n-Dimensionen haben kann und nicht alle Phasenraumvariablen bekannt sein müssen, da ein Attraktor im Phasenraum rekonstruiert werden kann. Dazu werden die Messwerte einer Phasenraumvariablen bei einer festen Zeitspanne τ, also $\varphi(t), \varphi(t+\tau)$,..., $\varphi(t+(n-1)\tau)$, als neu Koordinaten x_i (z.B. $x_1 = \varphi(t)$ und $x_2 = \varphi(t+\tau)$) eines neuen Koordinatensystems. Bei richtiger Wahl von τ und n lässt sich der tatsächliche Attraktor rekonstruieren. (Lück, 1995) Takens!

   gut.

   Verb?

2. **Poincaré-Abbildung**
   Die ***Poincaré-Abbildung*** ist eine Projektion des ***Poincaré-Schnitts*** an einer Ebene. Diese Abbildung ist immer die Dimension $n-1$ und ist somit eine Dimension niedriger als der Phasenraum mit der Dimension n und es gehen keinen Informationen bzgl. dem Langzeitverhalten des Systems verloren. Aufgrund dieser Tatsache lässt sich die *Poincaré-Abbildung* zur Analyse von höherdimensionalen Phasenräumen verwenden.
   Der *Poincaré-Schnitt* ist dabei eine Menge aller Durchstoßpunkte der Trajektorien im Phasenraum auf einer Hyperfläche. Hierbei müssen die Trajektorien die Hyperfläche *transversal* (senkrecht) und in einer vorgegebenen Richtung schneiden. Praktisch werden meistens die Lage von Extremwerten einer Messgröße als Bedingung für die Schnittebene (Hyperfläche) und trägt diese gegen die anderen Phasenraumvariablen zu diesem Zeitpunkt gegeneinander auf oder man wählt eine Ebene, die den Attraktor geeignet schneidet. (Lück, 1995)

3. **Wiederkehr-Abbildung**
   Bei der ***Wiederkehr-Abbildung*** wird eine diskrete Abbildung aktueller Messwerte über die vorangegangenen Messwerte augetragen. Diese Abbildung ähnelt dann einen *Poincaré-Schnitt*, weswegen man bei einem kontinuierlichen System (2.1) dessen *Poincaré-Abbildung* für dieses Verfahren verwendet. (Lück, 1995)

4. **Bifurkationsdiagramm** Wie geht das genau?
   Bei einem ***Bifurkationsdiagramm*** betrachtet man die Projektion der *Poincaré-Abbildung* auf **eine** Achse unter Veränderung eines Kontrollparameters (z.B. der Zeit t), wobei man die durch die Projektion gewonnenen Werte gegen den jeweiligen Parameterwert aufträgt. (Lück, 1995)

5. **Phasendiagramm**
   Wenn bei dem *Bifurkationsdiagramm* mehrere unterschiedliche voneinander unabhängige Parameter existieren, verwendet man das ***Phasendiagramm***. Dazu trägt man die als Koordinatenachsen die jeweiligen Parameter, die das Systemverhalten beeinflussen, gegeneinander auf und erhält Landkarte des globalen Systemverhaltens in Abhängigkeit der gewählten Parameter. (Lück, 1995)

2.2 Das invertierte Pendel

Das invertierte Pendel erzeugt eine *nichtlinearer* Schwingung. Dabei besitzt das Pendel eine unten fest eingespannte Blattfeder mit Federkonstante k, welche über zwei horizontal in der Höhe h und der Auslenkung x_h angreifende Spiralfedern mit Federkonstante k_s un der Auslenkung $\hat{x}$ angetrieben wird. Am oberen Ende der Blattfeder lässt sich ein Zusatzgewicht M anbringen und der Winkel θ beschreibt den Winkel zwischen der Tangenten an der Pendelspitze und dem Lot. Weiterhin bezeichnet die Pendellänge L die Länge zwischen dem Anfang und Ende der Blattfeder, welche vom Winkel θ abhängt (siehe Abb: 2.3).

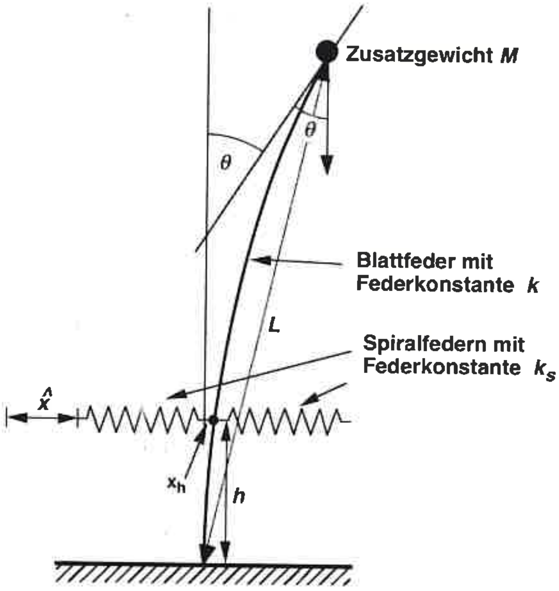


Abbildung 2.3: Skizze invertiertes Pendel Quelle?

2.2.1 Herleitung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung lässt sich über die wirkenden Drehmomente der Bauteile bestimmen:

$$\text{Pendel} + \text{Dämpfung} + \text{Blattfeder} - \text{Spiralfedern} - \text{Gewicht} = 0$$

$$\Rightarrow [M(L(\theta))^2\ddot{\theta}] + [2\delta\dot{\theta}] + [k\theta] - [hk_\mathrm{s}(x_\mathrm{h} + \hat{x}\cos(\omega t))] - [MgL(\theta)\sin(\theta)] = 0 \tag{2.6}$$

Dabei bezeichnet δ die Dämpfungskonstante und g die Erdbeschleunigung.
Im Folgenden wird die Pendellänge L als konstant angenommen, obwohl dieser nicht konstant ist und von der Art der verwendeten Masse M abhängt. Weiterhin wird

die Auslenkung x_h als vernachlässigbar klein angesehen und der Angriffswinkel der Spiralfedern wird als $\frac{\pi}{2}$ genähert, was bei genügend kleiner Höhe h gegeben ist. Daraus folgt die genäherte Form der Bewegungsgleichung:

$$ML^2\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + k\theta - MgL(\theta)\sin(\theta) = hk_\mathrm{s}\hat{x}\cos(\omega t) = T_0\cos(\omega t) \qquad (2.7)$$

Wobei T_0 als die Amplitude des periodisch angreifenden Drehmoments interpretiert werden muss. Hierbei ist noch zu erwähnen, dass durch die Näherungen die Lösung dieser Differentialgleichung nicht der tatsächlichen Trajektorien des Systems entsprechen, da diese stark von der Anfangsbedingung abhängen, dennoch ist eine globale Aussage über das Verhalten mit der genähreten Differentialgleichung möglich.
Zu den letzten beiden Termen lässt sich dann ein Potenzial definieren und durch Entwicklung des Cosinus für kleine Winkel θ (Kleinwinkelnäherung KWN) bis zur 2.Ordnung ergibt sich das Potenzial des *Duffing-Oszillator.* (Lück, 1995).

$$V(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 + MgL(\cos(\theta) - 1) \overset{\text{KWN}}{\approx} \frac{1}{2}(k - MgL)\theta^2 + \frac{1}{24}MgL\theta^4\ , V(0) = 0 \qquad (2.8)$$

Nein! Ist etwas mehr dahinter!

2.2.2 Symmetriebrechung

Symmetriebrechung stellt den Übergang des Pendels von einem Monostabilen System ($M < M_\mathrm{k}$) in ein bistabiles System ($M > M_\mathrm{k}$) dar. Dieser Übergang geschieht bei einer *kritischen Masse* $M_\mathrm{k} = \frac{k}{gL}$, dabei ist die Bewegung des Pendels in beiden Fällen Unterschiedlich und muss deshalb getrennt betrachtet werden. (Lück, 1995)

Das Potential ist ja immer noch symmetrisch!

"Entfaltung"

2.2.3 Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Masse

Bei einem nichtlinearen Pendel hängt, im Gegensatz zu einem linearen Schwingungsvorgang, die Resonanzfrequenz ω_r von der Schwingungsamplitude b ab $\Rightarrow \omega_\mathrm{r}(b)$. Unverändert bleibt dennoch die Schwingungsamplitude $b(\omega)$ gegenüber der Resonanzkurve eines linearen Oszillators bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen ω. (Lück, 1995) ?

1. $M < M_\mathrm{k}$ (Schwache Nichtlinearität)
   Pendel ist nach (2.2.2) monostabil. Der Vorgang lässt sich näherungsweise mit der Bewegungsgleichung eines Duffing-Oszillator nähern, wobei die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz ω_r von der Amplitude b berücksichtigt bleibt. Die Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall:

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta + \gamma\theta^3 = f_\mathrm{a}\cos(\omega t) \qquad (2.9)$$

   Dabei bezeichnet γ den Faktor der Nichtlinearität, ω_0 die Resonanzfrequenz des Systems ohne Nichtlinearität ($\gamma = 0$), f_a die Anregungsamplitude mit Anregungsfrequenz ω und δ die Dämpfung.
   Durch Betrachtung des Verlaufs der Resonanzkurve in der Nähe von $\omega_0 \rightarrow$ erhält man eine Gleichung dritter Ordnung für das Quadrat der Schwingungsamplitude b,

welche je nach Werten von f_a, γ, ω_0 und δ eine reelle oder zwei konjugierte komplexe Lösungen,

$$\left[\left((\omega^2-\omega_0^2)-\frac{3}{4}\gamma b^2\right)^2+(2\delta\omega)^2\right]b^2=f_a^2. \tag{2.10}$$

hat.

Dabei ist es einfacher die Gleichung nach ω aufzulösen, wobei zur Vereinfachung $\omega_0 = 1$ angenommen wird. Damit wird (2.10) zu:

$$\left[\left((\omega^2-1)-\frac{3}{4}\gamma b^2\right)^2+(2\delta\omega)^2\right]b^2=f_a^2 \tag{2.11}$$

Mit der Lösung für ω:

$$\omega_{1,2}^2 = 1-2\delta^2+\frac{3}{4}\gamma b^2 \pm \sqrt{\frac{f_a^2}{b^2}+4\delta^2\left[\delta^2-\left(1+\frac{3}{4}\gamma b^2\right)\right]} \tag{2.12}$$

Bei hinreichender kleinen Dämpfung δ gibt es zwei verschiedene eingeschwungene Zustände, da Lösung instabil wird (siehe Abb. 2.4c)).
die

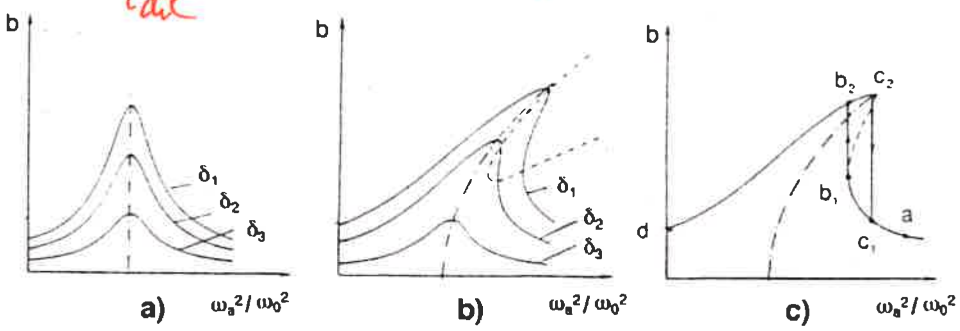


Abbildung 2.4: Resonanzkurven für eines Duffing-Oszillator Quelle?

a) linearer ($\gamma = 0$) b) nichtlinear c) Hysterese

Die Schwingungsdauer T hängt hierbei logarithmisch von der Amplitude b mit dem Zusammenhang

$$T = T_0 + T_1 \log(b) \tag{2.13}$$

ab.

Dies geht aus experimentellen Daten von (Lück, 1995) hervor, wobei T_0 und T_1 Näherungsparameter sind. (Lück, 1995)

2. $M > M_k$ (Starke Nichtlinearität)
   Das Pendel ist in diesem Fall nach (2.2.2) bistabil und besitzt zwei stabile Ruhelagen. Durch die Verringerung von großen Antriebsfrequenzen ω entstehen nach Ende des Einschwingverhaltens nacheinander subharmonische Schwingungen mit einer Periodenverdopplungskaskade ($T_n = 2^n T = 2^n \frac{2\pi}{\omega}$), obwohl sich das Pendel unterhalb einer kritischen Frequenz ω_k chaotisch verhält. Dieses Verhalten ~~wird auch~~ Bifurkationsszenario genannt. (Lück, 1995).
   ist ein Beispiel für ein

2.2.4 Differenzier-Schaltung

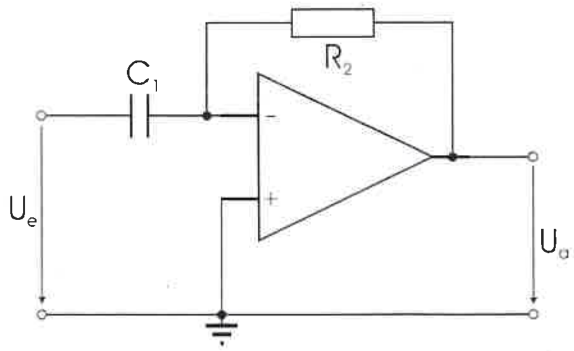


Abbildung 2.5: Differenzier-Schaltung

Quelle?

Bei einer Differenzier-Schaltung wird nur ~~die~~ die Änderung der Eingangsspannung zu einer Ausgangspannung verarbeitet. Dabei wird ein Kondensator am Eingang in Reihe und in Widerstand Parallel zwischen Eingang und Ausgang des Operrationsverstärker geschaltet (siehe Abb. 2.5). Durch den Kondensator fließt nur Strom, wenn sich die Eingangsspannung ändert, wobei die Ausgangsspannung proportional zur Änderungsgeschwindigkeit der Eingangsspannung ist. Durch den Operationsverstärker wird dann das Signal verstärkt, um dieses Signal besser über ein angeschlossenes Messgerät (z.B. Oszilloskop) betrachten zu können. (E. Hering, 2014).

Inwieweit weicht die exp. Schaltung von Abb. 2.5 ab?

2.2.5 Aufbau Pendel

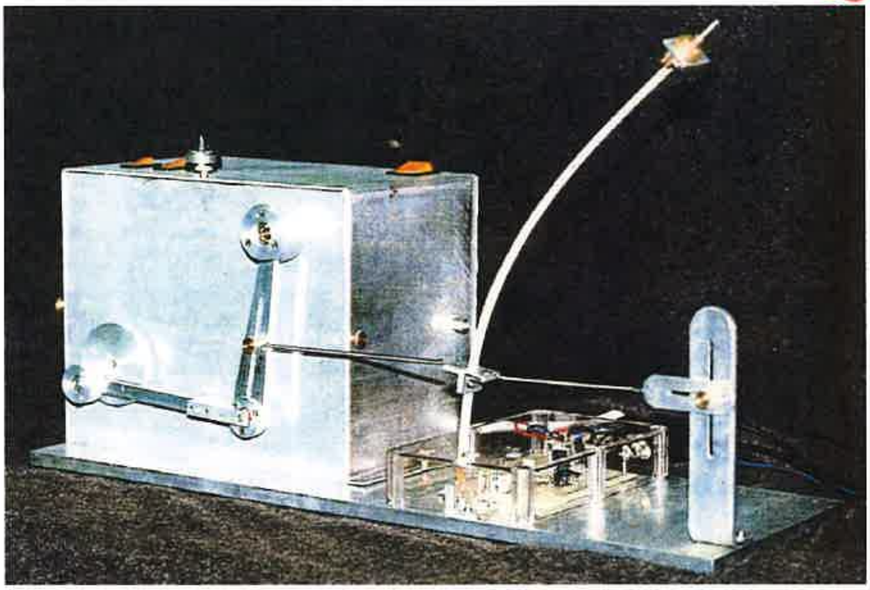


Abbildung 2.6: Aufbau des invertierten Pendels

Quelle

Hierbei besteht das Pendel aus einer:

- 5 mm starken Aluminium-Grundplatte
- 1 cm x 15 cm x 40 cm lange Blechstreifen aus einer Messing-Legierung mit hohem Kupferanteil, Dehnungsmessstreifen auf beiden Seiten (DMS, Widerstand abh. von der Dehnung) knapp oberhalb der Befestigung → Blattfeder
- Spiralfedern mit Federkonstante $k = 027$ N/cm
- Schrittmotor im Gehäuse mit 200 bzw. 400 Schritten (Halbschrittbereich)
- Multifunktionskarte Typs DAS 1602 der Firma Keithley (Taktimpulsgeber für Schrittmotoren)

Mit diesem Aufbau sind bis zu ca 5 Umdrehungen/s möglich, wobei die Antriebskraft durch das Verändern des Angriffspunktes der Spiralfeder am Übertragungshebel variierbar ist.

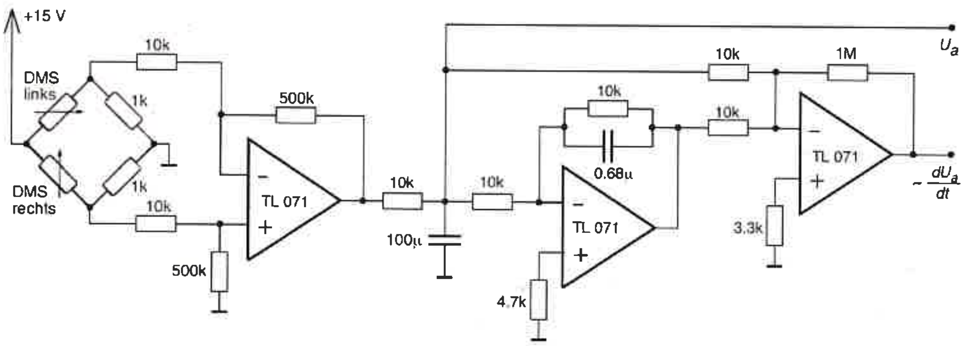


Abbildung 2.7: Messschaltung des invertierten Pendels

Hierbei wird in der Messschaltung (siehe Abb. 2.7) für höhere Genauigkeit die zwei DMS in einer Brückenschaltung verschalten un die Spannungsdifferenz von ihnen zu messen, wobei die Spannung dann proportional zur Pendelauslenkung θ ist. Für das Abgreifen der Geschwindigkeit als zweite Phasenraumvariable werden die Spannungen über eine Operationsverstärker-Schaltung differenziert. Die Spannungen werden dann einem im PC eingebauten Analog-Digital-Wandler-Karte gemessen, wobei die Messkarte über LABVIEW (Messprogramm) gesteuert wird (Lück, 1995)

2.3 Der Shinriki-Oszillator

2.3.1 Differentialgleichung und Aufbau des Shinriki-Oszillator

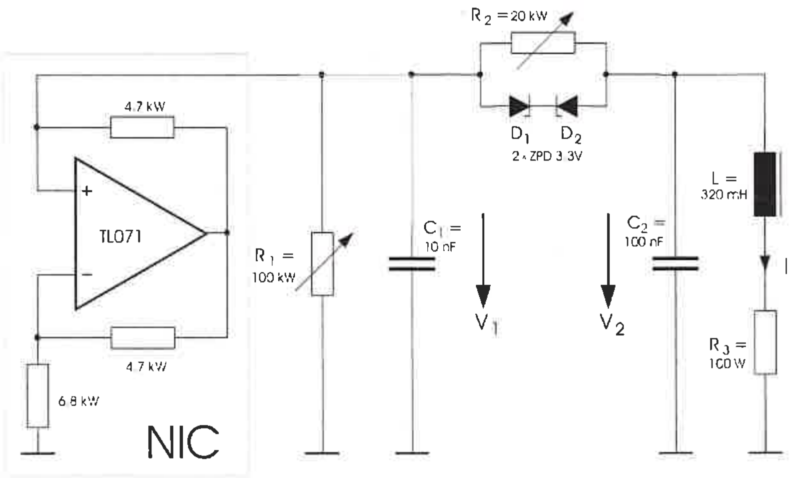


Abbildung 2.8: Schaltplan des Shinriki-Oszilator

Der Shinriki-Oszillator besteht aus einem negativen Impedanzkonverter (NIC) und einem LC-Parallelschwinkreis, die durch ein gegeneinader geschaltetes Zenerdiodenpaar und dem parallel geschalteten R_2, gekoppelt sind.
Die Leitwertfunktion des Kopplungsglied ist $f(V)$ und beschreibt den Strom, der über das Kopplungsglied fließt. R_{NIC} ist der Widerstand des NIC innerhalb des relevanten Intervalls von -8,1 V bis 8,1 V (Lück, 1995).
Damit und mit den Kirchhoffschen Regeln lassen sich nun die DGLs aufstellen:

$$C_1\dot{V}_1 = V_1\left(\frac{1}{R_{\mathrm{NIC}}} - \frac{1}{R_1}\right) - f(V_1 - V_2) \quad (2.14)$$

$$C_2\dot{V}_2 = f(V_1 - V_2) - I_3 \quad (2.15)$$

$$L\dot{I}_3 = -I_3 R_3 + V_2 \quad (2.16)$$

2.3.2 NIC und Schwingung des Shinriki-Schaltkreis

Ein NIC benutzt einen Operationsverstärker, um einen negativen ohmschen Wiederstand zu simulieren. Hierbei wird der gewünschte Widerstand einfach zwischen dem (-) Eingang des OpAmp und GND geschaltet. Durch den OpAmp wird ein Widerstand mit negativem Wert des eben eingesetzten simuliert.
Daher mus das System nicht mehr von außen zur Schwingung angeregt werden.

2.3.3 Geräusche einer Bifurkation

Eine Bifurkation ist eine verdopplung der Periodendauer, d.h. die Frequenz wird halbiert. Dies verursacht einen tieferen Ton.

3 Messprotokoll

3.1 Versuchsdurchführung invertiertes Pendel

Bifurkationsdiagramm

Vermessung der Gleichgewichtslage θ_g in Abhängigkeit der Masse M. Dabei wird die Gleichgewichtslage über eine Spannung U_a, welche generiert wird durch in (2.2.5) beschriebenen Schaltkreis erzeugt wird. Dabei wird angenommen (siehe (2.2.5)), dass U_a proportional zu der Auslenkwinkel im Gleichgewicht θ_g ist und damit der generelle Verlauf der Graphen identisch ist.

- Messfehler Waage: $s_a = 0,005\,g = s_r$
- Messfehler Multimeter: $s_a = 0,00005$ V$= s_r$
  Durch starke Schwankungen am Multimeter verändert sich der Wert des Fehlers des Multimeters mit der Zunahme der Masse M
- Messfehler Stoppuhr: $s_a = 0,01$ s $= s_r$
- Länge des Pendels (mit Stahlmaßstab): $l = 37$ cm
- Gewicht Feststellschraube: $m_s = 3,14$ g

Datei: BifurkationPendel.csv

Verifikation Ergebnis:

Freie Schwingung des Pendels bei einer Auslenkung bis ca. 1V. Messung der Schwinguns-dauer T (10fach) mit Smartphone (Google Pixel 5). Über die Schwingungsdauer wird dann die Federkonstante k des Pendels berechnet.

Datei: Schwingunsdauer_woMass.csv; Messung ohne Masse.
Datei: Schwingunsdauer_wMass.csv; Messung mit 12,58 g.

Grobe Auswertung: Kritische Masse $M_k \approx 19,3$ g wurde durch Überschlagsrechnung bestätigt.

Schwache Nichtlinearität

Montage Dämpfungssegel, wobei dabei zu beachten ist, dass die kritsche Masse $M_k \approx 19,3$ g nicht überschritten wird, damit man im monostabilen Zustand des Pendels bleibt.

- Masse Dämfungssegel: $m = 4,4$ g
- Zusätzlich montierte Masse: $m = 10,42$ g

Die Masse $M_{total} = 14,41$ g bleibt hierbei über den ganzen Versuchsteil unverändert und das Dämpfungssegel befestigt über den kompletten restlichen Versuchsverlauf.

a) Für die Amplitudenabhängigkeit des Pendels wird dieses einmal ausgelenkt und dessen Schwingung über das Messprogramm aufgezeichnet.

Datei: 06_09_2021_14_41_30_G11_pendel_0.dat

b) Messung der Hystereseschleife der Schwingung mit Messprogramm.

Einstellungen: 2000 Steps; Start: 0Hz; End: 1,1Hz
Datei: 06_09_2021_14_30_52_06_09_2021_14_30_52_G11_pendel_resonanz___0.dat

Starke Nichtlinearität

Veränderung der Masse ist über die kritische Masse für einen bistabilen Zustand. Beachte, das Dämpfungsblech aus (2a) immer noch mit befestigt.

- Zusätzlich montierte Masse: $m = 19,44$ g

Diese Masse $M_{\text{total}} = 23,84$ g bleibt auch über diesen Versuchsteil unverändert.

a) Variation der Antriebsfrequenz ω in kleinen Schritten zur Lokalisierung der Schwingungszustände. Aufnahme der Attraktoren und Leistungsspektren mit dem Messprogramm.

Labview Absturz bei 0,517 Hz

Datei: Datum_Uhrzeit_G11_pendel_0.dat (Mehrere Files mit selben Namen in zugehörige Ordner gespeichert)

Neustart bei 0,52 Hz quasichaotisch bei $\omega \approx 0,411$ Hz

Datei: Datum_Uhrzeit_Richter_pendel_0.dat (Wegen Neustart Dateienbennung verändert gewesen)

Frequenzen den einzelnen Schwingungszuständen werden den Daten entnommen.

b) Verdeutlichung der Empfindlichkeit der Anfangsbedingung mit Ruhelage auf der linken Seite (Pendel hängt auf die linke Seite). Aufnahme von drei Zeitserien Trajektorien (eine mehr als benötigt) mittels des Messprogramms.

- Anregungsfrequenz ω: 0,411Hz

Strittmotor in Anfangspos. (Armstelleung ganz unten)

Datei: Datei: Datum_Uhrzeit_G11_pendel_0.dat (Mehrere Files mit selben Namen in zugehörige Ordner gespeichert)

3.2 Versuchsdurchführung Shinriki

Einstellfehler der Widerstände

$$s_{\mathrm{R}_1} = 1\,\mathrm{k}\Omega \tag{3.1}$$

$$s_{\mathrm{R}_2} = 2\,\mathrm{k}\Omega \tag{3.2}$$

a) Phasendiagramm
Wir stellen einzelne Paramterwerte für R_2 und R_1 ein und varieren je nach eingestellte~~n~~ m Parameter mit R_2 oder R_1 bis das Phasendiagramm vollständig abgefahren ist ab. Widerstände schwer ablesbar, weswegen Angaben fehlerhaft sein können, R_1 konnte hierbei genauer bestimmt werden. Alle Werte werden in kΩ angeben.

Par		Var	Per1	Per2	Per4	Chaos1	Per3	Chaos2	Double
R_2	16,50	R_1	13,40	20,10	21,10	21,46	22,20	22,30	24,62
R_2	13,00	R_1	16,16	23,68	25,19	25,86	26,72	26,82	28,98
R_1	55,00	R_2	7,88	8,52	8,72	8,76	8,92	8,96	9,16

b) Schnitt im Phasendiagramm
Wir schneiden bei fixierten $R_2 = 8,4$ kΩ durch das Phasendiagramm. Daten werden elektronisch erstellt.

c) Bifurkationsdiagramm
Nutzen oben verwendeten Schnitt für diese Aufgabe zum Erstellen eines Bifurkationsdiagramms. Dies geschieht wieder elektronisch.

d) Großmann-Feigenbaum-Konstante
Wir vermessen nun gesondert die einzelnen Bifurkationen durch Variation von R_1 mit gleichen R_2 aus (b). Alle Werte werden kΩ angegeben. Hierbei steht der Index i in r_i für die einzeln Bifurkationen.

r_1	r_2	r_3
59	65,6	67,6

Um welche Bifurkationen handelt es sich? Von welche auf welche Periode?

e) Einbettungstheorem
Aufnahme des Originalattraktors bei R_2 wie in (b) und $R_1 = 51$ kΩ und $\delta t = 60$ n(?); Rekonstruktion mithilfe des entsprechenden Programmteils mit qualitativen Übereinstimmung der Form des rekonstruierten Attraktors mit dem Originalattraktor.

4 Auswertung und Diskussion

4.1 invertierteres Pendel

4.1.1 Bifurkationsdiagramm und kritische Masse

?

Über den Versuch wurde die Auslenkung θ bzw. die Spannung U_a am Digitalmultimeter links ($U_{\mathrm{a,l}}$) und rechts ($U_{\mathrm{a,r}}$) gemessen. Dabei ergeben sich erst ab einer gewissen Masse, eine Auslenkung links oder rechts hier schematisch in dem Bifurkationsdiagramm dargestellt (Abb 4.1), welches auch symmetrisch gegenüber Periode 1 ist.

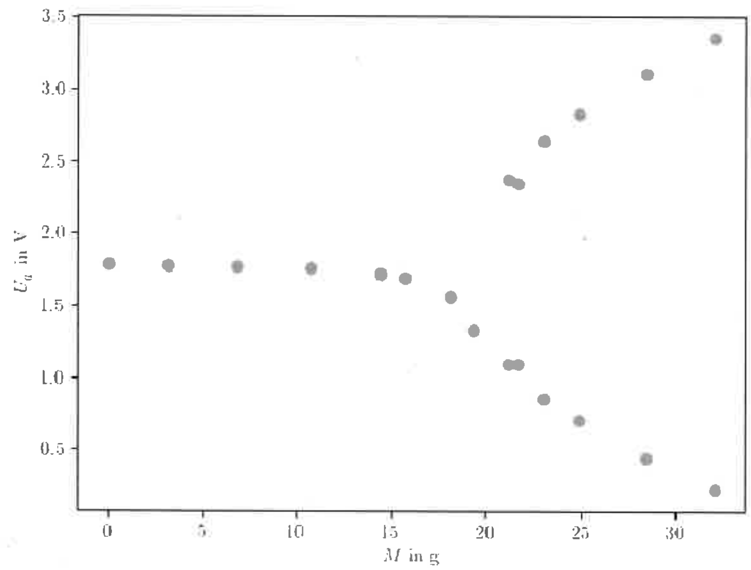


Abbildung 4.1: Bifurkationsdiagramm in Abhängigkeit der Masse

Um die kritische Masse M_k zu bestimmen, wird die Differenz $\Delta U_\mathrm{a} = U_{\mathrm{a,l}} - U_{\mathrm{a,r}}$ bestimmt und diese quadriert, also $(\Delta U_\mathrm{a})^2$. Der Fehler ergibt sich dann aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, wobei der Ablesefehler s_a gleichzeitig als Restfehler s_r abgeschätzt wird.

Daraus folgt:

$$(\Delta U_\mathrm{a})^2 = (U_{\mathrm{a,l}} - U_{\mathrm{a,r}})^2 \tag{4.1}$$

$$s_{\mathrm{U_a}} = \sqrt{s_\mathrm{a}^2 + s_\mathrm{r}^2} = \sqrt{2}s_\mathrm{a} \tag{4.2}$$

$$s_{(\Delta \mathrm{U_a})^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial((\Delta U_\mathrm{a})^2)}{\partial U_{\mathrm{a,l}}} s_{\mathrm{U_a}}\right)^2 + \left(\frac{\partial((\Delta U_\mathrm{a})^2)}{\partial U_{\mathrm{a,r}}} s_{\mathrm{U_a}}\right)^2} = 2\sqrt{2}s_{\mathrm{U_a}}|\Delta U_\mathrm{a}| = 4s_\mathrm{a}|\Delta U_\mathrm{a}| \tag{4.3}$$

M/g	$U_{\mathrm{a,l}}$/V	$U_{\mathrm{a,r}}$/V	s_a/V	$s_{\mathrm{U_a}}$/V	$(\Delta U_\mathrm{a})^2$/V^2	$s_{(\Delta \mathrm{U_a})^2}$/V^2
0,00	1,78606	1,78606	0,00005	0,00007	0,0	0,0
3,14	1,78046	1,78046	0,00050	0,00071	0,0	0,0
6,78	1,77300	1,77300	0,00500	0,00707	0,0	0,0
10,75	1,76000	1,76000	0,00500	0,00707	0,0	0,0
14,42	1,72000	1,72000	0,05000	0,07071	0,0	0,0
15,72	1,70000	1,70000	0,05000	0,07071	0,0	0,0
18,10	1,57000	1,57000	0,05000	0,07071	0,0	0,0
19,36	1,33000	1,33000	0,05000	0,07071	0,0	0,0
21,19	1,10000	2,38000	0,05000	0,07071	1,6	0,3
21,67	1,10000	2,35000	0,05000	0,07071	1,6	0,3
23,05	0,86000	2,65000	0,05000	0,07071	3,2	0,4
24,88	0,71000	2,83000	0,05000	0,07071	4,5	0,4
28,45	0,45000	3,11000	0,05000	0,07071	7,1	0,5
32,12	0,23000	3,36000	0,05000	0,07071	9,8	0,6

Tabelle 4.1: Messreihe Auslenkung Gleichgewichtslage

Die Daten werden dann mit dem Numpy-Modul linear gefittet, dabei werden nur die letzten sieben Datensätze verwendet werden, da sich $(\Delta U_\mathrm{a})^2$ erst ab da Veränderung zeigt (siehe Abb. 4.2). Dabei ergibt sich die gefittete Funktion mit den jeweiligen Fehlern ermittelt: zu :

$$(\Delta U_\mathrm{a})^2 = cM + b = 0,77\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{g}}M - 14,73\ \mathrm{V}^2 \tag{4.4}$$

$$c = (0,77 \pm 0,02)\ \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{g}},\ b = (-14,73 \pm 0,48)\ \mathrm{V}^2 \tag{4.5}$$

Daraus ergibt sich die kritische Masse M_k, wenn man $(\Delta U_\mathrm{a})^2 = 0$ setzt. Woraus widerrum mit Fehlerfortpflanzung folgt:

$$M_\mathrm{k} = \frac{b}{c} = 19,22\ \mathrm{g},\ s_{\mathrm{M_k}} = \sqrt{\left(\frac{s_\mathrm{b}}{c}\right)^2 + \left(\frac{bs_\mathrm{c}}{c^2}\right)^2} = 0,78\ \mathrm{g} \tag{4.6}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_\mathrm{k} = (19,22 \pm 0,78)\ \mathrm{g}} \tag{4.7}$$

Die Federkonstante k und dessen Fehler ergibt sich dann mit dem Fehler der Länge L (gemessen mit Stahlmaßstab), wobei die Erdbeschleunigung fehlerfrei angenommen wird:

$$L = 0,37 \text{ m} \tag{4.8}$$

$$s_{\mathrm{L}} = \sqrt{s_{\mathrm{a}}^2 + s_{\mathrm{r}}^2} = \sqrt{(5 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2 + (5 \cdot 10^{-5} \text{ m} + \cdot 10^{-4} * L)^2} = 0,0006 \text{ m} \tag{4.9}$$

$$M_{\mathrm{k}} = \frac{k}{gL} \Leftrightarrow k = M_{\mathrm{k}} g L = 0,069762834 \text{ Nm} \tag{4.10}$$

$$s_{\mathrm{k}} = \sqrt{(gLs_{\mathrm{M_k}})^2 + (M_{\mathrm{k}} g s_{\mathrm{L}})^2} = 0,002833425 \text{ Nm} \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = (0,070 \pm 0,003) \text{ Nm}} \tag{4.12}$$

Hierbei ist anzumerken, dass k nicht die Einheit einer Federkonstante hat sondern eines Drehmoments. Die Vermutung liegt mit einen Blick auf Kapitel 2.2.1 beschrieben Differentialgleichung, dass sich bei k eigentlich um das Direktionsmoment handeln muss, wobei das Direktionsmoment der Federkonstante k bei longitudinalen Auslenkungen entspricht.

Zur Verifikation des Ergebnisses haben wir mehrfache (10mal) die Schwingungsdauer des Pendels mit der befestigten Masse $M = 12,58$ g gemessen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_10/s	19,14	19,28	18,88	19,18	19,00	18,66	19,12	19,01	19,20	19,29

Tabelle 4.2: Messreihe Schwingungsdauer

Es wird nun der Mittelwert über eine Periode genommen, wobei der Ablesefehler der digitale Messuhr auch gleichzeitig als Restfehler abgeschätzt wird und der Fehler der einen Periode mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet wurde. Daraus folgt:

$$T = \overline{T} = \frac{1}{10} \sum_{\mathrm{n}=1}^{10} \frac{T_{10,\mathrm{n}}}{10} = 1,9076 \text{ s} \tag{4.13}$$

$$s_{\mathrm{T_{10}}} = \sqrt{s_{\mathrm{a}}^2 + s_{\mathrm{r}}^2} = \sqrt{2} s_{\mathrm{a}} \Rightarrow s_{\mathrm{T}} = \frac{s_{\mathrm{T}}}{10\sqrt{10}} = \frac{s_{\mathrm{a}}}{10\sqrt{5}} = 0,000447214 \tag{4.14}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = (1,9076 \pm 0,0004) \text{ s}} \tag{4.15}$$

Über Federkonstante (Direktionsmoment) k lässt sich dann die Schwingungsdauer T wie folgt berechnen (LeifiPhysik, 2021), wobei für den Fehler von T der Fehler der Masse und Länge vernachlässigt wird:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{k - MgL}} = 1{,}671383586 \text{ s} \tag{4.16}$$

$$s_{\mathrm{T}} = \frac{\pi M L^2 s_{\mathrm{k}}}{(k - MgL)^2 \sqrt{\frac{ML^2}{k-MgL}}} = 0{,}1030091566 \tag{4.17}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = (1{,}67 \pm 0{,}10) \text{ s}} \tag{4.18}$$

Das Ergebnis zeigt, dass die bestimmte Federkonstante k nahe an den tatsächlichen Wert der Blattfeder liegt. Die möglichen Abweichung könnten von denen in Kapitel 2.2.1 gemachten Näherungen oder dem vorangegangenen Fit verursacht werden. Auch könnte das Alter des Messaufbaus seinen Teil zu der Ungenauigkeit beigetragen haben. Dennoch ist das Ergebnis im Rahmen unserer Möglichkeiten akzeptabel.

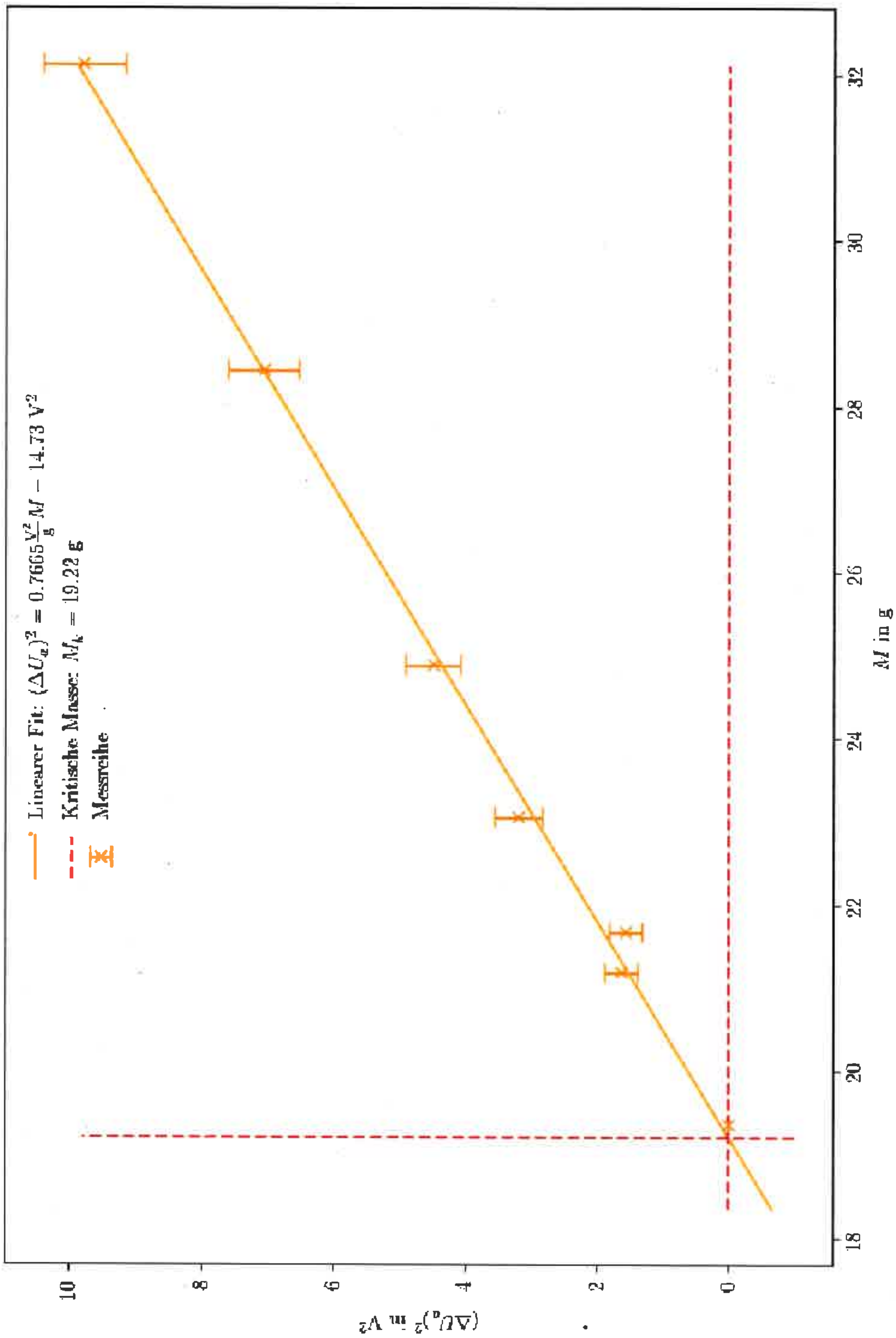


Abbildung 4.2: Linerar Fit der Messreihe

4.1.2 Schwache Nichtlinearität

a) Für die experimentelle Auswertung der Amplitudenabhängigkeit der Schwingungsdauer T des Pendels werden ~~wird aus~~ den aufgenommenen Daten die Maxima ~~von~~ der Spannung U_a bestimmt, sowie der zeitlichen Abstand Δt zwischen zwei Maxima ermittelt. ~~Bei den~~ Der Abstand Δt entspricht dann der Periodendauer T des Pendels. Da mehrere Werte für T verhäuft vorkamen, haben wir die Daten von T gruppiert und über die zugehörigen Maxima der Spannung $U_{a,max}$ den Mittelwert gebildet.

T/s	$U_{a,max}$/V
1.90	2.395000
2.10	2.231000
2.20	2.045000
2.30	1.881600
2.32	1.723000
2.36	1.540000
2.40	1.627824
2.44	1.565100

Tabelle 4.3: Messreihe Schwingungsdauer in Amplitudenabhängigkeit

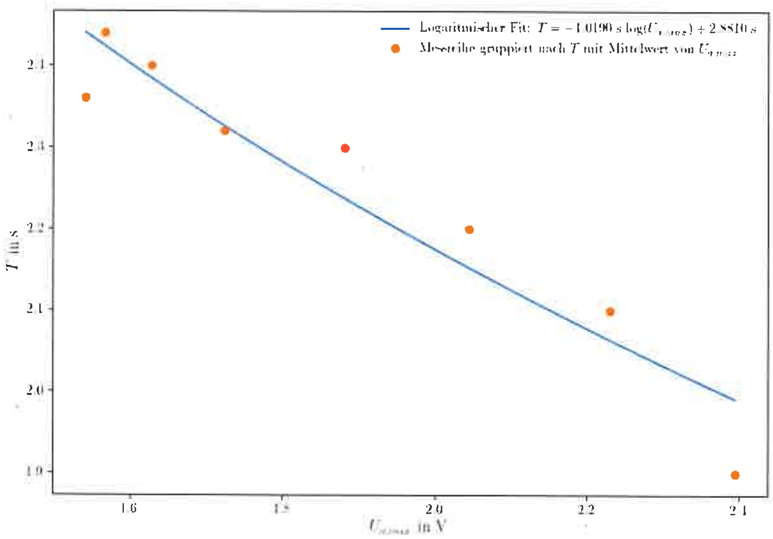


Abbildung 4.3: Ampliudenabhängigkeit der Schwingungsdauer mit logarithmischen Fit

Bei der grafischen Auswertung (siehe Abb.4.3) erkennt man deutlich einen Abwärtstrend. Ein logarithmischer Fit wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben, gibt dann die Funktion:

$$T = (-1,0190 \text{ s}) \log(U_{a,max}) + (2.8810 \text{ s}). \tag{4.19}$$

Dieser Fit ist aber noch nicht a Aussagekräftig, da die Messwerte auch einen linearen Fit tt zulassen würden, weswegen mehr Messpunkte gebraucht werden würden.

b)

max

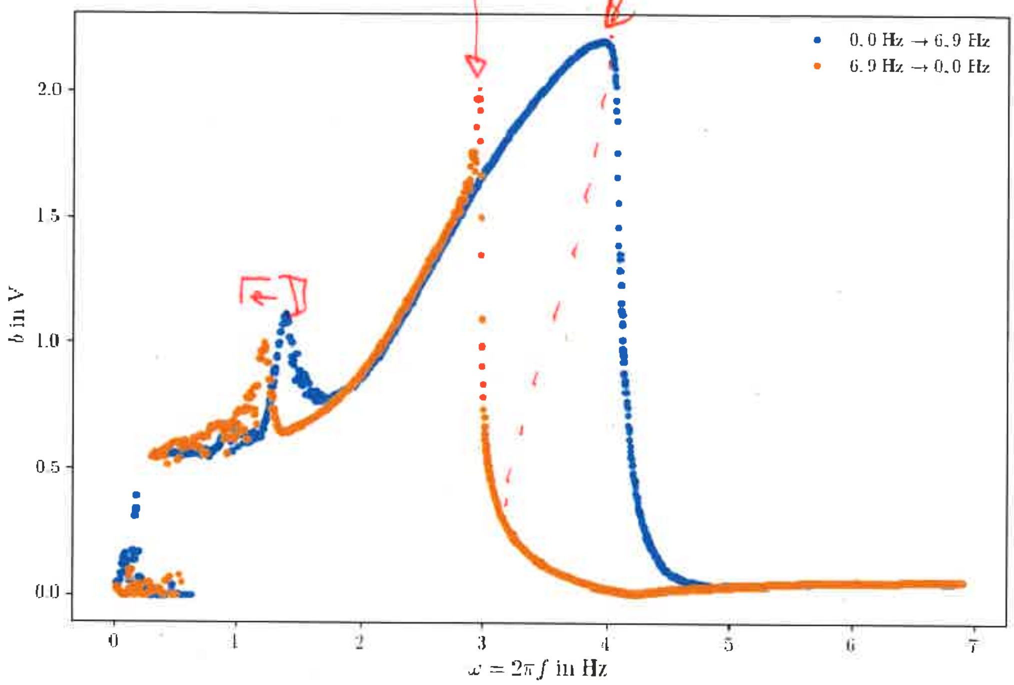


Abbildung 4.4: Resonanzkurve

Bei der Messung der Resonanzkurve erkennt man grob verschiedene Bereiche, dabei beschreibt die Aufwärtsbewegung die blaue Kurve (0,0 Hz → 6,9 Hz) und die Abwärtsbewegung die orange Kurve (6,9 Hz → 0,0 Hz):

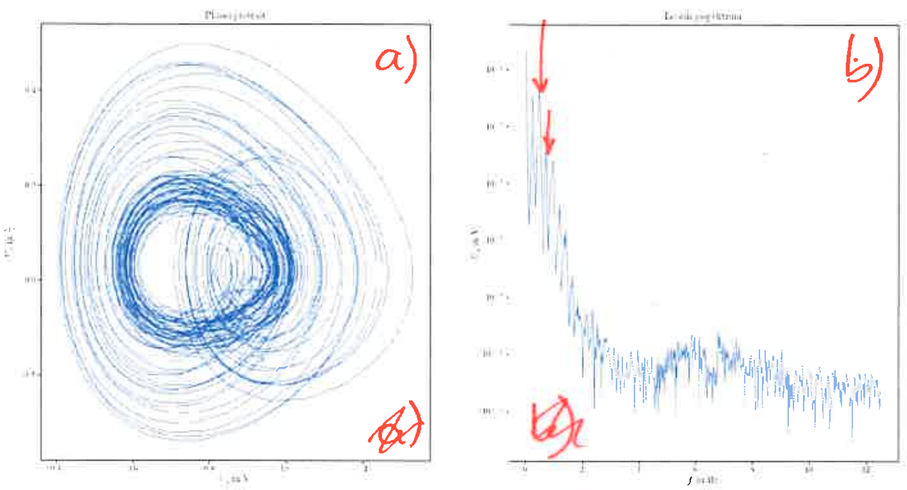
1) 0,0-0,5 Hz
   Die Drehfrequenz des Schrittmotors reicht nicht aus um das Pendel anzuregegen.
2) 0,5-2,0 Hz
   Erregerfrequenz regt Pendel zum schwingen an. Vereinzelte Zacken zeigen dabei die Schritte, welche der Schrittmotor macht beim Antreiben.
3) 2,0-3,0 Hz ↔ Sprache?
   Anstieg der Amplitude und Fall Abwärtsbewegung erreicht die Kurve ihr Maximum. ?
4) 3,0-4,0 Hz
   Anstieg der AUfwärtsbewegung zu ihrem Maximum, während die Abwärtsbewegung in den instabilen Zustand (siehe Abb. 2.4) übergeht.
5) 4,0-5,0 Hz
   Abfallen der Aufwärtsbewegung und übergehen der Aufwärtsbewegung in die Abwärtsbewegung. ?
6) 5,0-6,9 Hz
   Pendel kommt Drehfrequenz des Motors nicht mehr hinterher und schwingt nicht mehr

 # Rückweg (orange?)

4.1.3 Starke Nichtlinearität

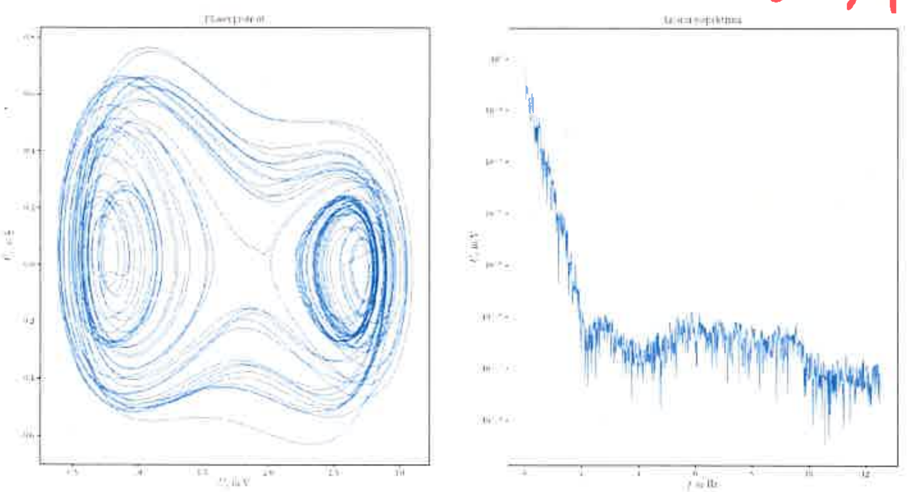
a) Nun werden die einzelnen Schwingungszustände bei verschiedenen Frequenzen untersucht. Wobei mit einer hohen Frequenz begonnen wurde und dann schrittweise verkleinert wird. Dabei ist durch den Ausfahl des Messprogramms zwei Messreihen erstellt, wodurch sich der Attraktoren verändert hat.

#A



(a)

Abbildung 4.5: 0,233 Hz Mess bei f=; mit Attraktordark. (a) und Leistungsspektr. (b).



Bitte vollst. Sätze

Abbildung 4.6: 0,411 Hz

Chaotisches Verhalten, was in Leistungsspektrum auch zu erkennen ist. Weiterhin erkennt man die zwei möglichen Schwingungen auf der rechten und linken Seite der Pendels. In

Bitte Verweis auf Abb.!

der Mitte ist dabei ein Sattelpunkt des Attraktors. Die Abb. 4.5 beschreibt dabei die Schwingung auf der linken Seite.

Bitte jedes Bild ansprechen.

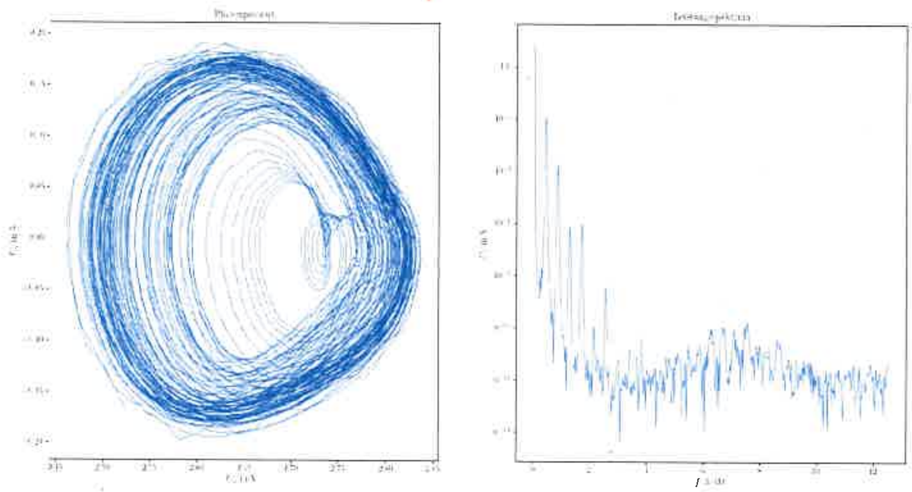


Abbildung 4.7: 0,847 Hz

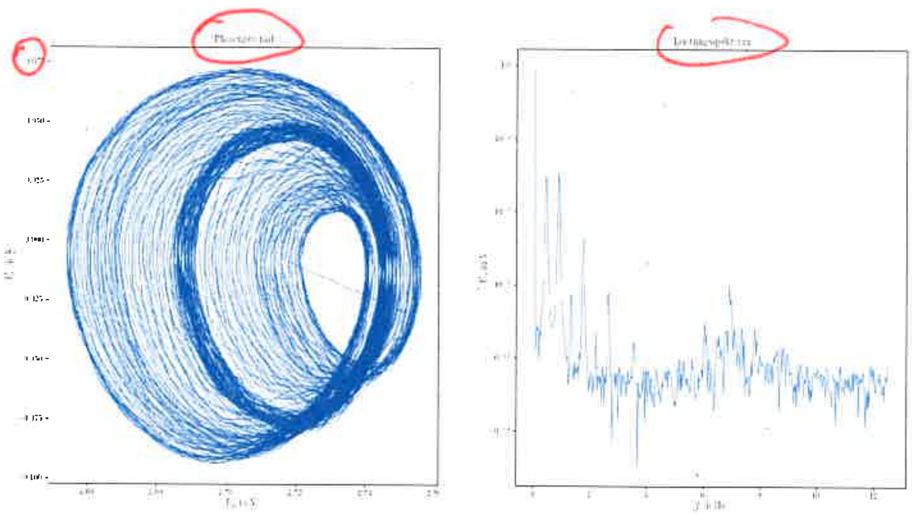


Abbildung 4.8: 0,882 Hz

?? in Abb. 4.8?

Hier erkennt man schon die Periode 2 in leichter Ausprägung, dennoch ist das Verhalten weiter chaotisch, wobei im Leistungsspektrum mehrere deutliche Peaks zu erkennen sind.

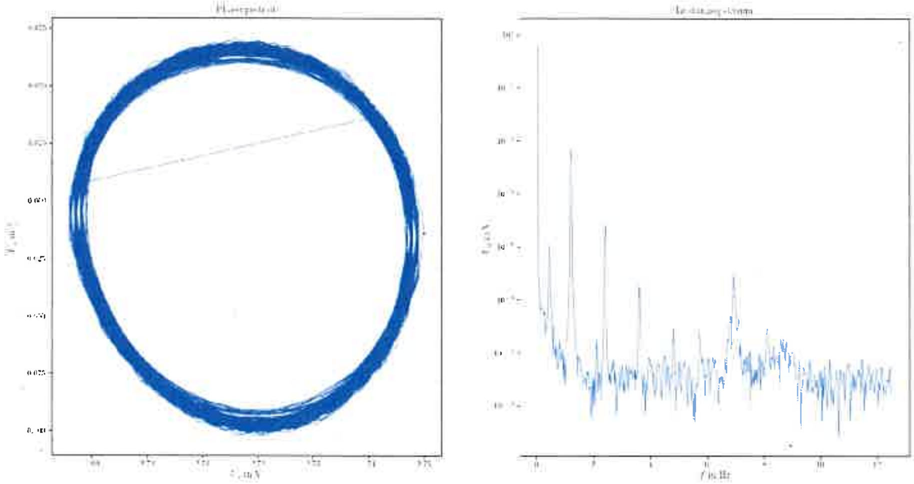


Abbildung 4.9: 1,201 Hz

Abb.

Deutliches Ausbilden der Periode 1 gut zu erkennen an den definierten Peaks im Leistungsspektrum.

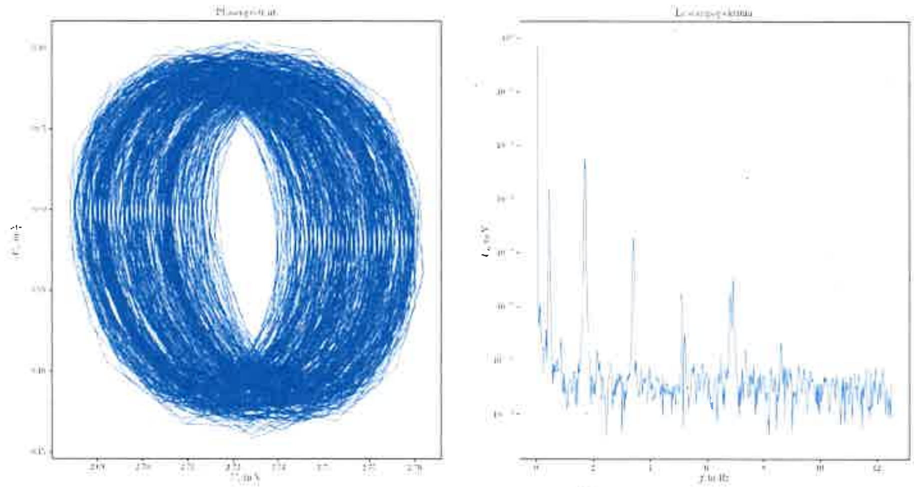


Abbildung 4.10: 1,702 Hz

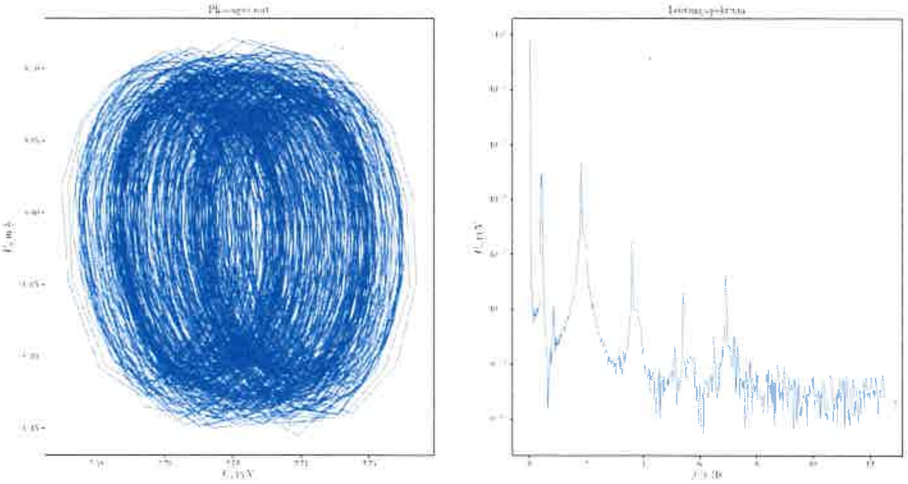


Abbildung 4.11: 1,802 Hz

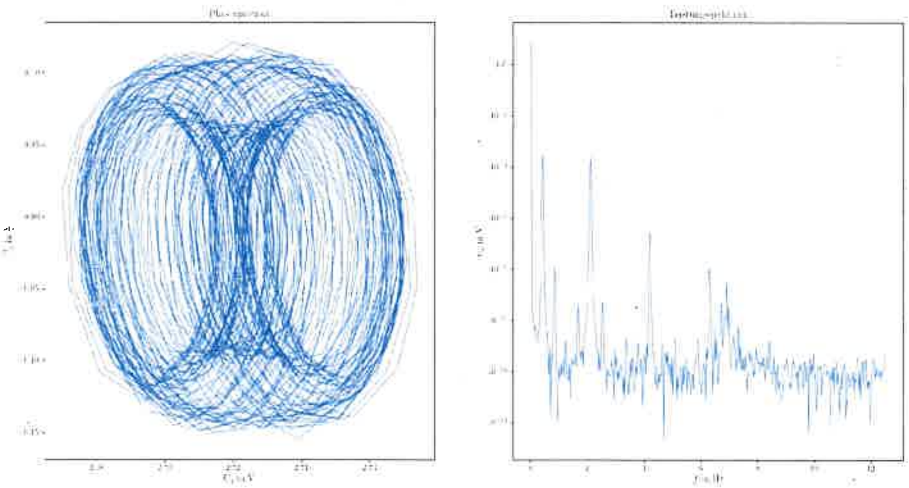
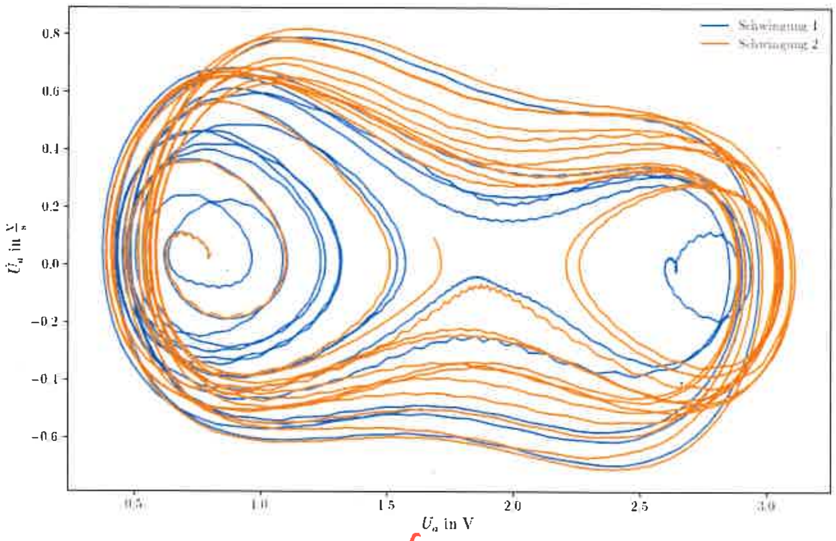


Abbildung 4.12: 2,100 Hz

Ausprägen des Torusattraktors bei höheren Frequenzen, wobei dabei das Leistungsspektrum unverändert an der Anzahl der Peaks bleibt, aber die Ausprägung ändert sich.

b) ∀ überschrift!?



des

Abbildung 4.13: Schwingung kompletten Datensatz dargestellt – ΔT = ?

s

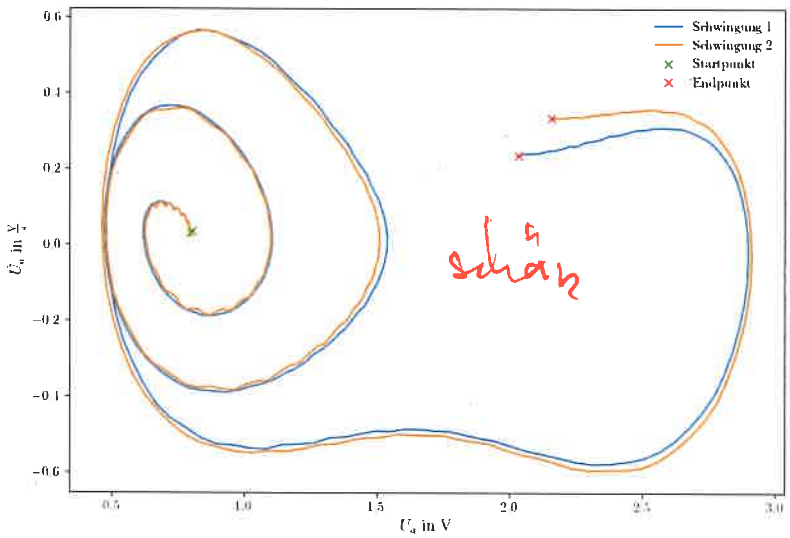


Abbildung 4.14: Schwingung mit Start und Endpunkt. ΔT = ?

In Abbildung 4.14 erkennt man dann deutlich, dass die Schwingungen sich beim zweiten Umschlag auf die linken Seite voneinander unterscheiden.

4.2 Auswertung zum Shinriki-Oszillator

4.2.1 Phasendiagramm

Im Folgenden wurde ein Phasendiagramm des Shinrinki-Oszillators mit den Werten R_1 und R_2 erstellt. Dafür wurden Schnittpunkte der Phasenübergänge ermittelt und mithilfe eines Python-Skripts wurde diese Punkte mit einer Funktion verbunden. Daraus ergibt sich folgende Abbildung, welche die Übergänge der verschiedenen Phasen abhängig von den Werten der Widerstände darstellen. Jede Line stellt dabei einen Phasenübergang dar.

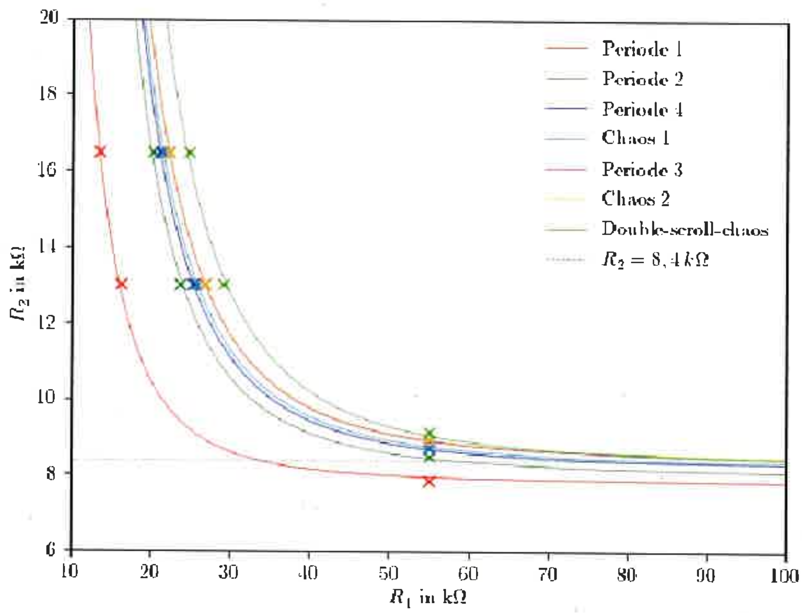


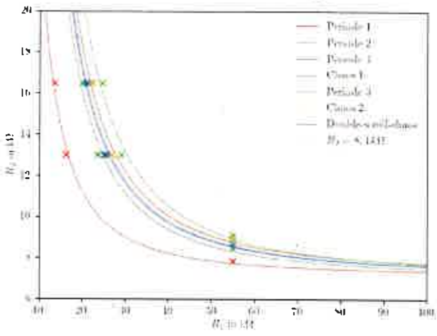
Abbildung 4.15: Phasendiagramm

Die Funktion welche benutzt wurde, um die Punkte zu verbinden ist:

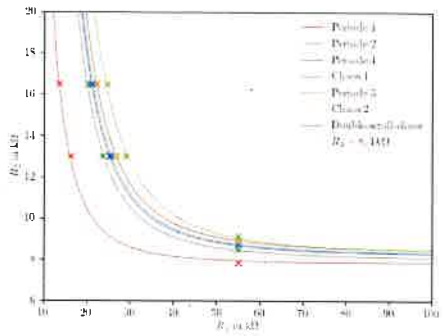
meinen Sie: $R_2 = \frac{a}{R_1} + R_0$

$$f = \frac{a}{x^3} + b \tag{4.20}$$

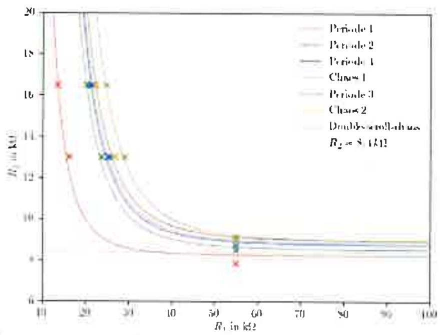
Diese Funktion wurde ausgewählt, indem mehrere verschiedene Funktionen ausprobiert wurden. Nachfolgend ausgewählte Funktionen zum Vergleich, um die Auswahl nachvollziehen zu können.



(a) $f = \frac{a}{x^2} + b$



(b) $f = \frac{a}{x^3} + b$



(c) $f = \frac{a}{x^4} + b$

engagiert! ☺

Abbildung 4.16: Vergleich verschiedener 'Fitting'-Funktionen

Anbei noch die errechneten Parameter für die einzelnen Funktionen:

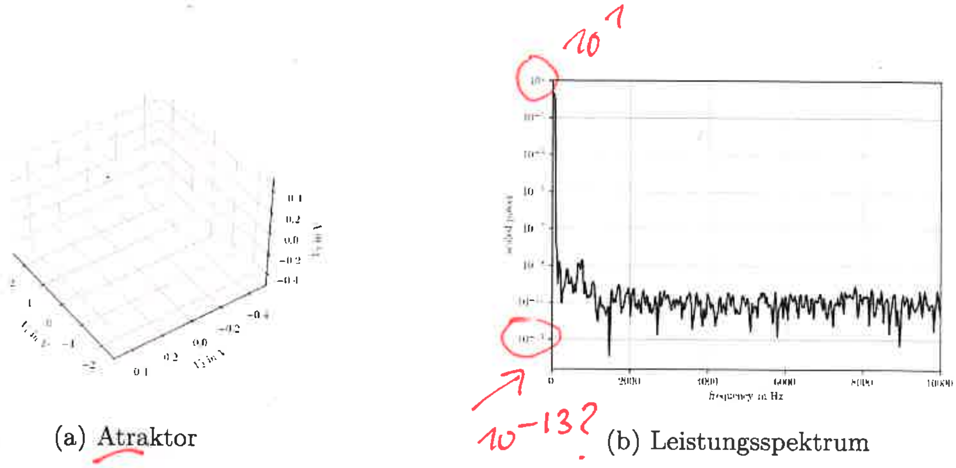
Einheit ?

Übergang auf	a	b
Periode 1	21098,64	7,83
Periode 2	67878,80	8,05
Periode 4	77374,66	8,23
Chaos 1	81341,62	8,28
Periode 3	88743,91	8,37
Chaos 2	89540,79	8,40
Double-scroll-chaos	119710,19	8,33

Tabelle 4.4: Fitting-Parameter

4.2.2 Schnitt durch das Phasendiagramm

Nun wird für einen festen Wert ($R_2 = 8,4k\Omega$) ein Schnitt durch das Phasendiagramm erzeugt, indem R_1 variiert wird und die Veränderungen aufmerksam beobachtet werden. Im Folgenden unsere Beobachtungen bei ausgewählten Werten von R_1.



(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

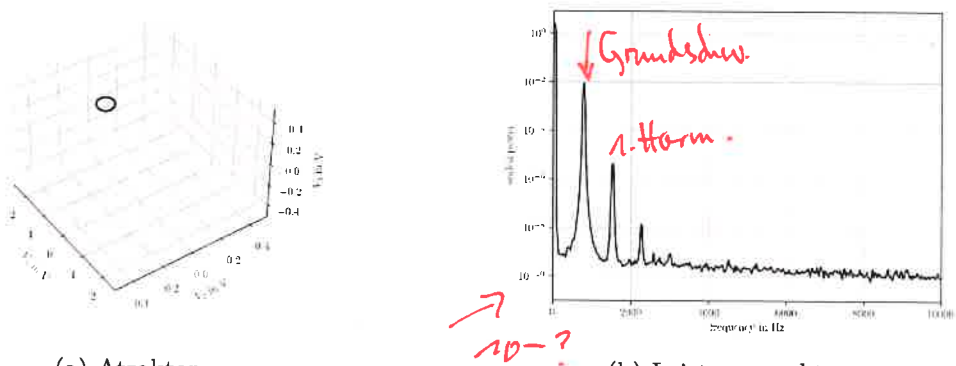
t

Abbildung 4.17: $R_1 = 37$ kΩ

in Abb. 4.17

Bei $R_1 = 37$ kΩ ist anhand des Attraktors zu erkennen, dass keine Schwingung auftritt. Auch das Leistungsspektrum verläuft, bis auf einen Peak bei ca. 0 Hz erstaunlich gleichmäßig und bis auf Störungsrauschen nahezu horizontal. Dies spricht ebenfalls für ein schwingungsfreies System. V

Bitte immer Abb. mit Bildnummer ansprechen!



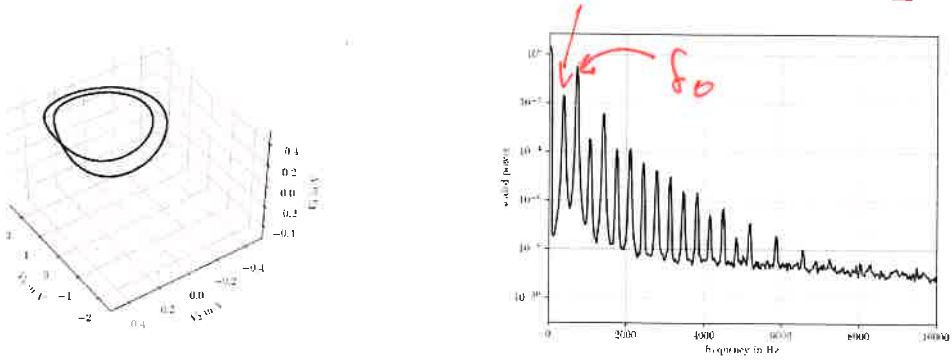
(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.18: $R_1 = 40$ kΩ

Für $R_1 = 40$ kΩ befindet sich der Shinriki-Oszilator bereits in Periode 1, was deutlich anhand des Attraktors zu erkennen ist. Auch im Leistungsspektrum sind nun deutliche

Unterschiede im Vergleich zum vaorrangegangenen zu erkennen. Es existieren nun mehrere Peaks.

subharmonische Pk! $\frac{1}{2} * f_0$



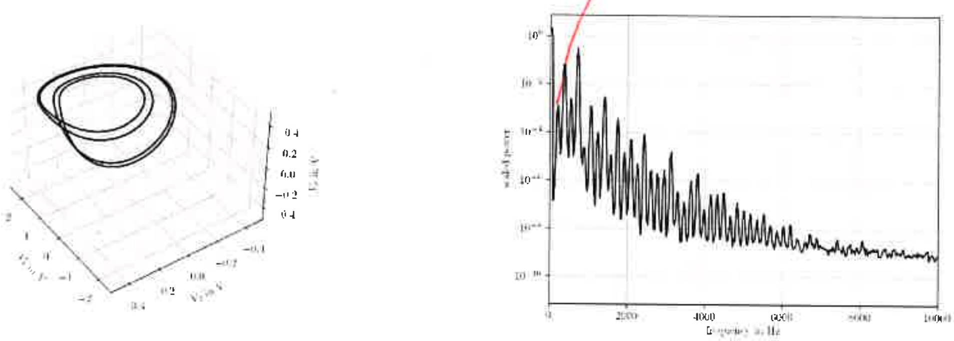
f_0

(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.19: $R_1 = 60$ kΩ

Eine deutliche Zunahme an Peaks ist bei $R_1 = 60$ kΩ zu erkennen. Anhand des Attraktors ist sehr gut zu erkennen, dass es sich nun um Periode 2 handelt. Im Vergleich zum letzten Mal fand also ein Bifurkation statt.

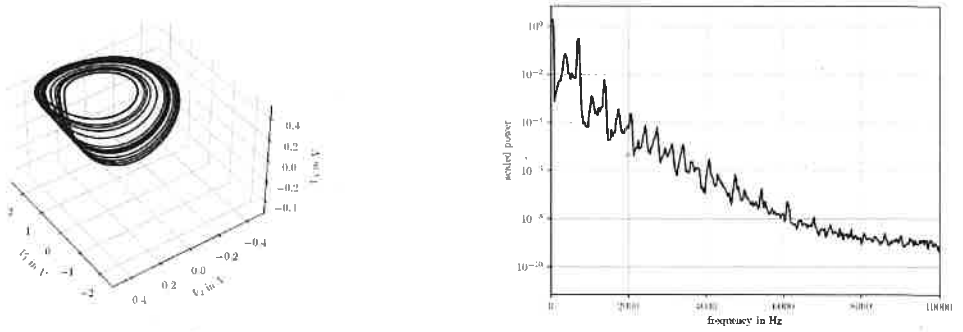
$1/4 * f_0$



(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.20: $R_1 = 66$ kΩ

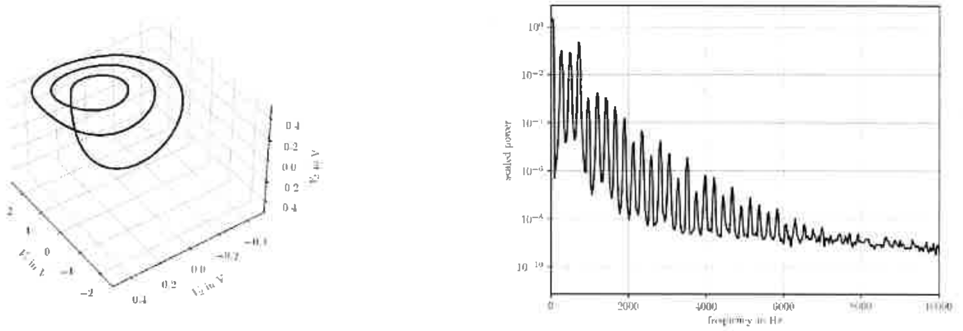
Eine weitere Bifurkation findet im Übergang zu $R_1 = 66$ kΩ statt. Was wiederrum durch eine Zunahme an Peaks im Leistungsspektrum begleitet wird. Ein Blick auf den Atraktor bestätigt das sich der Oszillator nun in Periode 4 befindet.



(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.21: $R_1 = 70$ kΩ

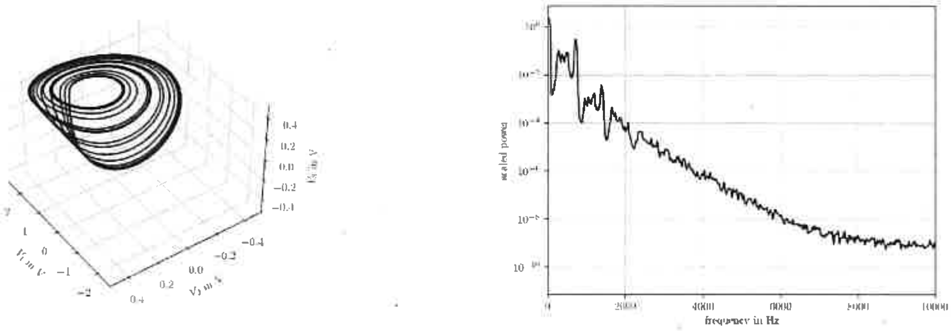
Die nächste Phase zeigt nun zum ersten Mal chaotisches Verhalten, was sehr gut am nahezu kontinuierlich abnehmenden Leistungsspektrum und an dem Atraktor zu erkennen ist. Dies geschieht bei $R_1 = 70$ kΩ.



(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.22: $R_1 = 73$ kΩ

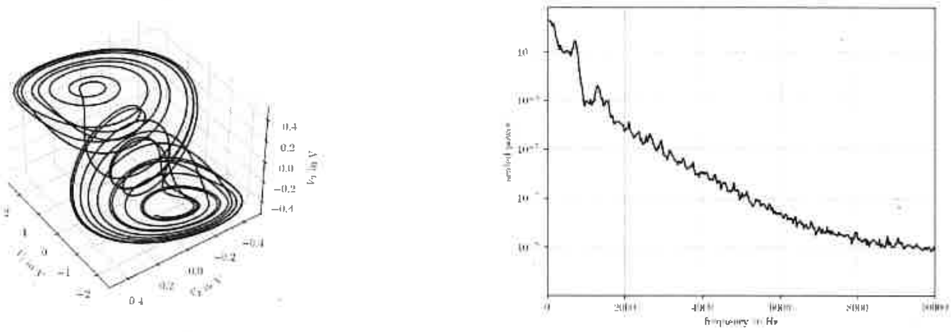
Das Chaos wird durch ein Periode 3 Fenster durchbrochen, was der Plot des Atraktors bei $R_1 = 73$ kΩ sehr gut verdeutlicht.



(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.23: $R_1 = 74\ \mathrm{k}\Omega$

Anschließend bei $R_1 = 74\ \mathrm{k}\Omega$ tritt, deutlich erkennbar, erneut Chaos auf.



(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.24: $R_1 = 100\ \mathrm{k}\Omega$

Bei $R_1 = 100\ \mathrm{k}\Omega$ ist das Double-scroll-chaos zu erkennen.

4.2.3 Bifurkationsdiagramm

Um ein Bifurkationsdiagramm zu erstellen wurde ähnlich zum Schnitt durch das Phasendiagramm ein fester Wert ($R_2 = 8,4k\Omega$) eingestellt. Unter zuhilfenahme des Labview Messprogramms konnte nun durch Variation von R_1 folgendes Diagramm erstellt werden.

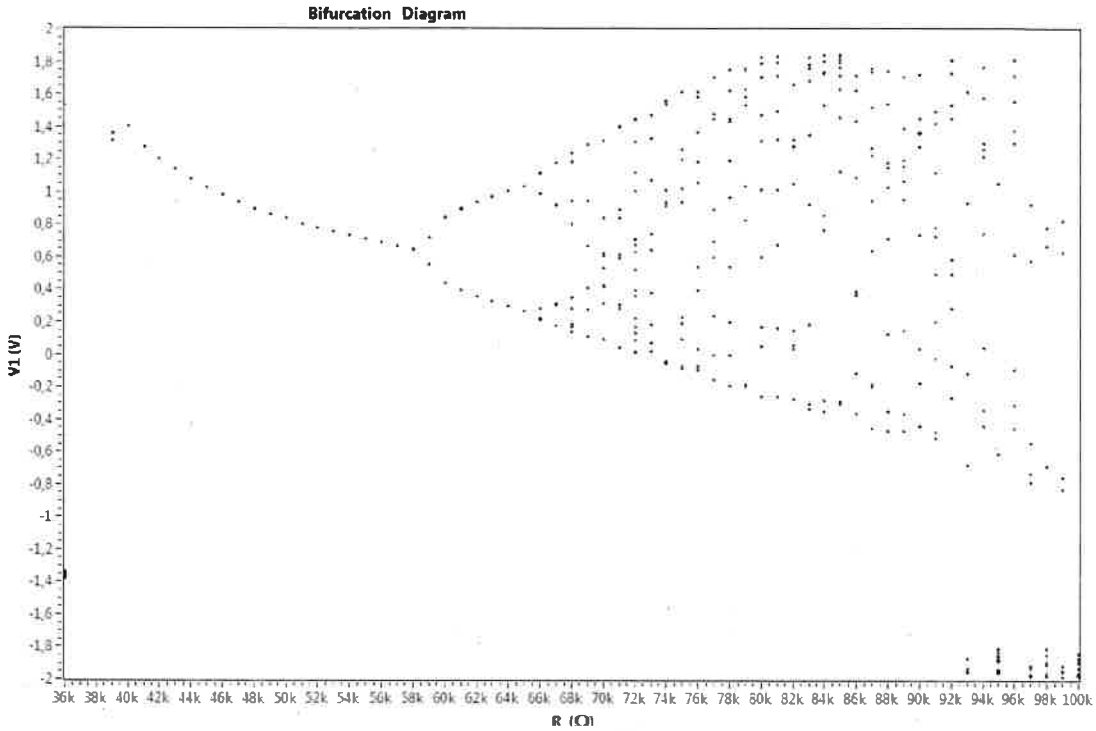


Abbildung 4.25: Bifurkationsdiagramm bei $R_2 = 8,4$ kΩ und variablen R_1

Im obigen Diagramm ist die este Bifurkation (ca. $R = 58$ kΩ) sehr deutlich zu erkennen aber auch die zweite (ca. $R = 66$ kΩ) und dritte (ca. $R = 68$ kΩ) sind noch zu erkennen. Ab ca. $R = 93$ kΩ beginnt der Double-Scroll-Bereich. Leider ist bei der Messung der Fixpunktbereich etwas zu kurz gekommen, was wahrscheinlich der fortgeschritten Zeit und den damit einhergehenden Verlust der Konzentration zu lasten zulegen ist. Außerdem würden mehr Messpunkte das Diagramm noch deutlicher machen.
Nun soll das Bifurkationsdiagramm mit der Simulation verglichen werden.

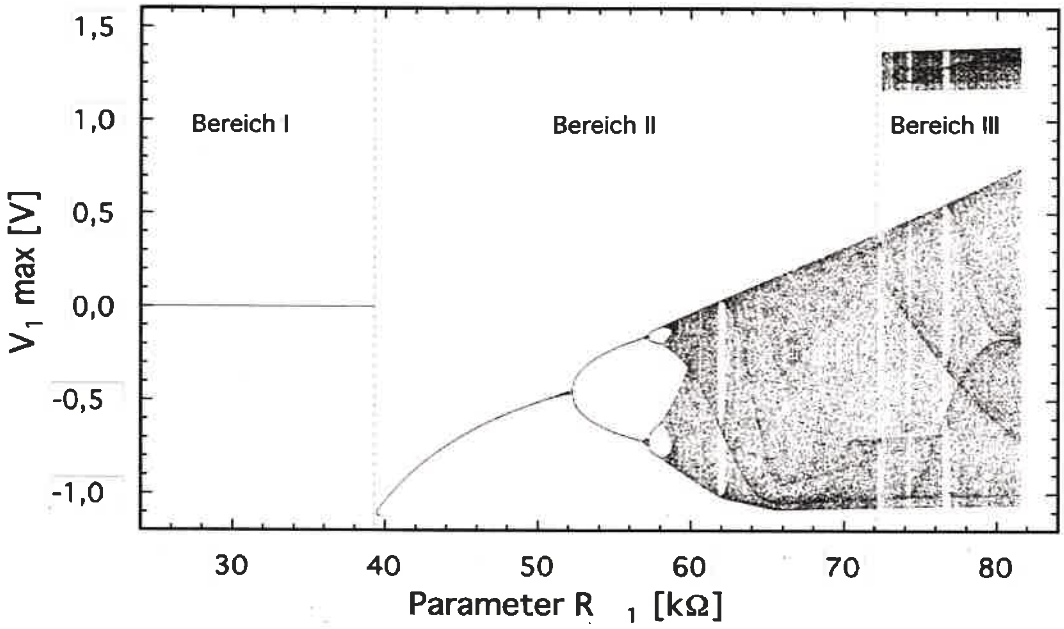


Abbildung 4.26: Berechnetes Bifurkationsdiagramm (Abbildung 7 aus der Anleitung)

Betrachtet man die beiden Diagramme, so fällt auf das diese Qualitativ gut Übereinstimmen. Jedoch fällt auch auf, dass die Messung gegenüber der Simulation horizontal gespiegelt ist. Außerdem fallen auch Abweichungen auf. So ist die erste Bifurkation in der Messung bei ca. $R = 58$ kΩ gegenüber $R = 52$ kΩ in der Simulation verschoben.

4.2.4 Feigenbaum-Konstante

Um die Feigenbaum-Konstante zu bestimmen wurden die Werte, bei denen eine Periodenverdopplung auftrat, ermittelt. Diese wurden durch eine separate Messung aufgenommen und nicht aus obigen Bifurkationsdiagramm abgelesen. Damit wird versucht genauere Werte zu erhalten, da für das Bifurkationsdiagramm die Messdauer, im Vergleich zum direkten Suchen der Periodenverdopplungen, deutlich größer ist, ist es wahrscheinlicher, dass Störquellen, wie Temperaturveränderungen der Messgeräte, die Werte verfälschen.

Die Feigenbaum-Konstante δ kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\delta = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \delta_\mathrm{n} \tag{4.21}$$

$$\delta_\mathrm{n} = \frac{r_\mathrm{n} - r_{\mathrm{n}-1}}{r_{\mathrm{n}+1} - r_\mathrm{n}} \tag{4.22}$$

Für den Fehler gilt: \left(\right) Layout_tip

$$s_\delta = s_{\mathrm{R}_1} \sqrt{\left(\frac{1}{r_{\mathrm{n}+1} - r_\mathrm{n}}\right)^2 + \left(\frac{r_{\mathrm{n}+1} - r_{\mathrm{n}-1}}{(r_\mathrm{n} - r_{\mathrm{n}+1})^2}\right)^2 + \left(\frac{r_\mathrm{n} - r_{\mathrm{n}-1}}{(r_{\mathrm{n}+1} - r_\mathrm{n})^2}\right)^2} \tag{4.23}$$

$$\text{mit} \qquad s_{\mathrm{R}_1} = 1\,\mathrm{k\Omega} \tag{4.24}$$

Der Literaturwert der Feigenbaum-Konstante ist: $\delta = 4,6692...$

Folgende Werte wurden gemessen:

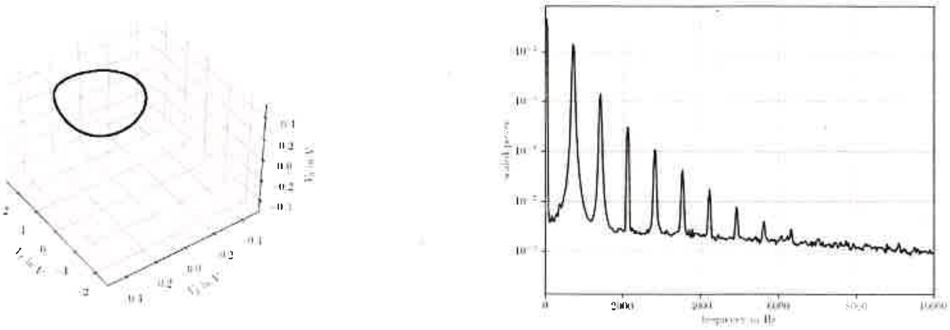
r_1	r_2	r_3
59	65,6	67,6

Mit unseren Werten ergibt sich: $\delta_2 = (3 \pm 3)$

Der Literaturwert liegt noch innerhalb des Fehlerintervalls. Eine Abweichung vom Literaturwert wäre allerdings nicht weiter erstaunlich, da die Feigenbaum-Konstante durch $\delta = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \delta_\mathrm{n}$ gegeben ist. Für unseren Wert gilt jedoch $n = 2$.

4.2.5 Zum Einbettungstheorem

Der Orginalattraktor wurde bei $R_1 = 51$ kΩ und $R_2 = 8,4$ kΩ aufgenommen.



(a) Atraktor (b) Leistungsspektrum

Abbildung 4.27: $R_1 = 51$ kΩ und $R_2 = 8,4$ kΩ

q

Die Qualitativ beste Rekonstruktion wurde für den Verschiebungsindex $n = 60$ n erreicht. Die Delayzeit kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$\tau = n \frac{1}{f_{\text{abtast}}} \qquad \text{mit} \quad f_{\text{abtast}} = 150\,\text{kHz} \tag{4.25}$$

Somit gilt: $\tau = 0,4$ms

1/10

Der größte Peak aus dem Leistungsspektrum liegt bei $f = 724$ Hz, da der nächst kleinere nur noch ein ~~10el~~ davon hat kann er bei der Ermittlung der mittleren Umlaufdauer vernachlässigt werden. Somit gilt für die mittlere Umlaufdauer:

$$\bar{T} = \frac{1}{724} = 1,38\,\text{ms} \tag{4.26}$$

sie

Verleicht man die beiden Werte, so fällt auf, dass si sich in etwa der gleichen Größenordnung bewegen.

$$\frac{\bar{T}}{\tau} = 3,45 \tag{4.27}$$

$\rightarrow \tau \approx \frac{\bar{T}}{4}$

Das Verhältnis der beiden Zahlen ist auch nahe eins.

Dies bitte noch mit einem chaot. Attr. durchführen!

5 Fazit

Abschließend ist zu sagen, dass der Versuch sehr dabei geholfen hat die Grundzüge der nichtlinearen Dynamik und des chaotischen Verhaltens zu verstehen. Außerdem wurde uns auch die Bedeutung dieses Gebietes vor Augen geführt.
So ist der Versuch alles in allem als Erfolg zu bewerten.

Literaturverzeichnis

E. Hering, K. Bessler, J Gutekunst 2014 *Elektronik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, 6. Auflage. Springer.

Jänich, K. 2005 *Mathematik 1, Geschrieben für Physiker*. Springer.

Jänich, K. 2011 *Mathematik 2, Geschrieben für Physiker*. Springer.

LeifiPhysik 2021 Blattfederpendel stehend. URL `https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/ausblick/blattfederpendel-stehend` – Zugriffsdatum: 09.09.2021.

Lück, S. 1995 Ein Praktikumsversuch zum Thema: 'Chaos in einfachen physikalischen Systemen'. Internes Dokument, Experimentalphysik II, Universität Bayreuth.

Wikipedia 2021*a* Deterministisches chaos. URL `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Deterministisches_Chaos&oldid=211746838` – Zugriffsdatum: 2.09.2021.

Wikipedia 2021*b* Dynamische systeme. URL `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Dynamisches_System&oldid=213310181` – Zugriffsdatum: 31.08.2021.

Ich habe Ihnen mehrere Fachartikel auf der e-Lernseite eingestellt! Wenn Sie nicht in die Bib gehen, dann sollten Sie wenigstens diese lesen & zitieren. Oder zumindest so tun, als ob Sie die lesen, also zitieren!

Abbildungsverzeichnis