Universität Bayreuth
Physik

Theoretische Physik - Teil A

Physikalisches Rechnen
Stoffsammlung

von
Moritz Schramm

Wintersemester 20/21

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Skalare, Vektoren und Matrizen

Ein Skalar a ist eine gewöhnliche Zahl aus einem beliebigen Körper (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Ein Vektor $\mathbf{a}$ ist ein Element eines Vektorraums (z.B. $\mathbb{R}^3$). Eine Matrix $\mathbf{A}$ besteht aus n Spalten und m Reihen (also $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$). Im Folgenden wird nur der dreidimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachtet.

Für den Betrag gilt $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Der nomierte Vektor $\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ hat immer die Länge 1.

Definition 1. Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Es gilt:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\,b\cos\alpha$, wenn α der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

Definition 2. Kreuzprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Definition 3. Spatprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Gibt das Volumen, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird an.

Definition 4. Matrix (3×3)

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Definition 5. Matrixmultiplikation

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ik}) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{jk}$$

Der Eintrag in der i-ten Reihe und k-ten Spalte in $\mathbf{C}$ ist das Skalarprodukt der i-ten Reihe der Matrix $\mathbf{A}$ und der k-ten Spalte der Matrix $\mathbf{B}$.
Hinweis: $\mathbf{A}$ muss von der Form $m \times n$ und $\mathbf{B}$ von der Form $n \times p$ sein. $\mathbf{C}$ hat dann die Form $m \times p$.

Definition 6. Dyadisches Produkt

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}$$

Definition 7. Inverse einer Matrix

Eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ heißt Inverse einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$, wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}$

Es gilt:

- $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$
- $\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$
- Transposition: $\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- im Allgemeinen: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

1.2 Determinante

Definition 8. Entwicklung nach erster Zeile

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(\mathbf{A}_{1k})$$

wobei $\mathbf{A}_{jk}$ die Matrix $\mathbf{A}$ ist, bei der die j-te Zeile und k-te Spalte entfernt wurden (also $\mathbf{A}_{jk} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$).

Satz 1. Regel von Sarrus für 3×3 Matrizen

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Eigenschaften von Determinanten

Satz 2. Entwicklung nach beliebiger Zeile oder Spalte

Entwicklung nach k-ter Zeile:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

Entwicklung nach k-ter Spalte:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

Hinweis: Wenn k ungerade wird mit einem positiven Vorzeichen angefangen, welches dann alterniert wird. Wenn k gerade wird mit einem negativen Vorzeichen angefangen und dann alterniert.

Satz 3. Multiplikationstheorem

Sei $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Dann gilt: $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 9. Eigenwerte und Eigenvektoren

λ heißt Eigenwert zu einem Eigenvektor $\mathbf{x}$, wenn $\mathbf{x} \neq 0$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

Satz 4. Charakteristisches Polynom

$$\chi_n(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I})$$

Die Eigenwerte λ_i sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es gibt n Eigenwerte, die jedoch auch komplex und entartet ($\lambda_i = \lambda_j$ für $i \neq j$) sein können. Zu jedem Eigenwert gibt es einen Eigenvektor $\mathbf{x}_i$.

1.4 Taylorreihe

Satz 5. Taylorreihe

$$T_{N,f}(x; x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Satz 6. Taylorentwicklung in mehreren Variablen

$$T_{f(x,y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f \bigg|_{(x_0,y_0)} \frac{1}{n!m!}(x - x_0)^n (y - y_0)^m$$

1.5 Fourier Reihen

Satz 7. Fourier Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\, e^{-inx}$$

1.6 Dirac-Delta-Funktion

Definition 10. Als Ableitung der Stufenfunktion

Definition 11. Als Limes einer geeigneten Funktionenschar

Definition 12. Durch integrale Eigenschaft

Rechenregeln:

1.7 Fourier Transformation

Satz 8. Fourier Transformation

Transformation in reziproken Raum (Fourier Raum):

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} = \mathcal{F}\, f(x)$$

Rücktransformation:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{+ikx} = \mathcal{F}^{-1}\, \tilde{f}(k)$$

Eigenschaften:

Satz 9. Mehrdimensionale Fourier-Transformation

Kapitel 2

Mehrdimensionale Integration und Differentiation

1. Nabla Kalkül
2. Krummlinige Koordination
3. Kurvenintegrale

Kapitel 3

???