Universität Bayreuth
Physik

Theoretische Physik

Physikalisches Rechnen
Stoffsammlung

von
Moritz Schramm

Wintersemester 20/21

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Skalare, Vektoren und Matrizen

Ein Skalar a ist eine gewöhnliche Zahl aus einem beliebigen Körper (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Ein Vektor $\mathbf{a}$ ist ein Element eines Vektorraums (z.B. $\mathbb{R}^3$). Eine Matrix $\mathbf{A}$ besteht aus n Spalten und m Reihen (also $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$). Im Folgenden wird nur der dreidimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachtet.

Für den Betrag gilt $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Der nomierte Vektor $\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ hat immer die Länge 1.

Definition 1. Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Es gilt:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\,b\cos\alpha$, wenn α der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- $(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

Definition 2. Kreuzprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Definition 3. Spatprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Gibt das Volumen, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird an.

Definition 4. Matrix (3×3)

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Definition 5. Matrixmultiplikation

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ik}) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{jk}$$

Der Eintrag in der i-ten Reihe und k-ten Spalte in $\mathbf{C}$ ist das Skalarprodukt der i-ten Reihe der Matrix $\mathbf{A}$ und der k-ten Spalte der Matrix $\mathbf{B}$.
Hinweis: $\mathbf{A}$ muss von der Form $m \times n$ und $\mathbf{B}$ von der Form $n \times p$ sein. $\mathbf{C}$ hat dann die Form $m \times p$.

Definition 6. Dyadisches Produkt

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}$$

Definition 7. Inverse einer Matrix

Eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ heißt Inverse einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$, wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}$

Es gilt:

- $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$
- $\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$
- Transposition: $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- im Allgemeinen: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

1.2 Determinante

Definition 8. Entwicklung nach erster Zeile

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(\mathbf{A}_{1k})$$

wobei $\mathbf{A}_{jk}$ die Matrix $\mathbf{A}$ ist, bei der die j-te Zeile und k-te Spalte entfernt wurden (also $\mathbf{A}_{jk} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$).

Satz 1. Regel von Sarrus für 3×3 Matrizen

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Eigenschaften der Determinante:

- Skalar **einer** Reihe kann ausgeklammert werden
- $\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$
- Additivität bezüglich einer Reihe: Unterscheiden sich zwei Matrizen nur in einer Reihe an der gleichen Position, so ist die Summe der Determinanten dieser Matrizen die Determinante der Matrix, welche die Einträge der unterschiedlichen Reihe jeweils addiert (alle anderen Reihen bleiben gleich)
- Vorzeichenwechsel wenn zwei **benachbarte** Reihen getauscht werden
- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$
- Sind die Elemente einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte proportional, so gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$ (singuläre Matrix)
- Die Determinante ändert sich nicht, wenn man die mit λ multiplizierten Elemente einer Reihe zu einer **anderen** Reihe addiert
- Multiplikationstheorem: Wenn $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dann gilt: $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$

Formel 2. Entwicklung nach beliebiger Zeile oder Spalte

Entwicklung nach k-ter Zeile:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

Entwicklung nach k-ter Spalte:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

Hinweis: Wenn k ungerade wird mit einem positiven Vorzeichen angefangen, welches dann alterniert wird. Wenn k gerade wird mit einem negativen Vorzeichen angefangen und dann alterniert.

Satz 3. Multiplikationstheorem

Sei $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Dann gilt: $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 9. Eigenwerte und Eigenvektoren

λ heißt Eigenwert zu einem Eigenvektor $\mathbf{x}$, wenn $\mathbf{x} \neq 0$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

Formel 4. Charakteristisches Polynom

$$\chi_n(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I})$$

Die Eigenwerte λ_i sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es gibt n Eigenwerte, die jedoch auch komplex und entartet ($\lambda_i = \lambda_j$ für $i \neq j$) sein können. Zu jedem Eigenwert gibt es einen Eigenvektor $\mathbf{x}_i$.

1.4 Totale Ableitung

Formel 5. Totale Ableitung einer Funktion

$$\frac{\mathrm{d}f(x_1(t), ..., x_n(t), t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

1.5 Taylorreihe

Formel 6. Taylorreihe

$$T_{N,f}(x;x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Formel 7. Taylorentwicklung in mehreren Variablen

$$T_{f(x,y)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial^m}{\partial y^m} f\Big|_{(x_0,y_0)} \frac{1}{n!m!}(x-x_0)^n(y-y_0)^m$$

1.6 Fourier Reihen

Formel 8. Fourier Reihe

Meistens ist $L=\pi$. Dann ist die Fourier Reihe von f:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{inx\pi}{L}\right) \qquad \text{mit } c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, f(x)\, \exp\left(\frac{-inx\pi}{L}\right)$$

1.7 Dirac-Delta-Funktion

Definition 10. Als Ableitung der Stufenfunktion Θ

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)$$

Definition 11. Als Limes einer geeigneten Funktionenschar

$$\delta(x) = \lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(x)$$

Definition 12. Durch integrale Eigenschaft

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, \delta(x-x_0)\, g(x) = \begin{cases} g(x_0) & \text{falls } x_1 < x_0 < x_2 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Rechenregeln:

- Gerade Funktion: $\delta(x) = \delta(-x) \;\Rightarrow\; \delta(x-x_0) = \delta(x_0-x)$
- $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$
- $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i)$ wobei x_i die Nullstellen von f sind. Es muss $f'(x_i) \neq 0$

1.8 Fourier Transformation

Formel 9. Fourier Transformation

Transformation in reziproken Raum (Fourier Raum):

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-ikx} =: \mathcal{F}\, f(x)$$

Rücktransformation:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \tilde{f}(k)\, e^{+ikx} =: \mathcal{F}^{-1}\, \tilde{f}(k)$$

Eigenschaften:

- Linearität: $\mathcal{F}(af(x) + bg(x)) = a\,\mathcal{F}\,f(x) + b\,\mathcal{F}\,g(x)$
- Identität: $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})f(x) = f(x)$
- Differentiation: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = \mathcal{F}^{-1}\,ik\,\mathcal{F}\,f(x)$
- Faltung: $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, f(x')g(x-x') = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$
- Verschobene Funktion: Sei $g(x) = f(x - x_0)$. Dann: $\tilde{g}(k) = \exp(-ikx_0)\tilde{f}(k)$

Formel 10. Mehrdimensionale Fourier-Transformation

Seien $\mathbf{r}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$.

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\mathbf{r}\, f(\mathbf{r})\, e^{-i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \tilde{f}(\mathbf{k})\, e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

Kapitel 2

Mehrdimensionale Integration und Differentiation

2.1 Differentiation

Formel 11. Differentiation mit Vektoren und Differentialen

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}$

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}$

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}$

(iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\ \mathbf{a} + f\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}$

Alle Regeln gelten auch für Differentiale, z.B. $\mathrm{d}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{b}$

2.2 Krummlinige Bewegung

Formel 12. Grundlegende Bewegungsvektoren

Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}$, Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ und Binormale $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \mathbf{n} = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}\right|^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}$$

Krümmung κ und Krümmungsradius ρ:

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}\right| \qquad \rho = \frac{1}{\kappa}$$

Nützliche Zusammenhänge:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathbf{r}| \qquad s = \int_0^s \mathrm{d}s' = \int_0^t \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t$$

2.3 Nabla Kalkül

Definition 13. Nabla und Laplace Operator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Definition 14. Hesse Matrix

$$(\nabla\nabla f)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Definition 15. Gradient, Divergenz und Rotation

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) \qquad \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Der Gradient gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von f an, der Betrag des Gradienten gibt an, wie groß diese Steigung ist.
Die Divergenz ist ein Skalarfeld und gibt an, wie sehr die Vektoren an einem Punkt auseinanderstreben. Bei einem Stömungsfeld ist die Divergenz die Quelldichte. Senken haben negative Divergenz. Bei einer Divergenz gleich null ist das Feld quellfrei.
Die Rotation gibt die lokale Wirbelstärke an. Ist diese gleich null, so ist das Feld wirbelfrei.

Nützliche Rechenregeln für ∇:

- grad, div und rot sind distributiv
- $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\,(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$ und $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\,(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla f) \times \mathbf{A}$
- $\nabla \times (\nabla f) = 0$ und $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- $\mathbf{A} \cdot (\nabla f) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\, f$ und $\mathbf{A} \times (\nabla f) = (\mathbf{A} \times \nabla)\, f$ (Assoziativität)
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
- $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{A} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{B}$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$

2.4 Krummlinige Koordinaten

Die Punkte im $\mathbb{R}^3$ seien anstatt durch die kartesischen Koordinaten x, y, z durch die neuen Koordinaten u, v, w gekennzeichnet.

Definition 16. Jacobi Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \text{ mit Inverse: } \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Definition 17. Funktionaldeterminante

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det(\mathbf{J})$$

Formel 13. Einheitsvektoren von krummlinigen Koordinaten

$$\mathbf{e}_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \qquad \mathbf{e}_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \qquad \mathbf{e}_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

Im Allgemeinen sind die Einheitsvektoren vom Ort $\mathbf{r}$ abhängig. Nur in Spezialfällen (z.B. bei kartesischen Koordinaten) sind diese unabhängig. Die drei Einheitsvekoren bilden ein lokales Dreibein. Oft praktisch sind krummlinig-orthogonal Koordinaten, d.h. $\mathbf{e}_{u_i} \cdot \mathbf{e}_{u_j} = \delta_{ij}$.

Definition 18. Polarkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \text{ mit } \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = r \text{ und } \mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

wobei $r \in [0,\infty)$, $\phi \in [0,2\pi)$ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\phi = \frac{y}{x}$ (Quadrant beachten!).

Definition 19. Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)} = \rho \text{ und } \mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$

wobei $\rho \in [0,\infty)$, $\phi \in [0,2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$. Außerdem ist wieder $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\phi = \frac{y}{x}$.

Definition 20. Kugelkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\phi \\ \rho \sin\theta \sin\phi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \ \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \sin\theta \ \text{und} \ \mathrm{d}V = \rho^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

wobei $\rho \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Wieder gilt: $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und $\tan\phi = \frac{y}{x}$.

2.5 Kurvenintegrale

Formel 14. Kurvenintegral durch Substitution lösen

Sei K eine Kurve die durch $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}(t_a)$ und $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}(t_b)$ im Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ geht. Dann gilt:

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \ \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{F}(t)$$

Bei geschlossenen Kurven $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_b$ schreibt man auch:

$$\oint_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

Satz 15. Unabhängigkeit vom Weg

Kurvenintegrale über ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ sind genau dann vom Weg unabhängig, wenn sich $\mathbf{A}$ als Gradient einer skalaren Funktion ϕ schreiben lässt: $\mathbf{A} = \nabla\phi$. Für geschlossene Kurven gilt dann:

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$$

$\mathbf{A}$ ist dann konservativ.
Wenn $\mathbf{A}$ in einem *einfach zusammenhängenden Gebiet* wirbelfrei ist ($\nabla \times \mathbf{A} = 0$), dann ist $\mathbf{A}$ als Gradient einer skalaren Funktion darstellbar.

2.6 Volumen- und ebene Flächenintegrale

Formel 16. Ebenes Flächenintegral mit abhängigen Integrationsgrenzen

$$\int_G \mathrm{d}\mathbf{r} \, f(\mathbf{r}) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \, f(x,y) = \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \mathrm{d}x \, f(x,y)$$

Formel 17. Volumenintegral mit wechsel des Koordinatensystems

$$\int_V \mathrm{d}\mathbf{r}\, f(\mathbf{r}) = \int_V \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, f(x,y,z) = \int_V \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w\, f(u,v,w)\, \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

2.7 Flächenintegrale

Formel 18. Vektorielles Flächenelement bei beliebiger Fläche

Unabhängig von der Wahl der Parameter ist das vektorielle Flächenelement:

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \quad \text{und damit:} \quad \int_F \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (|\mathrm{d}\mathbf{f}| \text{ falls } \mathbf{A} \text{ skalar})$$

2.8 Integralsätze

Satz 19. Satz von Gauß (Divergence Theorem)

Sei $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein Vektorfeld, V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche ∂V (Normalen nach außen gerichtet). Dann gilt:

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \mathrm{d}\mathbf{r}\ \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Satz 20. Satz von Stokes

Sei $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, ∂F eine glatte Kurve und F eine über ∂F gespannte Fläche. Dann gilt:

$$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_F \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))$$

Kapitel 3

Differentialgleichungen

3.1 Gewöhnliche Differentialgleichunge (ODEs)

In gewöhnlichen Differentialgleichen kommt nur eine einzelne Unabhängige (z.B. x oder t) vor. Autonome DGLs hängen nicht von der Veränderlichen ab. Allgemeine Form der n-ten Ordnung:

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$$

3.1.1 Trennung der Variablen

Formel 21. Trennung der Variablen

Falls die DGL in der Form $y'(x) = h(x)\, g(y)$ vorliegt, kann man zur Lösung der DGL Trennung der Variablen verwenden:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(x)\, g(y) \;\Rightarrow\; \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = h(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}\tilde{y} \frac{1}{g(\tilde{y})} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, h(\tilde{x})$$

3.1.2 Variation der Konstanten

Formel 22. Variation der Konstanten

Falls eine *lineare* DGL 1. Ordnung der Form $y'(x) = p(x)\, y(x) + q(x)$ vorliegt, kann Variation der Konstantne verwenden. Dabei nennt man $q(x)$ die Inhomogenität.

1. Lösen der homogenen DGL mithilfe von Trennung der Variablen: $y'(x) = p(x)\, y(x)$

$$y_h(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})\right)$$

2. Wenn schon eine spezielle Lösung $y_s(x)$ bekannt ist, dann ist die allgemeine Lösung der DGL die Summe der homogenen und speziellen Lösung: $y(x) = y_s(x) + y_h(x)$

3. Bestimmung der speziellen Lösung durch Variation der Konstanten:

$$y_h(x) = c\ \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})\right) \ \Rightarrow\ y(x) = c(x)\ \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})\right)$$

$$\Rightarrow\ y'(x) = c'(x)\ \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})\right) + c(x)\ \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})\right)\ p(x)$$

$$\Rightarrow\ y'(x) = c'(x)\ \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})\right) + y(x)\, p(x)$$

Gleichsetzen mit inhomogener DGL:

$$p(x)\, y(x) + q(x) = c'(x)\ \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})\right) + y(x)\, p(x)$$

$$\Rightarrow\ c'(x) = q(x)\ \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})\right)$$

$$\Rightarrow\ c(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, q(\tilde{x})\ \exp\left(-\int_{x_0}^{\tilde{x}} \mathrm{d}\hat{x}\, p(\hat{x})\right) + y_0$$

$c(x)$ kann jetzt wieder in $y(x)$ von oben eingesetzt werden. Allgemein gilt die Formel:

$$y(x) = y_0\ \exp(P(x)) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, q(\tilde{x}) \exp(P(x) - P(\tilde{x}))$$

wobei

$$P(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x}\, p(\tilde{x})$$

3.1.3 Differentialgleichungssysteme

allgemein
2. Ordnung