Universität Bayreuth

Physik

Theoretische Mechanik

Stoffsammlung

von

Moritz Schramm

Sommersemester 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Koordinatensysteme

Definition 1. Basisvektoren

Bei gegebenen Koordinaten $\mathbf{r} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ werden die Basisvektoren wie folgt berechnet:

$$\mathbf{e}_{\theta_i} = \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta_i} \right|^{-1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

Definition 2. Koordinatendarstellungen

1. **Kartesische Koordinaten**

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. **Zylinderkoordinaten** mit $\det(J) = \rho$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho\mathbf{e}_\rho(\phi) + z\mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^{\mathbf{2}})\mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

3. **Kugelkoordinaten** mit $\det(J) = r^2\sin\theta$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{e}_r(\theta, \phi) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \\ +(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

1.2 Newtonsche Gesetze

Definition 3. Newtonsche Gesetze

1. Ein kräftefreier Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

$$\mathbf{F} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = \text{const}$$

2. Kraft ist Masse mal Beschleunigung

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3. Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massepunkt wirkt, entspricht stehts eine gleich große, gegengerichtete Kraft, mit der der Massepunkt auf seine Umgebung wirkt.

$$\mathbf{F}_{actio} = -\mathbf{F}_{reactio}$$

Zusätze:

1. Kräfte wirken (meist) entlang einer Wirkungslinie
2. Superpositionsprinzip: $\mathbf{F}_{tot} = \sum_i \mathbf{F}_i$

1.3 Erhaltungssätze

Definition 4. Impulserhaltung

Impuls:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Damit folgt:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{p} = \text{const}$$

Definition 5. Drehimpulserhaltung

Drehimpuls:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Drehmoment:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

Drehimpuls und Drehmoment hängen vom Ursprung des Koordinatensystems ab! Es folgt:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{M} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{l} = \text{const}$$

Definition 6. Energieerhaltung

Arbeit: $\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

Leistung: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$

Konservative Kraft $\iff \nabla \times \mathbf{F} = 0$

Kinetische Energie: $T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2$

Potenzielle Energie bei konservativen Kräften: $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$

Für konservative Kräfte gilt Energieerhaltung: $E = T + U = \mathrm{const}$

1.4 Raum-Zeit Symmetrien

Galilei Trafo, Sym Folgen

1.5 System von Massepunkten

1.6 Inertialsysteme und beschleunigte Bezugssysteme

Kapitel 2

Lagrange Formalismus

2.1 Lagrange Gleichungen 1. Art

2.2 Lagrange Gleichungen 2. Art

2.3 Hamiltonsches Prinzip

2.4 Eichtransformation

2.5 Noether Theorem

Kapitel 3

Variationskalkül

3.1 Euler Lagrange Gleichung

3.2 Variation mit Nebenbedingungen

3.3 Zweite Variation

Kapitel 4

Zentralpotenzial

4.1 Herleitung Bewegungsgleichungen

4.2 Verschiedene Zentralpotenziale

4.3 Keplerproblem

4.4 Streuung

Kapitel 5

Starre Körper

5.1 Raumfestes Inertialsystem und körperfestes Koordinatensysteme

5.2 Eulersche Winkel

5.3 Trägheitstensor

Kapitel 6

Kleine Schwingungen

6.1 Bewegungsgleichungen

Kapitel 7

Hamiltonformalismus

Hamiltonfunktion und Gleichungen

Kapitel 8

Spezielle Relativitätstheorie