



**UNIVERSITÄT
BAYREUTH**

UNIVERSITÄT BAYREUTH
PHYSIK

Analysis

Sätze und Definitionen

von
Moritz Schramm

Wintersemester 20/21
basierend auf dem Vorlesungsskript von Prof. Păun

Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Zahlen	1
1.1	Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen	2
1.2	Die Existenz einer kleinsten oberen oder größten unteren Schranke	3
1.3	Die wichtigsten Klassen reeller Zahlen	4
1.3.1	Die natürlichen Zahlen	4
1.3.2	Die ganzen Zahlen	4
1.3.3	Die rationalen Zahlen	4
1.3.4	Die reellen Zahlen	4
1.3.5	Weitere Sätze und Definitionen	4
1.4	Das Archimedische Prinzip	5
2	Folgen	7
2.1	Der Grenzwert einer Folge	7
2.1.1	Eigenschaften der Grenzwerte	7
2.2	Das Cauchysche Konvergenzkriterium	9
2.2.1	Häufungspunkte einer Folge	10
2.3	Folgen komplexer Zahlen	10
2.3.1	Der Körper der komplexen Zahlen	10
2.3.2	Konvergenz in \mathbb{C}	11
3	Reihen	13
3.1	Konvergenz Kriterien für Reihen	13
3.2	Reihen mit komplexen Gliedern	14
3.3	Umgeordnete Reihen	15
4	Stetige Funktionen	17
4.1	Bezeichnungen und Definitionen	17
4.2	Stetigkeit von Funktionen	18
4.3	Grenzwerte von Funktionen	18
4.4	Globale Eigenschaften stetiger Funktionen	20
4.5	Landau Symbole	21
4.6	Logarithmus	22
4.7	Trigonometrische Funktionen	23
5	Differentialrechnung	25
5.1	Allgemeine Eigenschaften und wichtige Ableitungsregeln	25
5.2	Die zentralen Sätze der Differentialrechnung	27
5.3	Konvexität	28

5.3.1	Taylor Reihe	29
6	Das Riemannsche Integral	30
6.1	Allgemeine Eigenschaften integrierbarer Funktionen	30
6.2	Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung	32

Kapitel 1

Reelle Zahlen

Eine Menge \mathbb{R} wird als Menge der reellen Zahlen bezeichnet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

I Axiom der Addition:

$+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $(x, y) \mapsto x + y$

1₊ Es existiert ein neutrales Element 0 mit $\forall x \in \mathbb{R}: x + 0 = 0 + x = x$

2₊ Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $-x \in \mathbb{R}$ sodass $x + (-x) = (-x) + x = 0$

3₊ Die Operation $+$ ist assoziativ, d.h. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$

4₊ Die Operation $+$ ist kommutativ, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$

II Axiom der Multiplikation:

\cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $(x, y) \mapsto x \cdot y$

1. Es existiert ein neutrales Element $1 \neq 0$ sodass $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (das Inverse von x) sodass
 $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

3. Die Operation \cdot ist assoziativ, d.h. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

4. Die Operation \cdot ist kommutativ, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y = y \cdot x$

Zusätzlich: Distributivität $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

III Anordnungsaxiom:

Zwischen den Elementen in \mathbb{R} existiert eine Relation \leq mit folgenden Bedingungen:

0 _{\leq} $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq x$

1 _{\leq} $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

2 _{\leq} $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

3 _{\leq} $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \vee y \leq x$

IV Vollständigkeitsaxiom:

Seien X, Y Mengen, sodass $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ sowie $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ und $\forall x \in X, y \in Y: x \leq y$. Dann gilt $\exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in X, y \in Y: x \leq c \leq y$

1.1 Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen

(a) Folgerungen aus dem Additionsaxiom

1. Es gibt nur ein additives neutrales Element $0 \in \mathbb{R}$
2. Jedes $x \in \mathbb{R}$ besitzt ein *eindeutiges* Negatives
3. In \mathbb{R} besitzt die Gleichung $a + x = b$ die *eindeutige* Lösung $x = b - a$

(b) Folgerungen aus dem Multiplikationsaxiom

1. Es gibt nur ein multiplikates neutrales Element $1 \in \mathbb{R}$
2. Zu jedem $x \neq 0$ gibt es nur ein Inverses x^{-1}
3. Für $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $x \cdot a = b$ die eindeutige Lösung $x = b \cdot a^{-1}$

(c) Folgerungen aus den Axiomen I und II

1. $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}: (-1) \cdot x = -x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}: (-x) \cdot (-x) = x \cdot x$

(d) Folgerungen aus dem Anordnungsaxiom

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt *genau* eine der Relationen $x < y$, $x = y$, $x > y$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x < y \wedge y \leq z \Rightarrow x < z$

(e) Folgerungen aus den Axiomen I und II sowie II und III

1. $\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}$:
 - $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
 - $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
 - $x \leq y \wedge z \leq w \Rightarrow x + z \leq y + w$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:
 - $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
 - $x < 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$
 - $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
 - $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$
 - $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$
3. $0 < 1$
4. $\forall x \in \mathbb{R}: x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

1.2 Die Existenz einer kleinsten oberen oder größten unteren Schranke

Definition 1. Obere und untere Schranken

- (i) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt von *oben beschränkt*, falls eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall x \in X: x \leq c$. c ist dann eine obere Schranke.
- (ii) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt von *unten beschränkt*, falls eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall x \in X: c \leq x$. c ist dann eine untere Schranke.
- (iii) Eine Menge die von *oben und unten* beschränkt ist, heißt *beschränkt*.

Definition 2. Maximales und minimales Element

- (i) Ein Element $a \in X$ wird maximales Element von X genannt, falls a eine obere Schranke ist
 $a = \max(X)$
- (ii) Ein Element $b \in X$ wird minimales Element von X genannt, falls b eine untere Schranke ist
 $b = \min(X)$

Bemerkung 1

Das maximale bzw. minimale Element sind immer eindeutig, müssen aber nicht zwangsweise existieren.

Definition 3

- (i) Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine von oben beschränkte Menge. Die kleinste Zahl, die eine obere Schranke für X ist, heißt *Supremum* von X ($\sup X$). Es gilt:
 - $\forall x \in X: x \leq \sup X$
 - $\forall M < \sup X: \exists x \in X: M < x$
- (ii) Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine von unten beschränkte Menge. Die größte Zahl, die eine untere Schranke für X ist, heißt *Infimum* von X ($\inf X$).
 - $\forall x \in X: x \geq \inf X$
 - $\forall M > \inf X: \exists x \in X: M > x$

Satz 1. $\exists \sup X$

Jede nicht leere Menge $X \subset \mathbb{R}$, die von oben beschränkt ist, besitzt eine eindeutige kleinste obere Schranke.

Wichtig: Nicht für \mathbb{Q} gültig.

1.3 Die wichtigsten Klassen reeller Zahlen

1.3.1 Die natürlichen Zahlen

Definition 4

Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, wenn mit jedem $x \in X$ auch $x + 1 \in X$

Definition 5

Die Menge der natürlichen Zahlen ist die *kleinste* induktive Menge, die die 1 enthält und wird mit \mathbb{N} bezeichnet.

1.3.2 Die ganzen Zahlen

Definition 6

$$\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \cup \{0\}$$

1.3.3 Die rationalen Zahlen

Definition 7

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

1.3.4 Die reellen Zahlen

Alle reelle Zahlen, die nicht rational sind, werden irrational genannt.

1.3.5 Weitere Sätze und Definitionen

Satz 2

Für jede natürliche Zahl gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Definition 8. Binomial Koeffizient

$$\forall n \geq k \geq 0: \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Bemerkung 2

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Satz 3. Binomischer Lehrsatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Satz 4. Bernoullische Ungleichung

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$. Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$$

1.4 Das Archimedische Prinzip

Satz 5. Archimedisches Axiom

Zu jeder festen positiven Zahl x und jeder reellen Zahl y gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $n_0 x > y$

Definition 9. Absolutbetrag

Für eine reelle Zahl x wird der Betrag definiert durch:

$$x = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Satz 6

Die Funktion $|\cdot|$ hat folgende Eigenschaften:

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}: |x| \geq 0$ sowie $|x| = 0 \iff x = 0$
- (ii) (Multiplikativität) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x| \cdot |y| = |x \cdot y|$
- (iii) (Dreiecksungleichung) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x + y| \leq |x| + |y|$
- (iv) (umgekehrte Dreiecksungleichung) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Kapitel 2

Folgen

2.1 Der Grenzwert einer Folge

Definition 10. Folge

Eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wird Folge genannt und die Werte $a_n = f(n)$ werden als n -tes Glied der Folge bezeichnet

Definition 11. ε -Umgebung

Sei $\varepsilon > 0$. Das Intervall $v(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ wird ε -Umgebung genannt.

Definition 12. Konvergenz einer Folge

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen.

$(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon$$

2.1.1 Eigenschaften der Grenzwerte

Definition 13. Beschränktheit

- (i) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt nach *oben beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq K$
- (ii) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt nach *unten beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq K$
- (ii) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt *beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq K$

Satz 7

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz 8. Eindeutigkeit des Limes

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist immer eindeutig.

Satz 9. Algebraische Operationen mit dem Limes

Seien $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ Folgen, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- (iii) $b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: b_n \neq 0$ sowie
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Satz 10. Sandwich Theorem

- (i) Seien $(x_n)_{n \geq 1}$ und $(y_n)_{n \geq 1}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Wenn $x < y$ folgt $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: x_n < y_n$.
- (ii) Seien $(x_n)_{n \geq 1}$ und $(y_n)_{n \geq 1}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Wenn $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \leq y_n$ folgt $x \leq y$.
- (iii) Seien $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ und $(c_n)_{n \geq 1}$ Folgen, sodass $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: a_n \leq b_n \leq c_n$. Wenn a_n und c_n konvergieren mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, dann konvergiert b_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ (Sandwich Theorem).

Definition 14. Uneigentliche Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt *uneigentlich konvergent* gegen ∞ (bzw. $-\infty$) wenn

$$\forall K \in \mathbb{R}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: a_n > K \quad (\text{bzw. } a_n < K)$$

Satz 11

- (i) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge, die gegen $\pm\infty$ konvergiert. Dann folgt $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: a_n \neq 0$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$
- (ii) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Mit der Annahme $\forall n \geq N: a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ (bzw. $-\infty$).

2.2 Das Cauchysche Konvergenzkriterium

Definition 15. Cauchy Folge

Eine Folge heißt Cauchy Folge genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Satz 12

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge

Definition 16. Teilfolgen

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$ Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 1}$.

Satz 13. Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

Satz 14. Intervallschachtelungs-Prinzip

Sei $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ eine absteigende Folge von abgeschlossenen Intervallen in \mathbb{R} , sodass $\lim_{k \rightarrow \infty} l(I_k) = 0$. Dann $\exists! x_0 \in \mathbb{R}: \forall k \geq 1: x_0 \in I_k$

Definition 17. Monoton wachsende bzw. fallende Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt

- *monoton wachsend*, falls $\forall n \geq 1: a_n \leq a_{n+1}$
- *streng monoton wachsend*, falls $\forall n \geq 1: a_n < a_{n+1}$
- *monoton fallend*, falls $\forall n \geq 1: a_n \geq a_{n+1}$
- *streng monoton fallend*, falls $\forall n \geq 1: a_n > a_{n+1}$

Satz 15

- Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert
- Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergiert

Satz 16

Jede Cauchy Folge konvergiert.

2.2.1 Häufungspunkte einer Folge

Definition 18. Häufungspunkt

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer reellen Folge, wenn es eine Teilfolge dieser Folge gibt, die gegen a konvergiert.

Definition 19. Limes superior und inferior

- Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine nach oben beschränkte Folge.
Dann heißt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ Limes superior.
- Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine nach unten beschränkte Folge.
Dann heißt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ Limes inferior.

Satz 17. Größter und kleinster Häufungspunkt

Der Limes Superior ist der *größte* Häufungspunkt und der Limes Inferior der *kleinste* Häufungspunkt.

Satz 18

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann

$$(a_n)_{n \geq 1} \text{ konvergent} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \iff \exists! \text{ Häufungspunkt}$$

2.3 Folgen komplexer Zahlen

2.3.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Satz 19

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper (der Körper der komplexen Zahlen).

Definition 20. Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation

Sei $z = x + iy$. Dann ist $\operatorname{Re}(z) = x$ und $\operatorname{Im}(z) = y$ sowie $z^* = x - iy$.

Definition 21. Komplexer Betrag

Sei $z = x + iy$. Dann ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Satz 20. Eigenschaften des komplexen Betrags

- (i) $\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq 0$ sowie $|z| = 0 \iff z = 0$
- (ii) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (iii) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Satz 21

Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Dann hat die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ mindestens eine komplexe Lösung.

Satz 22. Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom P mit $\text{grad}(P) \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

2.3.2 Konvergenz in \mathbb{C}

Definition 22. Konvergenz einer komplexen Folge

Eine Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ komplexer Zahlen heißt *konvergent gegen* $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |z_n - z_0| < \varepsilon$$

Satz 23

Komplexe Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ konvergiert $\iff \text{Re}((z_n)_{n \geq 1})$ und $\text{Im}((z_n)_{n \geq 1})$ konvergiert.

Definition 23. Komplexe Cauchy-Folge

Eine komplexe Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ wird Cauchy-Folge genannt, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0: |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Satz 24

$(z_n)_{n \geq 1}$ ist Cauchy-Folge $\iff \text{Re}((z_n)_{n \geq 1})$ und $\text{Im}((z_n)_{n \geq 1})$ sind Cauchy-Folgen.

Satz 25. Algebraische Operationen mit komplexen Folgen

Seien $(z_n)_{n \geq 1}$ und $(w_n)_{n \geq 1}$ Folgen, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n + w_n = z_0 + w_0$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot w_n = z_0 \cdot w_0$
- (iii) $w_0 \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}$

Definition 24. Beschränktheit komplexer Folgen

Eine komplexe Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ heißt *echt beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}_+ : \forall n \geq 1 : |z_n| < K$.

Satz 26. Bolzano-Weierstraß für komplexe Zahlen

Sei $(z_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann besitzt $(z_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Teilfolge.

Kapitel 3

Reihen

Definition 25. Reihendefinition

Sei $(z_n)_{n \geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt $s_m = \sum_{k=1}^m z_k$ Partialsumme von $(z_n)_{n \geq 1}$. Die Folge $(s_m)_{m \geq 1}$ heißt *Reihe* mit den Gliedern $(z_n)_{n \geq 1}$ und wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ bezeichnet.

Satz 27. Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert die sogenannte *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \in \mathbb{C}$ absolut.

Satz 28

Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist, dass a_n eine Nullfolge ist. Es gilt also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

3.1 Konvergenz Kriterien für Reihen

Satz 29. Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konvergiert} \iff \forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m z_k \right| < \varepsilon$$

Definition 26. Absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ ist *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert. Jede absolute konvergente Reihe konvergiert.

Satz 30. Majoranten- und Minorantenkriterium

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei reelle Reihen.

- (i) Majorantenkriterium:
Falls $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n| \leq b_n$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
- (i) Minorantenkriterium:
Wenn $\forall k \in \mathbb{N}: a_k \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert und $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: a_n \geq b_n \geq 0$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Satz 31. Leibnizsches Konvergenzkriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine monoton fallende reelle Folge, sodass $\forall n \geq 1: a_n \geq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die sogenannte *alternierende Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Satz 32

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine monoton fallende reelle Folge, sodass $\forall n \geq 1: a_n \geq 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

3.2 Reihen mit komplexen Gliedern

Satz 33. Majoranten- und Minorantenkriterium für komplexe Reihen

Das Majoranten- bzw. Minorantenkriterium (Satz 30) gilt auch, wenn $(a_n)_{n \geq 1}$ eine komplexe Folge ist.

Satz 34. Cauchyscher Test

Sei $\sum a_n$ eine komplexe Reihe mit $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Dann gilt:

1. $\alpha < 1$: $\sum a_n$ konvergiert absolut
2. $\alpha > 1$: $\sum a_n$ divergiert
3. $\alpha = 1$: keine Aussage möglich

Satz 35. d'Alembertsches Quotientenkriterium

Sei $\sum z_n$ eine komplexe Reihe mit $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$. Dann gilt:

1. $\alpha < 1$: $\sum z_n$ konvergiert absolut
2. $\alpha > 1$: $\sum z_n$ divergiert
3. $\alpha = 1$: keine Aussage möglich

Definition 27. Potenzreihen

Seien $z_0, z \in \mathbb{C}$ und $(c_n)_{n \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Reihen der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ werden Potenzreihen genannt.

Satz 36. Cauchy-Hadamard: Konvergenz von Potenzreihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Dann gilt:

- (i) Die Potenzreihe konvergiert innerhalb des Kreises:

$$|z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

- (ii) Sie divergiert außerhalb des Kreises
(iii) Auf dem Kreisrand ist keine Aussage möglich

3.3 Umgeordnete Reihen

Definition 28. τ -umgeordnete Reihe

Sei $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ die τ -umgeordnete Reihe.

Satz 37. Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ eine komplexe, absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung dieser Reihe gegen denselben Grenzwert.

Satz 38. Riemannscher Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber **nicht** absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann gilt:

- (i) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann $\exists \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektive Abbildung, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = c$
- (ii) $\exists \tau_+: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \tau_-: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektive Abbildungen, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_+(n)} = +\infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_-(n)} = -\infty$

Satz 39. Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ absolut konvergente Reihen. Für $n \geq 0$ wird definiert:

$$c_n = \sum_{k=0}^n z_{n-k} w_k$$

Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \right)$$

absolut konvergent.

Satz 40. Eulersche Zahl

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

sowie $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Satz 41. Eigenschaften der Exponentialfunktion

Es gilt:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

sowie:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

Satz 42. Eulersche Formel

$$\forall z \in \mathbb{C}: \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

Kapitel 4

Stetige Funktionen

4.1 Bezeichnungen und Definitionen

Im Folgenden wird mit \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) der zu betrachtete Körper bezeichnet. Sei $M \subset \mathbb{K}$ der Definitionsbereich. Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ ordnet jedem Element $x \in M$ ein Element $y \in \mathbb{K}$ zu ($f(x) = y$).

Die Menge $f(M) = \{y \in \mathbb{K} \mid \exists x \in M: f(x) = y\}$ wird als Wertemenge oder auch Bild der Funktion f bezeichnet. Allgemeiner heißt $f(A) = \{y \in \mathbb{K} \mid \exists a \in A: f(a) = y\}$, wenn $A \subset M$, das Bild von A unter f .

Dabei bezeichnet $f|_A: A \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f|_A(a) = f(a)$ die Restriktion von f .

Definition 29. Operationen mit Funktionen

Seien $f, g: M \rightarrow \mathbb{K}$.

- (i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- (ii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- (iii) $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ wobei $\lambda \in \mathbb{K}$
- (iv) $\frac{f}{g}: M \setminus \{z \in M \mid g(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Definition 30. Komposition von Funktionen

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ und $g: E \rightarrow \mathbb{K}$ sodass $f(M) \subset E$. Dann bezeichnet $(g \circ f): M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ die Komposition der Funktionen f und g .

4.2 Stetigkeit von Funktionen

Definition 31. Stetigkeit einer Funktion

Sei $D \subset \mathbb{K}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ sowie $z_0 \in D$.

$$f \text{ stetig in } z_0 \iff \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall z \in D: |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig, wenn f in jedem $z_0 \in D$ stetig ist.

Satz 43. Folgenkriterium

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ und $z_0 \in D$.

$$f \text{ stetig in } z_0 \iff \forall (z_n)_{n \geq 1} \subset D: \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$$

Satz 44. Rationale Operationen auf stetigen Funktionen

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ beliebig. Wenn f, g in $z_0 \in D$ stetig sind, dann gilt:

- (i) $f + g$ ist stetig in z_0
- (ii) $f \cdot g$ ist stetig in z_0
- (iii) $\lambda \cdot f$ ist stetig in z_0
- (iv) falls $g(z_0) \neq 0$ gilt $\frac{f}{g}$ ist stetig in z_0

Satz 45. Komposition von stetigen Funktionen

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ und $g: E \rightarrow \mathbb{K}$ sodass $f(D) \subset E$. Sei außerdem f in $z_0 \in D$ stetig, sowie g in $w_0 = f(z_0) \in E$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f$ in z_0 stetig.

4.3 Grenzwerte von Funktionen

Definition 32. Häufungspunkte einer Menge

Sei $M \subset \mathbb{K}$ eine beliebige Menge. Ein Punkt $p \in \mathbb{K}$ ist ein Häufungspunkt der Menge M , wenn $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - p| < \varepsilon\}$ eine unendliche Teilmenge von M enthält.

Definition 33. Grenzwert einer Funktion

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ und $z_0 \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von D . Dann ist $A \in \mathbb{K}$ der Grenzwert von f , wenn z gegen z_0 strebt, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall z \in D: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

Satz 46

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ gilt genau dann, wenn für jede Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ von Elementen aus $D \setminus \{z_0\}$ die gegen z_0 konvergieren, die Folge $(f(z_n))_{n \geq 1}$ gegen A konvergiert.

Definition 34. Beschränktheit einer Funktion

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{K}$.

$$f \text{ ist beschränkt} \iff \exists M > 0: \forall z \in D: |f(z)| \leq M$$

Ist f beschränkt, wird

$$\|f\|_{C^0} = \sup\{|f(z)| \mid z \in D\}$$

als Supremumsnorm von f bezeichnet.

Satz 47. Eigenschaften der Supremumsnorm

Seien f, g beschränkte Funktionen. Dann gilt:

- (i) $\|f\|_{C^0} = 0 \iff f = 0$
- (ii) $\|\lambda \cdot f\|_{C^0} = |\lambda| \|f\|_{C^0}$
- (iii) $\|f + g\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^0} + \|g\|_{C^0}$

Definition 35. Konvergent normale Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *konvergent normal* genau dann, wenn $\forall n \geq 1$: f_n beschränkt ist und $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{C^0}$ konvergent.

Satz 48

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergent normal. Für $z \in D$ setze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Dann ist die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig.

Bemerkung 3. Potenzreihen sind konvergent normal

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $|z - z_0| < R$. Dann ist die Potenzreihe im Konvergenzradius konvergent normal.

4.4 Globale Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 49. Zwischenwertsatz von Bolzano-Cauchy

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann $\exists p \in]a, b[: f(p) = 0$.

Satz 50

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und $\exists x_m, x_M \in [a, b]: f(x_m) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ sowie $f(x_M) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Definition 36. Gleichmäßig stetig

Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in I *gleichmäßig stetig* wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in I: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Satz 51

Jede auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Definition 37

Sei $f:]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{R}: \forall x > \max(a, N): |f(x) - \alpha| < \varepsilon$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0: \exists K \in \mathbb{R}: \forall x > K: f(x) > M$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0: \exists K \in \mathbb{R}: \forall x > K: f(x) < -M$

Für $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ähnlich.

Definition 38. Monotone Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f :

- *monoton wachsend* wenn $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* wenn $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- *monoton fallend* wenn $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- *streng monoton fallend* wenn $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Satz 52

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f genau dann injektiv wenn f streng monoton ist.

Definition 39. Umkehrabbildung

Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$ und $f: M_1 \rightarrow M_2$ bijektiv. Dann ist $g: M_2 \rightarrow M_1$ genau dann die Umkehrabbildung (Inverse, $g = f^{-1}$), wenn $\forall y \in M_2: (f \circ g)(y) = y$ und $\forall x \in M_1: (g \circ f)(x) = x$.

Satz 53

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist $f([a, b]) = J \subset \mathbb{R}$ bijektiv und $f^{-1}: J \rightarrow [a, b]$ ist auch stetig und monoton.

4.5 Landau Symbole

Definition 40. Klein o und groß \mathcal{O}

Sei $f, g:]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow \infty$ wenn
 $\forall \varepsilon > 0: \exists R > 0: \forall x > \max(R, a): |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \rightarrow \infty$ wenn
 $\exists c > 0: \exists R \in \mathbb{R}: \forall x > R: |f(x)| \leq c |g(x)|$

Sei $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$. Dann ist:

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ wenn
 $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ wenn
 $\exists c > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: |f(x)| < c |g(x)|$

4.6 Logarithmus

Satz 54

Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$.

Die Umkehrfunktion heißt (natürlicher) Logarithmus $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 55. Eigenschaften des Logarithmus

- $\forall x, y \in]0, \infty[: \log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(1) = 0$
- $\log(x) > 0 \iff x > 1$

Definition 41. Potenzen einer positiv reellen Zahl

Sei $a \in]0, \infty[, z \in \mathbb{C}$. Dann ist $a^z = \exp(z \log(a))$.

Satz 56

Die Funktion $f(x) = a^x, f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist stetig und:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: a^{x+y} = a^x a^y$
- $\forall n \in \mathbb{N}: a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (a^x)^y = a^{xy}$

Satz 57

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion mit $\forall x, y \in \mathbb{R}: f(x+y) = f(x)f(y)$. Dann ist f entweder $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}_+$ oder $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$.

Bemerkung 4. Grenzwerte der Logarithmus Funktion

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$ wobei $x > 0$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$
- (iii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ dann $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ wobei $x > 0$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$

4.7 Trigonometrische Funktionen

Definition 42. Sinus und Kosinus

Da für $z \in \mathbb{C}$ $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$ gilt:

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

sowie $\cos(-z) = \cos(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$.

Satz 58. Additionstheoreme

Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2) + \sin(z_2) \cos(z_1)$$

Satz 59. Analytische Eigenschaften von Sinus und Cosinus

- (i) \sin und \cos sind auf \mathbb{C} stetig
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- (iii) r_{2n+2} und r_{2n+3} bezeichnen die Restglieder von Cosinus und Sinus, also

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + r_{2n+2}(z)$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} + r_{2n+3}(z)$$

Es gilt:

$$\forall |x| < 2n+3: |r_{2n+2}| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\forall |x| < 2n+4: |r_{2n+3}| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Satz 60. Nullstelle des Cosinus

$\cos: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ hat genau eine Nullstelle, nämlich $\frac{\pi}{2}$.

Satz 61. Folgerungen aus den Additionstheoremen

- $\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
- $\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
- $\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
- $\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

Bemerkung 5. Folgerungen der Nullstelle des Cosinus

- $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$
- $\exp(i\pi) = -1$
- $\forall z \in \mathbb{C}: \exp(z + 2\pi ki) = \exp(z)$ wenn $k \in \mathbb{Z}$. Gilt auch für \sin und \cos
- $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$ sowie $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$
- $\cos(z) = 0 \iff z \in \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
 $\sin(z) = 0 \iff z \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Satz 62. Umkehrfunktion von Sinus und Cosinus

- (i) Die Funktion $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bildet das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion ist $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- (ii) Die Funktion $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion ist $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Bemerkung 6. Gültigkeitsbereich der Umkehrfunktion

Es gilt $\forall x \in [-1, 1]: \cos(\arccos(x)) = x$ und $\forall x \in [0, \pi]: \arccos(\cos(x)) = x$.

Definition 43. Tangens

- (i) $\tan: \mathbb{C} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$\tan:] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend. Damit ist die Umkehrfunktion $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- (ii) $\cot: \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Kapitel 5

Differentialrechnung

Definition 44. Differenzierbarkeit einer Funktion

Sei $V \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} eine Funktion. Dann heißt f in einem Punkt $x_0 \in V$ differenzierbar falls x_0 ein Häufungspunkt von V ist und

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \neq x_0)$$

existiert.

5.1 Allgemeine Eigenschaften und wichtige Ableitungsregeln

Satz 63. Stetigkeit von differenzierbaren Funktionen

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} eine Funktion, die in $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Dann ist f in x_0 stetig.

Satz 64. Lineare Approximation

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ für $x \rightarrow x_0$ (mit $c = f'(x_0)$).

Satz 65. Algebraische Operationen

Seien $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen die in x_0 differenzierbar sind und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen auch differenzierbar:

- (i) $(f_1 + f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0)$
- (ii) $(\lambda f_1)'(x_0) = \lambda f_1'(x_0)$
- (iii) $(f_1 \cdot f_2)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)$
- (iv) $f_2(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x_0) = \frac{f_1'(x_0)f_2(x_0) - f_1(x_0)f_2'(x_0)}{f_2^2(x_0)}$

Satz 66. Kettenregel

Sei $f_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $f_1(I_1) \subset I_2$. Die Funktion f_1 sei in $x_1 \in I_1$ differenzierbar und f_2 in $x_2 = f_1(x_1)$ differenzierbar. Dann ist $g(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ in x_2 differenzierbar und $g'(x) = f_2'(f_1(x_1))f_1'(x_1)$.

Satz 67. Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f: I \rightarrow J$ bijektiv und stetig. Wenn f im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist $f^{-1}: J \rightarrow I$ im Punkt $y_0 = f(x_0) \in J$ differenzierbar und

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Definition 45. Höhere Ableitungen und stetige Differenzierbarkeit

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar ist, so heißt

$$(f')'(x_0) = f''(x_0)$$

die zweite Ableitung.

Mit Induktion: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal differenzierbar in x_0 , falls die $(k-1)$ -te Ableitung $f^{(k-1)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar ist, $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)}(x_0))'$.

- f heißt k -mal differenzierbar, wenn f in jedem Punkt aus I k -mal differenzierbar ist.
- f heißt k -mal *stetig differenzierbar* in I , wenn f k -mal differenzierbar ist und $f^{(k)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

5.2 Die zentralen Sätze der Differentialrechnung

Definition 46. Lokale Extrema

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Man sagt, f hat in $x_0 \in I$ ein

- (i) lokales Maximum (bzw. streng lokales Maximum) wenn
 $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall x \in I \cap]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[: f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) < f(x_0)$ mit $x \neq x_0$)
- (ii) lokales Minimum (bzw. streng lokales Minimum) wenn
 $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall x \in I \cap]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[: f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. $f(x) > f(x_0)$ mit $x \neq x_0$)

Satz 68. Satz von Fermat

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und sei in x_0 ein lokales Extrema sowie $\exists \delta_0:]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\subset I$. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz 69. Satz von Rolle

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Wenn f in $]a, b[$ differenzierbar ist, dann gilt: $\exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = 0$.

Satz 70. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die auf dem Intervall $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz 71. Satz von Cauchy

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen die auf $]a, b[$ differenzierbar sind. Dann gilt:
 $\exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$

Satz 72. Monotonie von Funktionen

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann gilt:

- (i) $\forall x \in]a, b[: f'(x) > 0 \Rightarrow f$ ist *streng* monoton wachsend.
- (ii) f ist monoton wachsend $\Rightarrow \forall x \in]a, b[: f'(x) \geq 0$.

Satz 73. Minimum bzw. Maximum einer Funktion

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $x_0 \in]a, b[$ existiert, so dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ existiert mit $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$). Dann hat f in x_0 ein streng lokales Minimum (bzw. Maximum).

5.3 Konvexität

Definition 47. Konvexe und konkave Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls $\forall x_0, x_1 \in I: \forall \lambda \in [0, 1]: f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_0)$. f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

Satz 74. Kriterium für Konvexität

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei I ein offenes Intervall ist und f zwei mal differenzierbar ist:

$$f \text{ ist konvex} \iff \forall x \in I: f''(x) \geq 0 \iff f' \text{ ist monoton wachsend}$$

Satz 75. Regel von l'Hôpital

Seien $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\forall x \in]a, b[: g'(x) \neq 0$ (dabei ist $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen). Gilt dann:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

und existiert der Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ wobei } x > a \text{ und } -\infty \leq L \leq \infty$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ wobei } x > a$$

Hinweis: Es müssen *alle* Voraussetzungen erfüllt sein (d.h. differenzierbar, $g'(x) \neq 0$, Limes existiert, Zähler und Nenner gehen gegen 0 oder ∞). Die Regel gilt ebenso wenn $x \rightarrow b$ mit $x < b$.

5.3.1 Taylor Reihe

Satz 76. Satz von Taylor

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, x \in I$. Sei $I_0 = [x, x_0]$ falls $x < x_0$ ($[x_0, x]$ falls $x_0 < x$) und J_0 das offene Intervall von I_0 . Die Funktion $f|_{I_0}$ und ihre ersten n Ableitungen seien auf I_0 stetig und $f|_{J_0}^{(n)}$ ist differenzierbar. Dann existiert ein ξ zwischen x und x_0 , sodass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x_0, x)$$

wobei

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \text{ (Restglied nach Lagrange)}$$

oder

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0) \text{ (Restglied nach Cauchy)}$$

Kapitel 6

Das Riemannsche Integral

6.1 Allgemeine Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Definition 48. Treppenfunktion

Sei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. ϕ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ gibt und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $\phi|_{[x_{k-1}, x_k[} = c_k$ mit $k = 1, \dots, n$.
 $T[a, b]$ ist der Vektorraum der Treppenfunktionen.

Definition 49

Sei $\phi \in T[a, b]$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ und $c_i = \phi|_{[x_{i-1}, x_i[}$. Dann:

$$\int_a^b \phi(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

Satz 77

Sei $\phi, \psi \in T[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\int_a^b (\phi(x) + \psi(x)) dx = \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx$
- $\int_a^b (\lambda \phi(x)) dx = \lambda \int_a^b \phi(x) dx$
- $\phi \geq \psi \Rightarrow \int_a^b \phi(x) dx \geq \int_a^b \psi(x) dx$

Definition 50. Ober- und Unterintegral

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige, aber beschränkte Funktion. Dann:

- $\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \{ \int_a^b \phi(x) dx \mid \phi \in T[a, b], \phi \geq f \}$ (Oberintegral)
- $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup \{ \int_a^b \psi(x) dx \mid \psi \in T[a, b], \psi \leq f \}$ (Unterintegral)

f heißt Riemann-integrierbar, wenn:

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$

Satz 78

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist (Riemann) integrierbar $\iff \forall \varepsilon > 0: \exists \phi, \psi \in T[a, b]: \psi \leq f \leq \phi$ und $\int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon$

Satz 79

Jede stetige Funktion ist integrierbar.

Satz 80

Jede monotone Funktion ist integrierbar.

Satz 81

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch folgende Funktionen integrierbar:

- (i) $f + g$
- (ii) λf
- (iii) f_+, f_-
- (iv) $\forall p \geq 1: |f|^p$

Außerdem gilt:

- $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$
- $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Satz 82. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$.

Definition 51. Riemannsche Summen

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Sei außerdem $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $(\xi_k)_{k=1, \dots, n}$ eine Stützstelle. Dann definiert man die Riemannsche Summe der Funktion f zur Unterteilung $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ und Stützstelle $(\xi_i)_{i=1, \dots, n}$ folgendermaßen:

$$\mathcal{R}_f((x_k), (\xi_k)) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$\mu((x_i)) = \max(x_i - x_{i-1})_{i=1, \dots, n}$ gibt die Feinheit der Unterteilung an.

Satz 83

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall (x_i)_{i=0, \dots, n}: \forall (\xi_i)_{i=1, \dots, n}: \mu((x_i)) < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{R}_f((x_i), (\xi_i)) \right| < \varepsilon$$

Dies erlaubt es, dass Riemannsche Integral als Grenzwert zu betrachten.

6.2 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung

Satz 84

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann:

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in [a, b]: \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= - \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx \\ \forall x_1, x_2, x_3 \in [a, b]: \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \\ F(x) &:= \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

Satz 85

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sei f in $x_0 \in [a, b]$ stetig. Dann ist die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ in x_0 differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$.

Definition 52. Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion oder primitive Funktion einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ falls $\forall x \in [a, b]: F'(x) = f(x)$ gilt.

Satz 86. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: (F(x))\Big|_a^b$$

Satz 87. Integration durch Substitution

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sowie $\phi([a, b]) = I$. Dann:

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt$$

Satz 88. Partielle Integration

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$