Universität Bayreuth
Physik

Theoretische Physik

Physikalisches Rechnen
Stoffsammlung

von
Moritz Schramm

Wintersemester 20/21

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Skalare, Vektoren und Matrizen

Ein Skalar a ist eine gewöhnliche Zahl aus einem beliebigen Körper (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Ein Vektor $\mathbf{a}$ ist ein Element eines Vektorraums (z.B. $\mathbb{R}^3$). Eine Matrix $\mathbf{A}$ besteht aus n Spalten und m Reihen (also $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$). Im Folgenden wird nur der dreidimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachtet.

Für den Betrag gilt $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Der nomierte Vektor $\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ hat immer die Länge 1.

Definition 1. Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Es gilt:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \cos\alpha$, wenn α der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

Definition 2. Kreuzprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Definition 3. Spatprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Gibt das Volumen, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird an.

Definition 4. Matrix (3×3)

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Definition 5. Matrixmultiplikation

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ik}) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{jk}$$

Der Eintrag in der i-ten Reihe und k-ten Spalte in $\mathbf{C}$ ist das Skalarprodukt der i-ten Reihe der Matrix $\mathbf{A}$ und der k-ten Spalte der Matrix $\mathbf{B}$.
Hinweis: $\mathbf{A}$ muss von der Form $m \times n$ und $\mathbf{B}$ von der Form $n \times p$ sein. $\mathbf{C}$ hat dann die Form $m \times p$.

Definition 6. Dyadisches Produkt

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}$$

Definition 7. Inverse einer Matrix

Eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ heißt Inverse einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$, wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}$

Es gilt:

- $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$
- $\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$
- Transposition: $\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- im Allgemeinen: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

1.2 Determinante

Definition 8. Entwicklung nach erster Zeile

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(\mathbf{A}_{1k})$$

wobei $\mathbf{A}_{jk}$ die Matrix $\mathbf{A}$ ist, bei der die j-te Zeile und k-te Spalte entfernt wurden (also $\mathbf{A}_{jk} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$).

Satz 1. Regel von Sarrus für 3×3 Matrizen

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Eigenschaften von Determinanten

Formel 2. Entwicklung nach beliebiger Zeile oder Spalte

Entwicklung nach k-ter Zeile:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

Entwicklung nach k-ter Spalte:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

Hinweis: Wenn k ungerade wird mit einem positiven Vorzeichen angefangen, welches dann alterniert wird. Wenn k gerade wird mit einem negativen Vorzeichen angefangen und dann alterniert.

Satz 3. Multiplikationstheorem

Sei $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Dann gilt: $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 9. Eigenwerte und Eigenvektoren

λ heißt Eigenwert zu einem Eigenvektor $\mathbf{x}$, wenn $\mathbf{x} \neq 0$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

Formel 4. Charakteristisches Polynom

$$\chi_n(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I})$$

Die Eigenwerte λ_i sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es gibt n Eigenwerte, die jedoch auch komplex und entartet ($\lambda_i = \lambda_j$ für $i \neq j$) sein können. Zu jedem Eigenwert gibt es einen Eigenvektor $\mathbf{x}_i$.

1.4 Totale Ableitung

Formel 5. Totale Ableitung einer Funktion

$$\frac{\mathrm{d}f(x_1(t), ..., x_n(t), t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

1.5 Taylorreihe

Formel 6. Taylorreihe

$$T_{N,f}(x; x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Formel 7. Taylorentwicklung in mehreren Variablen

$$T_{f(x,y)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial^m}{\partial y^m} f\bigg|_{(x_0,y_0)} \frac{1}{n!m!}(x - x_0)^n (y - y_0)^m$$

1.6 Fourier Reihen

Formel 8. Fourier Reihe

Meistens ist $L = \pi$. Dann ist die Fourier Reihe von f:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{inx\pi}{L}\right) \qquad \text{mit } c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, f(x)\, \exp\left(\frac{-inx\pi}{L}\right)$$

1.7 Dirac-Delta-Funktion

Definition 10. Als Ableitung der Stufenfunktion Θ

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)$$

Definition 11. Als Limes einer geeigneten Funktionenschar

$$\delta(x) = \lim_{\tau\to 0} \delta_\tau(x)$$

Definition 12. Durch integrale Eigenschaft

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0)\, g(x) = \begin{cases} g(x_0) & \text{falls } x_1 < x_0 < x_2 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Rechenregeln:

- Gerade Funktion: $\delta(x) = \delta(-x)$
- $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
- $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$
- $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)$ wobei x_i die Nullstellen von f sind. (Es muss $f'(x_i) \neq 0$ gelten)

1.8 Fourier Transformation

Formel 9. Fourier Transformation

Transformation in reziproken Raum (Fourier Raum):

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-ikx} =: \mathcal{F}\, f(x)$$

Rücktransformation:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \tilde{f}(k)\, e^{+ikx} =: \mathcal{F}^{-1}\, \tilde{f}(k)$$

Eigenschaften:

- Linearität: $\mathcal{F}(af(x) + bg(x)) = a\,\mathcal{F}\,f(x) + b\,\mathcal{F}\,g(x)$
- Identität: $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})f(x) = f(x)$
- Differentiation: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = \mathcal{F}^{-1}\, ik\, \mathcal{F}\, f(x)$
- Faltung: $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, f(x')g(x - x') = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$

- Verschobene Funktion: Sei $g(x) = f(x - x_0)$. Dann: $\tilde{g}(k) = \exp(-ikx_0)\tilde{f}(k)$

Formel 10. Mehrdimensionale Fourier-Transformation

Seien $\mathbf{r}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$.

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\mathbf{r}\, f(\mathbf{r})\, e^{-i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \tilde{f}(\mathbf{k})\, e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

Kapitel 2

Mehrdimensionale Integration und Differentiation

2.1 Differentiation

Formel 11. Differentiation mit Vektoren und Differentialen

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}$

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}$

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}$

(iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\ \mathbf{a} + f\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}$

Alle Regeln gelten auch für Differentiale, z.B. $\mathrm{d}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{b}$

2.2 Krummlinige Bewegung

Formel 12. Grundlegende Bewegungsvektoren

Tangenteneinheitsvektor:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t|}$$

Normaleneinheitsvektor (Hauptnormale):

$$\mathbf{n} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}/\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\mathbf{t}/\mathrm{d}s|}$$

Binormale:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}$$

Krümmung κ und Krümmungsradius ρ:

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}\right| \qquad \rho = \frac{1}{\kappa}$$

2.3 Nabla Kalkül

Formel 13

Nabla Operator:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^t$$

2.4 Krummlinige Koordinaten

2.5 Kurvenintegrale

2.6 Volumen- und ebene Flächenintegrale

2.7 Flächenintegrale

2.8 Integralsätze

Kapitel 3

Differentialgleichungen

3.1 Gewöhnliche Differentialgleichunge (ODEs)

3.1.1 Trennung der Variablen

3.1.2 Variation der Konstanten

3.1.3 Differentialgleichungssysteme

3.2 Partielle Differentialgleichungen (PDEs)