Universität Bayreuth
Physik

Theoretische Mechanik

Stoffsammlung

von
Moritz Schramm

Sommersemester 2021
basierend auf dem Lehrbuch von Fließbach und dem Vorlesungsskript von Prof. Gekle

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Koordinatensysteme

Definition 1. Basisvektoren

Bei gegebenen Koordinaten $\mathbf{r} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ werden die Basisvektoren wie folgt berechnet:

$$\mathbf{e}_{\theta_i} = \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta_i} \right|^{-1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

Definition 2. Koordinatendarstellungen

1. **Kartesische Koordinaten**

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. **Zylinderkoordinaten** mit $\det(J) = \rho$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho\mathbf{e}_\rho(\phi) + z\mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

3. **Kugelkoordinaten** mit $\det(J) = r^2\sin\theta$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{e}_r(\theta, \phi) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \\ +(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

1.2 Newtonsche Gesetze

Definition 3. Newtonsche Gesetze

1. Ein kräftefreier Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

$$\mathbf{F} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = \text{const}$$

2. Kraft ist Masse mal Beschleunigung

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3. Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massepunkt wirkt, entspricht stehts eine gleich große, gegengerichtete Kraft, mit der der Massepunkt auf seine Umgebung wirkt.

$$\mathbf{F}_{actio} = -\mathbf{F}_{reactio}$$

Zusätze:

1. Kräfte wirken (meist) entlang einer Wirkungslinie
2. Superpositionsprinzip: $\mathbf{F}_{tot} = \sum_i \mathbf{F}_i$

1.3 Erhaltungssätze

Definition 4. Impulserhaltung

Impuls:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Damit folgt:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{p} = \text{const}$$

Definition 5. Drehimpulserhaltung

Drehimpuls:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Drehmoment:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

Drehimpuls und Drehmoment hängen vom Ursprung des Koordinatensystems ab! Es folgt:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{M} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{l} = \text{const}$$

Definition 6. Energieerhaltung

Arbeit: $\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

Leistung: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$

Konservative Kraft $\iff \nabla \times \mathbf{F} = 0$

Kinetische Energie: $T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2$

Potenzielle Energie bei konservativen Kräften: $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$

Für konservative Kräfte gilt Energieerhaltung: $E = T + U = \text{const}$

1.4 Raum-Zeit Symmetrien

Formel 1. Allgemeine Galilei Transformation

$$x_i' = \alpha_{ij}x_j - v_i t - a_i \quad \text{und} \quad t' = t - t_0$$
$$\dot{x}_i' = \alpha_{ij}\dot{x}_j - v_i$$
$$F_i' = \alpha_{ij}F_j$$

Aktive Galilei Transformation: In einem IS werden 2 physikalische Systeme betrachtet

Passive Galilei Transformation: Dasselbe physikalische System wird von 2 Beobachtern IS und IS' betrachtet

Kovarianz: Newtonsche Gesetze haben in jedem IS dieselbe Form

Invarianz: Bewegung unter Galilei Transformation gleich

Satz 2. Fundamentale Eigenschaften der Raum-Zeit

Abgeschlossene Systeme sind unter folgenden Operationen invariant (symmetrisch): Translation in der Zeit oder im Raum, konstante Rotation im Raum und Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum IS. Damit folgen die Eigenschaften für $v \ll c$:

- Homogenität der Zeit $\Rightarrow$ Energieerhaltung
- Homogenität des Raums $\Rightarrow$ Impulserhaltung
- Isotropie des Raums $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung
- Relativität der Raum-Zeit $\Rightarrow \dot{\mathbf{R}}t - \mathbf{R} = 0$

1.5 System von Massepunkten

Definition 7. Schwerpunkt, Gesamtimpuls und Energieerhaltung

Schwerpunkt:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$

Damit folgt der Gesamtimpuls $\mathbf{P} = M\mathbf{R}$ und der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i$ mit dem Gesamtdrehmoment $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$.

Im abgeschlossenen System wirken keine äußeren Kräfte und es gilt:

$$\mathbf{P} = \text{const} \qquad \mathbf{L} = \text{const} \qquad \mathbf{M} = 0$$

Die kinetische Energie ist mit $T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\mathbf{r}}_i^2$ gegeben und wenn alle inneren und äußeren Kräfte konservativ sind, ist die Energie erhalten.

1.6 Beschleunigte Bezugssysteme

Definition 8. Linear beschleunigtes BS

Für ein linear beschleunigtes BS gilt $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}$

Daraus folgen die Bewegungsgleichungen im unbeschleunigten und beschleunigten System:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0 \qquad m\ddot{\mathbf{r}}' = -m\mathbf{a}$$

$-m\mathbf{a}$ bezeichnet dabei die Trägheitskraft.

Definition 9. Rotierendes BS

Bei einem rotierenden BS dreht sich das BS um eine Achse $\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$. Dadurch gilt:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -2m\left(\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'\right) - m\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \mathbf{r}'\right)$$

Wobei $-2m\left(\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'\right)$ die Corioliskraft und $-m\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \mathbf{r}'\right)$ die Zentrifugalkraft ist.

Kapitel 2

Lagrange Formalismus

2.1 Lagrange Gleichungen 1. Art

Definition 10. Zwangsbedingungen

Eine Zwangsbedingung schränkt die Koordinaten auf eine Bahn oder Ebene ein. Eine *holonome* Zwangsbedingung hat folgende Form:

$$g(\mathbf{r}, t) = 0$$

Falls die Zwangsbedingung unabhängig von t ist, nennt man sie *skleronom*, ansonsten *rheonom*.

Definition 11. Lagrange Gleichungen 1. Art

Eine Zwangsbedingung wird durch eine Zwangskraft $\mathbf{Z} = \lambda(t)\nabla g(\mathbf{r}, t)$ sichergestellt. Für R Zwangsbedingungen und N Teilchen ergeben sich die Lagrange Gleichungen 1. Art zu:

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(x_1, ..., x_{3N}, t)}{\partial x_n}$$

Für ein Teilchen und nur eine Zwangsbedingung also:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{Z} = \mathbf{F} + \lambda(t)\nabla g(\mathbf{r}, t)$$

Impuls und Drehimpuls sind erhalten wenn $\mathbf{F} + \mathbf{Z} = 0$ gilt. Außerdem gilt für die Energie:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \;\Rightarrow\; E = \text{const} \quad \text{wenn} \quad \forall\alpha\colon \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$$

Methode 1. Allgemeins Vorgehen um 1. Art zu lösen

1. Formulierung der Zwangsbedingungen durch $g_\alpha = 0$
2. Aufstellen der Lagrange Gleichungen 1. Art
3. Elimination der λ_α indem $\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha}{\mathrm{d}t^2}$ berechnet wird
4. Lösung der Bewegungsgleichungen
5. Bestimmung der Integrationskonstanten
6. Bestimmung der Zwangskräfte mit $\mathbf{Z} = \lambda(t)\nabla g(\mathbf{r}, t)$

2.2 Lagrange Gleichungen 2. Art

Definition 12. Verallgemeinerte Koordinaten

Mit R Zwangsbedingungen hat ein System noch $f = 3N - R$ Freiheitsgrade. Diese werden mit verallgemeinerten Koordinaten $q_1, ..., q_f$ dargestellt. Dazu ist eine Transformation

$$x_n = x_n(q_1, ..., q_f, t) = x_n(q, t)$$

notwendig. Die Zwangsbedingungen sowie die kinetische Energie $T = \sum_n \frac{m}{2}\dot{x}_n^2$ und die potenzielle Energie können dann mit verallgemeinerten Koordinaten formuliert werden:

$$T(q, \dot{q}, t) \qquad U(q, t) \qquad g_\alpha(q, t) = 0$$

Definition 13. Lagrange Gleichungen 2. Art

Die Lagrange Funktion wird wie folgt definiert:

$$\mathscr{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

Eine Koordinate q_k heißt *zyklisch*, falls $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = 0$.

Der verallgemeinerte (oder auch kanonische) Impuls ist $p_k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}$.

Die Lagrange Gleichungen 2. Art sind dann f DGLs 2. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k}$$

2.3 Hamiltonsches Prinzip

Definition 14. Wirkungsfunktional

Das Wirkungsfunktional ist wie folgt definiert:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung ($\delta S[q] = 0$) führt als Variationsproblem wieder zu den Lagrange Gleichungen.

2.4 Eichtransformation

Satz 3. Eichtransformation

Verschiedene Lagrange Funktionen führen zu denselben Bewegungsgleichungen:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathscr{L} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathscr{L}^* = 0$$

wenn z.B. $\mathscr{L}^* = \text{const} \cdot \mathscr{L}$ oder $\mathscr{L}^* = \mathscr{L} + \text{ const}$. Allgemein führen alle Lagrange Funktionen auf dieselben Bewegungsgleichungen bei folgender Form:

$$\mathscr{L}^*(q, \dot{q}, t) = \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t)$$

2.5 Noether Theorem

Satz 4. Erhaltungsgröße des Noether Theorems

Das Noether Theorem besagt, wie aus Symmetrien Erhaltungsgrößen folgen. Betrachte dazu folgende Transformation:

$$q_i^* = q_i + \varepsilon \psi_i(q, \dot{q}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$t^* = t + \varepsilon \varphi(q, \dot{q}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Bei der starken Annahme, dass die zwei Wirkungsfunktionale gleich sind ($S^*[q^*(t^*)] = S[q(t)]$) ergibt sich die folgende Erhaltungsgröße:

$$Q(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + (\mathscr{L} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i)\, \varphi = \text{const}$$

Kapitel 3

Variationskalkül

3.1 Euler Lagrange Gleichung

Definition 15. Funktional

Ein Funktional weißt jeder Funktion y einen Wert zu und hat meist die Form:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, F(x, y, y')$$

Meistens integriert man über eine Zeit $\mathrm{d}t$ oder eine Länge $\mathrm{d}s$ und nutzt dann $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ und $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2}$

Satz 5. Euler Lagrange Gleichungen

Um das $y(x)$ zu finden, bei dem J extremal wird, stellt man die Euler Lagrange Gleichungen auf:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Falls $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \mathrm{const}$$

Falls $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ vereinfacht sich die Gleichung zu (Beltrami Identität):

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = \mathrm{const}$$

3.2 Variation mit Nebenbedingungen

Satz 6. Isoperimetrische Nebenbedingungen

Eine isoperimetrische Nebenbedinung hat die Form

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, G(x, y, y')$$

Bei R Nebenbedingungen ergibt sich die neue Funktion

$$F^*(x, y, y') = F - \sum_{i=1}^{R} \lambda_i G_i$$

$y(x)$ lässt sich mit F^* und der Euler-Lagrange Gleichung bestimmen.

Satz 7. Holonome Nebenbedingungen

Eine holonome Nebenbedingung hat die Form

$$g(y, x) = 0$$

Diesmal gilt für R Nebenbedingungen:

$$F^*(x, y, y') = F - \sum_{i=1}^{R} \lambda_i(x) g_i$$

3.3 Variation mit mehreren Variablen

Formel 8. Mehrere unabhängige und abhängige Variablen

$$I[y_1, ..., y_n] = \int \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_m\, F(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n, Y_{11}, ..., Y_{nm})$$

$$\text{mit: } y_i = y_i(x_1, ..., x_m) \qquad Y_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \qquad i = 1, ..., n$$

Damit ergeben sich dann die Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial Y_{ij}} \right) = \frac{\partial F}{\partial y_i} \qquad i = 1, ..., n$$

Kapitel 4

Zentralpotenzial

4.1 Herleitung Bewegungsgleichungen

4.2 Verschiedene Zentralpotenziale

4.3 Keplerproblem

4.4 Streuung

Kapitel 5

Starre Körper

5.1 Raumfestes Inertialsystem und körperfestes Koordinatensysteme

5.2 Eulersche Winkel

5.3 Trägheitstensor

Kapitel 6

Kleine Schwingungen

6.1 Bewegungsgleichungen

Kapitel 7

Hamiltonformalismus

Definition 16. Hamilton-Funktion

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i(q,p,t)\, p_i - \mathscr{L}(q, \dot{q}(q,p,t), t)$$

mit dem verallgemeinerten Impuls $p_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}$

Formel 9. Hamilton-Gleichungen

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Im Gegensatz zu den f DGLs 2. Ordnung im Lagrangeformalismus erhält im Hamiltonformalismus $2f$ DGLs 1. Ordnung.

Satz 10. Energieerhaltung

Falls in der kinetischen Energie die generalisierte Geschwindigkeit nur quadratisch vorkommt und die potenzielle Energie nur von den generalisierten Koordinaten abhängt, gilt:

$$H(q,p,t) = T + U = E$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} \quad \text{und damit} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; H = \text{const}$$

Kapitel 8

Spezielle Relativitätstheorie