



**UNIVERSITÄT
BAYREUTH**

UNIVERSITÄT BAYREUTH
PHYSIK

Theoretische Physik

Physikalisches Rechnen
Stoffsammlung

von
Moritz Schramm

Wintersemester 20/21

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	1
1.1	Skalare, Vektoren und Matrizen	1
1.2	Determinante	3
1.3	Eigenwerte und Eigenvektoren	4
1.4	Totale Ableitung	4
1.5	Taylorreihe	4
1.6	Fourier Reihen	4
1.7	Dirac-Delta-Funktion	5
1.8	Fourier Transformation	5
2	Mehrdimensionale Integration und Differentiation	6
2.1	Differentiation	6
2.2	Krummlinige Bewegung	6
2.3	Nabla Kalkül	6
2.4	Krummlinige Koordinaten	6
2.5	Kurvenintegrale	6
3	Differentialgleichungen	7
3.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODEs)	7
3.2	Partielle Differentialgleichungen (PDEs)	7

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Skalare, Vektoren und Matrizen

Ein Skalar a ist eine gewöhnliche Zahl aus einem beliebigen Körper (z.B. \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Ein Vektor \mathbf{a} ist ein Element eines Vektorraums (z.B. \mathbb{R}^3). Eine Matrix \mathbf{A} besteht aus n Spalten und m Reihen (also $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$). Im Folgenden wird nur der dreidimensionale Vektorraum \mathbb{R}^3 betrachtet.

Für den Betrag gilt $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Der normierte Vektor $\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ hat immer die Länge 1.

Definition 1. Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Es gilt:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos \alpha$, wenn α der Winkel zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} ist.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

Definition 2. Kreuzprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Definition 3. Spatprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Gibt das Volumen, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird an.

Definition 4. Matrix (3×3)

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Definition 5. Matrixmultiplikation

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ik}) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{jk}$$

Der Eintrag in der i -ten Reihe und k -ten Spalte in \mathbf{C} ist das Skalarprodukt der i -ten Reihe der Matrix \mathbf{A} und der k -ten Spalte der Matrix \mathbf{B} .

Hinweis: \mathbf{A} muss von der Form $m \times n$ und \mathbf{B} von der Form $n \times p$ sein. \mathbf{C} hat dann die Form $m \times p$.

Definition 6. Dyadisches Produkt

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}$$

Definition 7. Inverse einer Matrix

Eine Matrix \mathbf{A}^{-1} heißt Inverse einer quadratischen Matrix \mathbf{A} , wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}$

Es gilt:

$$\bullet \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \alpha \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Transposition: } \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- im Allgemeinen: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

1.2 Determinante

Definition 8. Entwicklung nach erster Zeile

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} \det(\mathbf{A}_{1k})$$

wobei \mathbf{A}_{jk} die Matrix \mathbf{A} ist, bei der die j -te Zeile und k -te Spalte entfernt wurden (also $\mathbf{A}_{jk} \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$).

Satz 1. Regel von Sarrus für 3×3 Matrizen

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Formel 2. Entwicklung nach beliebiger Zeile oder Spalte

Entwicklung nach k -ter Zeile:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k-j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

Entwicklung nach k -ter Spalte:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

Hinweis: Wenn k ungerade wird mit einem positiven Vorzeichen angefangen, welches dann alterniert wird. Wenn k gerade wird mit einem negativen Vorzeichen angefangen und dann alterniert.

Satz 3. Multiplikationstheorem

Sei $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Dann gilt: $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

Eigenschaften
von
De-
termi-
nanten

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 9. Eigenwerte und Eigenvektoren

λ heißt Eigenwert zu einem Eigenvektor \mathbf{x} , wenn $\mathbf{x} \neq 0$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

Formel 4. Charakteristisches Polynom

$$\chi_n(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I})$$

Die Eigenwerte λ_i sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es gibt n Eigenwerte, die jedoch auch komplex und entartet ($\lambda_i = \lambda_j$ für $i \neq j$) sein können. Zu jedem Eigenwert gibt es einen Eigenvektor \mathbf{x}_i .

1.4 Totale Ableitung

Formel 5. Totale Ableitung einer Funktion

$$\frac{df(x_1(t), \dots, x_n(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

1.5 Taylorreihe

Formel 6. Taylorreihe

$$T_{N,f}(x; x_0) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Formel 7. Taylorentwicklung in mehreren Variablen

$$T_{f(x,y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f \Big|_{(x_0,y_0)} \frac{1}{n!m!} (x - x_0)^n (y - y_0)^m$$

1.6 Fourier Reihen

Formel 8. Fourier Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-inx}$$

1.7 Dirac-Delta-Funktion

Definition 10. Als Ableitung der Stufenfunktion

Definition 11. Als Limes einer geeigneten Funktionenschar

Definition 12. Durch integrale Eigenschaft

Rechenregeln:

1.8 Fourier Transformation

Formel 9. Fourier Transformation

Transformation in reziproken Raum (Fourier Raum):

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} =: \mathcal{F} f(x)$$

Rücktransformation:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{+ikx} =: \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(k)$$

Eigenschaften:

Formel 10. Mehrdimensionale Fourier-Transformation

Kapitel 2

Mehrdimensionale Integration und Differentiation

2.1 Differentiation

Formel 11. Differentiation mit Vektoren und Differentialen

$$(i) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d}{dt}\mathbf{a} + \frac{d}{dt}\mathbf{b}$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d}{dt}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{b}$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d}{dt}\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d}{dt}\mathbf{b}$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dt}(f\mathbf{b}) = \frac{d}{dt}f \mathbf{a} + f \frac{d}{dt}\mathbf{a}$$

Alle Regeln gelten auch für Differentiale, z.B. $d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = d\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{b}$

2.2 Krummlinige Bewegung

2.3 Nabla Kalkül

2.4 Krummlinige Koordinaten

2.5 Kurvenintegrale

Kapitel 3

Differentialgleichungen

3.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODEs)

3.2 Partielle Differentialgleichungen (PDEs)