



**UNIVERSITÄT  
BAYREUTH**

UNIVERSITÄT BAYREUTH  
PHYSIK

---

# Analysis

---

Sätze und Definitionen

von  
Moritz Schramm

Wintersemester 20/21

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Reelle Zahlen</b>	<b>1</b>
1.1	Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen . . . . .	2
1.2	Die Existenz einer kleinsten oberen oder größten unteren Schranke . . . . .	3
1.3	Die wichtigsten Klassen reeller Zahlen . . . . .	4
1.3.1	Die natürlichen Zahlen . . . . .	4
1.3.2	Die ganzen Zahlen . . . . .	4
1.3.3	Die rationalen Zahlen . . . . .	4
1.3.4	Die reellen Zahlen . . . . .	4
1.3.5	Weitere Sätze und Definitionen . . . . .	4
1.4	Das Archimedische Prinzip . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Folgen</b>	<b>6</b>
2.1	Der Grenzwert einer Folge . . . . .	6
2.1.1	Eigenschaften der Grenzwerte . . . . .	6
2.2	Das Cauchysche Konvergenzkriterium . . . . .	8
2.2.1	Häufungspunkte einer Folge . . . . .	9
2.3	Folgen komplexer Zahlen . . . . .	9
2.3.1	Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .	9
2.3.2	Konvergenz in $\mathbb{C}$ . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Reihen</b>	<b>12</b>
3.1	Konvergenz Kriterien für Reihen . . . . .	12
3.2	Reihen mit komplexen Gliedern . . . . .	13
3.3	Umgeordnete Reihen . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Stetige Funktionen</b>	<b>16</b>
4.1	Bezeichnungen und Definitionen . . . . .	16
4.2	Stetigkeit von Funktionen . . . . .	17
4.3	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	17
4.4	Globale Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	19
4.5	Landau Symbole . . . . .	20
4.6	Logarithmus . . . . .	21
4.7	Trigonometrische Funktionen . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>24</b>
5.1	Allgemeine Eigenschaften und wichtige Ableitungsregeln . . . . .	24
5.2	Die zentralen Sätze der Differentialrechnung . . . . .	26
5.3	Konvexität . . . . .	27

5.3.1	Taylor Reihe . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Das Riemannsche Integral</b>	<b>29</b>
6.1	Allgemeine Eigenschaften integrierbarer Funktionen . . . . .	29
6.2	Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung . . . . .	31

# Kapitel 1

## Reelle Zahlen

Eine Menge  $\mathbb{R}$  wird als Menge der reellen Zahlen bezeichnet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

I Axiom der Addition:

$+$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $(x, y) \mapsto x + y$

1<sub>+</sub> Es existiert ein neutrales Element 0 mit  $\forall x \in \mathbb{R}: x + 0 = 0 + x = x$

2<sub>+</sub> Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  existiert ein  $-x \in \mathbb{R}$  sodass  $x + (-x) = (-x) + x = 0$

3<sub>+</sub> Die Operation  $+$  ist assoziativ, d.h.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$

4<sub>+</sub> Die Operation  $+$  ist kommutativ, d.h.  $\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$

II Axiom der Multiplikation:

$\cdot$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $(x, y) \mapsto x \cdot y$

1. Es existiert ein neutrales Element  $1 \neq 0$  sodass  $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

2.  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  existiert ein  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  (das Inverse von  $x$ ) sodass  
 $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

3. Die Operation  $\cdot$  ist assoziativ, d.h.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

4. Die Operation  $\cdot$  ist kommutativ, d.h.  $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y = y \cdot x$

Zusätzlich: Distributivität  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

III Anordnungsaxiom:

Zwischen den Elementen in  $\mathbb{R}$  existiert eine Relation  $\leq$  mit folgenden Bedingungen:

0 <sub>$\leq$</sub>   $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq x$

1 <sub>$\leq$</sub>   $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

2 <sub>$\leq$</sub>   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

3 <sub>$\leq$</sub>   $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \vee y \leq x$

IV Vollständigkeitsaxiom:

Seien  $X, Y$  Mengen, sodass  $X \neq \emptyset$ ,  $Y \neq \emptyset$  sowie  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $Y \subseteq \mathbb{R}$  und  $\forall x \in X, y \in Y: x \leq y$ . Dann gilt  $\exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in X, y \in Y: x \leq c \leq y$

## 1.1 Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen

(a) Folgerungen aus dem Additionsaxiom

1. Es gibt nur ein additives neutrales Element  $0 \in \mathbb{R}$
2. Jedes  $x \in \mathbb{R}$  besitzt ein *eindeutiges* Negatives
3. In  $\mathbb{R}$  besitzt die Gleichung  $a + x = b$  die *eindeutige* Lösung  $x = b - a$

(b) Folgerungen aus dem Multiplikationsaxiom

1. Es gibt nur ein multiplikates neutrales Element  $1 \in \mathbb{R}$
2. Zu jedem  $x \neq 0$  gibt es nur ein Inverses  $x^{-1}$
3. Für  $a \neq 0$  besitzt die Gleichung  $x \cdot a = b$  die eindeutige Lösung  $x = b \cdot a^{-1}$

(c) Folgerungen aus den Axiomen I und II

1.  $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
2.  $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$
3.  $\forall x \in \mathbb{R}: (-1) \cdot x = -x$
4.  $\forall x \in \mathbb{R}: (-x) \cdot (-x) = x \cdot x$

(d) Folgerungen aus dem Anordnungsaxiom

1.  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt *genau* eine der Relationen  $x < y$ ,  $x = y$ ,  $x > y$
2.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x < y \wedge y \leq z \Rightarrow x < z$

(e) Folgerungen aus den Axiomen I und II sowie II und III

1.  $\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}$ :
  - $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
  - $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
  - $x \leq y \wedge z \leq w \Rightarrow x + z \leq y + w$
2.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ :
  - $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
  - $x < 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$
  - $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
  - $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$
  - $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$
3.  $0 < 1$
4.  $\forall x \in \mathbb{R}: x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

## 1.2 Die Existenz einer kleinsten oberen oder größten unteren Schranke

### Definition 1. Obere und untere Schranken

- (i) Eine Menge  $X \subset \mathbb{R}$  heißt von *oben beschränkt*, falls eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $\forall x \in X: x \leq c$ .  $c$  ist dann eine obere Schranke.
- (ii) Eine Menge  $X \subset \mathbb{R}$  heißt von *unten beschränkt*, falls eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $\forall x \in X: c \leq x$ .  $c$  ist dann eine untere Schranke.
- (iii) Eine Menge die von *oben und unten* beschränkt ist, heißt *beschränkt*.

### Definition 2. Maximales und minimales Element

- (i) Ein Element  $a \in X$  wird maximales Element von  $X$  genannt, falls  $a$  eine obere Schranke ist  
 $a = \max(X)$
- (ii) Ein Element  $b \in X$  wird minimales Element von  $X$  genannt, falls  $b$  eine untere Schranke ist  
 $b = \min(X)$

### Bemerkung 1

Das maximale bzw. minimale Element sind immer eindeutig, müssen aber nicht zwangsweise existieren.

### Definition 3

- (i) Sei  $X \subset \mathbb{R}$  eine von oben beschränkte Menge. Die kleinste Zahl, die eine obere Schranke für  $X$  ist, heißt *Supremum* von  $X$  ( $\sup X$ ). Es gilt:
  - $\forall x \in X: x \leq \sup X$
  - $\forall M < \sup X: \exists x \in X: M < x$
- (ii) Sei  $X \subset \mathbb{R}$  eine von unten beschränkte Menge. Die größte Zahl, die eine untere Schranke für  $X$  ist, heißt *Infimum* von  $X$  ( $\inf X$ ).
  - $\forall x \in X: x \geq \inf X$
  - $\forall M > \inf X: \exists x \in X: M > x$

### Satz 1. $\exists \sup X$

Jede nicht leere Menge  $X \subset \mathbb{R}$ , die von oben beschränkt ist, besitzt eine eindeutige kleinste obere Schranke.

**Wichtig:** Nicht für  $\mathbb{Q}$  gültig.

## 1.3 Die wichtigsten Klassen reeller Zahlen

### 1.3.1 Die natürlichen Zahlen

#### Definition 4

Eine Menge  $X \subset \mathbb{R}$  heißt *induktiv*, wenn mit jedem  $x \in X$  auch  $x + 1 \in X$

#### Definition 5

Die Menge der natürlichen Zahlen ist die *kleinste* induktive Menge, die die 1 enthält und wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet.

### 1.3.2 Die ganzen Zahlen

#### Definition 6

$$\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \cup \{0\}$$

### 1.3.3 Die rationalen Zahlen

#### Definition 7

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

### 1.3.4 Die reellen Zahlen

Alle reelle Zahlen, die nicht rational sind, werden irrational genannt.

### 1.3.5 Weitere Sätze und Definitionen

#### Satz 2

Für jede natürliche Zahl gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

#### Definition 8. Binomial Koeffizient

$$\forall n \geq k \geq 0: \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

### Bemerkung 2

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

### Satz 3. Binomischer Lehrsatz

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

### Satz 4. Bernoullische Ungleichung

Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > -1$ . Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

## 1.4 Das Archimedische Prinzip

### Satz 5. Archimedisches Axiom

Zu jeder festen positiven Zahl  $x$  und jeder reellen Zahl  $y$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $n_0 x > y$

### Definition 9. Absolutbetrag

Für eine reelle Zahl  $x$  wird der Betrag definiert durch:

$$x = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

### Satz 6

Die Funktion  $|\cdot|$  hat folgende Eigenschaften:

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$  sowie  $|x| = 0 \iff x = 0$
- (ii) (Multiplikativität)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| \cdot |y| = |x \cdot y|$
- (iii) (Dreiecksungleichung)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
- (iv) (umgekehrte Dreiecksungleichung)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$



# Kapitel 2

## Folgen

### 2.1 Der Grenzwert einer Folge

#### Definition 10. Folge

Eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  wird Folge genannt und die Werte  $a_n = f(n)$  werden als  $n$ -tes Glied der Folge bezeichnet

#### Definition 11. $\varepsilon$ -Umgebung

Sei  $\varepsilon > 0$ . Das Intervall  $v(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  wird  $\varepsilon$ -Umgebung genannt.

#### Definition 12. Konvergenz einer Folge

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge reeller Zahlen.

$(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon$$

#### 2.1.1 Eigenschaften der Grenzwerte

##### Definition 13. Beschränktheit

- (i) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt nach *oben beschränkt*, falls  $\exists K \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq K$
- (ii) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt nach *unten beschränkt*, falls  $\exists K \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq K$
- (ii) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt *beschränkt*, falls  $\exists K \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq K$

##### Satz 7

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

### Satz 8. Eindeutigkeit des Limes

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist immer eindeutig.

### Satz 9. Algebraische Operationen mit dem Limes

Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  Folgen, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- (iii)  $b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: b_n \neq 0$  sowie  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

### Satz 10. Sandwich Theorem

- (i) Seien  $(x_n)_{n \geq 1}$  und  $(y_n)_{n \geq 1}$  Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Wenn  $x < y$  folgt  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: x_n < y_n$ .
- (ii) Seien  $(x_n)_{n \geq 1}$  und  $(y_n)_{n \geq 1}$  Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Wenn  $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \leq y_n$  folgt  $x \leq y$ .
- (iii) Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$  und  $(c_n)_{n \geq 1}$  Folgen, sodass  $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: a_n \leq b_n \leq c_n$ . Wenn  $a_n$  und  $c_n$  konvergieren mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , dann konvergiert  $b_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  (Sandwich Theorem).

### Definition 14. Uneigentliche Konvergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt *uneigentlich konvergent* gegen  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ ) wenn

$$\forall K \in \mathbb{R}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: a_n > K \quad (\text{bzw. } a_n < K)$$

### Satz 11

- (i) Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge, die gegen  $\pm\infty$  konvergiert. Dann folgt  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: a_n \neq 0$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$
- (ii) Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Mit der Annahme  $\forall n \geq N: a_n > 0$  (bzw.  $a_n < 0$ ) folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$  (bzw.  $-\infty$ ).

## 2.2 Das Cauchysche Konvergenzkriterium

### Definition 15. Cauchy Folge

Eine Folge heißt Cauchy Folge genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

### Satz 12

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge

### Definition 16. Teilfolgen

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge und  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \geq 1}$  ( $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$ ) Teilfolge von  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

### Satz 13. Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

### Satz 14. Intervallschachtelungs-Prinzip

Sei  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$  eine absteigende Folge von abgeschlossenen Intervallen in  $\mathbb{R}$ , sodass  $\lim_{k \rightarrow \infty} l(I_k) = 0$ . Dann  $\exists! x_0 \in \mathbb{R}: \forall k \geq 1: x_0 \in I_k$

### Definition 17. Monoton wachsende bzw. fallende Folgen

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt

- *monoton wachsend*, falls  $\forall n \geq 1: a_n \leq a_{n+1}$
- *streng monoton wachsend*, falls  $\forall n \geq 1: a_n < a_{n+1}$
- *monoton fallend*, falls  $\forall n \geq 1: a_n \geq a_{n+1}$
- *streng monoton fallend*, falls  $\forall n \geq 1: a_n > a_{n+1}$

### Satz 15

- Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert
- Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergiert

### Satz 16

Jede Cauchy Folge konvergiert.

## 2.2.1 Häufungspunkte einer Folge

### Definition 18. Häufungspunkt

Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt einer reellen Folge, wenn es eine Teilfolge dieser Folge gibt, die gegen  $a$  konvergiert.

### Definition 19. Limes superior und inferior

- Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine nach oben beschränkte Folge.  
Dann heißt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}$  Limes superior.
- Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine nach unten beschränkte Folge.  
Dann heißt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\}$  Limes inferior.

### Satz 17. Größter und kleinster Häufungspunkt

Der Limes Superior ist der *größte* Häufungspunkt und der Limes Inferior der *kleinste* Häufungspunkt.

### Satz 18

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine beschränkte Folge. Dann

$$(a_n)_{n \geq 1} \text{ konvergent} \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \iff \exists! \text{ Häufungspunkt}$$

## 2.3 Folgen komplexer Zahlen

### 2.3.1 Der Körper der komplexen Zahlen

#### Satz 19

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Körper (der Körper der komplexen Zahlen).

### Definition 20. Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation

Sei  $z = x + iy$ . Dann ist  $\operatorname{Re}(z) = x$  und  $\operatorname{Im}(z) = y$  sowie  $z^* = x - iy$ .

### Definition 21. Komplexer Betrag

Sei  $z = x + iy$ . Dann ist  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### Satz 20. Eigenschaften des komplexen Betrags

- (i)  $\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq 0$  sowie  $|z| = 0 \iff z = 0$
- (ii)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (iii)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

### Satz 21

Seien  $a, b \in \mathbb{C}$ . Dann hat die Gleichung  $z^2 + az + b = 0$  mindestens eine komplexe Lösung.

### Satz 22. Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom  $P$  mit  $\text{grad}(P) \geq 1$  besitzt mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

## 2.3.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$

### Definition 22. Konvergenz einer komplexen Folge

Eine Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  komplexer Zahlen heißt *konvergent gegen*  $z_0 \in \mathbb{C}$ , wenn:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |z_n - z_0| < \varepsilon$$

### Satz 23

Komplexe Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  konvergiert  $\iff \text{Re}((z_n)_{n \geq 1})$  und  $\text{Im}((z_n)_{n \geq 1})$  konvergiert.

### Definition 23. Komplexe Cauchy-Folge

Eine komplexe Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  wird Cauchy-Folge genannt, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0: |z_n - z_m| < \varepsilon$$

### Satz 24

$(z_n)_{n \geq 1}$  ist Cauchy-Folge  $\iff \text{Re}((z_n)_{n \geq 1})$  und  $\text{Im}((z_n)_{n \geq 1})$  sind Cauchy-Folgen.

### Satz 25. Algebraische Operationen mit komplexen Folgen

Seien  $(z_n)_{n \geq 1}$  und  $(w_n)_{n \geq 1}$  Folgen, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$ .

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n + w_n = z_0 + w_0$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot w_n = z_0 \cdot w_0$
- (iii)  $w_0 \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}$

### Definition 24. Beschränktheit komplexer Folgen

Eine komplexe Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  heißt *echt beschränkt*, falls  $\exists K \in \mathbb{R}_+ : \forall n \geq 1 : |z_n| < K$ .

### Satz 26. Bolzano-Weierstraß für komplexe Zahlen

Sei  $(z_n)_{n \geq 1}$  eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann besitzt  $(z_n)_{n \geq 1}$  eine konvergente Teilfolge.

# Kapitel 3

## Reihen

### Definition 25. Reihendefinition

Sei  $(z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt  $s_m = \sum_{k=1}^m z_k$  Partialsumme von  $(z_n)_{n \geq 1}$ . Die Folge  $(s_m)_{m \geq 1}$  heißt *Reihe* mit den Gliedern  $(z_n)_{n \geq 1}$  und wird mit  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  bezeichnet.

### Satz 27. Geometrische Reihe

Sei  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$ . Dann konvergiert die sogenannte *geometrische Reihe*  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \in \mathbb{C}$  absolut.

### Satz 28

Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist, dass  $a_n$  eine Nullfolge ist. Es gilt also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

## 3.1 Konvergenz Kriterien für Reihen

### Satz 29. Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konvergiert} \iff \forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m z_k \right| < \varepsilon$$

### Definition 26. Absolute Konvergenz

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  ist *absolut konvergent*, wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$  konvergiert. Jede absolute konvergente Reihe konvergiert.

### Satz 30. Majoranten- und Minorantenkriterium

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  zwei reelle Reihen.

(i) Majorantenkriterium:

Falls  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konvergiert und  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n| \leq b_n$ , dann konvergiert auch  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut.

(i) Minorantenkriterium:

Wenn  $\forall k \in \mathbb{N}: a_k \geq 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  divergiert und  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: a_n \geq b_n \geq 0$ , dann divergiert auch  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

### Satz 31. Leibnizsches Konvergenzkriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine monoton fallende reelle Folge, sodass  $\forall n \geq 1: a_n \geq 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann konvergiert die sogenannte *alternierende Reihe*  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ .

### Satz 32

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine monoton fallende reelle Folge, sodass  $\forall n \geq 1: a_n \geq 0$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  konvergiert.

## 3.2 Reihen mit komplexen Gliedern

### Satz 33. Majoranten- und Minorantenkriterium für komplexe Reihen

Das Majoranten- bzw. Minorantenkriterium (Satz 30) gilt auch, wenn  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine komplexe Folge ist.

### Satz 34. Cauchyscher Test

Sei  $\sum a_n$  eine komplexe Reihe mit  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ . Dann gilt:

1.  $\alpha < 1$ :  $\sum a_n$  konvergiert absolut
2.  $\alpha > 1$ :  $\sum a_n$  divergiert
3.  $\alpha = 1$ : keine Aussage möglich



### Satz 35. d'Alembertsches Quotientenkriterium

Sei  $\sum z_n$  eine komplexe Reihe mit  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ . Dann gilt:

1.  $\alpha < 1$ :  $\sum z_n$  konvergiert absolut
2.  $\alpha > 1$ :  $\sum z_n$  divergiert
3.  $\alpha = 1$ : keine Aussage möglich

### Definition 27. Potenzreihen

Seien  $z_0, z \in \mathbb{C}$  und  $(c_n)_{n \geq 0}$  eine Folge komplexer Zahlen. Reihen der Gestalt  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  werden Potenzreihen genannt.

### Satz 36. Cauchy-Hadamard: Konvergenz von Potenzreihen

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  eine Potenzreihe. Dann gilt:

- (i) Die Potenzreihe konvergiert innerhalb des Kreises:

$$|z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

- (ii) Sie divergiert außerhalb des Kreises  
(iii) Auf dem Kreisrand ist keine Aussage möglich

## 3.3 Umgeordnete Reihen

### Definition 28. $\tau$ -umgeordnete Reihe

Sei  $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung. Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$  die  $\tau$ -umgeordnete Reihe.

### Satz 37. Umordnungssatz

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  eine komplexe, absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung dieser Reihe gegen denselben Grenzwert.

### Satz 38. Riemannscher Umordnungssatz

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine konvergente, aber **nicht** absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann gilt:

- (i) Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann  $\exists \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektive Abbildung, sodass  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = c$
- (ii)  $\exists \tau_+: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \tau_-: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektive Abbildungen, sodass  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_+(n)} = +\infty$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_-(n)} = -\infty$

### Satz 39. Cauchy-Produkt von Reihen

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$  absolut konvergente Reihen. Für  $n \geq 0$  wird definiert:

$$c_n = \sum_{k=0}^n z_{n-k} w_k$$

Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} w_n \right)$$

absolut konvergent.

### Satz 40. Eulersche Zahl

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

sowie  $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### Satz 41. Eigenschaften der Exponentialfunktion

Es gilt:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

sowie:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

### Satz 42. Eulersche Formel

$$\forall z \in \mathbb{C}: \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

# Kapitel 4

## Stetige Funktionen

### 4.1 Bezeichnungen und Definitionen

Im Folgenden wird mit  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) der zu betrachtete Körper bezeichnet. Sei  $M \subset \mathbb{K}$  der Definitionsbereich. Eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{K}$  ordnet jedem Element  $x \in M$  ein Element  $y \in \mathbb{K}$  zu ( $f(x) = y$ ).

Die Menge  $f(M) = \{y \in \mathbb{K} \mid \exists x \in M: f(x) = y\}$  wird als Wertemenge oder auch Bild der Funktion  $f$  bezeichnet. Allgemeiner heißt  $f(A) = \{y \in \mathbb{K} \mid \exists a \in A: f(a) = y\}$ , wenn  $A \subset M$ , das Bild von  $A$  unter  $f$ .

Dabei bezeichnet  $f|_A: A \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f|_A(a) = f(a)$  die Restriktion von  $f$ .

#### Definition 29. Operationen mit Funktionen

Seien  $f, g: M \rightarrow \mathbb{K}$ .

- (i)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- (ii)  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- (iii)  $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$  wobei  $\lambda \in \mathbb{K}$
- (iv)  $\frac{f}{g}: M \setminus \{z \in M \mid g(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

#### Definition 30. Komposition von Funktionen

Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{K}$  und  $g: E \rightarrow \mathbb{K}$  sodass  $f(M) \subset E$ . Dann bezeichnet  $(g \circ f): M \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  die Komposition der Funktionen  $f$  und  $g$ .

## 4.2 Stetigkeit von Funktionen

### Definition 31. Stetigkeit einer Funktion

Sei  $D \subset \mathbb{K}$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  sowie  $z_0 \in D$ .

$$f \text{ stetig in } z_0 \iff \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall z \in D: |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$f$  heißt stetig, wenn  $f$  in jedem  $z_0 \in D$  stetig ist.

### Satz 43. Folgenkriterium

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  und  $z_0 \in D$ .

$$f \text{ stetig in } z_0 \iff \forall (z_n)_{n \geq 1} \subset D: \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$$

### Satz 44. Rationale Operationen auf stetigen Funktionen

Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $D \subset \mathbb{K}$  beliebig. Wenn  $f, g$  in  $z_0 \in D$  stetig sind, dann gilt:

- (i)  $f + g$  ist stetig in  $z_0$
- (ii)  $f \cdot g$  ist stetig in  $z_0$
- (iii)  $\lambda \cdot f$  ist stetig in  $z_0$
- (iv) falls  $g(z_0) \neq 0$  gilt  $\frac{f}{g}$  ist stetig in  $z_0$

### Satz 45. Komposition von stetigen Funktionen

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  und  $g: E \rightarrow \mathbb{K}$  sodass  $f(D) \subset E$ . Sei außerdem  $f$  in  $z_0 \in D$  stetig, sowie  $g$  in  $w_0 = f(z_0) \in E$  stetig. Dann ist die Funktion  $g \circ f$  in  $z_0$  stetig.

## 4.3 Grenzwerte von Funktionen

### Definition 32. Häufungspunkte einer Menge

Sei  $M \subset \mathbb{K}$  eine beliebige Menge. Ein Punkt  $p \in \mathbb{K}$  ist ein Häufungspunkt der Menge  $M$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0$  die Menge  $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - p| < \varepsilon\}$  eine unendliche Teilmenge von  $M$  enthält.

### Definition 33. Grenzwert einer Funktion

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  und  $z_0 \in \mathbb{K}$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann ist  $A \in \mathbb{K}$  der Grenzwert von  $f$ , wenn  $z$  gegen  $z_0$  strebt, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall z \in D: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

### Satz 46

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  gilt genau dann, wenn für jede Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  von Elementen aus  $D \setminus \{z_0\}$  die gegen  $z_0$  konvergieren, die Folge  $(f(z_n))_{n \geq 1}$  gegen  $A$  konvergiert.

### Definition 34. Beschränktheit einer Funktion

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ .

$$f \text{ ist beschränkt} \iff \exists M > 0: \forall z \in D: |f(z)| \leq M$$

Ist  $f$  beschränkt, wird

$$\|f\|_{C^0} = \sup\{|f(z)| \mid z \in D\}$$

als Supremumsnorm von  $f$  bezeichnet.

### Satz 47. Eigenschaften der Supremumsnorm

Seien  $f, g$  beschränkte Funktionen. Dann gilt:

- (i)  $\|f\|_{C^0} = 0 \iff f = 0$
- (ii)  $\|\lambda \cdot f\|_{C^0} = |\lambda| \|f\|_{C^0}$
- (iii)  $\|f + g\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^0} + \|g\|_{C^0}$

### Definition 35. Konvergent normale Reihen

Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  von Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *konvergent normal* genau dann, wenn  $\forall n \geq 1$ :  $f_n$  beschränkt ist und  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{C^0}$  konvergent.

### Satz 48

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  konvergent normal. Für  $z \in D$  setze  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ . Dann ist die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig.

### Bemerkung 3. Potenzreihen sind konvergent normal

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $|z - z_0| < R$ . Dann ist die Potenzreihe im Konvergenzradius konvergent normal.

## 4.4 Globale Eigenschaften stetiger Funktionen

### Satz 49. Zwischenwertsatz von Bolzano-Cauchy

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Dann  $\exists p \in ]a, b[ : f(p) = 0$ .

### Satz 50

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  beschränkt und  $\exists x_m, x_M \in [a, b] : f(x_m) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  sowie  $f(x_M) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ .

### Definition 36. Gleichmäßig stetig

Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt in  $I$  *gleichmäßig stetig* wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in I : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

### Satz 51

Jede auf einem Intervall  $[a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig.

### Definition 37

Sei  $f: ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{R}: \forall x > \max(a, N): |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0: \exists K \in \mathbb{R}: \forall x > K: f(x) > M$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0: \exists K \in \mathbb{R}: \forall x > K: f(x) < -M$$

Für  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ähnlich.

### Definition 38. Monotone Funktionen

Sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine Menge,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann heißt  $f$ :

- *monoton wachsend* wenn  $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* wenn  $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- *monoton fallend* wenn  $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- *streng monoton fallend* wenn  $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

### Satz 52

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $f$  genau dann injektiv wenn  $f$  streng monoton ist.

### Definition 39. Umkehrabbildung

Seien  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$  und  $f: M_1 \rightarrow M_2$  bijektiv. Dann ist  $g: M_2 \rightarrow M_1$  genau dann die Umkehrabbildung (Inverse,  $g = f^{-1}$ ), wenn  $\forall y \in M_2: (f \circ g)(y) = y$  und  $\forall x \in M_1: (g \circ f)(x) = x$ .

### Satz 53

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist  $f([a, b]) = J \subset \mathbb{R}$  bijektiv und  $f^{-1}: J \rightarrow [a, b]$  ist auch stetig und monoton.

## 4.5 Landau Symbole

### Definition 40. Klein $o$ und groß $\mathcal{O}$

Sei  $f, g: ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

- $f(x) = o(g(x))$  für  $x \rightarrow \infty$  wenn  
 $\forall \varepsilon > 0: \exists R > 0: \forall x > \max(R, a): |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  für  $x \rightarrow \infty$  wenn  
 $\exists c > 0: \exists R \in \mathbb{R}: \forall x > R: |f(x)| \leq c |g(x)|$

Sei  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I \subset \mathbb{R}$ . Dann ist:

- $f(x) = o(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$  wenn  
 $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in I \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$  wenn  
 $\exists c > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in I \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: |f(x)| < c |g(x)|$

## 4.6 Logarithmus

### Satz 54

Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, streng monoton wachsend und  $\exp(\mathbb{R}) = ]0, \infty[$ .

Die Umkehrfunktion heißt (natürlicher) Logarithmus  $\log: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Satz 55. Eigenschaften des Logarithmus

- $\forall x, y \in ]0, \infty[: \log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(1) = 0$
- $\log(x) > 0 \iff x > 1$

### Definition 41. Potenzen einer positiv reellen Zahl

Sei  $a \in ]0, \infty[, z \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $a^z = \exp(z \log(a))$ .

### Satz 56

Die Funktion  $f(x) = a^x, f: \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  ist stetig und:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: a^{x+y} = a^x a^y$
- $\forall n \in \mathbb{N}: a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (a^x)^y = a^{xy}$

### Satz 57

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reelle Funktion mit  $\forall x, y \in \mathbb{R}: f(x+y) = f(x)f(y)$ . Dann ist  $f$  entweder  $f(x) = a^x$  mit  $a \in \mathbb{R}_+$  oder  $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$ .

### Bemerkung 4. Grenzwerte der Logarithmus Funktion

- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$  wobei  $x > 0$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$
- (iii) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  dann  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$  wobei  $x > 0$
- (iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$



## 4.7 Trigonometrische Funktionen

### Definition 42. Sinus und Kosinus

Da für  $z \in \mathbb{C}$   $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$  gilt:

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

sowie  $\cos(-z) = \cos(z)$  und  $\sin(-z) = -\sin(z)$ .

### Satz 58. Additionstheoreme

Sei  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2) + \sin(z_2) \cos(z_1)$$

### Satz 59. Analytische Eigenschaften von Sinus und Cosinus

- (i)  $\sin$  und  $\cos$  sind auf  $\mathbb{C}$  stetig
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- (iii)  $r_{2n+2}$  und  $r_{2n+3}$  bezeichnen die Restglieder von Cosinus und Sinus, also

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + r_{2n+2}(x)$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + r_{2n+3}(x)$$

Es gilt:

$$\forall |x| < 2n+3: |r_{2n+2}| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\forall |x| < 2n+4: |r_{2n+3}| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

### Satz 60. Nullstelle des Cosinus

$\cos: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  hat genau eine Nullstelle, nämlich  $\frac{\pi}{2}$ .

### Satz 61. Folgerungen aus den Additionstheoremen

- $\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
- $\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
- $\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
- $\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

### Bemerkung 5. Folgerungen der Nullstelle des Cosinus

- $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$
- $\exp(i\pi) = -1$
- $\forall z \in \mathbb{C}: \exp(z + 2\pi ki) = \exp(z)$  wenn  $k \in \mathbb{Z}$ . Gilt auch für  $\sin$  und  $\cos$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$  sowie  $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$
- $\cos(z) = 0 \iff z \in \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$   
 $\sin(z) = 0 \iff z \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

### Satz 62. Umkehrfunktion von Sinus und Cosinus

- (i) Die Funktion  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  ist streng monoton fallend und bildet das Intervall  $[0, \pi]$  bijektiv auf  $[-1, 1]$  ab. Die Umkehrfunktion ist  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- (ii) Die Funktion  $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  bijektiv auf  $[-1, 1]$  ab. Die Umkehrfunktion ist  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

### Bemerkung 6. Gültigkeitsbereich der Umkehrfunktion

Es gilt  $\forall x \in [-1, 1]: \cos(\arccos(x)) = x$  und  $\forall x \in [0, \pi]: \arccos(\cos(x)) = x$ .

### Definition 43. Tangens

- (i)  $\tan: \mathbb{C} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$\tan: ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend. Damit ist die Umkehrfunktion  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

- (ii)  $\cot: \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

# Kapitel 5

## Differentialrechnung

### Definition 44. Differenzierbarkeit einer Funktion

Sei  $V \subset \mathbb{R}$  eine Menge und  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  in einem Punkt  $x_0 \in V$  differenzierbar falls  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $V$  ist und

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \neq x_0)$$

existiert.

### 5.1 Allgemeine Eigenschaften und wichtige Ableitungsregeln

#### Satz 63. Stetigkeit von differenzierbaren Funktionen

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine Funktion, die in  $x_0 \in I$  differenzierbar ist. Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

#### Satz 64. Lineare Approximation

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  genau dann in  $x_0 \in I$  differenzierbar, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(|x - x_0|)$  für  $x \rightarrow x_0$  (mit  $c = f'(x_0)$ ).

### Satz 65. Algebraische Operationen

Seien  $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen die in  $x_0$  differenzierbar sind und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind folgende Operationen auch differenzierbar:

- (i)  $(f_1 + f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0)$
- (ii)  $(\lambda f_1)'(x_0) = \lambda f_1'(x_0)$
- (iii)  $(f_1 \cdot f_2)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)$
- (iv)  $f_2(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x_0) = \frac{f_1'(x_0)f_2(x_0) - f_1(x_0)f_2'(x_0)}{f_2^2(x_0)}$

### Satz 66. Kettenregel

Sei  $f_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $f_1(I_1) \subset I_2$ . Die Funktion  $f_1$  sei in  $x_1 \in I_1$  differenzierbar und  $f_2$  in  $x_2 = f_1(x_1)$  differenzierbar. Dann ist  $g(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$  in  $x_2$  differenzierbar und  $g'(x) = f_2'(f_1(x_1))f_1'(x_1)$ .

### Satz 67. Ableitung der Umkehrfunktion

Sei  $f: I \rightarrow J$  bijektiv und stetig. Wenn  $f$  im Punkt  $x_0 \in I$  differenzierbar ist und  $f'(x_0) \neq 0$ , dann ist  $f^{-1}: J \rightarrow I$  im Punkt  $y_0 = f(x_0) \in J$  differenzierbar und

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

### Definition 45. Höhere Ableitungen und stetige Differenzierbarkeit

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Falls  $f': I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar ist, so heißt

$$(f')'(x_0) = f''(x_0)$$

die zweite Ableitung.

Mit Induktion:  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $k$ -mal differenzierbar in  $x_0$ , falls die  $(k-1)$ -te Ableitung  $f^{(k-1)}: I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar ist,  $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)}(x_0))'$ .

- $f$  heißt  $k$ -mal differenzierbar, wenn  $f$  in jedem Punkt aus  $I$   $k$ -mal differenzierbar ist.
- $f$  heißt  $k$ -mal *stetig differenzierbar* in  $I$ , wenn  $f$   $k$ -mal differenzierbar ist und  $f^{(k)}: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist.

## 5.2 Die zentralen Sätze der Differentialrechnung

### Definition 46. Lokale Extrema

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion. Man sagt,  $f$  hat in  $x_0 \in I$  ein

- (i) lokales Maximum (bzw. streng lokales Maximum) wenn  
 $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall x \in I \cap ]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[: f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) < f(x_0)$  mit  $x \neq x_0$ )
- (ii) lokales Minimum (bzw. streng lokales Minimum) wenn  
 $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall x \in I \cap ]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[: f(x) \geq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) > f(x_0)$  mit  $x \neq x_0$ )

### Satz 68. Satz von Fermat

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$  und sei in  $x_0$  ein lokales Extrema sowie  $\exists \delta_0: ]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[ \subset I$ . Dann gilt  $f'(x_0) = 0$ .

### Satz 69. Satz von Rolle

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) = f(b)$ . Wenn  $f$  in  $]a, b[$  differenzierbar ist, dann gilt:  $\exists x_0 \in ]a, b[: f'(x_0) = 0$ .

### Satz 70. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion die auf dem Intervall  $]a, b[$  differenzierbar ist. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in ]a, b[: f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### Satz 71. Satz von Cauchy

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen die auf  $]a, b[$  differenzierbar sind. Dann gilt:  
 $\exists x_0 \in ]a, b[: f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$

### Satz 72. Monotonie von Funktionen

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion die auf  $]a, b[$  differenzierbar ist. Dann gilt:

- (i)  $\forall x \in ]a, b[: f'(x) > 0 \Rightarrow f$  ist *streng* monoton wachsend.
- (ii)  $f$  ist monoton wachsend  $\Rightarrow \forall x \in ]a, b[: f'(x) \geq 0$ .

### Satz 73. Minimum bzw. Maximum einer Funktion

Sei  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Wenn  $x_0 \in ]a, b[$  existiert, so dass  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0)$  existiert mit  $f''(x_0) > 0$  (bzw.  $f''(x_0) < 0$ ). Dann hat  $f$  in  $x_0$  ein streng lokales Minimum (bzw. Maximum).

## 5.3 Konvexität

### Definition 47. Konvexe und konkave Funktionen

Sei  $I \subset \mathbb{R}$ .  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex*, falls  $\forall x_0, x_1 \in I: \forall \lambda \in [0, 1]: f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_0)$ .  $f$  heißt *konkav*, wenn  $-f$  konvex ist.

### Satz 74. Kriterium für Konvexität

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall ist und  $f$  zwei mal differenzierbar ist:

$$f \text{ ist konvex} \iff \forall x \in I: f''(x) \geq 0 \iff f' \text{ ist monoton wachsend}$$

### Satz 75. Regel von l'Hôpital

Seien  $f, g: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen und  $\forall x \in ]a, b[: g'(x) \neq 0$  (dabei ist  $a = -\infty$  und  $b = \infty$  zugelassen). Gilt dann:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

und existiert der Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ wobei } x > a \text{ und } -\infty \leq L \leq \infty$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ wobei } x > a$$

**Hinweis:** Es müssen *alle* Voraussetzungen erfüllt sein (d.h. differenzierbar,  $g'(x) \neq 0$ , Limes existiert, Zähler und Nenner gehen gegen 0 oder  $\infty$ ). Die Regel gilt ebenso wenn  $x \rightarrow b$  mit  $x < b$ .

### 5.3.1 Taylor Reihe

#### Satz 76. Satz von Taylor

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0, x \in I$ . Sei  $I_0 = [x, x_0]$  falls  $x < x_0$  ( $[x_0, x]$  falls  $x_0 < x$ ) und  $J_0$  das offene Intervall von  $I_0$ . Die Funktion  $f|_{I_0}$  und ihre ersten  $n$  Ableitungen seien auf  $I_0$  stetig und  $f|_{J_0}^{(n)}$  ist differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , sodass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x_0, x)$$

wobei

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \text{ (Restglied nach Lagrange)}$$

oder

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0) \text{ (Restglied nach Cauchy)}$$

# Kapitel 6

## Das Riemannsche Integral

### 6.1 Allgemeine Eigenschaften integrierbarer Funktionen

#### Definition 48. Treppenfunktion

Sei  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\phi$  heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  mit  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  gibt und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  existieren, sodass  $\phi|_{[x_{k-1}, x_k[} = c_k$  mit  $k = 1, \dots, n$ .  
 $T[a, b]$  ist der Vektorraum der Treppenfunktionen.

#### Definition 49

Sei  $\phi \in T[a, b]$  und  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$  und  $c_i = \phi|_{[x_{i-1}, x_i[}$ . Dann:

$$\int_a^b \phi(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

#### Satz 77

Sei  $\phi, \psi \in T[a, b]$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- $\int_a^b (\phi(x) + \psi(x)) dx = \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx$
- $\int_a^b (\lambda \phi(x)) dx = \lambda \int_a^b \phi(x) dx$
- $\phi \geq \psi \Rightarrow \int_a^b \phi(x) dx \geq \int_a^b \psi(x) dx$



### Definition 50. Ober- und Unterintegral

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige, aber beschränkte Funktion. Dann:

- $\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \{ \int_a^b \phi(x) dx \mid \phi \in T[a, b], \phi \geq f \}$  (Oberintegral)
- $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup \{ \int_a^b \psi(x) dx \mid \psi \in T[a, b], \psi \leq f \}$  (Unterintegral)

$f$  heißt Riemann-integrierbar, wenn:

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$

### Satz 78

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist (Riemann) integrierbar  $\iff \forall \varepsilon > 0: \exists \phi, \psi \in T[a, b]: \psi \leq f \leq \phi$  und  $\int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon$

### Satz 79

Jede stetige Funktion ist integrierbar.

### Satz 80

Jede monotone Funktion ist integrierbar.

### Satz 81

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei integrierbare Funktionen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch folgende Funktionen integrierbar:

- (i)  $f + g$
- (ii)  $\lambda f$
- (iii)  $f_+, f_-$
- (iv)  $\forall p \geq 1: |f|^p$

Außerdem gilt:

- $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$
- $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

### Satz 82. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann  $\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$ .

### Definition 51. Riemannsche Summen

Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$ . Sei außerdem  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $(\xi_k)_{k=1, \dots, n}$  eine Stützstelle. Dann definiert man die Riemannsche Summe der Funktion  $f$  zur Unterteilung  $(x_i)_{i=0, \dots, n}$  und Stützstelle  $(\xi_i)_{i=1, \dots, n}$  folgendermaßen:

$$\mathcal{R}_f((x_k), (\xi_k)) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$\mu((x_i)) = \max(x_i - x_{i-1})_{i=1, \dots, n}$  gibt die Feinheit der Unterteilung an.

### Satz 83

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion.

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall (x_i)_{i=0, \dots, n}: \forall (\xi_i)_{i=1, \dots, n}: \mu((x_i)) < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{R}_f((x_i), (\xi_i)) \right| < \varepsilon$$

Dies erlaubt es, dass Riemannsche Integral als Grenzwert zu betrachten.

## 6.2 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung

### Satz 84

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Dann:

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in [a, b]: \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= - \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx \\ \forall x_1, x_2, x_3 \in [a, b]: \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \\ F(x) &:= \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

### Satz 85

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion und sei  $f$  in  $x_0 \in [a, b]$  stetig. Dann ist die Funktion  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  in  $x_0$  differenzierbar und  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

### Definition 52. Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion oder primitive Funktion einer Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  falls  $\forall x \in [a, b]: F'(x) = f(x)$  gilt.

**Satz 86. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung**

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und sei  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: (F(x))\big|_a^b$$

**Satz 87. Integration durch Substitution**

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar sowie  $\phi([a, b]) = I$ . Dann:

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt$$

**Satz 88. Partielle Integration**

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen. Dann:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = (f(x)g(x))\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$