UNIVERSITÄT BAYREUTH

UNIVERSITÄT BAYREUTH
PHYSIK

# Analysis

Sätze und Definitionen

von
Moritz Schramm

Wintersemester 20/21

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Reelle Zahlen

Eine Menge $\mathbb{R}$ wird als Menge der reellen Zahlen bezeichnet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

I Axiom der Addition:
$+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $(x, y) \mapsto x + y$

- $1_+$ Es existiert ein neutrales Element 0 mit $\forall x \in \mathbb{R}$: $x + 0 = 0 + x = x$
- $2_+$ Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $-x \in \mathbb{R}$ sodass $x + (-x) = (-x) + x = 0$
- $3_+$ Die Operation + ist assoziativ, d.h. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x + (y + z) = (x + y) + z$
- $4_+$ Die Operation + ist kommutativ, d.h. $\forall x, y$ $\mathbb{R}$: $x + y = y + x$

II Axiom der Multiplikation:
$\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $(x, y) \mapsto x \cdot y$

1. Es existiert ein neutrales Element $1 \neq 0$ sodass $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (das Inverse von x) sodass
   $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
3. Die Operation $\cdot$ ist assoziativ, d.h. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
4. Die Operation $\cdot$ ist kommutatic, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \cdot y = y \cdot x$

Zusätzlich: Distributivität $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

III Anordnungsaxiom:
Zwischen den Elementen in $\mathbb{R}$ existiert eine Relation $\leq$ mit folgenden Bedingungen:

- $0_\leq$ $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \leq x$
- $1_\leq$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- $2_\leq$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- $3_\leq$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y \vee y \leq x$

IV Vollständigkeitsaxiom:
Seien $X, Y$ Mengen, sodass $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ sowie $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ und $\forall x \in X, y \in Y$: $x \leq y$. Dann gilt $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall x \in X, y \in Y$: $x \leq c \leq y$

## 1.1 Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen

(a) Folgerungen aus dem Additionsaxiom

1. Es gibt nur ein additives neutrales Element $0 \in \mathbb{R}$
2. Jedes $x \in \mathbb{R}$ besitzt ein *eindeutiges* Negatives
3. In $\mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $a + x = b$ die *eindeutige* Lösung $x = b - a$

(b) Folgerungen aus dem Multiplikationsaxiom

1. Es gibt nur ein multiplikates neutrales Element $1 \in \mathbb{R}$
2. Zu jedem $x \neq 0$ gibt es nur ein Inverses $x^{-1}$
3. Für $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $x \cdot a = b$ die eindeutige Lösung $x = b \cdot a^{-1}$

(c) Folgerungen aus den Axiomen I und II

1. $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \vee y = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$: $(-1) \cdot x = -x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$: $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$

(d) Folgerungen aus dem Anordnungsaxiom

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt *genau* eine der Relationen $x < y$, $x = y$, $x > y$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x < y \wedge y \leq z \;\Rightarrow\; x < z$

(e) Folgerungen aus den Axiomen I und II sowie II und III

1. $\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}$:
   - $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
   - $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
   - $x \leq y \wedge z \leq w \Rightarrow x + z \leq y + w$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:
   - $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
   - $x < 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$
   - $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
   - $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$
   - $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$
3. $0 < 1$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$: $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

## 1.2 Die Existenz einer kleinsten oberen oder größten unteren Schranke

**Definition 1. Obere und untere Schranken**

(i) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt von *oben beschränkt*, falls eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall x \in X \colon x \leq c$. $c$ ist dann eine obere Schranke.

(ii) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt von *unten beschränkt*, falls eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall x \in X \colon c \leq x$. $c$ ist dann eine untere Schranke.

(iii) Eine Menge die von *oben und unten* beschränkt ist, heißt *beschränkt*.

**Definition 2. Maximales und minimales Element**

(i) Ein Element $a \in X$ wird maximales Element von X genannt, falls $a$ eine obere Schranke ist
$a = \max(X)$

(ii) Ein Element $b \in X$ wird minimales Element von X genannt, falls $b$ eine untere Schranke ist
$b = \min(X)$

**Bemerkung 1**

Das maximale bzw. minimale Element sind immer eindeutig, müssen aber nicht zwangsweise existieren.

**Definition 3**

(i) Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine von oben beschränkte Menge. Die kleinste Zahl, die eine obere Schranke für $X$ ist, heißt *Supremum* von $X$ ($\sup X$). Es gilt:

- $\forall x \in X \colon x \leq \sup X$
- $\forall M < \sup X \colon \exists x \in X \colon M < x$

(ii) Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine von unten beschränkte Menge. Die größte Zahl, die eine untere Schranke für $X$ ist, heißt *Infimum* von $X$ ($\inf X$).

- $\forall x \in X \colon x \geq \inf X$
- $\forall M > \inf X \colon \exists x \in X \colon M > x$

**Satz 1.** $\exists \sup X$

Jede nicht leere Menge $X \subset \mathbb{R}$, die von oben beschränkt ist, besitzt eine eindeutige kleinste obere Schranke.
**Wichtig:** Nicht für $\mathbb{Q}$ gültig.

## 1.3 Die wichtigsten Klassen reeller Zahlen

### 1.3.1 Die natürlichen Zahlen

**Definition 4**

Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, wenn mit jedem $x \in X$ auch $x + 1 \in X$

**Definition 5**

Die Menge der natürlichen Zahlen ist die *kleinste* induktive Menge, die die 1 enthält und wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

### 1.3.2 Die ganzen Zahlen

**Definition 6**

$\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \cup \{0\}$

### 1.3.3 Die rationalen Zahlen

**Definition 7**

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$

### 1.3.4 Die reellen Zahlen

Alle reelle Zahlen, die nicht rational sind, werden irrational genannt.

### 1.3.5 Weitere Sätze und Definitionen

**Satz 2**

Für jede natürliche Zahl gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Definition 8. Binomial Koeffizient**

$$\forall n \geq k \geq 0\colon \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

**Satz 3. Binomischer Lehrsatz**

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

**Satz 4. Bernoullische Ungleichung**

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$. Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

## 1.4 Das Archimedische Prinzip

**Satz 5. Archimedisches Axiom**

Zu jeder festen positiven Zahl $x$ und jeder reellen Zahl $y$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $n_0 x > y$

**Definition 9. Absolutbetrag**

Für eine reelle Zahl $x$ wird der Betrag definiert durch:

$$x = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

**Satz 6**

Die Funktion $|\cdot|$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$ sowie $|x| = 0 \iff x = 0$

(ii) (Multiplikativität) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

(iii) (Dreiecksungleichung) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leq |x| + |y|$

(iv) (umgekehrte Dreiecksungleichung) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

# Kapitel 2

# Folgen

## 2.1 Der Grenzwert einer Folge

**Definition 10. Folge**

Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wird Folge genannt und die Werte $a_n = f(n)$ werden als n-tes Glied der Folge bezeichnet

**Definition 11. $\varepsilon$-Umgebung**

Sei $\varepsilon > 0$. Das Intervall $v(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ wird $\varepsilon$-Umgebung genannt.

**Definition 12. Konvergenz einer Folge**

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen.
$(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq n_0\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

### 2.1.1 Eigenschaften der Grenzwerte

**Definition 13. Beschränktheit**

(i) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt nach *oben beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq K$

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt nach *unten beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq K$

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt *beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leq K$

**Satz 7**

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Satz 8. Eindeutigkeit des Limes**

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist immer eindeutig.

**Satz 9. Algebraische Operationen mit dem Limes**

Seien $(a_n)_{n\geq1}$ und $(b_n)_{n\geq1}$ Folgen, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

(iii) $b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon b_n \neq 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

**Satz 10. Sandwich Theorem**

(i) Seien $(x_n)_{n\geq1}$ und $(y_n)_{n\geq1}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Wenn $x < y$ folgt $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon x_n < y_n$.

(ii) Seien $(x_n)_{n\geq1}$ und $(y_n)_{n\geq1}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Wenn $\forall n \geq n_0\colon x_n \leq y_n$ folgt $x \leq y$.

(iii) Seien $(a_n)_{n\geq1}$ $(b_n)_{n\geq1}$ und $(c_n)_{n\geq1}$ Folgen, sodass $\forall n \geq 1\colon a_n \leq b_n \leq c_n$. Wenn $a_n$ und $c_n$ konvergieren mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, dann konvergiert $b_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ (Sandwich Theorem).

**Definition 14. Uneigentliche Konvergenz**

Eine Folge $(a_n)_{n\geq1}$ heißt *uneigentlich konvergent* gegen $\infty$ (bzw. $-\infty$) wenn

$$\forall K \in \mathbb{R}\colon \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq n_0\colon a_n > K \quad (\text{bzw. } \; a_n < K)$$

**Satz 11**

(i) Sei $(a_n)_{n\geq1}$ eine Folge, die gegen $\pm\infty$ konvergiert. Dann folgt $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon a_n \neq 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

(ii) Sei $(a_n)_{n\geq1}$ eine Folge, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Mit der Annahme $\forall n \geq N\colon a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ (bzw. $-\infty$).

## 2.2 Das Cauchysche Konvergenzkriterium

**Definition 15. Cauchy Folge**

Eine Folge heißt Cauchy Folge genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n, m \geq n_0\colon |a_n - a_m| < \varepsilon$$

**Satz 12**

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge

**Definition 16. Teilfolgen**

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.

**Satz 13. Bolzano-Weierstraß**

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

**Satz 14. Intervallschachtelungs-Prinzip**

Sei $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ eine absteigende Folge von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$, sodass $\lim_{k\to\infty} l(I_k) = 0$. Dann $\exists! x_0 \in \mathbb{R}\colon \forall k \geq 1\colon x_0 \in I_k$

**Definition 17. Monoton wachsende bzw. fallende Folgen**

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt

- *monoton wachsend*, falls $\forall n \geq 1\colon a_n \geq a_{n+1}$
- *streng monoton wachsend*, falls $\forall n \geq 1\colon a_n > a_{n+1}$
- *monoton fallend*, falls $\forall n \geq 1\colon a_n \leq a_{n+1}$
- *streng monoton fallend*, falls $\forall n \geq 1\colon a_n < a_{n+1}$

**Satz 15**

- Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert
- Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergiert

**Satz 16**

Jede Cauchy Folge konvergiert.

### 2.2.1 Häufungspunkte einer Folge

**Definition 18. Häufungspunkt**

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer reellen Folge, wenn es eine Teilfolge dieser Folge gibt, die gegen $a$ konvergiert.

**Definition 19. Limes superior und inferior**

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine nach oben beschränkte Folge.
  Dann heißt $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ Limes superior.
- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine nach unten beschränkte Folge.
  Dann heißt $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ Limes inferior.

**Satz 17. Größter und kleinster Häufungspunkt**

Der Limes Superior ist der *größte* Häufungspunkt und der Limes Inferior der *kleinste* Häufungspunkt.

**Satz 18**

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ konvergent} \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n \quad\Longleftrightarrow\quad \exists! \text{ Häufungspunkt}$$

## 2.3 Folgen komplexer Zahlen

### 2.3.1 Der Körper der komplexen Zahlen

**Satz 19**

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper (der Körper der komplexen Zahlen).

**Definition 20. Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation**

Sei $z = x + iy$. Dann ist $\mathrm{Re}(z) = x$ und $\mathrm{Im}(z) = y$ sowie $z^* = x - iy$.

**Definition 21. Komplexer Betrag**

Sei $z = x + iy$. Dann ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Satz 20. Eigenschaften des komplexen Betrags**

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$: $|z| \geq 0$ sowie $|z| = 0 \iff z = 0$

(ii) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(iii) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $|z_1 + z_2| \leq |z_1||z_2|$

**Satz 21**

Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Dann hat die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ mindestens eine komplexe Lösung.

**Satz 22. Fundamentalsatz der Algebra**

Jedes Polynom $P$ mit $\text{grad}(P) \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.´

### 2.3.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$

**Definition 22. Konvergenz einer komplexen Folge**

Eine Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen heißt *konvergent gegen* $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq n_0\colon |z_n - z_0| < \varepsilon$$

**Satz 23**

Komplexe Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\iff$ $\text{Re}((z_n)_{n\geq 1})$ und $\text{Im}((z_n)_{n\geq 1})$ konvergiert.

**Definition 23. Komplexe Cauchy-Folge**

Eine komplexe Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ wird Cauchy-Folge genannt, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n, m \geq n_0\colon |z_n - z_m| < \varepsilon$$

**Satz 24**

$(z_n)_{n\geq 1}$ ist Cauchy-Fole $\iff$ $\text{Re}((z_n)_{n\geq 1})$ und $\text{Im}((z_n)_{n\geq 1})$ sind Cauchy-Folgen.

**Satz 25. Algebraische Operationen mit komplexen Folgen**

Seien $(z_n)_{n\geq 1}$ und $(w_n)_{n\geq 1}$ Folgen, sodass $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$.

(i) $\lim_{n\to\infty} z_n + w_n = z_0 + w_0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} z_n \cdot w_n = z_0 \cdot w_0$

(iii) $w_0 \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}$

**Definition 24. Beschränktheit komplexer Folgen**

Eine komplexe Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ heißt *echt beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}_+ \colon \forall n \geq 1 \colon |z_n| < K$.

**Satz 26. Bolzano-Weierstraß für komplexe Zahlen**

Sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann besitzt $(z_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge.

# Kapitel 3

# Reihen

**Definition 25. Reihendefinition**

Sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt $s_m = \sum_{k=1}^{m} z_k$ Partialsumme von $(z_n)_{n\geq 1}$. Die Folge $(s_m)_{m\geq 1}$ heißt *Reihe* mit den Gliedern $(z_n)_{n\geq 1}$ und wird mit $\sum_{\infty}^{k=1} z_k$ bezeichnet.

**Satz 27. Geometrische Reihe**

Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert die sogenannte *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \in \mathbb{C}$ absolut.

**Satz 28**

Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist, dass $a_n$ eine Nullfolge ist. Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

## 3.1 Konvergenz Kriterien für Reihen

**Satz 29. Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen**

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\colon \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n, m \geq n_0\colon \left| \sum_{k=n}^{m} z_k \right| < \varepsilon$$

**Definition 26. Absolute Konvergenz**

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_n$ ist *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert. Jede absolute konvergente Reihe konvergiert.

**Satz 30. Majoranten- und Minorantenkriterium**

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei reelle Reihen.

(i) Majorantenkriterium:
Falls $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon |a_n| \leq b_n$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

(i) Minorantenkriterium:
Wenn $\forall k \in \mathbb{N}\colon a_k \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert und $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon a_n \geq b_n \geq 0$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

**Satz 31. Leibnizsches Konvergenzkriterium**

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende reelle Folge, sodass $\forall n \geq 1\colon a_n \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die sogenannte *alternierende Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

**Satz 32**

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende reelle Folge, sodass $\forall n \geq 1\colon a_n \geq 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

## 3.2 Reihen mit komplexen Gliedern

**Satz 33. Majoranten- und Minorantenkriterium für komplexe Reihen**

Das Majoranten- bzw. Minorantenkriterium (Satz 30) gilt auch, wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ eine komplexe Folge ist.

**Satz 34. Cauchyscher Test**

Sei $\sum a_n$ eine komplexe Reihe mit $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Dann gilt:

1. $\alpha < 1$: $\sum a_n$ konvergiert absolut
2. $\alpha > 1$: $\sum a_n$ divergiert
3. $\alpha = 1$: keine Aussage möglich

**Satz 35. d'Alembertsches Quotientenkriterium**

Sei $\sum z_n$ eine komplexe Reihe mit $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dann gilt:

1. $\alpha < 1$: $\sum z_n$ konvergiert absolut
2. $\alpha > 1$: $\sum z_n$ divergiert
3. $\alpha = 1$: keine Aussage möglich

**Definition 27. Potenzreihen**

Seien $z_0, z \in \mathbb{C}$ und $(c_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Reihen der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ werden Potenzreihen genannt.

**Satz 36. Cauchy-Hadamard: Konvergenz von Potenzreihen**

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Dann gilt:

(i) Die Potenzreihe konvergiert innerhalb des Kreises:

$$|z - z_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup |c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

(ii) Sie divergiert außerhalb des Kreises

(iii) Auf dem Kreisrand ist keine Aussage möglich

## 3.3 Umgeordnete Reihen

**Definition 28. $\tau$-umgeordnete Reihe**

Sei $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ die $\tau$-umgeordnete Reihe.

**Satz 37. Umordnungssatz**

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ eine komplexe, absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung dieser Reihe gegen denselben Grenzwert.

**Satz 38. Riemannscher Umordnungssatz**

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber **nicht** absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann gilt:

(i) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann $\exists \tau \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektive Abbildung, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = c$

(ii) $\exists \tau_+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \tau_- \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektive Abbildungen, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_+(n)} = +\infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_-(n)} = -\infty$

**Satz 39. Cauchy-Produkt von Reihen**

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ absolut konvergente Reihen. Für $n \geq 0$ mit wird definiert:

$$c_n = \sum_{n=0}^{n} z_{n-k} w_k$$

Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} z_n)(\sum_{n=0}^{\infty} w_n)$$

absolut konvergent.

**Satz 40. Eulersche Zahl**

Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

sowie $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Satz 41. Eigenschaften der Exponentialfunktion**

Es gilt:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

sowie:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

**Satz 42. Eulersche Formel**

$$\forall z \in \mathbb{C} \colon \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

# Kapitel 4

# Stetige Funktionen

## 4.1 Bezeichnungen und Definitionen

Im Folgenden wird mit $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) der zu betrachtente Körper bezeichnet. Sei $M \subset \mathbb{K}$ der Definitionsbereich. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{K}$ ordnet jedem Element $x \in M$ ein Element $y \in \mathbb{K}$ zu ($f(x) = y$).
Die Menge $f(M) = \{y \in \mathbb{K} \mid \exists x \in M\colon f(x) = y\}$ wird als Wertemenge order auch Bild der Funktion f bezeichnet. Allgemeiner heißt $f(A) = \{y \in \mathbb{K} \mid \exists a \in A\colon f(a) = y\}$, wenn $A \subset M$, das Bild von A unter f.
Dabei bezeichnet $f_{|A}\colon A \to \mathbb{K}$ mit $f_{|A}(a) = f(a)$ die Restriktion von f.

**Definition 29. Operationen mit Funktionen**

Seien $f, g\colon M \to \mathbb{K}$.

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(ii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

(iii) $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ wobei $\lambda \in \mathbb{K}$

(iv) $\frac{f}{g}\colon M \setminus \{z \in M \mid g(z) = 0\} \to \mathbb{K}$ mit $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

**Definition 30. Komposition von Funktionen**

Sei $f\colon M \to \mathbb{K}$ und $g\colon E \to \mathbb{K}$ sodass $f(M) \subset E$. Dann bezeichnet $(g \circ f)\colon M \to \mathbb{K}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ die Komposition der Funktionen $f$ und $g$.

## 4.2 Stetigkeit von Funktionen

**Definition 31. Stetigkeit einer Funktion**

Sei $D \subset \mathbb{K}$ und $f\colon D \to \mathbb{K}$ sowie $z_0 \in D$.

$$f \text{ stetig in } z_0 \iff \forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall z \in D\colon |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$f$ heißt stetig, wenn $f$ in jedem $z_0 \in D$ stetig ist.

**Satz 43. Folgenkriterium**

Sei $f\colon D \to \mathbb{K}$ und $z_0 \in D$.

$$f \text{ stetig in } z_0 \iff \forall (z_n)_{n\geq 1} \subset D\colon \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$$

**Satz 44. Rationale Operationen auf stetigen Funktionen**

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ beliebig. Wenn $f, g$ in $z_0 \in D$ stetig sind, dann gilt:

(i) $f + g$ ist stetig in $z_0$

(ii) $f \cdot g$ ist stetig in $z_0$

(iii) $\lambda \cdot f$ ist stetig in $z_0$

(iv) falls $g(z_0) \neq 0$ gilt $\frac{f}{g}$ ist stetig in $z_0$

**Satz 45. Komposition von stetigen Funktionen**

Sei $f\colon D \to \mathbb{K}$ und $g\colon E \to \mathbb{K}$ sodass $f(D) \subset E$. Sei außerdem $f$ in $z_0 \in D$ stetig, sowie $g$ in $w_0 = f(z_0) \in E$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f$ in $z_0$ stetig.

## 4.3 Grenzwerte von Funktionen

**Definition 32. Häufungspunkte einer Menge**

Sei $M \subset \mathbb{K}$ eine beliebige Menge. Ein Punkt $p \in \mathbb{K}$ ist ein Häufungspunkt der Menge M, wenn $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - p| < \varepsilon\}$ eine unendliche Teilmenge von M enthält.

**Definition 33. Grenzwert einer Funktion**

Sei $f\colon D \to \mathbb{K}$ und $z_0 \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von $D$. Dann ist $A \in \mathbb{K}$ der Grenzwert von $f$, wenn $z$ gegen $z_0$ strebt, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall z \in D\colon 0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

**Satz 46**

$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ gilt genau dann, wenn für jede Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ von Element aus $D \setminus \{z_0\}$ die gegen $z_0$ konvergieren, die Folge $(f(z_n))_{n \geq 1}$ gegen $A$ konvergiert.

**Definition 34. Beschränkheit einer Funktion**

Sei $f\colon D \to \mathbb{K}$.

$$f \text{ ist beschränkt} \iff \exists M > 0\colon \forall z \in D\colon |f(z)| \leq M$$

Ist $f$ beschränkt, wird

$$||f||_{C^o} = \sup\{|f(z)| \;\big|\; z \in D)\}$$

als Supremumsnorm von f bezeichnet.

**Satz 47. Eigenschaften der Supremumsnorm**

Seien $f, g$ beschränkte Funktionen. Dann gilt:

(i) $||f||_{C^o} = 0 \iff f = 0$

(ii) $||\lambda \cdot f||_{C^o} = |\lambda| ||f||_{C^o}$

(iii) $||f + g||_{C^o} \leq ||f||_{C^o} + ||g||_{C^o}$

**Definition 35. Konvergent normale Reihen**

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{K}$ heißt *konvergent normal* genau dann, wenn $\forall n \geq 1\colon f_n$ beschränkt ist und $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{C^o}$ konvergent.

**Satz 48**

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergent normal. Für $z \in D$ setze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Dann ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ stetig.

**Bemerkung 2. Potenzreihen sind konvergent normal**

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $|z-z_0|<R$. Dann ist die Potenzreihe im Konvergenzradius konvergent normal.

## 4.4 Globale Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 49. Zwischenwertsatz von Bolzano-Cauchy**

Sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a)\cdot f(b)<0$. Dann $\exists p\in\,]a,b[\colon f(p)=0$.

**Satz 50**

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ beschränkt und
$\exists x_m, x_M\in[a,b]\colon f(x_m)=\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ sowie $f(x_M)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$.

**Definition 36. Gleichmäßig stetig**

Eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ heißt in I *gleichmäßig stetig* wenn gilt:

$$\forall\varepsilon>0\colon \exists\delta>0\colon \forall x_1,x_2\in I: |x_1-x_2|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

**Satz 51**

Jede auf einem Intervall $[a,b]$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ stetige Funktion $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

**Definition 37**

Sei $f\colon\,]a,\infty[\to\mathbb{R}$, dann gilt:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\alpha\in\mathbb{R} \iff \forall\varepsilon>0\colon \exists N\in\mathbb{R}\colon \forall x>\max(a,N)\colon |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \iff \forall M>0\colon \exists K\in\mathbb{R}\colon \forall x>K\colon f(x)>M$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty \iff \forall M>0\colon \exists K\in\mathbb{R}\colon \forall x>K\colon f(x)<M$

Für $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ähnlich.

**Definition 38. Monotone Funktionen**

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f:

- *monoton wachsend* wenn $\forall x_1, x_2 \in M\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* wenn $\forall x_1, x_2 \in M\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- *monoton fallend* wenn $\forall x_1, x_2 \in M\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- *streng monoton fallend* wenn $\forall x_1, x_2 \in M\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

**Satz 52**

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f$ genau dann injektiv wenn $f$ streng monoton ist.

**Definition 39. Umkehrabbildung**

Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$ und $f\colon M_1 \to M_2$ bijektiv. Dann ist $g\colon M_2 \to M_1$ genau dann die Umkehrabbildung (Inverse, $g = f^{-1}$), wenn $\forall y \in M_2\colon (f \circ g)(y) = y$ und $\forall x \in M_1\colon (g \circ f)(x) = x$.

**Satz 53**

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist $f([a, b]) = J \subset \mathbb{R}$ bijektiv und $f^{-1}\colon J \to [a, b]$ ist auch stetig und monoton.

## 4.5 Landau Symbole

**Definition 40. Klein $o$ und groß $\mathcal{O}$**

Sei $f, g\colon ]a, \infty[ \to \mathbb{R}$.

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$ wenn
  $\forall \varepsilon > 0\colon \exists R > 0\colon \forall x > \max(R, a)\colon |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to \infty$ wenn
  $\exists c > 0\colon \exists R \in \mathbb{R}\colon \forall x > R\colon |f(x)| \leq c|g(x)|$

Sei $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$. Dann ist:

- $f(x) = o(g(x)))$ für $x \to x_0$ wenn
  $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in I \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\colon |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x)))$ für $x \to x_0$ wenn
  $\exists c > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in I \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\colon |f(x)| < c|g(x)|$

## 4.6 Logarithmus

**Satz 54**

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und $\exp(\mathbb{R}) = ]0, \infty[$.
Die Umkehrfunktion heißt (natürlicher) Logarithmus $\log\colon ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$.

**Satz 55. Eigenschaften des Logarithmus**

- $\forall x, y \in ]0, \infty[\colon \log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(1) = 0$
- $\log(x) > 0 \iff x > 1$

**Definition 41. Potenzen einer positiv reellen Zahl**

Sei $a \in ]0, \infty[$, $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $a^z = \exp(z \log(a))$.

**Satz 56**

Die Funktion $f(x) = a^x$, $f\colon \mathbb{R} \to ]0, \infty[$ ist stetig und:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon a^{x+y} = a^x a^y$
- $\forall n \in \mathbb{N}\colon a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (a^x)^y = a^{xy}$

**Satz 57**

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion mit $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon f(x+y) = f(x)f(y)$. Dann ist f entweder $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}_+$ oder $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = 0$.

**Bemerkung 3. Grenzwerte der Logarithmus Funktion**

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$ wobei $x > 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \log x = \infty$

(iii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ dann $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$ wobei $x > 0$

(iv) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$

## 4.7 Trigonometrische Funktionen

**Definition 42. Sinus und Kosinus**

Da für $z \in \mathbb{C}$ $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ gilt:

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

sowie $\cos(-z) = \cos(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$.

**Satz 58. Additionstheoreme**

Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_2)\cos(z_1)$$

**Satz 59. Analytische Eigenschaften von Sinus und Cosinus**

(i) sin und cos sind auf $\mathbb{C}$ stetig

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(iii) $r_{2n+2}$ und $r_{2n+3}$ bezeichnen die Restglieder von Cosinus und Sinus, also

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{n} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + r_{2n+2}(x)$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{n} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + r_{2n+3}(x)$$

Es gilt:

$$\forall |x| < 2n+3\colon |r_{2n+2}| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\forall |x| < 2n+4\colon |r_{2n+3}| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

**Satz 60. Nullstelle des Cosinus**

$\cos\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ hat genau eine Nullstelle, nämlich $\frac{\pi}{2}$.

**Satz 61. Folgerungen aus den Additionstheoremen**

- $\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin(\frac{x_1+x_2}{2})\cos(\frac{x_1-x_2}{2})$
- $\sin x_1 - \sin x_2 = 2\cos(\frac{x_1+x_2}{2})\sin(\frac{x_1-x_2}{2})$
- $\cos x_1 + \cos x_2 = 2\cos(\frac{x_1+x_2}{2})\cos(\frac{x_1-x_2}{2})$
- $\cos x_1 - \cos x_2 = -2\sin(\frac{x_1+x_2}{2})\sin(\frac{x_1-x_2}{2})$

**Bemerkung 4. Folgerungen der Nullstelle des Cosinus**

- $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$
- $\exp(i\pi) = -1$
- $\forall z \in \mathbb{C}\colon\ \exp(z + 2\pi ki) = \exp(z)$ wenn $k \in \mathbb{Z}$. Gilt auch für sin und cos
- $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$ sowie $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$
- $\cos(z) = 0 \iff z \in \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
  $\sin(z) = 0 \iff z \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**Satz 62. Umkehrfunktion von Sinus und Cosinus**

(i) Die Funktion $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ ist streng monoton fallend und bildet das Intervall $[0,\pi]$ bijektiv auf $[-1,1]$ ab. Die Umkehrfunktion ist $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$

(ii) Die Funktion $\sin\colon [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ bijektiv auf $[-1,1]$ ab. Die Umkehrfunktion ist $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]]$

**Bemerkung 5. Gültigkeitsbereich der Umkehrfunktion**

Es gilt $\forall x \in [-1,1]\colon\ \cos(\arccos(x)) = x$ und $\forall x \in [0,\pi]\colon\ \arccos(\cos(x)) = x$.

**Definition 43. Tangens**

(i) $\tan\colon \mathbb{C} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$\tan\colon ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend. Damit ist die Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

(ii) $\cot\colon \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

# Kapitel 5

# Differentialrechnung

**Definition 44. Differenzierbarkeit einer Funktion**

Sei $V \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f\colon V \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt $f$ in einem Punkt $x_0 \in V$ differenzierbar falls $x_0$ ein Häufungspunkt von $V$ ist und

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x \neq x_0)$$

existiert.

## 5.1 Allgemeine Eigenschaften und wichtige Ableitungsregeln

**Satz 63. Stetigkeit von differenzierbaren Funktionen**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ eine Funktion, die in $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Dann ist $f$ in $x_0$ stetig.

**Satz 64. Lineare Approximation**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $f$ genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ für $x \to x_0$ (mit $c = f'(x_0)$).

**Satz 65. Algebraische Operationen**

Seien $f_1, f_2\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen die in $x_0$ differenzierbar sind und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen auch differenzierbar:

(i) $(f_1 + f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0)$

(ii) $(\lambda f_1)'(x_0) = \lambda f_1'(x_0)$

(iii) $(f_1 \cdot f_2)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)$

(iv) $f_2(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x_0) = \frac{f_1'(x_0)f_2(x_0) - f_1(x_0)f_2'(x_0)}{f_2^2(x_0)}$

**Satz 66. Kettenregel**

Sei $f_1\colon I_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2\colon I_2 \to \mathbb{R}$, sodass $f_1(I_1) \subset I_2$. Die Funktion $f_1$ sei in $x_1 \in I_1$ differenzierbar und $f_2$ in $x_2 = f(x_1)$ differenzierbar. Dann ist $g(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ in $x_2$ differenzierbar und $g'(x) = f_2'(f_1(x_1))f_1'(x_1)$.

**Satz 67. Ableitung der Umkehrfunktion**

Sei $f\colon I \to J$ bijektiv und stetig. Wenn $f$ im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist $f^{-1}\colon J \to I$ im Punkt $y_0 = f(x_0) \in J$ differenzierbar und

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

**Definition 45. Höhere Ableitungen und stetige Differenzierbarkeit**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $f'\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar ist, so heißt

$$(f')'(x_0) = f''(x_0)$$

die zweite Ableitung.
Mit Induktion: $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt $k$-mal differenzierbar in $x_0$, falls die $(k-1)$-te Ableitung $f^{(k-1)}\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar ist, $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)}(x_0))'$.

- $f$ heißt $k$-mal differenzierbar, wenn $f$ in jedem Punkt aus $I$ $k$-mal differenzierbar ist.
- $f$ heißt $k$-mal *stetig differenzierbar* in $I$, wenn $f$ $k$-mal differenzierbar ist und $f^{(k)}\colon I \to \mathbb{R}$ stetig ist.

## 5.2 Die zentralen Sätze der Differentialrechnung

**Definition 46. Lokale Extrema**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Man sagt, $f$ hat in $x_0 \in I$ ein

(i) lokales Maximum (bzw. streng lokales Maximum) wenn
$\exists \varepsilon_0 > 0\colon \forall x \in I \cap ]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[\colon f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) < f(x_0)$ mit $x \neq x_0$)

(ii) lokales Minimum (bzw. streng lokales Minimum) wenn
$\exists \varepsilon_0 > 0\colon \forall x \in I \cap ]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[\colon f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. $f(x) > f(x_0)$ mit $x \neq x_0$)

**Satz 68. Satz von Fermat**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und sei in $x_0$ ein lokales Extrema sowie $\exists \delta_0\colon ]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[ \subset I$. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

**Satz 69. Satz von Rolle**

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Wenn $f$ in $]a, b[$ differenzierbar ist, dann gilt: $\exists x_0 \in ]a, b[\colon f'(x_0) = 0$.

**Satz 70. Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die auf dem Intervall $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in ]a, b[\colon f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Satz 71. Satz von Cauchy**

Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen die auf $[a, b]$ differenzierbar sind. Dann gilt: $\exists x_0 \in ]a, b[\colon f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$

**Satz 72. Monotonie von Funktionen**

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann gilt:

(i) $\forall x \in ]a, b[\colon f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f$ ist *streng* monoton wachsend.

(ii) $f$ ist monoton wachsend $\Rightarrow\; \forall x \in ]a, b[\colon f'(x) \geq 0$.

**Satz 73. Minimum bzw. Maximum einer Funktion**

Sei $f\colon ]a, b[ \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $x_0 \in ]a, b[$ existiert, so dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ existiert mit $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$. Dann hat $f$ in $x_0$ ein streng lokales Minimum (bzw. Maximum).

## 5.3 Konvexität

**Definition 47. Konverxe und konkave Funktionen**

Sei $I \subset \mathbb{R}$. $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls $\forall x_0, x_1 \in I\colon \forall \lambda \in [0,1]\colon f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_0)$. $f$ heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

**Satz 74. Kriterium für Konvexität**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, wobie $I$ ein offenes Intervall ist und $f$ zwei mal differenzierbar ist:

$$f \text{ ist konvex} \iff \forall x \in I\colon f''(x) \geq 0 \iff f' \text{ ist monoton wachsend}$$

**Satz 75. Regel von l'Hôspital**

Seien $f, g\colon ]a,b[ \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\forall x \in ]a,b[\colon g'(x) \neq 0$ (dabei ist $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen). Gilt dann:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

und existiert der Grenzwert:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ wobei } x > a \text{ und } -\infty \leq L \leq \infty$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ wobei } x > a$$

**Hinweis:** Es müssen *alle* Voraussetzungen erfüllt sein (d.h. differenzierbar, $g'(x) = 0$, Limes existiert, Zähler und Nenner gehen gegen 0 oder $\infty$). Die Regel gilt ebenso wenn $x \to b$ mit $x < b$.

### 5.3.1 Taylor Reihe

**Satz 76. Satz von Taylor**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, x \in I$. Sei $I_0 = [x, x_0]$ falls $x < x_0$ ($[x_0, x]$ falls $x_0 < x$) und $J_0$ das offene Intervall von $I_0$. Die Funktion $f_{|I_0}$ und ihre ersten $n$ Ableitungen seien auf $I_0$ stetig und $f_{|J_0}^{(n)}$ ist differenzierbar. Dann existiert ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$, sodass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x_0, x)$$

wobei

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ (Restglied nach Lagrange)}$$

oder

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0) \text{ (Restglied nach Cauchy)}$$

# Kapitel 6

# Das Riemannsche Integral

## 6.1 Allgemeine Eigenschaften integrierbarer Funktionen

**Definition 48. Treppenfunktion**

Sei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $\phi$: $[a, b] \to \mathbb{R}$. $\phi$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ gibt und $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $\phi_{|]x_{k-1}, x_k[} = c_k$ mit $k = 1, .., n$.
$T[a, b]$ ist der Vektorraum der Treppenfunktionen.

**Definition 49**

Sei $\phi \in T[a, b]$ und $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$ und $c_i = \phi_{|]x_{i-1}, x_i[}$. Dann:

$$\int_a^b \phi(x)\, dx := \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

**Satz 77**

Sei $\phi, \psi \in T[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\int_a^b (\phi(x) + \psi(x))dx = \int_a^b \phi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$
- $\int_a^b (\lambda\phi(x))dx = \lambda \int_a^b \phi(x)dx$
- $\phi \geq \psi \;\Rightarrow\; \int_a^b \phi(x)dx \geq \int_a^b \psi(x)dx$

**Definition 50. Ober- und Unterintegral**

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige, aber beschränkte Funktion. Dann:

- $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{\int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in T[a,b], \phi \geq f\}$ (Oberintegral)
- $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{\int_a^b \psi(x)dx \mid \psi \in T[a,b], \psi \leq f\}$ (Unterintegral)

$f$ heißt Riemann-integrierbar, wenn:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

**Satz 78**

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist (Riemann) integrierbar $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \phi, \psi \in T[a,b]\colon \psi \leq f \leq \phi$ und $\int_a^b \phi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx < \varepsilon$

**Satz 79**

Jede stetige Funktion ist integrierbar.

**Satz 80**

Jede monotone Funktion ist integrierbar.

**Satz 81**

Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch folgende Funktionen integrierbar:

(i) $f + g$

(ii) $\lambda f$

(iii) $f_+$, $f_-$

(iv) $\forall p \geq 1\colon |f|^p$

Außerdem gilt:

- $f \geq g \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

**Satz 82. Mittelwertsatz der Integralrechnung**

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists \xi \in [a,b]\colon \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

**Definition 51. Riemannsche Summen**

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$. Sei außerdem $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $(\xi_k)_{k=1,\ldots,n}$ eine Stützstelle. Dann definiert man die Riemannsche Summe der Funktion $f$ zur Unterteilung $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ und Stützstelle $(\xi_i)_{i=1,\ldots,n}$ folgendermaßen:

$$\mathcal{R}_f((x_k),(\xi_k)) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$\mu((x_i)) = \max(x_i - x_{i-1})_{i=1,\ldots,n}$ gibt die Feinheit der Unterteilung an.

**Satz 83**

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall (x_i)_{i=0,\ldots,n}\colon \forall (\xi_i)_{i=1,\ldots,n}\colon \mu((x_i)) < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{R}_f((x_i),(\xi_i)) \right| < \varepsilon$$

Dies erlaubt es, dass Riemannsche Integral als Grenzwert zu betrachten.

## 6.2 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung

**Satz 84**

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]\colon \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx$$

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in [a,b]\colon \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx$$

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

**Satz 85**

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sei $f$ in $x_0 \in [a,b]$ stetig. Dann ist die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ in $x_0$ differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$.

**Definition 52. Stammfunktion**

Eine differenzierbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfuntkion oder primitive Funktion einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ falls $\forall x \in [a,b]\colon F'(x) = f(x)$ gilt.

**Satz 86. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung**

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: (F(x))\Big|_a^b$$

**Satz 87. Integration durch Substitution**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sowie $\phi([a,b]) = I$. Dann:

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt$$

**Satz 88. Partielle Integration**

Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$