



**UNIVERSITÄT  
BAYREUTH**

UNIVERSITÄT BAYREUTH  
PHYSIK

---

# Theoretische Mechanik

---

Stoffsammlung

von  
Moritz Schramm

Sommersemester 2021  
basierend auf dem Lehrbuch von Fließbach und dem Vorlesungsskript von Prof. Gekle

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Koordinatensysteme . . . . .	1
1.2	Newtonsche Gesetze . . . . .	2
1.3	Erhaltungssätze . . . . .	2
1.4	Raum-Zeit Symmetrien . . . . .	3
1.5	System von Massepunkten . . . . .	4
1.6	Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Lagrange Formalismus</b>	<b>5</b>
2.1	Lagrange Gleichungen 1. Art . . . . .	5
2.2	Lagrange Gleichungen 2. Art . . . . .	6
2.3	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	7
2.4	Eichtransformation . . . . .	7
2.5	Noether Theorem . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Variationskalkül</b>	<b>8</b>
3.1	Euler Lagrange Gleichung . . . . .	8
3.2	Variation mit Nebenbedingungen . . . . .	8
3.3	Zweite Variation . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Zentralpotenzial</b>	<b>9</b>
4.1	Herleitung Bewegungsgleichungen . . . . .	9
4.2	Verschiedene Zentralpotenziale . . . . .	9
4.3	Keplerproblem . . . . .	9
4.4	Streuung . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Starre Körper</b>	<b>10</b>
5.1	Raumfestes Inertialsystem und körperfestes Koordinatensysteme . . . . .	10
5.2	Eulersche Winkel . . . . .	10
5.3	Trägheitstensor . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Kleine Schwingungen</b>	<b>11</b>
6.1	Bewegungsgleichungen . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Hamiltonformalismus</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>13</b>

# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Koordinatensysteme

#### Definition 1. Basisvektoren

Bei gegebenen Koordinaten  $\mathbf{r} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$  werden die Basisvektoren wie folgt berechnet:

$$\mathbf{e}_{\theta_i} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\theta_i} \right|^{-1} \frac{d\mathbf{r}}{d\theta_i} \quad i = 1, 2, 3$$

#### Definition 2. Koordinatendarstellungen

##### 1. Kartesische Koordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

##### 2. Zylinderkoordinaten mit $\det(J) = \rho$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho \mathbf{e}_\rho(\phi) + z \mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

##### 3. Kugelkoordinaten mit $\det(J) = r^2 \sin \theta$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r(\theta, \phi) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

## 1.2 Newtonsche Gesetze

### Definition 3. Newtonsche Gesetze

1. Ein kräftefreier Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

$$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{const}$$

2. Kraft ist Masse mal Beschleunigung

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3. Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massepunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, gegengerichtete Kraft, mit der der Massepunkt auf seine Umgebung wirkt.

$$\mathbf{F}_{actio} = -\mathbf{F}_{reactio}$$

Zusätze:

1. Kräfte wirken (meist) entlang einer Wirkungslinie
2. Superpositionsprinzip:  $\mathbf{F}_{tot} = \sum_i \mathbf{F}_i$

## 1.3 Erhaltungssätze

### Definition 4. Impulserhaltung

Impuls:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Damit folgt:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \text{const}$$

### Definition 5. Drehimpulserhaltung

Drehimpuls:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Drehmoment:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

Drehimpuls und Drehmoment hängen vom Ursprung des Koordinatensystems ab! Es folgt:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{l} = \text{const}$$

### Definition 6. Energieerhaltung

Arbeit:  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$

Leistung:  $P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$

Konservative Kraft  $\iff \nabla \times \mathbf{F} = 0$

Kinetische Energie:  $T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2$

Potenzielle Energie bei konservativen Kräften:  $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$

Für konservative Kräfte gilt Energieerhaltung:  $E = T + U = \text{const}$

## 1.4 Raum-Zeit Symmetrien

### Formel 1. Allgemeine Galilei Transformation

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j - v_i t - a_i \quad \text{und} \quad t' = t - t_0$$

$$\dot{x}'_i = \alpha_{ij} \dot{x}_j - v_i$$

$$F'_i = \alpha_{ij} F_j$$

Aktive Galilei Transformation: In einem IS werden 2 physikalische Systeme betrachtet

Passive Galilei Transformation: Dasselbe physikalische System wird von 2 Beobachtern IS und IS' betrachtet

Kovarianz: Newtonsche Gesetze haben in jedem IS dieselbe Form

Invarianz: Bewegung unter Galilei Transformation gleich

### Satz 2. Fundamentale Eigenschaften der Raum-Zeit

Abgeschlossene Systeme sind unter folgenden Operationen invariant (symmetrisch): Translation in der Zeit oder im Raum, konstante Rotation im Raum und Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum IS. Damit folgen die Eigenschaften für  $v \ll c$ :

- Homogenität der Zeit  $\Rightarrow$  Energieerhaltung
- Homogenität des Raums  $\Rightarrow$  Impulserhaltung
- Isotropie des Raums  $\Rightarrow$  Drehimpulserhaltung
- Relativität der Raum-Zeit  $\Rightarrow \dot{\mathbf{R}}t - \mathbf{R} = 0$

## 1.5 System von Massepunkten

### Definition 7. Schwerpunkt, Gesamtimpuls und Energieerhaltung

Schwerpunkt:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$$

Damit folgt der Gesamtimpuls  $\mathbf{P} = M\mathbf{R}$  und der Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i$  mit dem Gesamtdrehmoment  $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$ .

Im abgeschlossenen System wirken keine äußeren Kräfte und es gilt:

$$\mathbf{P} = \text{const} \quad \mathbf{L} = \text{const} \quad \mathbf{M} = 0$$

Die kinetische Energie ist mit  $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2$  gegeben und wenn alle inneren und äußeren Kräfte konservativ sind, ist die Energie erhalten.

## 1.6 Beschleunigte Bezugssysteme

### Definition 8. Linear beschleunigtes BS

Für ein linear beschleunigtes BS gilt  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}$

Daraus folgen die Bewegungsgleichungen im unbeschleunigten und beschleunigten System:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad m\ddot{\mathbf{r}}' = -m\mathbf{a}$$

$-m\mathbf{a}$  bezeichnet dabei die Trägheitskraft.

### Definition 9. Rotierendes BS

Bei einem rotierenden BS dreht sich das BS um eine Achse  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ . Dadurch gilt:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -2m(\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}')$$

Wobei  $-2m(\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')$  die Corioliskraft und  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}')$  die Zentrifugalkraft ist.

# Kapitel 2

## Lagrange Formalismus

### 2.1 Lagrange Gleichungen 1. Art

#### Definition 10. Zwangsbedingungen

Eine Zwangsbedingung schränkt die Koordinaten auf eine Bahn oder Ebene ein. Eine *holonome* Zwangsbedingung hat folgende Form:

$$g(\mathbf{r}, t) = 0$$

Falls die Zwangsbedingung unabhängig von  $t$  ist, nennt man sie *skleronom*, ansonsten *rheonom*.

#### Definition 11. Lagrange Gleichungen 1. Art

Eine Zwangsbedingung wird durch eine Zwangskraft  $\mathbf{Z} = \lambda(t)\nabla g(\mathbf{r}, t)$  sichergestellt. Für  $R$  Zwangsbedingungen und  $N$  Teilchen ergeben sich die Lagrange Gleichungen 1. Art zu:

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial g_{\alpha}(x_1, \dots, x_{3N}, t)}{\partial x_n}$$

Für ein Teilchen und nur eine Zwangsbedingung also:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{Z} = \mathbf{F} + \lambda(t)\nabla g(\mathbf{r}, t)$$

Impuls und Drehimpuls sind erhalten wenn  $\mathbf{F} + \mathbf{Z} = 0$  gilt. Außerdem gilt für die Energie:

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t} \Rightarrow E = \text{const} \quad \text{wenn} \quad \forall \alpha: \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t} = 0$$

### Methode 1. Allgemeins Vorgehen um 1. Art zu lösen

1. Formulierung der Zwangsbedingungen durch  $g_\alpha = 0$
2. Aufstellen der Lagrange Gleichungen 1. Art
3. Elimination der  $\lambda_\alpha$  indem  $\frac{d^2 g_\alpha}{dt^2}$  berechnet wird
4. Lösung der Bewegungsgleichungen
5. Bestimmung der Integrationskonstanten
6. Bestimmung der Zwangskräfte mit  $\mathbf{Z} = \lambda(t)\nabla g(\mathbf{r}, t)$

## 2.2 Lagrange Gleichungen 2. Art

### Definition 12. Verallgemeinerte Koordinaten

Mit  $R$  Zwangsbedingungen hat ein System noch  $f = 3N - R$  Freiheitsgrade. Diese werden mit verallgemeinerten Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  dargestellt. Dazu ist eine Transformation

$$x_n = x_n(q_1, \dots, q_f, t) = x_n(q, t)$$

notwendig. Die Zwangsbedingungen sowie die kinetische Energie  $T = \sum_n \frac{m}{2} \dot{x}_n^2$  und die potenzielle Energie können dann mit verallgemeinerten Koordinaten formuliert werden:

$$T(q, \dot{q}, t) \quad U(q, t) \quad g_\alpha(q, t) = 0$$

### Definition 13. Lagrange Gleichungen 2. Art

Die Lagrange Funktion wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

Eine Koordinate  $q_k$  heißt *zyklisch*, falls  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$ .

Der verallgemeinerte (oder auch kanonische) Impuls ist  $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ .

Die Lagrange Gleichungen 2. Art sind dann  $f$  DGLs 2. Ordnung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$



## 2.3 Hamiltonsches Prinzip

### Definition 14. Wirkungskunktional

Das Wirkungskunktional ist wie folgt definiert:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung ( $\delta S[q] = 0$ ) führt als Variationsproblem wieder zu den Lagrange Gleichungen.

## 2.4 Eichtransformation

### Satz 3. Eichtransformation

Verschiedene Lagrange Funktionen führen zu denselben Bewegungsgleichungen:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}^* = 0$$

wenn z.B.  $\mathcal{L}^* = \text{const} \cdot \mathcal{L}$  oder  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \text{const}$ . Allgemein führen alle Lagrange Funktionen auf dieselben Bewegungsgleichungen bei folgender Form:

$$\mathcal{L}^*(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

## 2.5 Noether Theorem

### Satz 4. Erhaltungsgröße des Noether Theorems

Das Noether Theorem besagt, wie aus Symmetrien Erhaltungsgrößen folgen. Betrachte dazu folgende Transformation:

$$q_i^* = q_i + \varepsilon \psi_i(q, \dot{q}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$t^* = t + \varepsilon \varphi(q, \dot{q}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Bei der starken Annahme, dass die zwei Wirkungskunktionale gleich sind ( $S^*[q^*(t^*)] = S[q(t)]$ ) ergibt sich die folgende Erhaltungsgröße:

$$Q(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left( \mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \varphi = \text{const}$$

# Kapitel 3

## Variationskalkül

3.1 Euler Lagrange Gleichung

3.2 Variation mit Nebenbedingungen

3.3 Zweite Variation

# Kapitel 4

## Zentralpotenzial

4.1 Herleitung Bewegungsgleichungen

4.2 Verschiedene Zentralpotenziale

4.3 Keplerproblem

4.4 Streuung

# Kapitel 5

## Starre Körper

- 5.1 Raumfestes Inertialsystem und körperfestes Koordinatensysteme
- 5.2 Eulersche Winkel
- 5.3 Trägheitstensor

# Kapitel 6

## Kleine Schwingungen

### 6.1 Bewegungsgleichungen

# Kapitel 7

## Hamiltonformalismus

### Definition 15. Hamilton-Funktion

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i(q, p, t) p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

mit dem verallgemeinerten Impuls  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

### Formel 5. Hamilton-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den  $f$  DGLs 2. Ordnung im Lagrangeformalismus erhält im Hamiltonformalismus  $2f$  DGLs 1. Ordnung.

### Satz 6. Energieerhaltung

Falls in der kinetischen Energie die generalisierte Geschwindigkeit nur quadratisch vorkommt und die potenzielle Energie nur von den generalisierten Koordinaten abhängt, gilt:

$$H(q, p, t) = T + U = E$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad \text{und damit} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

# Kapitel 8

## Spezielle Relativitätstheorie