1 Filtres et convolution

1.1 Convolution de fonctions définies sur $\mathbb{Z}$

Définition 1. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est à support fini s'il existe un nombre fini de points x pour lesquels $f(x) \neq 0$.*

Définition 2. *Soient deux fonctions f, g de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que le support de l'une des fonctions est fini. La convolution de f, g est $f * g(z) = \sum_{x+y=z} f(x)g(y)$.*

Essayez de lire la definition précédente et de la comprendre.

Définition 3. *On répresente les fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ satisfaisant $f(x) = 0$ pour $x < 0$ par des listes. Par exemple, la liste $[1, 2, 4]$ représente la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui vaut $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$ ou $x > 2$.*

Exercice 1.
a)Calculer la convolution de $f = [0, 1]$ et $g = [0, 0, 1]$. Commencer par calculer $f * g(1)$ en regardant toutes les facons de faire $x + y = 1$ dans la définition de la convolution. On peut prendre par exemple $x = 0$ et $y = 1$ donc $f(x)g(y) = f(0)g(1) = 0.0$. On peut prendre aussi $x = 1$, $y = 0$ et alors $f(1)g(0) = 1.0 = 0$. Sinon on prend x négatif, ou $x > 1$, on a $f(x) = 0$, donc $f(x)g(y) = 0$. Donc tous les termes $f(x)g(y)$ qui apparaissent dans la définition de $f * g(1)$ sont nuls. On a donc $f * g(1) = 0$. Je vous propose maintenant de calculer $f * g(3)$. Vous allez prendre tous les x,y tels que $x + y = 3$, calculer $f(x)g(y)$ pour chacun et ajouter le tout. (Tout le monde voit, c'est bon ?) Donc on peut prendre $x = 0$, $y = 3$, ce qui donne $f(0)g(3) = 0.0 = 0$. Si $x = 1, y = 2$, $f(1)g(2) = 1.1 = 1$. Si $x > 1$ ou $x < 0$, $f(x) = 0$. Donc $f * g(3) = 0 + 1 = 1$. Essayer maintenant de calculer completement la fonction $f * g$. Par exemple de voir que $f * g(z)$ vaut 0 si $z < 0$. Si $x + y = z < 0$, alors soit x est négatif et $f(x) = 0$, soit y est négatif, alors $g(y) = 0$. Dans tous les cas, le produit $f(x)g(y) = 0$. Donc $f * g(z)$ qui est la somme de ces termes $f(x)g(y)$ est nul si $z < 0$. Essayer sur le même principe de montrer que $f * g(z)$ est nul si z est grand (si $z > 3$). Si $z > 3$ et $x + y = z$ alors soit $x > 1$, soit $y > 2$. Donc dans tous les cas $f(x)g(y)$ est nul. Et $f * g(z) = 0$. Il nous reste à calculer la convolution pour $z = 0, 2$. On trouve $f * g(0) = f(0)g(0) = 0$. Et $f * g(2) = 0$ aussi. Donc au final $f * g = [0, 0, 0, 1]$.
b)Calculer la convolution de $[5]$ et $[1, 2, 3]$. Vous devez trouver $[5, 10, 15]$
c)Calculer la convolution de $f = [0, 0, 5]$ et de $g = [1, 2, 3]$. par rapport auc calcul précédent, on a décalé les valeurs de la fonction f de 2 crans vers la droite. Donc quand on regarde les z avec $z = x + y$, on va également faire les mêmes calculs que précédemment, mais décaler les z de 2 crans vers la droite. Au total, on trouve $f * g = [0, 0, 5, 10, 15]$.

La proposition suivante résume le calcul qu'on vient de faire.

Proposition 4. *La convolution avec $[a]$ est la mulltiplication par a, c'est à dire $[a] * [y_0, y_1, y_2...] = [ay_0, ay_1, ay_2...]$. La convolution avec $[0, 0, ..., 1]$ est le décalage de d crans ou d est la longeur de la liste -1. C'est à dire $[0, 0, \dots, 0, x_{d-1} = 1] * [y_0, y_1, \dots..] = [0, \dots, 0, y_0, y_1, \dots]$ avec $d - 1$ zéros devant le y_0.*

Remarque 5. *Pour le cas particulier de $f = [1]$, on peut appliquer au choix la première ou la deuxieme règle de la proposition précédente. Dans les 2 cas, on voit que $[1]$ est un élément neutre pour le produit de convolution, c'est à dire $[1] * g = g$. La premiere règle avec $a = 1$ donne $[1] * g = g$. La deuxième règle avecc $d = 1$ donne également $[1] * g = g$ il y a un décalage en ajoutant $d - 1 = 0$ élements 0 devant la liste g. .*

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = 1$ pour tout x. Calculer la convolution $f * f$

Celui la, je vous laisse essayer de faire le calcul, vous verrez qu'on trouve un résultat infini, car on peut trouver une infinité de x, y tels que $x+y=0$ par exemple avec à chaque fois $f(x)g(y)=1.1=1$. Donc il faut ajouter une infinité de fois le nombre 1.

En fait le pb de l'exo précédent ne se pose pas pour les fonctions à support finie, c'est à dire avec des listes finies. C'est l'objet de la remarque suivante.

Remarque 6. *Dans la définition du produit de convolution, on suppose que l'une des fonctions est à support fini. Ainsi la somme apparaissant dans la définition est finie et il n'y a pas de pbs de convergence ou de somme infinie.*

Exercice 3.
a)Qu'est ce que la convolution avec $f=[0,0,0,3]$? Calculer $f*[y_0, y_1, ...]$. Il y a la fois un decalage vers la droite et une multiplication par 3. On trouve $f*[y_0, y_1, ...]=[0,0,0,3y_0, 3y_1, ...]$.
b)On prend un signal sonore s. Que représente sur le plan sonore le signal $s*[1,0,0,0.5]$. Vous pouvez décomposer le terme de droite comme une somme. On a $[1,0,0,0.5]=[1,0,0,0]+[0,0,0,0.5]=[1]+[0,0,0,0.5]=i+t$. Donc pour le produit de convolution $s*(i+t)=s*i+s*t$. Comme $i=[1]$, $s*i=s$. Et $s*t$ est le même signal que t, mais décalé vers la droite (c'est à dire retardé dans le temps) et multiplié par 0.5, c'est à dire moins fort. Dons $s*(i+t)$ représente un écho, on joue le son s, puis le même son, un peu plus tard et un peu moins fort.

Remarque 7. *Dans un produit de convolution de fonctions définies sur $\mathbb{Z}$, on peut ajouter des zéros. Par exemple les listes $[1,2]$ et $[1,2,0,0]$ représentent la même fonction, à savoir la fonction f telle que $f(0)=1$, $f(1)=2$ et $f(x)=0$ sinon.*

Proposition 8. *On a $f*g=g*f$ ie. $f*g(z)=\sum_{x+y=z} f(x)g(z-x)=\sum_{x+y=z} f(x)g(z-x)$.*

Exercice 4.
a)On prend $f=[..0,1,2,3,0,...]$ et $g=[...,0,1,1,1,0,...]$ fonctions sur $\mathbb{Z}$ où le 1 est à la postion -1 ie. $f(-1)=1$. Calculer la convolution
b)On prend $f=[1,2,3]$ et $g=[1,1,1]$ fonctions sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ avec $f[0]=1$. Calculer la convolution

Correction 1.
a)$f*g=[...0,1,3,6,5,3,1,....]$ avec $f*g(0)=6$.

1.2 Filtres

Définition 9. *On appelle filtre F un operateur de convolution agissant sur un espace de signaux discrets, c'est à dire de la forme $s \to F(s)=s*t$, où $s:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, et $t:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ sont des signaux à support fini.*

Définition 10. *Le signal impulsion est le signal défini par $s(0)=1$ et $s(i)=0$ pour $i\neq 0$. Avec les notations usuelles par des listes : $s=[1]$.*
La reponse impulstionnelle d'un filtre F est le signal obtenu quand on applique le filtre à l'impulsion s, autrement dit la réponse impulsionnelle d'un filtre F est par définition $F([1])$.

Exercice 5. Soit le filtre F défini par la convolution par $[0,1,2]$. Calculer sa réponse impulsionnelle.

Correction 2. $F([1])=[1]*[0,1,2]=[0,1,2]$. La réponse impulsionnelle est $[0,1,2]$.

On voit donc qu'un filtre est défini par sa réponse impulsionnelle. On formalise cette remarque dans la proposition suivante.

Proposition 11. *Soit $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ une fonction à support fini, ie. $f=[f_0, f_1, f_2 \dots, f_k]$ à décalage près et F un filtre. Les 2 condtions suivantes sont équivalentes:*

- *F est le filtre défini par $F(s) = s * f$.*
- *F est un filtre de réponse impulsionnelle f.*

Proof. Si $F(s) = s * f$, alors $F([1]) = [1] * f = f$. □

Exemple 12. *Un délai temporel est un filtre (reponse impulsionnelle* $=[0, 0, \dots, 1]$*). Un écho est un filtre. Un filtre passe passe bas est un filtre (voir plus bas).*

Intuitivement, beaucoup de “remises en forme” d’un signal sont des filtres.

Exercice 6.
a)On prend $t = [1, 0, 0, .5, 0, 0, .25]$. Montrer qu’appliquer le filtre “convolution par t” correpond à ajouter un echo au son initial.

Correction 3.
a)On ecrit $t = t_1 + t_2 + t_3$ avec $t_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, $t_2 = [0, 0, 0, .5, 0, 0, 0]$, $t_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, .25]$. Alors si s est un signal $s * t = s * t_1 + s * t_2 + s * t_3 =: s_1 + s_2 + s_3$. On voit que $s_1 = s$, s_2 est le signal s décalé dans le temps et affaibli de moitié, s_3 est le signal s décalé dans le temps et encore davantage affaibli par un facteur 0.25. On a donc bien un écho par la somme de ces trois signaux.

Exercice 7. On considère le filtre F_1 de réponse impulsionnelle $[1, 1]$ et le filtre F_2 de réponse impulsionnelle $[0, 1, 1]$. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre composé $F_2 \circ F_1$.

Correction 4. $[1] \xrightarrow{F_1} [1] * [1, 1] = [1, 1] \xrightarrow{F_2} [1, 1] * [0, 1, 1] = [0, 1, 1] + [0, 0, 1, 1] = [0, 1, 2, 1]$

Proposition 13. *La composition $F_2 \circ F_1$ de 2 filtres de réponses impulsionnelles respectives f_2 et f_1 est le filtre de réponse impulsionnelle $f_2 * f_1$.*

Exercice 8. Soit un filtre F_1 qui ajoute un echo et un filtre F_2 qui ajoute un délai et soit s un son. Montrer que si on applique F_1 puis F_2, on obtient le même son que si on applique d’abord F_2 puis F_1.

Correction 5. Si on applique F_2 puis F_1, le filtre composé est la convolution par $f_2 * f_1$, Si on applique d’abord F_1 puis F_2, le filtre composé est la convolution par $f_1 * f_2$. Et $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

Plus généralement, puisque la convolution est commutative, on a la proposition suivante:

Proposition 14. *On peut appliquer des filtres dans l’ordre que l’on souhaite, c’est a dire, $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$.*

1.3 Convolution sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- Rappel sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Exemple, dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\dot{4} + \dot{3} = \dot{0} + \dot{1} = \dot{1} = \dot{7}$.
- Il suffit d’avoir une structure de groupe additif sur l’ensemble de départ pour pouvoir convoler.
- Notation $[1, 2, 3]$ sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ représente la fonction $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $f(\dot{0}) = 1$, $f(\dot{1}) = 2$, $f(\dot{2}) = 3$.

Définition 15. *Soit $f, g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, on définit $f * g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ par la formule $f * g(z) = \sum_{x+y=z} f(x)g(y)$.*

Exercice 9. Calculer la convolution de $f = [1, 1]$ et $g = [1, 2]$, ou les listes sont interprétées comme des fonctions sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction 6. $0 = 0 + 0 = 1 + 1$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc $(f * g)(0) = f(0)g(0) + f(1)g(1) = 1.1 + 1.2 = 3$. De même $1 = 1 + 0 = 0 + 1$, donc $f * g(1) = f(0)g(1) + f(1)g(0) = 3$. Donc $f * g = [3, 3]$.

Exercice 10.
a) On prend $f = [1, 2, 3]$ et $g = [1, 1, 1]$, ou ces listes sont interprétées comme des fonctions $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ avec $f[0] = 1$. Calculer la convolution $f * g$.
b) Même questions si ces listes sont interprétées comme des fonctions $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
c) Calculer la convolution de $f = [1, 2, 3, 0, 0]$ et de $g = [1, 1, 1, 0, 0]$ vu comme fonctions de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Correction 7.
a) $0 = 0+0 = 1+2 = 2+1$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Donc $f*g(0) = f(0)g(0)+f(1)g(2)+f(2)g(1) = 1.1+2.1+3.1 = 6$. On vérifie aussi $f * g(1) = 6$ et $f * g(2) = 6$. Donc $f * g = [6, 6, 6]$.
b) La convolution dans $\mathbb{Z}$ donne $[1, 3, 6, 5, 3]$.
c) Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $0 = 0+0 = 1+4 = 2+3 = 3+2 = 4+1$. Donc $f*g(0) = f(0)g(0)+f(1)g(4)+f(2)g(3)+f(3)g(2) + f(4)g(1)$. Donc $f * g(0) = 1.1 = 1$. Comme $4 = 0 + 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4 + 0$. Donc $f * g(4) = f(2)g(2) + 0 + 0 \cdots = 3$. Plus généralement, on trouve $f * g = [1, 3, 6, 5, 3]$.

Proposition 16. *Etant donnée 2 listes l, m de même longueur, la convolution de l et m en tant que liste est la même si on interprète ces listes comme des fonctions sur $\mathbb{Z}$ ou comme des fonctions sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ quand les moitiés droites des listes sont formées de zéro.*

Théorème 17. *La transformée de Fourier discrète échange le produit et la convolution sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. C'est à dire si f, g sont deux signaux de longueurs n, et $\mathcal{F}$ représente la transformation de Fourier, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$, et $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.*

Corollaire 18. *Algorithme rapide pour calculer la convolution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par la formule $f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g))$.*

Corollaire 19. *Algorithme rapide pour calculer la convolution dans $\mathbb{Z}$ de 2 fonctions $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.*

Démonstration Pour calculer $f * g$, on représente f, g comme des listes l_f, l_g. On ajoute des zéros à droite de ces listes pour que la moitié droite ne contienne que des zéros, on obtient 2 listes plus grandes M_f, M_g. Comme il y a suffisamment de zéros à droite, on peut calculer la convolution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{Z}$, le résultat est le même. En particulier, on peut utiliser la transformée de Fourier de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour avoir un résultat rapide.

Corollaire 20. *Du point de vue fréquentiel, un filtre est un operateur de la forme $f \mapsto f.g$, c'est a dire un produit de fonctions. En particulier un filtre fréquentiel (passe bas,passe haut, passe bande...) est un filtre au sens de la définition initiale par convolution.*

Démonstration Du point du vue temporel, un filtre est un operateur $f \to f * g$. En ajoutant des 0 si nécessaire et en faisant une transformée de Fourier, le même operateur vu au niveau fréquentiel est $\mathcal{F}(f) \to \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ puisque la transformée de Fourier a remplacé la convolution par un produit usuel de fonctions. Un filtre fréquentiel est une multiplication par une fonction dont les valeurs sont $h = [0, 1, 1, \ldots, 01, 0 \ldots,]$ du point de vue fréquentiel (on met des 1 pour les fréquences à conserver et des 0 sur les fréquences à éliminer). Du point de vue temporel, c'est la convolution par $\mathcal{F}^{-1}(h)$.

Proposition 21 (Remarque sur les filtres)**.** *On s'interesse en fait plutot à la convolution dans $\mathbb{Z}$, mais comparer avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ permet de faire des calculs rapides grace à la transformée de Fourier.*