1 Filtres et convolution

1.1 Convolution de fonctions définies sur $\mathbb{Z}$

Définition 1. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est à support fini s'il existe un nombre fini de points x pour lesquels $f(x) \neq 0$.*

Définition 2. *Soient deux fonctions f, g de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que le support de l'une des fonctions est fini. La convolution de f, g est $f * g(z) = \sum_{x+y=z} f(x)g(y)$.*

Essayez de lire la definition précédente et de la comprendre.

Définition 3. *On répresente les fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ satisfaisant $f(x) = 0$ pour $x < 0$ par des listes. Par exemple, la liste $[1, 2, 4]$ représente la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui vaut $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$ ou $x > 2$.*

Exercice 1.
a)Calculer la convolution de $f = [0, 1]$ et $g = [0, 0, 1]$. Commencer par calculer $f * g(1)$ en regardant toutes les facons de faire $x + y = 1$ dans la définition de la convolution. On peut prendre par exemple $x = 0$ et $y = 1$ donc $f(x)g(y) = f(0)g(1) = 0.0$. On peut prendre aussi $x = 1$, $y = 0$ et alors $f(1)g(0) = 1.0 = 0$. Sinon on prend x négatif, ou $x > 1$, on a $f(x) = 0$, donc $f(x)g(y) = 0$. Donc tous les termes $f(x)g(y)$ qui apparaissent dans la définition de $f * g(1)$ sont nuls. On a donc $f * g(1) = 0$. Je vous propose maintenant de calculer $f * g(3)$. Vous allez prendre tous les x,y tels que $x + y = 3$, calculer $f(x)g(y)$ pour chacun et ajouter le tout. (Tout le monde voit, c'est bon ?) Donc on peut prendre $x = 0$, $y = 3$, ce qui donne $f(0)g(3) = 0.0 = 0$. Si $x = 1, y = 2$, $f(1)g(2) = 1.1 = 1$. Si $x > 1$ ou $x < 0$, $f(x) = 0$. Donc $f * g(3) = 0 + 1 = 1$. Essayer maintenant de calculer completement la fonction $f * g$. Par exemple de voir que $f * g(z)$ vaut 0 si $z < 0$. Si $x + y = z < 0$, alors soit x est négatif et $f(x) = 0$, soit y est négatif, alors $g(y) = 0$. Dans tous les cas, le produit $f(x)g(y) = 0$. Donc $f * g(z)$ qui est la somme de ces termes $f(x)g(y)$ est nul si $z < 0$. Essayer sur le même principe de montrer que $f * g(z)$ est nul si z est grand (si $z > 3$). Si $z > 3$ et $x + y = z$ alors soit $x > 1$, soit $y > 2$. Donc dans tous les cas $f(x)g(y)$ est nul. Et $f * g(z) = 0$. Il nous reste à calculer la convolution pour $z = 0, 2$. On trouve $f * g(0) = f(0)g(0) = 0$. Et $f * g(2) = 0$ aussi. Donc au final $f * g = [0, 0, 0, 1]$.
b)Calculer la convolution de $[5]$ et $[1, 2, 3]$. Vous devez trouver $[5, 10, 15]$
c)Calculer la convolution de $f = [0, 0, 5]$ et de $g = [1, 2, 3]$. par rapport auc calcul précédent, on a décalé les valeurs de la fonction f de 2 crans vers la droite. Donc quand on regarde les z avec $z = x + y$, on va également faire les mêmes calculs que précédemment, mais décaler les z de 2 crans vers la droite. Au total, on trouve $f * g = [0, 0, 5, 10, 15]$.

La proposition suivante résume le calcul qu'on vient de faire.

Proposition 4. *La convolution avec $[a]$ est la mulltiplication par a, c'est à dire $[a] * [y_0, y_1, y_2...] = [ay_0, ay_1, ay_2...]$. La convolution avec $[0, 0, ..., 1]$ est le décalage de d crans ou d est la longeur de la liste -1. C'est à dire $[0, 0, \ldots, 0, x_{d-1} = 1] * [y_0, y_1, \ldots..] = [0, \ldots, 0, y_0, y_1, \ldots]$ avec $d - 1$ zéros devant le y_0.*

Remarque 5. *Pour le cas particulier de $f = [1]$, on peut appliquer au choix la première ou la deuxieme règle de la proposition précédente. Dans les 2 cas, on voit que $[1]$ est un élément neutre pour le produit de convolution, c'est à dire $[1] * g = g$. La premiere règle avec $a = 1$ donne $[1] * g = g$. La deuxième règle avecc $d = 1$ donne également $[1] * g = g$ il y a un décalage en ajoutant $d - 1 = 0$ élements 0 devant la liste g. .*

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = 1$ pour tout x. Calculer la convolution $f * f$

Celui la, je vous laisse essayer de faire le calcul, vous verrez qu'on trouve un résultat infini, car on peut trouver une infinité de x, y tels que $x+y=0$ par exemple avec à chaque fois $f(x)g(y)=1.1=1$. Donc il faut ajouter une infinité de fois le nombre 1.

En fait le pb de l'exo précédent ne se pose pas pour les fonctions à support finie, c'est à dire avec des listes finies. C'est l'objet de la remarque suivante.

Remarque 6. *Dans la définition du produit de convolution, on suppose que l'une des fonctions est à support fini. Ainsi la somme apparaissant dans la définition est finie et il n'y a pas de pbs de convergence ou de somme infinie.*

Exercice 3.
a)Qu'est ce que la convolution avec $f=[0,0,0,3]$? Calculer $f*[y_0, y_1, ...]$. Il y a la fois un decalage vers la droite et une multiplication par 3. On trouve $f*[y_0, y_1, ...] = [0,0,0,3y_0, 3y_1, ...]$.
b)On prend un signal sonore s. Que représente sur le plan sonore le signal $s*[1,0,0,0.5]$. Vous pouvez décomposer le terme de droite comme une somme. On a $[1,0,0,0.5]=[1,0,0,0]+[0,0,0,0.5]=[1]+[0,0,0,0.5]=i+t$. Donc pour le produit de convolution $s*(i+t)=s*i+s*t$. Comme $i=[1]$, $s*i=s$. Et $s*t$ est le même signal que t, mais décalé vers la droite (c'est à dire retardé dans le temps) et multiplié par 0.5, c'est à dire moins fort. Dons $s*(i+t)$ représente un écho, on joue le son s, puis le même son, un peu plus tard et un peu moins fort.

Remarque 7. *Dans un produit de convolution de fonctions définies sur* $\mathbb{Z}$, *on peut ajouter des zéros. Par exemple les listes* $[1,2]$ *et* $[1,2,0,0]$ *représentent la même fonction, à savoir la fonction* f *telle que* $f(0)=1$, $f(1)=2$ *et* $f(x)=0$ *sinon.*