



Edition  
Harri   
Deutsch

# Strukturoptimierung

## Grundlagen und Anwendungen

von

Lothar Harzheim

**2. überarbeitete und erweiterte Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 56580**

**Der Autor:**

Prof. Dr. Lothar Harzheim arbeitete nach seiner Promotion zunächst in der Gruppe von Prof. Dr. Mattheck (Deutscher Umweltpreis 2003) an der Entwicklung der bionischen Optimierungsprogramme CAO und SKO mit, bevor er zur Simulationsabteilung der Firma Opel wechselte.

Als Verantwortlicher für den Bereich Optimierung, Bio-Engineering und Robustheit hat er nicht nur die Optimierung im Unternehmen eingeführt und angewendet, sondern auch durch eigene Programme zur Topologieoptimierung den heutigen Entwicklungsstand mitgeprägt.

Prof. Dr. Harzheim hält regelmäßig Vorträge und Seminare zur Angewandten Strukturoptimierung, unter anderem als Honorarprofessor an der TU Darmstadt.

2. überarbeitete und erweiterte Auflage 2014

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5659-7

ISBN 978-3-8085-5823-2 (E-Book)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2014 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

# Vorwort zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage eines Buches ist das immer eine gute Gelegenheit, die Fehler zu korrigieren, die sich trotz aller Bemühungen immer wieder einschleichen. Bei dieser Gelegenheit möchte ich mich ganz herzlich bei all denen bedanken, die mich auf solche Fehler hingewiesen haben, insbesondere bei meinem Kollegen Dr. Rainer Immel, der große Teile meines Buches durchgearbeitet hat.

Neben diesen kleineren Korrekturen wurden einige Kapitel in großen Teilen modifiziert, ergänzt oder auch komplett umgeschrieben, entweder weil ich selber nicht mehr mit der Darstellung zufrieden war oder weil dies durch neuere Erkenntnisse nahegelegt wurde. Zu diesen Kapiteln zählen:

- 6.2.4.2 Radiale Basisfunktionen
- 6.2.5 Versuchsplanung
- 7.2.2.2 Die adjungierte Methode
- 8.2.1.3 Morphing
- 9.1.2.2 Dynamische Topologieoptimierung
- 9.5.2.7 Optimierung von Schweißpunkten
- 10.2.2 Optimierung mit Teilchenschwärmen (Particle Swarm Optimization)
- 11.2 Multidisziplinäre Optimierung
- 11.4 Bestimmung der wichtigsten Designvariablen und Reduktion der Variablen
- 11.4.2.2.2 Funktionale Varianzanalyse.

Darüber hinaus wurden Kapitel hinzugefügt, die entweder vollkommen neue Themen enthalten oder die detailliert auf Themen eingehen, die in der ersten Auflage nur sehr knapp behandelt wurden, nämlich:

- 1.4 Optimierung basierend auf linearer und nichtlinearer Analyse
- 4.5 Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren
- 6.2.6 Test der Vorhersagegüte
- 7.1.2 Das Min-Max-Problem
- 7.1.2.2 Die p-Norm
- 7.1.2.4 Die Kreisselmeier-Steinhauser-Funktion
- 7.1.5 Berücksichtigung von mehreren Lastfällen
- 7.2.2.3 Exakte semi-analytische Sensitivitäten
- 9.1.2.2.1 Künstliche Eigenformen
- 9.1.2.2.2 Modellierungsschwäche
- 9.4 Die Level Set Methode
- 11.3 Die ESL (Equivalent Static Loads) Methode.

Letztendlich wurden auch noch einige Anwendungsbeispiele hinzugenommen, die bei der ersten Auflage entweder noch nicht freigegeben oder noch nicht vorhanden waren. Dies sind die Beispiele in Kapitel:

- 7.4.3 „Taylor Rolled Blank“ Optimierung eines Instrumententafelträgers
- 8.2.1.6.2 Formoptimierung eines Motorhalters
- 8.2.1.6.3 Formoptimierung eines Kunststoff-Spritzgussteils
- 8.2.1.6.6 Sickenoptimierung einer Fahrzeugbodengruppe
- 8.2.1.6.4 Formoptimierung eines Karosserie-Blechbauteils (Formbasisvektor)
- 8.2.2.6.4 Formoptimierung eines Karosserie-Blechbauteils (CAO)
- 9.5.2.3.2 Topologieoptimierung eines Hinterachslenkers und eines Vorderachslenkers  
in Kapitel Topologieoptimierung mit Gussteilrestriktionen
- 9.5.2.4 Topologieoptimierung eines Querträgers
- 9.5.2.5 Topologieoptimierung eines Hinterwagens
- 11.6.3 Robustheitsoptimierung eines Verzweigungsproblems beim Pendelumschlagen  
eines Hinterachsstabilisators
- 11.6.4 Multidisziplinäre Wandstärkenoptimierung einer Karosserie
- 11.6.5 Multidisziplinäre Form- und Wandstärkenoptimierung einer Sitzquerträger-Struktur.

Zum Abschluss möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Klaus Horn bedanken, der mich verlagsseitig wieder in der bewährten, konstruktiven und freundlichen Art und Weise unterstützt hat und bei Herrn Dr. Steffen Naake, der das Buch wiederum so zügig in das professionelle Format umgesetzt hat. Ganz besonders möchte ich mich bei meiner Familie und insbesondere bei meiner Frau Brigitte bedanken, ohne deren Unterstützung dieses Projekt nicht möglich gewesen wäre.

Mainz, im Sommer 2014

Lothar Harzheim

# Vorwort zur ersten Auflage

## **Zum Buch**

Dieses Buch ist im Rahmen der 3-stündigen Vorlesung „Angewandte Strukturoptimierung“ entstanden, die an der TU Darmstadt im Fachgebiet für Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau (fmb) in jedem Wintersemester angeboten wird. Es ist somit für Einsteiger geeignet, die sich in das Gebiet der Optimierung einarbeiten und die einen Überblick über die gängigsten und bewährtesten Optimierungsverfahren und deren Anwendungen gewinnen möchten. Darüber hinaus soll jedoch mit dem Buch auch dem erfahrenen Anwender ein Nachschlagewerk zur Verfügung gestellt werden. Um dieser doppelten Zielsetzung gerecht zu werden, ist es auch um diejenigen Details, Herleitungen und Optimierungsverfahren ergänzt, die in einer Vorlesung aus Zeitgründen nicht behandelt werden können. Dennoch hat das Buch keinen streng mathematischen Aufbau. Vielmehr steht an erster Stelle die Vermittlung der Idee eines Verfahrens bzw. einer Strategie, die – wo immer möglich – zu Beginn eines Kapitels dargestellt wird. In den Fällen, in denen die Idee nur im Zuge einer Herleitung entwickelt werden konnte, wurde der Text so angelegt, dass der Leser auch dann ein Verfahren verstehen kann, wenn er nicht alle Details nachvollzieht. Damit wird das Buch auch dem Leser gerecht, der nicht an den Einzelheiten interessiert ist – oder der sich zuerst einen Überblick verschaffen will, ehe er sich mit den Feinheiten befasst. Da wichtige Zusammenhänge hergeleitet und Details beschrieben werden, wird auf der anderen Seite auch derjenige fündig, der mehr in die Tiefe gehen will.

Das Buch besteht inhaltlich aus zwei Teilen. Im ersten, von einer speziellen Anwendung unabhängigen Teil, werden die theoretischen Grundlagen, die Lösungsverfahren und Optimierungsstrategien dargestellt. So können die vorgestellten Optimierungsverfahren und Strategien für alle Probleme eingesetzt werden, die sich mithilfe einer Simulation beschreiben lassen. Aus der mittlerweile unüberschaubaren Anzahl von Optimierungsalgorithmen werden in diesem Buch nur diejenigen dargestellt, die sich in der praktischen Anwendung bewährt haben oder zumindest für das Verständnis bewährter Algorithmen wichtig sind. Eine solche Auswahl kann natürlich immer nur subjektiv sein.

Der zweite Teil behandelt die spezielle Anwendung im Bereich der Strukturoptimierung. Er geht darauf ein, wie die Kopplung der FEM-Programme an die Optimierungssoftware vorgenommen wird und welche Besonderheiten bei der Formulierung des Optimierungsproblems zu beachten sind. Insbesondere die Form- und Topologieoptimierung werden ausführlich behandelt und deren Anwendungsmöglichkeiten anhand zahlreicher Beispiele aus der Praxis veranschaulicht.

Es ist ein Ziel des Buches, die Möglichkeiten aufzuzeigen, die heutzutage im Bereich der Strukturoptimierung zur Verfügung stehen; keinesfalls soll eine konkrete Software-Empfehlung gegeben werden. Zwar werden bei den Anwendungen die Namen der Optimierungsprogramme genannt, mit denen – weil sie im Arbeitsumfeld vorhanden waren – die Optimierung durchgeführt wurde, die Programme anderer Hersteller bieten aber häufig die gleiche oder zumindest eine vergleichbare Funktionalität. Solche alternativen Programme sind im Text auch erwähnt und im Anhang B zusammengefasst (jedoch erhebt die Liste keinen Anspruch auf Vollständigkeit).

## **Zu den Abbildungen und Anwendungsbeispielen**

Alle Anwendungsbeispiele mit den dazugehörigen Abbildungen sind während meiner Tätigkeit am Internationalen Technischen Entwicklungszentrum der Adam Opel GmbH in Rüsselsheim entstanden und mit freundlicher Genehmigung der Adam Opel GmbH freigegeben worden.

## Danksagung

In das Buch sind die Ergebnisse vieler Fachvorträge und Diskussionen eingeflossen. Mein Dank gilt somit all denjenigen, mit denen ich während meiner langjährigen Tätigkeit auf dem Gebiet der Optimierung Fachgespräche geführt und offene Fragen und Probleme diskutiert habe. Besonders intensiv ist ein solcher Erfahrungsaustausch natürlich im täglichen Arbeitsumfeld. So gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Claus Mattheck, bei dem ich während der dreijährigen Mitarbeit in seiner Gruppe über CAO und SKO den Zugang zur Optimierung gefunden habe. Weiterhin möchte ich mich für die konstruktive und angenehme Zusammenarbeit bei den Kollegen aus den verschiedenen Fachbereichen der Simulationsabteilung der Adam Opel GmbH bedanken, ohne die eine erfolgreiche Anwendung der Optimierungsalgorithmen nicht möglich gewesen wäre. Besonders möchte ich mich dort bei folgenden Personen bedanken: Bei meinem ehemaligen Chef Herrn Gerhard Graf, der gerade in der Einführungsphase der Optimierung immer ein hilfsbereiter und kompetenter Ratgeber bei auftretenden Problemen war und der mir die notwendige Freiheit gegeben hat, neue Ideen und Verfahren auszuprobieren. Bei Herrn Stefan Klug, der in den Anfangszeiten der Topologieoptimierung mit seiner professionellen Umsetzung der Designvorschläge in ein fertigbares Design maßgeblich zum Erfolg und zur Akzeptanz der Methode beigetragen hat. Bei meinem Kollegen Dr. Don Jones aus dem GM-TEC Center in Detroit, der mir Kriging und die funktionale Varianzanalyse nahegebracht und bei Fragen und Problemen Hilfestellung geleistet hat und dies auch heute noch tut. Bei meinem ehemaligen Kollegen Prof. Dr. Axel Schumacher für die zahlreichen inspirierenden Diskussionen und die angenehme, fruchtbare Zusammenarbeit bei den gemeinsamen Projekten. Bei meinem Kollegen Dr. Karsten Bohle, von dem die Grundidee des „Sensitivity Trackings“ stammt, für die anregenden Diskussionen und den Erfahrungsaustausch zum Thema Approximation und Robustheit.

Nicht nur von der fachlichen Seite her gab es Hilfestellung zu diesem Buch. So gilt mein Dank meinem Schwiegervater Herrn Heinz Kloth, der die Arbeit auf sich genommen hat, die erste Fassung des Buches durchzulesen, um all diese Fehler zu finden, die man als Autor so gerne überliest, weil man ja „weiß“, was dort stehen soll. Weiterhin gilt mein Dank dem Verlag Harri Deutsch, der dieses Buchprojekt ermöglicht hat. Insbesondere möchte ich mich für die angenehme und konstruktive Zusammenarbeit bei Herrn Klaus Horn bedanken, der mich während der gesamten Entstehungsphase des Buchs beraten und unterstützt hat und durch dessen Hilfe das Buch zum Schluss den letzten Schliff erhalten hat. Das gilt auch für Herrn Dr. Steffen Naake, der die Vorlage so zügig und kompetent in ein professionelles Erscheinungsbild umgesetzt hat. Weiterhin gilt mein Dank den Leitern der Simulationsabteilung und der Öffentlichkeitsarbeit der Adam Opel GmbH, die mich zu diesem Projekt ermutigt und dabei unterstützt haben. Besonders möchte ich mich bei meinen Eltern Helga und Otto Harzheim bedanken, denn ohne ihre Unterstützung während meiner Ausbildung wäre dieses Buch niemals entstanden. Mein besonders herzlicher Dank gilt jedoch meiner Familie, die während der Fertigstellungsphase an den zahlreichen Wochenenden und freien Tagen auf ihren Ehemann bzw. Vater verzichtet und damit dieses Projekt erst ermöglicht hat.

**Für  
Brigitte,  
Jens, Maike und Achim**





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Optimierungstypen	3
1.2	Motivation und Grundbegriffe der Optimierung	4
1.3	Allgemeine Form des Optimierungsproblems	7
1.4	Optimierung basierend auf linearer und nichtlinearer Analyse	10
1.5	Konvexität	10
<b>2</b>	<b>Optimierung ohne Restriktionen</b>	<b>14</b>
2.1	Eindimensionale Optimierung (Liniensuche)	14
2.1.1	Einklammerung des Minimums	15
2.1.2	Methode des goldenen Schnitts	15
2.1.3	Polynominterpolation	18
2.1.4	Unvollständige Liniensuche	19
2.2	Mehrdimensionale Optimierung	20
2.2.1	Nelder-Mead-Simplexverfahren	20
2.2.2	Suchrichtungsmethoden	22
2.2.2.1	Methoden 0-ter Ordnung	23
2.2.2.2	Methoden 1-ter Ordnung	26
2.2.2.2.1	Methode des steilsten Abstiegs	27
2.2.2.2.2	Konjugierte Suchrichtungen	28
2.2.2.2.3	Methode der konjugierten Gradienten (Methode nach Fletcher und Reeves)	30
2.2.2.3	Methoden 2-ter Ordnung: Quasi-Newton-Methode	33
2.2.2.4	Skalierung von Designvariablen	36
2.3	Abbruchkriterien	38
<b>3</b>	<b>Optimierung mit Restriktionen</b>	<b>39</b>
3.1	Indirekte Methoden	39
3.1.1	Externe Straffunktion	39
3.1.2	Interne Straffunktion	41
3.1.3	Erweiterte interne Straffunktion	42
3.1.4	Die erweiterte Lagrange-Methode	45
3.1.4.1	Erweiterte Lagrange-Methode für Gleichheitsrestriktionen	45
3.1.4.2	Erweiterte Lagrange-Methode für Ungleichheitsrestriktionen	46
3.2	Direkte Methoden	47
3.2.1	Eindimensionale Optimierung mit Restriktionen	47
3.2.1.1	Einklammerung des Minimums	47
3.2.1.2	Methode des goldenen Schnitts	48
3.2.1.3	Polynominterpolation	49
3.2.2	Mehrdimensionale Optimierung mit Restriktionen	50
3.2.2.1	Kuhn-Tucker-Bedingungen	50
3.2.2.2	Zoutendjiks Methode der zulässigen Richtungen	56
3.2.2.3	Modifiziert Methode der zulässigen Richtungen	59
3.2.2.4	Starten im unzulässigen Bereich	60
3.2.2.5	Die generalisierte Methode der reduzierten Gradienten	61

<b>4</b>	<b>Lagrange-Funktion und Dualität</b>	<b>64</b>
4.1	Lagrange-Funktion mit Gleichheitsrestriktionen	64
4.2	Lagrange-Funktion mit Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktionen	65
4.3	Sattelpunkteigenschaften	67
4.4	Dualität	68
4.4.1	Primale Methode	68
4.4.2	Duale Methode	69
4.4.3	Dualität bei separierbaren Problemen	73
4.5	Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren	75
<b>5</b>	<b>Optimalitätskriterienverfahren</b>	<b>78</b>
5.1	Das Prinzip vom voll beanspruchten Tragwerk	78
5.2	Die adaptive biologische Wachstumsregel	80
5.3	Optimalitätskriterien aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen	83
<b>6</b>	<b>Approximationsverfahren</b>	<b>84</b>
6.1	Lokale Approximation	84
6.1.1	Lineare und quadratische Approximation	85
6.1.1.1	Sequenzielle lineare Programmierung	86
6.1.1.2	Sequenzielle quadratische Programmierung	88
6.1.1.3	Successive Response Surface Method	88
6.1.2	Reziproke Approximation	91
6.1.3	CONLIN	92
6.1.4	MMA (Method of Moving Asymptotes)	92
6.2	Globale Approximation	98
6.2.1	Lineare Regression	100
6.2.1.1	Polynome	100
6.2.1.2	Bestimmung der Regressionsparameter	101
6.2.1.3	SVD (Singular Value Decomposition)	102
6.2.1.4	Die Moving-Least-Square-Methode	105
6.2.1.5	Sequenzielle Antwortflächen-Methode	107
6.2.2	Nichtlineare Regression	107
6.2.2.1	Neuronale Netzwerke	108
6.2.2.2	Bestimmung der Regressionsparameter	110
6.2.2.3	Levenberg-Marquardt-Methode	110
6.2.3	Statistische Test- und Fehlerterme	112
6.2.4	Interpolationen	113
6.2.4.1	Kriging	113
6.2.4.2	Radiale Basisfunktionen	121
6.2.5	Versuchsplanung	127
6.2.5.1	Klassische Versuchsplanung	129
6.2.5.1.1	Vollständig faktorielle Versuchspläne	130
6.2.5.1.2	Koshal Designs	131
6.2.5.1.3	D-Optimale Versuchspläne	132
6.2.5.2	Moderne Versuchsplanung	133
6.2.5.2.1	Monte Carlo Sampling	133
6.2.5.2.2	Latin Hypercube Sampling	133
6.2.5.2.3	Orthogonal Arrays	135
6.2.5.2.4	Randeffekt	136
6.2.6	Test der Vorhersagegüte	137
6.2.7	Vergleich der globalen Approximationen und Optimierungsstrategie	142

<b>7</b>	<b>Kopplung an FEM</b>	<b>146</b>
7.1	Strukturantworten und Formulierungen des Optimierungsproblems	146
7.1.1	Bauteilsteifigkeit	146
7.1.2	Das Min-Max-Problem	148
7.1.2.1	Die direkte Formulierung	148
7.1.2.2	Die $p$ -Norm	149
7.1.2.3	Die Beta-Methode	149
7.1.2.4	Die Kreisselmeier-Steinhauser-Funktion (KS-Funktion)	150
7.1.3	Frequenzen	153
7.1.4	Weitere Strukturantworten	155
7.1.5	Berücksichtigung von mehreren Lastfällen	156
7.2	Sensitivitätsanalyse	157
7.2.1	Finite Differenzen	157
7.2.2	Analytische und semi-analytische Sensitivitätsanalyse	158
7.2.2.1	Die direkte Methode	159
7.2.2.2	Die adjungierte Methode	160
7.2.2.3	Exakte semi-analytische Sensitivitäten	162
7.3	Programmsysteme zur Optimierung	164
7.3.1	Programme mit integriertem Optimierungsalgorithmus	165
7.3.2	Externe Optimierer	166
7.4	Anwendung: Dimensionierung	168
7.4.1	Wandstärkenoptimierung von Blechbauteilen einer Karosserie	168
7.4.2	Optimierung einer Karosseriestruktur unter Einsatz von Blechen mit variabler Wandstärke	169
7.4.3	„Taylor Rolled Blank“ Optimierung eines Instrumententafelträgers	176
<b>8</b>	<b>Formoptimierung</b>	<b>178</b>
8.1	CAD-basierte Formoptimierung	179
8.1.1	Anwendungsbeispiele	181
8.1.1.1	Formoptimierung eines Torsionsprofil	181
8.1.1.2	Formoptimierung eines Motorhalters	182
8.2	FE-Netz-basierte Formoptimierung	183
8.2.1	Sensitivitätsbasierte Formoptimierung	184
8.2.1.1	Erzeugung von Formbasisvektoren über Lastfälle	188
8.2.1.2	SHAPE200	189
8.2.1.3	Morphing	197
8.2.1.3.1	Grundversion von Morphing	197
8.2.1.3.2	Erweiterte Version von Morphing	200
8.2.1.3.3	Freiformoptimierung	200
8.2.1.4	Sickenoptimierung	201
8.2.1.5	Diskussion der Vor- und Nachteile der Formoptimierung mit Formbasisvektoren	205
8.2.1.6	Anwendungen	205
8.2.1.6.1	Formoptimierung eines Vorderachslenkens	205
8.2.1.6.2	Formoptimierung eines Motorhalters	208
8.2.1.6.3	Formoptimierung eines Kunststoff-Spritzgussteils	210
8.2.1.6.4	Formoptimierung eines Karosserie-Blechbauteils	213
8.2.1.6.5	Sickenoptimierung einer Ersatzradmulde	215
8.2.1.6.6	Sickenoptimierung einer Fahrzeugbodengruppe	216
8.2.2	Das CAO-Verfahren	217
8.2.2.1	Wachstumssimulation mithilfe einer Wachstumsschicht	218

8.2.2.2	Direkte Methode der Wachstumssimulation . . . . .	220
8.2.2.3	Berücksichtigung von geometrischen Restriktionen . . . . .	222
8.2.2.4	Das CAIO-Verfahren . . . . .	225
8.2.2.5	Diskussion der Vor- und Nachteile des CAO-Verfahrens . . . . .	225
8.2.2.6	Anwendungen . . . . .	226
8.2.2.6.1	Beispiele aus der Natur . . . . .	226
8.2.2.6.2	Formoptimierung eines Achsschenkels . . . . .	228
8.2.2.6.3	Formoptimierung eines Differenzialkäfig . . . . .	228
8.2.2.6.4	Formoptimierung eines Karosserie-Blechbauteils . . . . .	229
<b>9</b>	<b>Topologieoptimierung . . . . .</b>	<b>231</b>
9.1	Mathematische Topologieoptimierung . . . . .	233
9.1.1	E-Modul – Dichte-Relation . . . . .	233
9.1.1.1	Die Homogenisierungsmethode . . . . .	234
9.1.1.2	Der SIMP-Ansatz . . . . .	237
9.1.2	Optimierungsziele und Lösungsverfahren . . . . .	238
9.1.2.1	Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit . . . . .	239
9.1.2.2	Dynamische Topologieoptimierung . . . . .	243
9.1.2.2.1	Künstliche Eigenformen . . . . .	244
9.1.2.2.2	Modellierungsschwäche . . . . .	245
9.1.2.3	Duale Methode . . . . .	251
9.1.3	Topologieoptimierung mit nachgezogener Lasteinleitung . . . . .	255
9.1.4	Mathematische und numerische Probleme . . . . .	257
9.2	Empirische Topologieoptimierung . . . . .	263
9.2.1	Das SKO-Verfahren . . . . .	263
9.2.2	TopShape . . . . .	265
9.2.3	Weitere empirische Optimierungsverfahren . . . . .	268
9.3	Vergleich von SKO und mathematischen Verfahren . . . . .	269
9.4	Die Level Set Methode . . . . .	269
9.5	Anwendungen . . . . .	277
9.5.1	Akademische Beispiele . . . . .	277
9.5.2	Praktische Anwendungen . . . . .	279
9.5.2.1	Auffinde einer optimalen Lochanordnung . . . . .	280
9.5.2.2	Bestimmung einer optimalen Sickenanordnung . . . . .	286
9.5.2.3	Ermittelung von optimalen Merkmalen von Gussteilen . . . . .	289
9.5.2.3.1	Topologieoptimierung ohne Gussteilrestriktionen . . . . .	290
9.5.2.3.2	Topologieoptimierung mit Gussteilrestriktionen . . . . .	299
9.5.2.4	Topologieoptimierung eines Querträgers . . . . .	312
9.5.2.5	Topologieoptimierung eines Hinterwagens . . . . .	316
9.5.2.6	Designerstuhl . . . . .	317
9.5.2.7	Optimierung von Schweißpunkten . . . . .	318
9.5.3	Weitere Anwendungsbereiche . . . . .	320
<b>10</b>	<b>Globale Optimierungsverfahren . . . . .</b>	<b>323</b>
10.1	Multistart . . . . .	323
10.2	Globale Optimierungsverfahren aus dem Bereich der Bionik . . . . .	324
10.2.1	Evolutionäre Algorithmen . . . . .	324
10.2.1.1	Evolutionsstrategien (ES) . . . . .	325
10.2.1.2	Genetische Algorithmen (GA) . . . . .	328
10.2.1.3	Abschließende Bemerkungen zu den evolutionären Algorithmen . . . . .	331
10.2.2	Optimierung mit Teilchenschwärmen (Particle Swarm Optimization) . . . . .	332

10.3 Simulated Annealing . . . . . 341

10.4 Generelle Bemerkungen zu den stochastischen Optimierungsverfahren . . . . . 343

10.5 Der EGO-Algorithmus . . . . . 343

10.6 Würfeln auf dem Computer . . . . . 345

10.7 Globale Optimierungsstrategien . . . . . 346

**11 Optimierungsstrategien . . . . . 348**

11.1 Mehrzieloptimierung . . . . . 348

11.1.1 Zielgewichtung . . . . . 351

11.1.2 Formulierung mit der KS-Funktion . . . . . 354

11.1.3 Methode der Abstandsfunktionen . . . . . 355

11.1.4 Restriktionsformulierung . . . . . 356

11.1.5 Pareto-Front Bestimmung über Versuchsplanung . . . . . 357

11.1.6 Pareto-basierte genetische Algorithmen . . . . . 358

11.2 Multidisziplinäre Optimierung . . . . . 358

11.3 Die ESL (Equivalent Static Loads) Methode . . . . . 361

11.4 Bestimmung der wichtigsten Designvariablen und Reduktion der Variablen . . . . . 365

11.4.1 Bestimmung der wichtigsten Variablen über lokale Sensitivitäten . . . . . 366

11.4.2 Bestimmung der wichtigsten Variablen über globale Sensitivitäten . . . . . 366

11.4.2.1 Globale Sensitivitäten aus finite Differenzen . . . . . 367

11.4.2.2 Globale Sensitivitäten über eine Varianzanalyse (ANOVA) . . . . . 367

11.4.2.2.1 Lineares Regressionsmodell . . . . . 369

11.4.2.2.2 Funktionale Varianzanalyse . . . . . 369

11.4.2.2.3 Diskrete Varianzanalyse . . . . . 378

11.4.3 Verfolgen von Sensitivitäten . . . . . 382

11.5 Robustheits- und Zuverlässigkeitsoptimierung . . . . . 385

11.5.1 Gegenüberstellung von Versuch und Simulation . . . . . 387

11.5.2 Statistische Grundlagen . . . . . 390

11.5.3 Stochastische Simulation . . . . . 396

11.5.3.1 Monte-Carlo-Methode und lineares Regressionsmodell . . . . . 398

11.5.3.2 Latin Hypercube Sampling . . . . . 400

11.5.3.3 Die FOSM-Methode . . . . . 400

11.5.3.4 Variation der Eingangsstreuung . . . . . 402

11.5.3.5 Funktionale Varianzanalyse . . . . . 402

11.5.3.6 Diskrete Varianzanalyse . . . . . 404

11.5.4 Formulierungen des Optimierungsproblems . . . . . 405

11.6 Anwendungsbeispiele . . . . . 413

11.6.1 Robustheitsanalyse und Optimierung des Systems Fensterrahmen/Türdichtung 413

11.6.2 Optimierung und Robustheitsuntersuchung einer Mehrlenkerhinterachse  
hinsichtlich des Rollgeräusches . . . . . 422

11.6.3 Robustheitsoptimierung eines Verzweigungsproblems beim Pendelumschlagen  
eines Hinterachsstabilisators . . . . . 437

11.6.3.1 Die „Pushing-Away“-Strategie . . . . . 442

11.6.3.2 Metamodell basierte Robustheitsoptimierung . . . . . 444

11.6.4 Multidisziplinäre Wandstärkenoptimierung einer Karosserie . . . . . 447

11.6.5 Multidisziplinäre Form- und Wandstärkenoptimierung einer Sitzquerträger-  
Struktur . . . . . 448

**12 Literatur . . . . . 459**

**Sachwortverzeichnis . . . . . 479**



# 1 Einleitung

Optimierung ist eine Strategie, die in vielen Bereichen des täglichen Lebens angewendet wird. So wird beispielsweise versucht, Ampelschaltungen zu optimieren, Aktienkurse und Gewinne zu maximieren, Verluste zu minimieren, ein Produkt mit möglichst geringen Kosten herzustellen und eine Ware zu dem günstigsten Preis zu erwerben, um nur einige Beispiele zu nennen. Offenbar entspricht es dem menschlichen Wesen, immer das Optimale anzustreben und das Bestmögliche herauszuholen.

Dieses Buch beschränkt sich nur auf einen Ausschnitt der möglichen Optimierungsanwendungen und Strategien, indem nur die simulationsgestützte Optimierung [4], [15], [16], [24], [116], [209], [268] betrachtet wird. Dies bedeutet, dass ein mathematisches Modell für das zu optimierende Problem vorliegen muss. Mit diesem Modell können dann die Ausgabegrößen beziehungsweise die Systemantworten bestimmt werden, welche wiederum von den Eingabegrößen wie Variablen und Parametern abhängen. Dabei kann es sich bei dem Modell um eine Simulation des Problems in analytischer oder numerischer Form oder auch um eine Approximation handeln, die aus einer Anzahl vorliegender Datenpunkte aufgebaut worden ist. Im letzteren Fall müssen die Daten nicht zwangsweise das Ergebnis einer Simulation sein, sondern können auch aus einem Experiment stammen.

Die zweite Einschränkung besteht darin, dass sich der Anwendungsbereich auf die Strukturoptimierung [18], [28], [107], [121], [158], [317], [365], also auf die Optimierung mechanischer Strukturen beschränkt. Viele der behandelten Grundlagen und Optimierungsalgorithmen gelten jedoch in den meisten Fällen für jede simulationsgestützte Optimierung.

In den Ingenieurbereichen hat die Simulation in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen, und ein Ende dieser Entwicklung ist zurzeit noch nicht absehbar. So verlagert sich beispielsweise in der Automobilindustrie der Schwerpunkt von der versuchsbasierten Entwicklung immer mehr hin zur virtuellen Entwicklung. Durch diese Schwerpunktsverlagerung in Richtung der Simulation im Entwicklungsprozess ist auch die Bedeutung der simulationsgestützten Optimierung gewachsen und eröffnet auch vollkommen neue Einsatzmöglichkeiten. So wäre es vor Jahren unvorstellbar gewesen, dass es mithilfe der Optimierung möglich ist, für ein Gussbauteil den optimalen Querschnitt und die optimale Anzahl und Anordnung der Rippen innerhalb des Profil zu finden

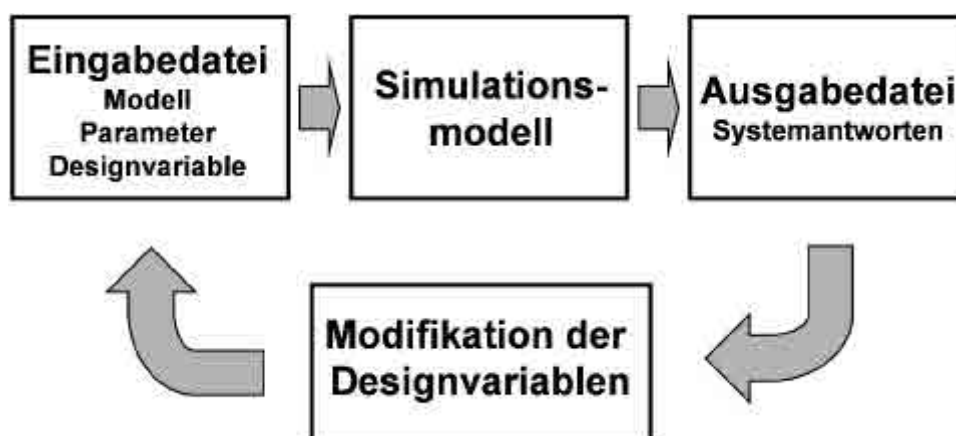


Abb. 1.1 Struktur eines simulationsgestützten Optimierungsprozesses



In Abbildung 1.1 ist ein typischer Ablauf eines simulationsgestützten Optimierungsprozesses dargestellt. Als Eingabegrößen liegt in einer Eingabedatei neben der Modellbeschreibung ein Satz von Parametern und Designvariablen vor. Erstere sind fest vorgegeben und können nicht mehr verändert werden, während letztere in einen vorgegebenen Bereich variiert werden können. Beispiele für Eingabeparameter sind Materialkennwerte eines vorgegebenen Werkstoffs und für Designvariable die Wandstärken von Blechen. Mit dem mathematischen Modell werden dann die Systemantworten (Responses), die von Interesse sind, bestimmt, wie beispielsweise das Gewicht, Verschiebungen, Spannungen oder Eigenfrequenzen. Die Aufgabe des Ingenieurs besteht nun darin, die Werte der Systemantworten zu interpretieren und zu beurteilen. Liegen diese außerhalb des zulässigen Bereiches oder sollen diese so weit wie möglich verbessert werden, müssen die Designvariablen innerhalb des zulässigen Bereichs solange variiert werden, bis das gewünschte Ergebnis erreicht worden ist. Es gibt dabei zwei Möglichkeiten, diesen Optimierungsprozess durchzuführen. Er kann manuell ausgeführt werden, das heißt, dass der Ingenieur aufgrund seiner Erfahrung neue Werte für die Designvariablen auswählt. Mit dem modifizierten Eingabesatz wird dann erneut die Berechnung durchgeführt, die neuen Systemantworten beurteilt und daraus gegebenenfalls erneute Änderungen der Designvariablen abgeleitet. Dieser Prozess wird solange wiederholt, bis das Ziel erreicht ist.

Diese manuelle Vorgehensweise ist meistens mühselig und zeitaufwendig. Schneller und einfacher ist es häufig einen mathematischen Algorithmus einzusetzen, der in den einzelnen Iterationsschritten die Beurteilung der Systemantworten übernimmt und die Veränderung der Designvariablen bestimmt und ausführt. Dabei findet man mit einem solchen Algorithmus häufig eine bessere Lösung als mit der manuellen Optimierung und dies meistens auch noch mit geringerem Zeitaufwand. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Erfahrung des Ingenieurs nicht mehr wichtig wäre. Im Gegensatz zu den Werbesprüchen einiger Software-Hersteller kann Optimierung im Allgemeinen nicht auf Knopfdruck von einem unerfahrenen Anwender durchgeführt werden. Es ist sicherlich vorstellbar, dass es die eine oder andere Standardoptimierungsaufgabe gibt, die auch ohne großes Hintergrundwissen erfolgreich behandelt werden kann. Generell ist jedoch die Erfahrung des Anwenders für eine erfolgreiche Optimierung wichtig und notwendig. So muss der Anwender beispielsweise das Optimierungsproblem so definieren, dass es auch zu dem gewünschten Ergebnis führt. Dazu gehören sowohl die Auswahl der Designvariablen als auch die Auswahl der Systemantworten, die während der Optimierung berücksichtigt werden sollen. Weiterhin muss das Optimierungsergebnis auf Plausibilität und Qualität hin beurteilt werden.

Man wird häufig gerade von Einsteigern gefragt, wie genau denn die Optimierungsergebnisse sind. Diese Frage ist falsch gestellt. Die Genauigkeit des Ergebnisses wird durch das Simulationsmodell festgelegt und nicht durch das Optimierungsprogramm. Der Optimierungsalgorithmus sucht nur die beste Lösung im Rahmen der Systemantworten, die ihm vom Simulationsmodell zur Verfügung gestellt werden. Hat dieses Modell Schwächen oder Bereiche, in dem das Problem nicht angemessen modelliert wird, kann es vorkommen, dass der Optimierungsalgorithmus gerade in diesem Bereich die beste Lösung findet. Hier ist wieder der qualifizierte Anwender gefragt, der den Gültigkeitsbereich des Simulationsmodells kennt und ja auch bei der manuellen Optimierung dafür sorgen muss, dass dieser nicht verlassen wird. Jedoch deckt gerade ein Optimierungsalgorithmus gerne solche Schwachstellen auf und findet in solchen Fällen häufig die beste Lösung außerhalb des Gültigkeitsbereichs. Ist eine solche Situation eingetreten, muss entweder das Optimierungsproblem neu formuliert oder das Simulationsmodell verbessert werden.

Die Frage nach der Genauigkeit des Modells bezieht sich auch auf die Lastfälle, die bei der Optimierung berücksichtigt werden. Auch ohne Optimierung ist es wichtig, dass alle wichtigen Lastfälle in der Simulation berücksichtigt werden, um das Bauteil oder die Struktur vollständig beurteilen zu können. Fehlt ein wichtiger Lastfall, ist es möglich, dass das Bauteil genau bei diesem versagt. Es gibt jedoch normalerweise einen großen Erfahrungsschatz, welche Lastfälle relevant sind und berücksichtigt werden müssen. Man muss sich dennoch darüber im Klaren sein, dass man



beim Einsatz eines Optimierungsprogramms immer an die Grenzen geht. Gibt es bei der Beurteilung eines Bauteils ohne Optimierung immer noch eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlender Lastfall sich wegen vorhandener Sicherheitsreserven nicht auswirkt, so ist das bei einem optimierten Bauteil meistens nicht der Fall. Man kann vielmehr davon ausgehen, dass ein optimiertes Design genau in dem Lastfall versagen wird, der in der Optimierung nicht berücksichtigt worden ist.

Dies alles zeigt, dass es eine Optimierung auf Knopfdruck im Normalfall nicht geben kann, sondern ein Optimierungsprogramm ein Werkzeug ist, das nur dann effektiv eingesetzt werden kann, wenn es von einem versierten Anwender bedient wird. Deshalb beeinflusst die Qualifikation und die Erfahrung des Anwenders maßgeblich die Qualität des Ergebnisses.

Es soll zum Abschluss dieses Abschnitts noch darauf hingewiesen werden, dass nicht alle Optimierungsprobleme mithilfe eines Optimierungsalgorithmus gelöst werden können, obwohl heute eine große Anzahl von sehr guten und effektiven Optimierungsprogrammen auf dem Markt ist. Der Grund dafür kann sein, dass eine Parametrisierung des Problems gar nicht oder nur mit großem Aufwand möglich ist oder dass die Rechenzeit jeden vernünftigen Rahmen sprengen würde.

## 1.1 Optimierungstypen

Man kann in der Strukturoptimierung zwischen drei verschiedenen Anwendungsbereichen unterscheiden, die in Abbildung 1.2 veranschaulicht sind.

1. Bei der *Dimensionierung* (Sizing) werden nur Zahlenwerte variiert, wie beispielsweise Wandstärken von verschiedenen Blechen einer Karosserie oder Querschnittsfläche von Balken. Diese Zahlenwerte stehen meistens in einer Eingabedatei für die Analyse und können damit leicht modifiziert werden.
2. Bei der *Formoptimierung* muss dagegen die Form modifiziert und dem Optimierungsprogramm die möglichen Formvariationen übergeben werden. Dies kann je nach Problemstellung und verfügbaren Programmen sehr schwierig und zeitaufwendig sein. Die Formoptimierung stellt somit sicherlich eine der anspruchsvollsten und arbeitsintensivsten Form der Optimierung dar.
3. In der *Topologieoptimierung* geht man noch einen Schritt weiter, indem auch das Entstehen von Löchern innerhalb einer Komponente zugelassen wird. Dass diese auf den ersten Blick noch anspruchsvollere Form der Optimierung einfach in der Anwendung ist und damit überhaupt in der Praxis Anwendung gefunden hat, verdankt sie der Tatsache, dass die wirkliche Kontur durch eine Dichteverteilung approximiert wird.

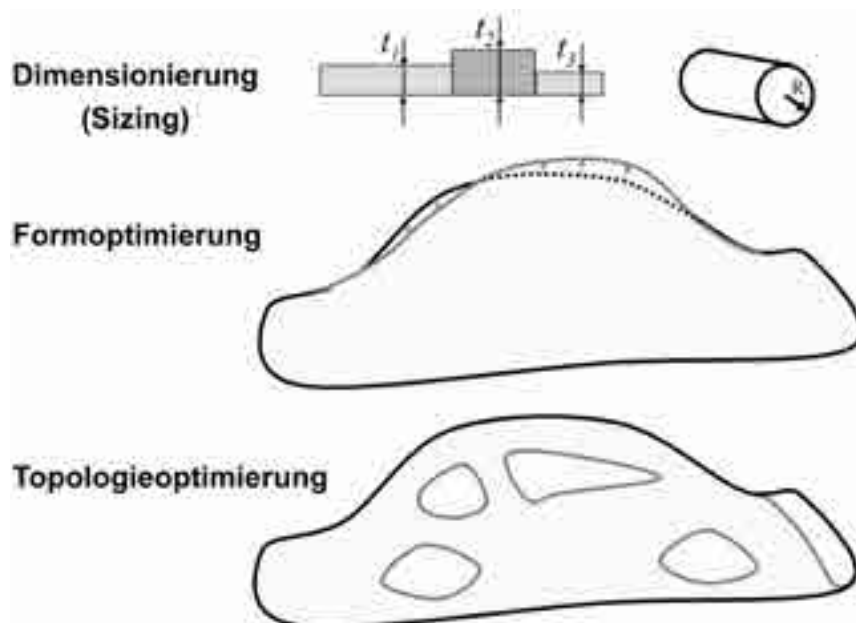


Abb. 1.2 Veranschaulichung der verschiedenen Optimierungstypen

Auf die Details der einzelnen Optimierungstypen und deren Anwendung wird später ausführlich eingegangen.

## 1.2 Motivation und Grundbegriffe der Optimierung

Um mit der Struktur von Optimierungsproblemen vertraut zu werden, soll zu Anfang ein einfaches Optimierungsproblem betrachtet werden. In Abbildung 1.3 ist eine Blechplatte gezeigt, aus der eine Box gefertigt werden soll. Dazu wird an allen Ecken ein Quadrat mit der Kantenlänge  $x$  herausgeschnitten. Die verbleibenden Kanten werden hoch gebogen und die Ecken zusammengesweißt. Die Anforderung lautet nun, den Verschnitt bei der Herstellung der Box möglichst gering zu halten. Dies bedeutet in diesem Fall konkret, dass aus dem verfügbaren Blech eine Box hergestellt werden soll, bei der das Volumen  $V$  maximal ist. Damit kann man das Optimierungsproblem folgendermaßen formulieren:

$$\max V(x), \quad (1.1)$$

Dabei ist das Volumen gegeben als:

$$V(x) = (b - 2x)(a - 2x)x$$

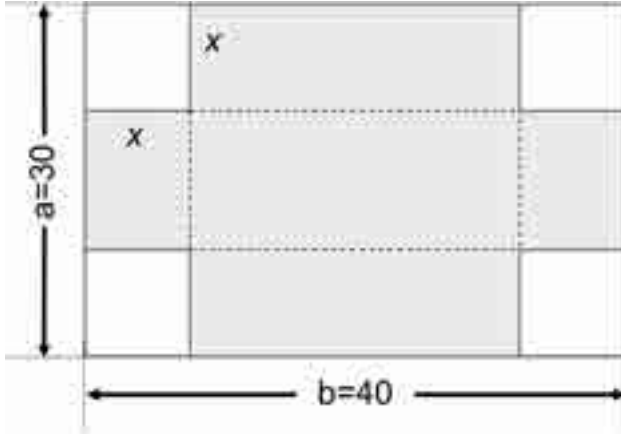


Abb. 1.3 Bemaßung der Blechplatte, aus der eine Box gefertigt werden soll

Die Variable ist in diesem Fall die Kantenlänge  $x$  der entfernten Quadrate beziehungsweise die Höhe der Box. Sie wird in der Optimierung als Designvariable bezeichnet. Diese wird auf einen Wertebereich zwischen 0 und  $a/2$  eingeschränkt, da bei den in Abbildung 1.3 gezeigten Kantenlängen nur dieser Bereich physikalisch sinnvoll ist. Das Optimierungsproblem wird gelöst, indem  $V(x)$  nach der Variablen  $x$  abgeleitet und die Ableitung gleich null gesetzt wird. Man erhält dann

$$\frac{dV}{dx} = ab - 4(a + b)x + 12x^2 = 0, \quad (1.2)$$

woraus sich als physikalisch sinnvolle Lösung ergibt (siehe Abbildung 1.4)

$$x^* = x_1 = \frac{a + b}{6} - \sqrt{\left(\frac{a + b}{6}\right)^2 - \frac{ab}{12}} = 5,7. \quad (1.3)$$

Hier wurde die übliche Notation verwendet, die Designvariable im Optimum mit einem Stern zu kennzeichnen.

Jetzt sollen jedoch die Boxen in Regale gestellt werden, die nur eine Höhe  $\bar{x}$  besitzen. Damit wird das Optimierungsproblem um eine Ungleichheitsrestriktion  $g_1(x)$  erweitert:

$$g_1(x) = x - \bar{x} \leq 0 \quad (1.4)$$

Dabei wurde die Ungleichheitsrestriktion in der Form geschrieben, die in der Optimierung üblich ist. Diese Ungleichheitsrestriktion führt dazu, dass nicht mehr der gesamte Wertebereich von  $x$  zur

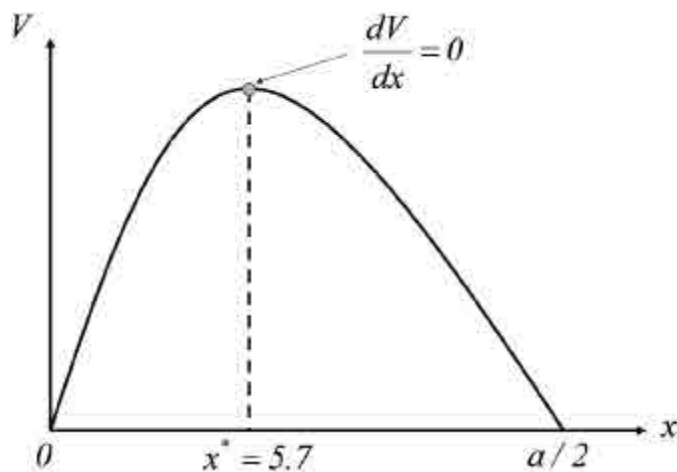


Abb. 1.4 Lösung des Optimierungsproblems ohne Restriktionen

Verfügung steht, sondern dass es nun einen Bereich gibt, in dem die Restriktion verletzt und der damit unzulässig ist. Die Lösung des erweiterten Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} &\max V(x), \\ &\text{sodass} \\ &g_1(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

hängt nun von dem Wert von  $\bar{x}$  ab (Abbildung 1.5). Ist dieser größer als  $x_1$ , ändert sich die Lösung nicht. Ist dagegen  $\bar{x}$  kleiner als  $x_1$ , dann lautet die optimale Lösung

$$x^* = \bar{x}. \tag{1.6}$$

Dies bedeutet, dass die optimale Lösung nicht im Maximum der Funktion liegt, sondern am Rand des zulässigen Bereichs. Dort gilt gerade das Gleichheitszeichen für die Restriktion. Eine solche Restriktion wird als aktiv bezeichnet. Weiterhin ist zu erkennen, dass das ursprünglich verwendete Kriterium zur Bestimmung des Optimums nicht mehr gültig ist, da offensichtlich die erste Ableitung im Optimum jetzt nicht mehr null ist. Die Kriterien für das Optimum mit Restriktionen sind die so genannten Kuhn-Tucker-Bedingungen, die später in Abschnitt 3.2.2.1 vorgestellt werden.

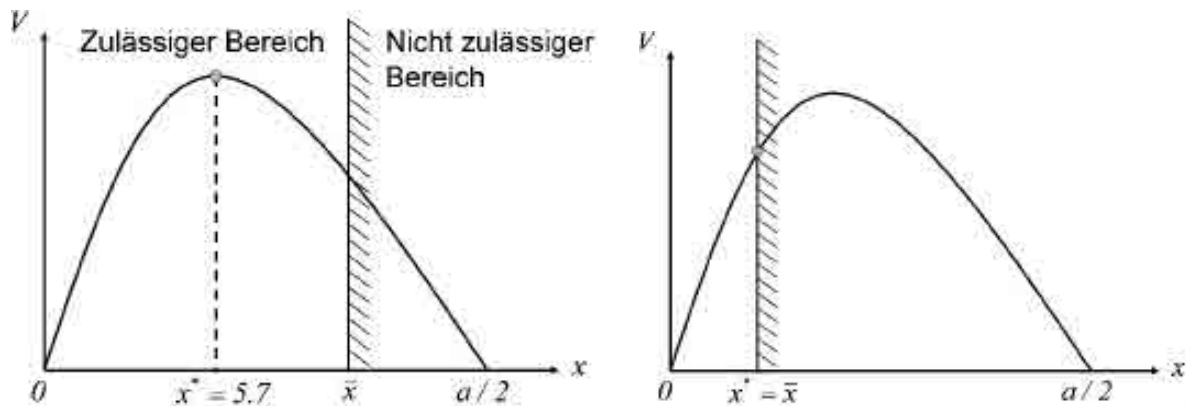


Abb. 1.5 Verschiedene Lösungen des Optimierungsproblems in Abhängigkeit der oberen Restriktionsgrenze  $\bar{x}$

Eine andere Anforderung lautet, dass das Volumen der Box einen Wert von  $\bar{V}$  nicht überschreiten darf. Mit dieser Restriktion lautet das Optimierungsproblem nun:

$$\begin{aligned} &\max V(x), \\ &\text{sodass} \\ &g_2(x) = V - \bar{V} \leq 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Wie in Abbildung 1.6 dargestellt gibt es nun offenbar zwei Lösungen des Problems, die beide wieder am Rand des zulässigen Bereiches liegen.

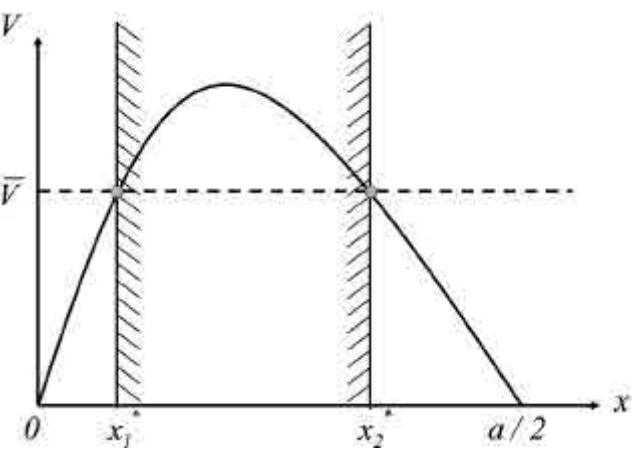


Abb. 1.6 Lösungen des Optimierungsproblems für die Volumenrestriktion

Wenn beide Anforderungen gleichzeitig erfüllt werden sollen, lautet das Optimierungsproblem folgendermaßen:

$$\max V(x),$$

sodass

$$\begin{aligned} g_1(x) &\leq 0 \\ g_2(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

(1.8)

Auch in diesem Falle hängen die Lösungen von dem Wert von  $\bar{x}$  ab. In Abbildung 1.7 sind die verschiedenen Fälle dargestellt. Je nach Wert von  $\bar{x}$  gibt es nur eine oder zwei optimale Lösungen, und es ist jeweils nur die erste oder die zweite Restriktion aktiv.

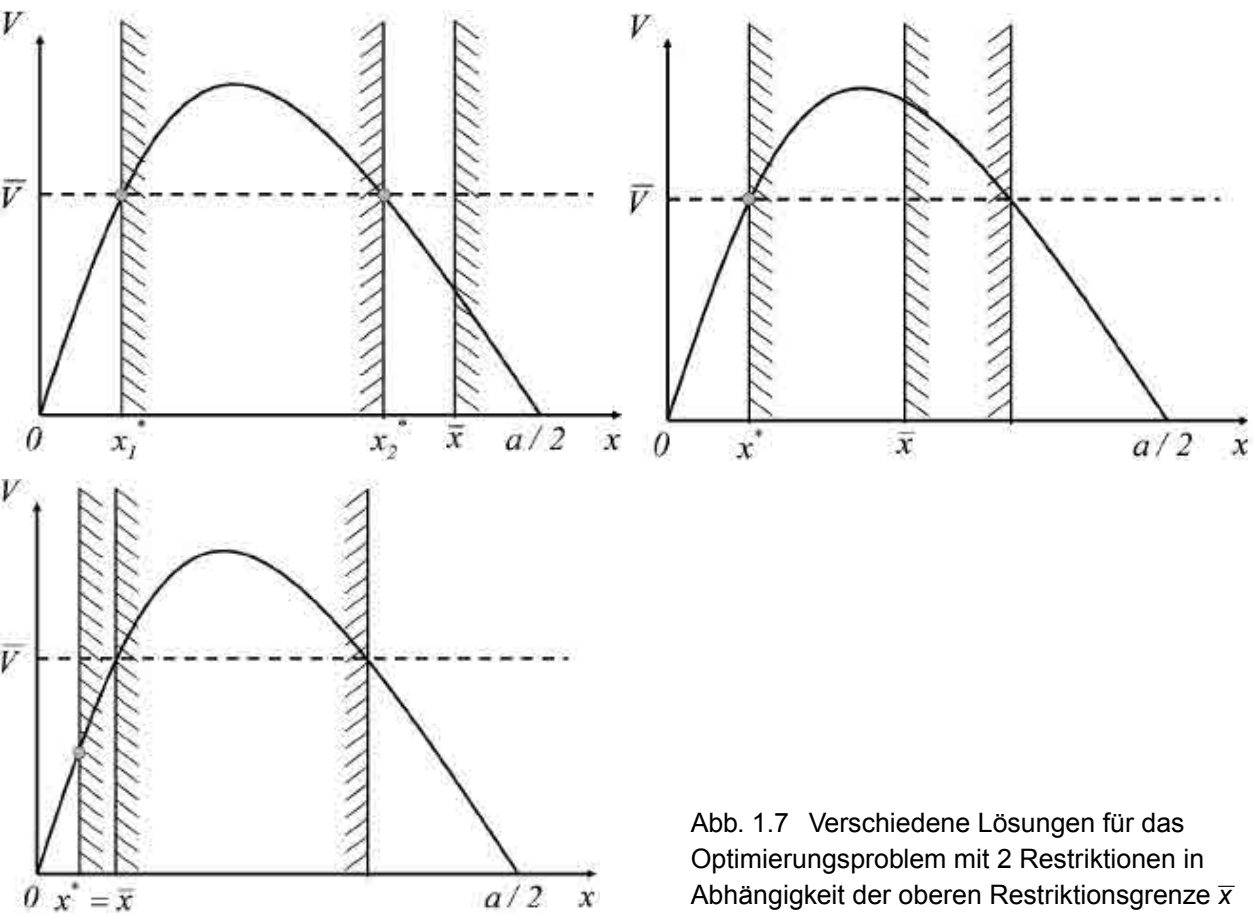


Abb. 1.7 Verschiedene Lösungen für das Optimierungsproblem mit 2 Restriktionen in Abhängigkeit der oberen Restriktionsgrenze  $\bar{x}$