

# 学习控制

刘山

浙江大学控制科学与工程学院

# 控制技术发展的主流

- 鲁棒控制：反馈的延伸
- 智能控制：前馈的延伸
  - 广义上，具有学习和自我调节的控制

# 工程控制系统设计原则

- 受控对象或过程的先验知识全部已知，而且能确定地描述，则采用各种合适的常规控制与最优控制；
- 受控对象或过程的先验知识全部或局部已知，但只能得到统计的描述，则采用利用随机设计或统计设计技术的控制方案；
- 受控对象或过程的先验知识全部或局部未知，则采用以下两种方案：
  - 忽略未知部分的先验知识，采取保守的控制原则，安于低效和次优的结果。例，鲁棒控制；
  - 在运行过程中对未知信息进行估计，基于估计信息采用优化控制。例，自适应控制和学习控制。

# 学习控制技术

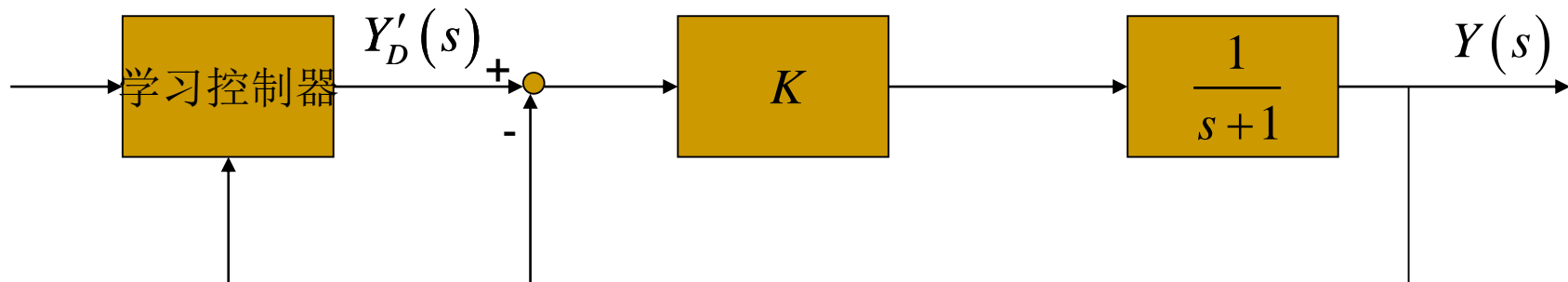
- 智能控制的一个重要分支；
- 在系统运行过程中获得环境和被控对象的未知信息；
- 积累控制经验；
- 在一定的评价标准下进行估值、分类、决策；
- 不断改进系统品质；
- 具有搜索、识别、记忆、修改和优化等功能；
- 特别适用于解决非线性等常规控制难以解决的问题。

# 内容

- 1、学习控制概述
- 2、基于模式识别的学习控制
- 3、迭代学习控制
- 4、重复学习控制

# 一、学习控制概述

# 学习控制例子



$$Y(s) = \frac{k}{s + (k+1)} Y_D(s)$$

$$\dot{y}(t) = -(k+1)y(t) + ky_D(t)$$

$$y(t) = \underbrace{e^{-(k+1)t} y(0) + \int_0^t e^{-(k+1)(t-\tau)} ky_D(\tau) d\tau}$$

希望为  $y_D(t)$

该积分方程无解!

# 学习的定义及特点

- 学习是一种过程，通过对系统重复输入各种信号，并从外部校正该系统，使系统对特定的输入作用具有特定的响应。
- 学习的特点
  - 是一种过程，存在同类特征的重复环境并与环境交互；
  - 存在一种在时间上是比较局部的“成功的”度量，并能够随时间而改善；
  - 表示系统中的自适应变化，该变化能使系统比上一次更有效地完成同一群体所执行的同样任务。



# 学习问题的基本方面

## ■ 学习策略

- 由当前系统及环境的状态到系统变化的方向，程度，可以是一张表，也可以是随机策略

## ■ 奖惩函数

- 当前系统状态及环境状态的瞬时价值，是主要学习目标

## ■ 估价函数

- 当前系统状态及环境状态的长期评价，是奖惩函数的累积

## ■ 模型

- 系统与环境的模型

# 学习系统

- 学习系统是一个能够学习有关过程的未知信息，并用所学信息作为进一步决策或控制的经验，从而逐步改善系统的性能的系统
- 如果一个系统能够学习某一过程或环境的未知特征固有信息，并用所得经验进行估计、分类、决策或控制，使系统的品质得到改善，那么称该系统为学习系统
- 按是否在线分：
  - 离线可训练系统
  - 在线自学习系统
- 按是否有监督分：
  - 有师学习
  - 无师学习

# 学习控制

- 学习控制能够在系统进行过程中估计未知信息，并据之进行最优控制，以便逐步改进系统性能
- 学习控制是一种控制方法，其中的实际经验起到控制参数和算法类似的作用
- 如果一个学习系统利用所学得的信息来控制某个具有未知特征的过程，则称该系统为学习控制系统
- 数学描述：在有限时间域 $[0, T]$ 内，给出受控对象的期望的响应 $y_d(t)$ ，寻求某个给定输入 $u_k(t)$ ，使得 $u_k(t)$ 的响应 $y_k(t)$ ，在某种意义上获得改善；其中， $k$ 为搜索次数， $t \in [0, T]$ 。称该搜索过程为学习控制过程。当 $k \rightarrow \infty$ 时， $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$ ，该学习控制过程是收敛的。

# 学习控制的机理

- 寻找并求得动态控制系统输入与输出间的比较简单的关系
- 执行每个由前一步控制过程的学习结果更新了的控制过程
- 改善每个控制过程，使其性能优于前一个过程
- 希望通过重复执行这种学习过程和记录全过程的结果，能够稳步改善受控系统的性能

# 学习控制系统运行方式

## ■ 启动学习

- 控制器启动后初始运行的学习。它反复依据当前的特征状态，前段运行效果的特征记忆以及相应的学习规则，确定运行决策。

## ■ 运行学习

- 控制运行中对象类型变化时的学习过程。通过尝试考虑所有可能的决策，修改控制策略和控制参数。

# 学习控制与常规自适应控制比较

## ■ 相同点

- 学习系统是自适应系统的发展与延伸，它能够按照运行过程中的“经验”和“教训”来不断改进算法，增长知识，更广泛地模拟高级推理、决策和识别等人类的优良行为和功能。
- 都是解决系统不确定性问题的方法；
- 都基于在线的参数调整算法；
- 都使用与环境，对象闭环交互得到的信息。

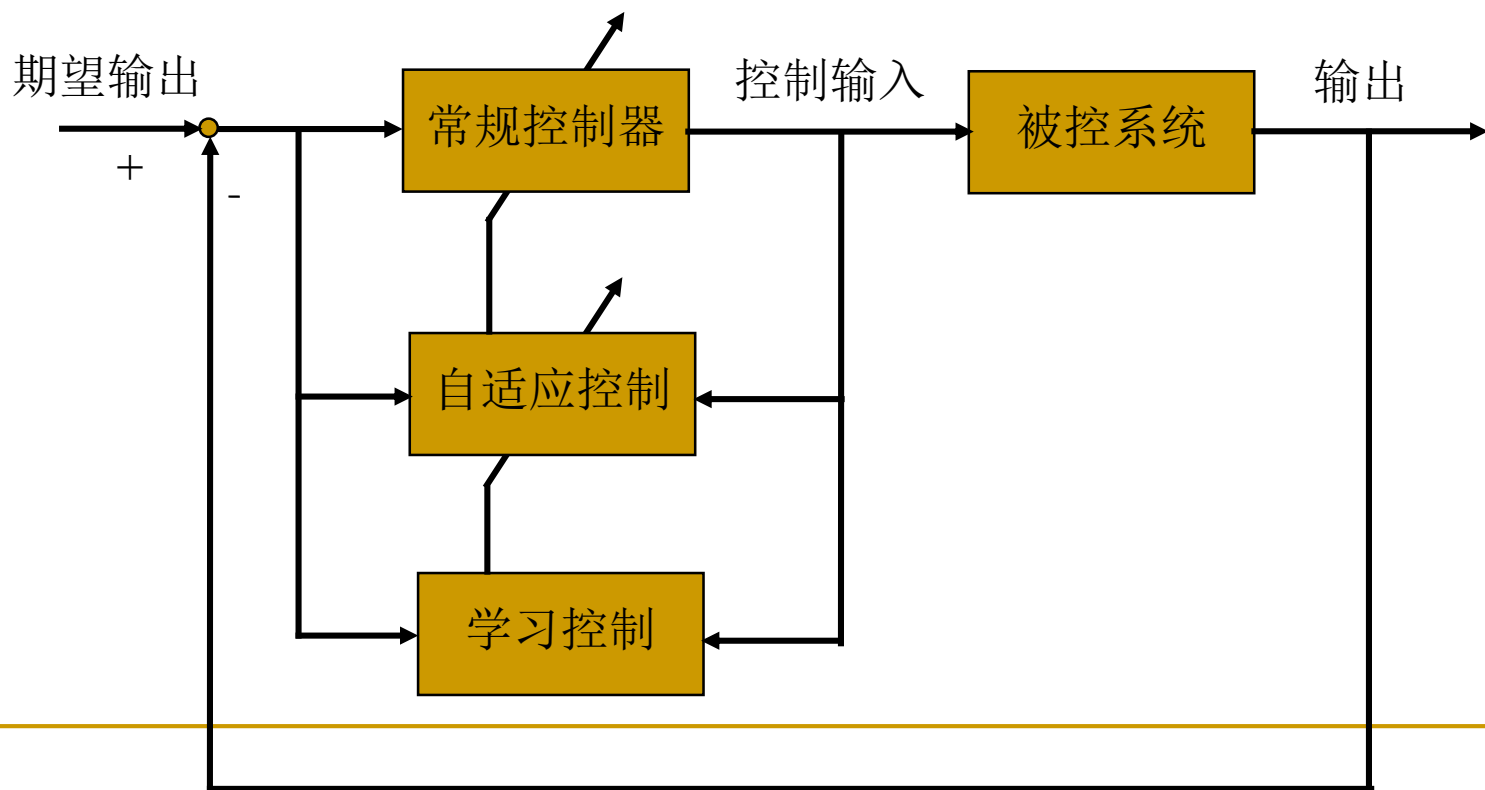
# 学习控制与常规自适应控制比较

## ■ 不同点

- 自适应控制系统在未知环境下的控制决策是有条件的，其控制算法依赖于受控对象数学模型的精确辨识，并要求对象或环境的参数和结构能够发生大范围突变。这就要求控制器有较强的适应性、实时性并保持良好的控制品质。在这种情况下，自适应控制算法将变得过于复杂，计算工作量大，而且难于满足实时性和其它控制要求。因此，自适应控制的应用范围比较有限。
- 自适应控制着眼于瞬时观点，缺乏记忆。
- 当受控对象的运动具有可重复性时，即受控系统每次进行同样的工作时，就可把学习控制用于该对象。在学习控制过程中，只需要检测实际输出信号和期望信号，而受控对象复杂的动态描述计算和参数估计可被简化或被省略。
- 学习控制强调经验和记忆。

# 一般学习控制系统组成

- 常规反馈控制环（先验的补偿器）
- 自适应环
- 学习环





# 学习控制的结构方案

## ■ 基于模式识别的学习控制

- 用模式识别方法对输入信息提取和处理，提供控制决策和学习适应的依据。

## ■ 迭代学习控制

- 反复应用系统以前运行得到的信息，以获得能够产生期望输出轨迹的控制输入，改善控制质量。

## ■ 重复学习控制

- 根据内模原理，引入能够产生周期信号的重复补偿器，以跟踪具有周期的任意目标信号。

## ■ 基于神经网络的学习控制

- 以神经网络为辨识模型或控制器，神经网络的学习训练算法是该控制方案的关键。

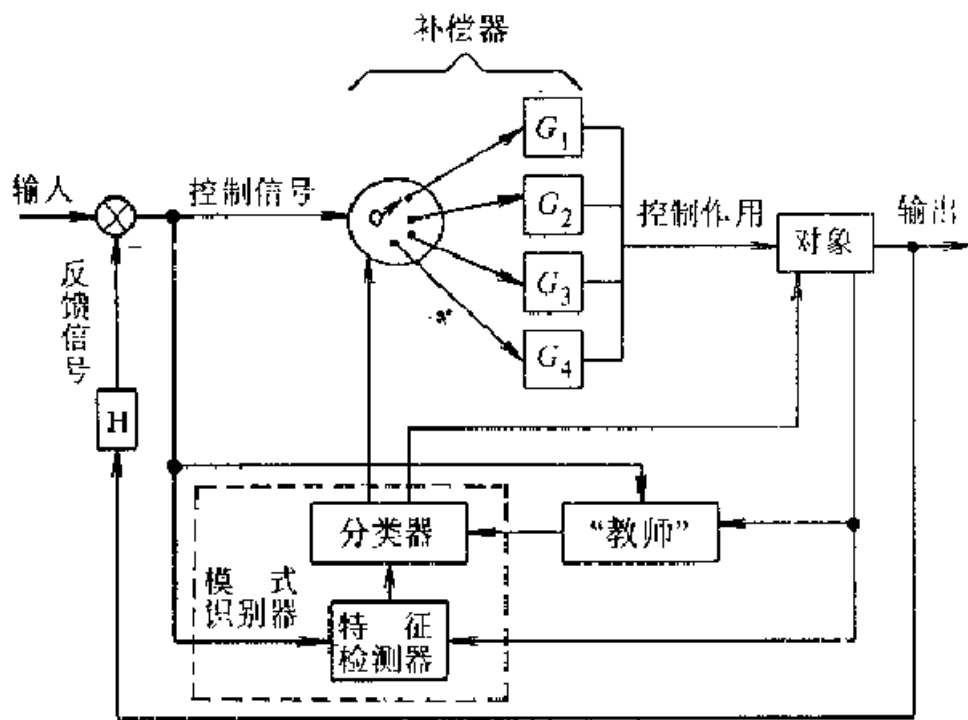
# 学习控制的层次

- 单一目标的精确学习（可归类为自适应学习）：
  - 迭代学习控制、重复学习控制
- 基于模式的多目标学习（统计学习）：
  - 基于模式识别的学习控制
- 量化的生物学习（连结主义学习）：
  - 基于神经网络的学习

## 二、基于模式识别的学习控制

# 基本思想

- 针对先验知识不完全的对象和环境，将控制局势进行分类，确定这种分类的决策，根据不同的决策切换控制作用的选择，通过对控制器性能估计来引导学习过程，从而使系统总的性能逐步改善。
  - 控制局势分类
  - 有一个模式识别过程
  - 有一个学习过程



# 模式识别原理

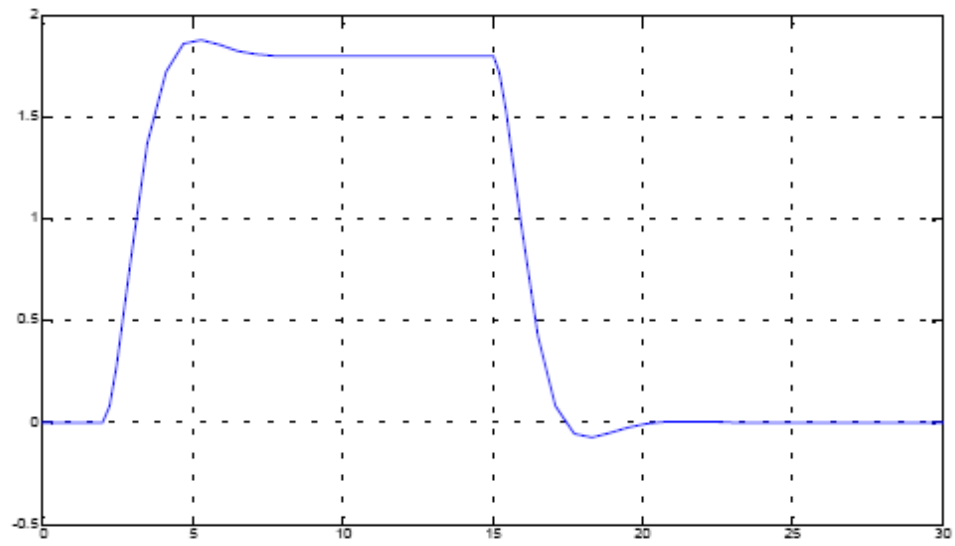
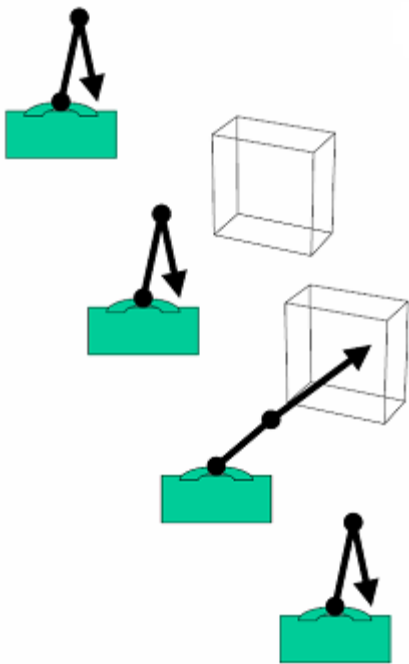
- 模式识别：面对某一具体事物时将其正确地归入某一类别。
- 模式识别系统由两个过程组成。
  - 设计
  - 实现
- 模式识别系统由四部分组成。
  - 数据获取
  - 预处理
  - 特征提取和选择
  - 分类决策
- 决策面
  - 对于C类分类问题，按照决策规则可以把d维特征空间分成C个决策域，将划分决策域的边界面称为决策面。
- 判别函数
  - 表达决策规则的函数称为判别函数。
- 基于模式识别的学习控制的关键在于寻找控制局势的决策面。

# 基于模式识别的学习控制

- 应用模式识别技术的开关式控制
- 采用线性再励技术的控制
- 利用Bayes学习估计方法的控制

### 三、迭代学习控制理论

# 重复任务



典型期望轨迹

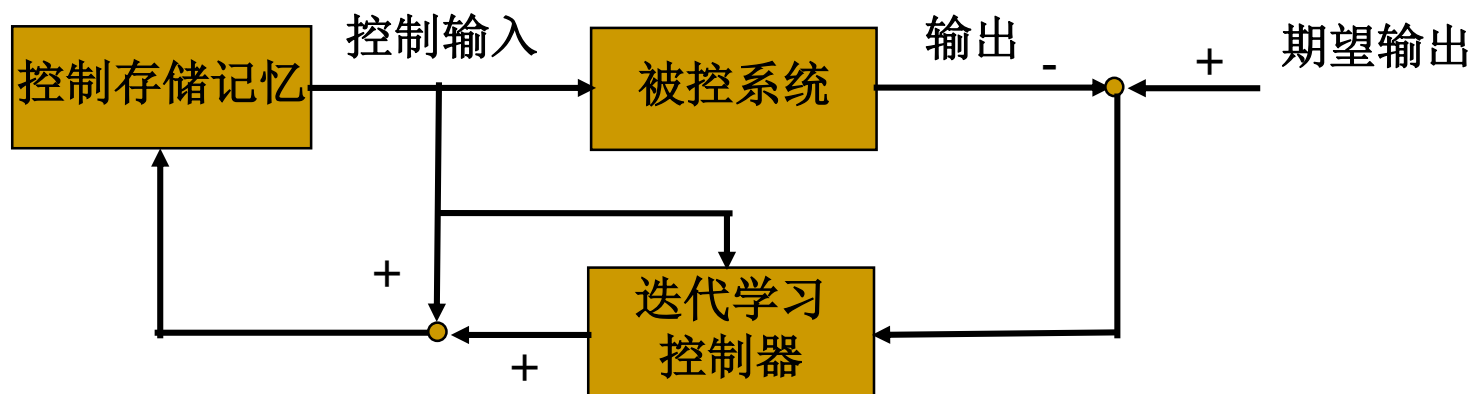


# 迭代学习控制定义

- 迭代学习控制针对具有重复运行性质的被控对象，利用对象在控制尝试时的运行信息，通过迭代的方式修正控制信号，实现在有限时间区间上的完全跟踪任务。
- 迭代学习控制采用“在重复中学习”的学习策略，具有记忆和修正机制。
- 迭代学习控制是智能控制中具有严格数学描述的一个分支。

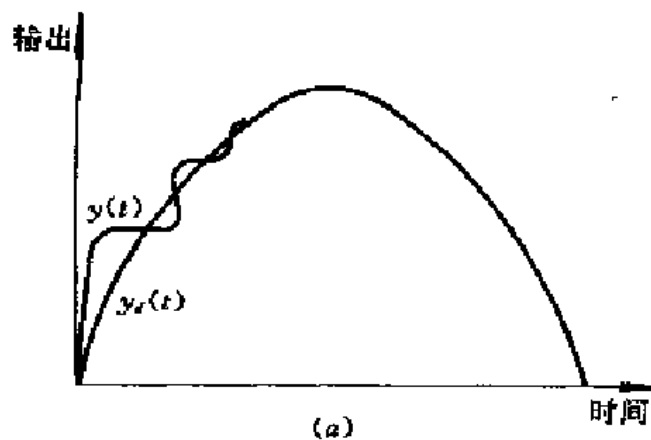
# 迭代学习控制基本思想

- 通过对被控系统进行控制尝试，得到系统的当前输入和当前输出，以系统输出与给定轨迹的偏差信号修正不理想的控制信号，产生一个新的控制信号，确定下一个期望输入使得系统的实际输出收敛于期望值。因此，在可能存在参数不确定性的情况下，可通过实际运行的输入输出数据获得更好的控制信号，使得系统跟踪性能得以提高。

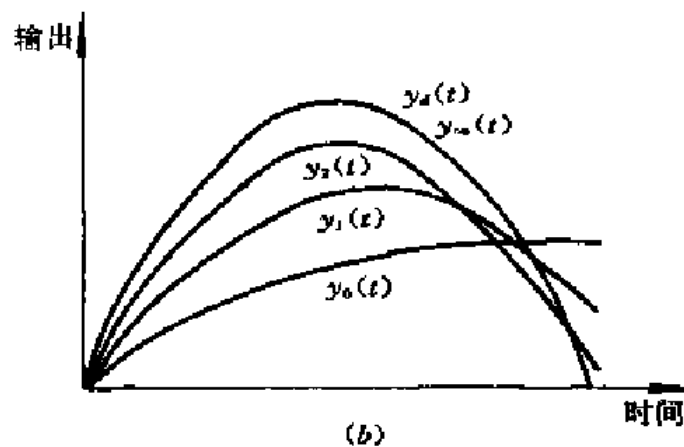


# 迭代学习控制的应用对象及任务

- 适合于具有某种重复运行性质的被控对象。
- 可实现有限时间区间上的完全跟踪任务。

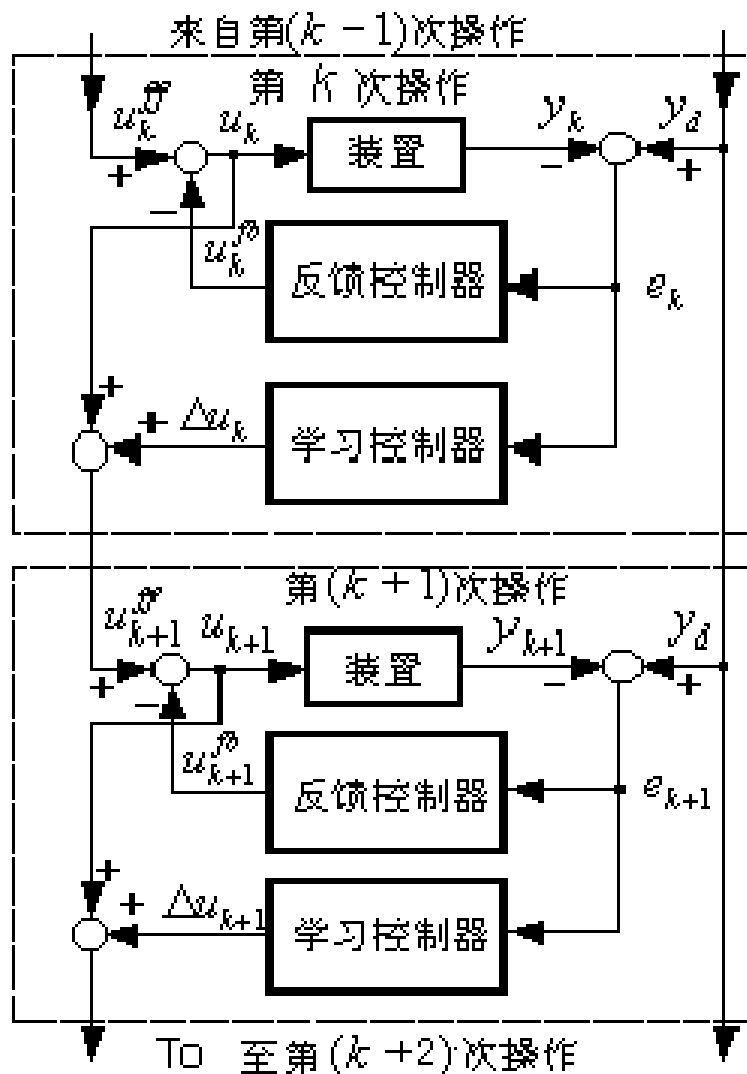


常规控制的渐近跟踪过程



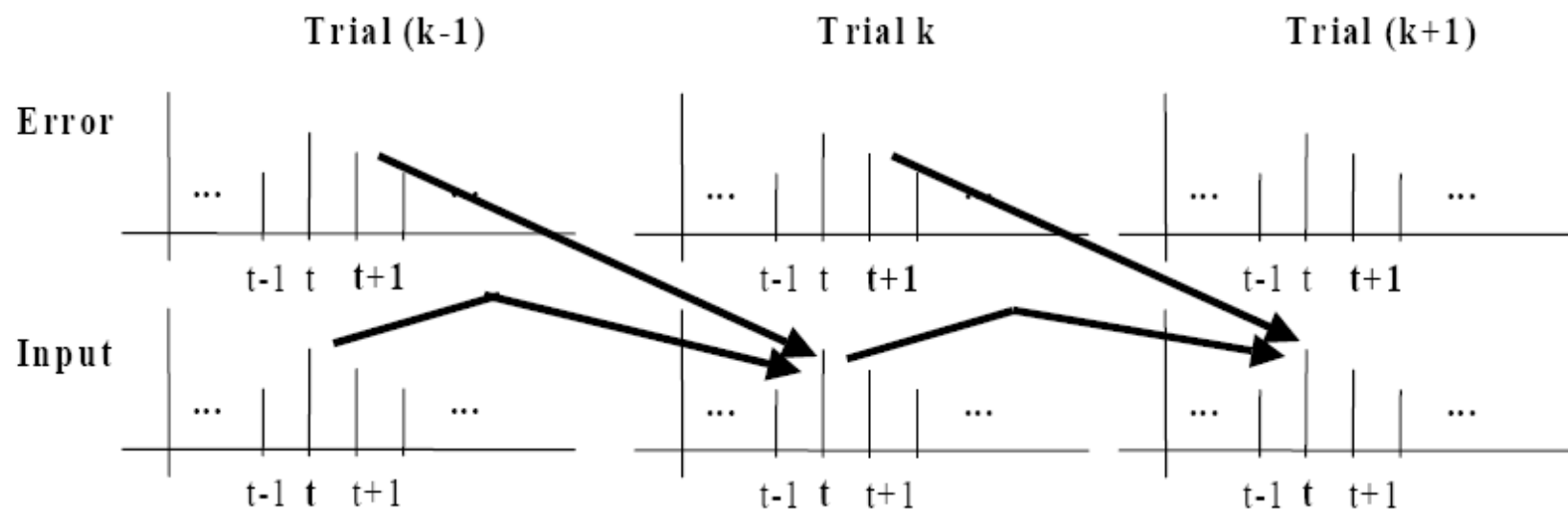
迭代学习的完全跟踪过程

# 迭代学习控制的运行过程

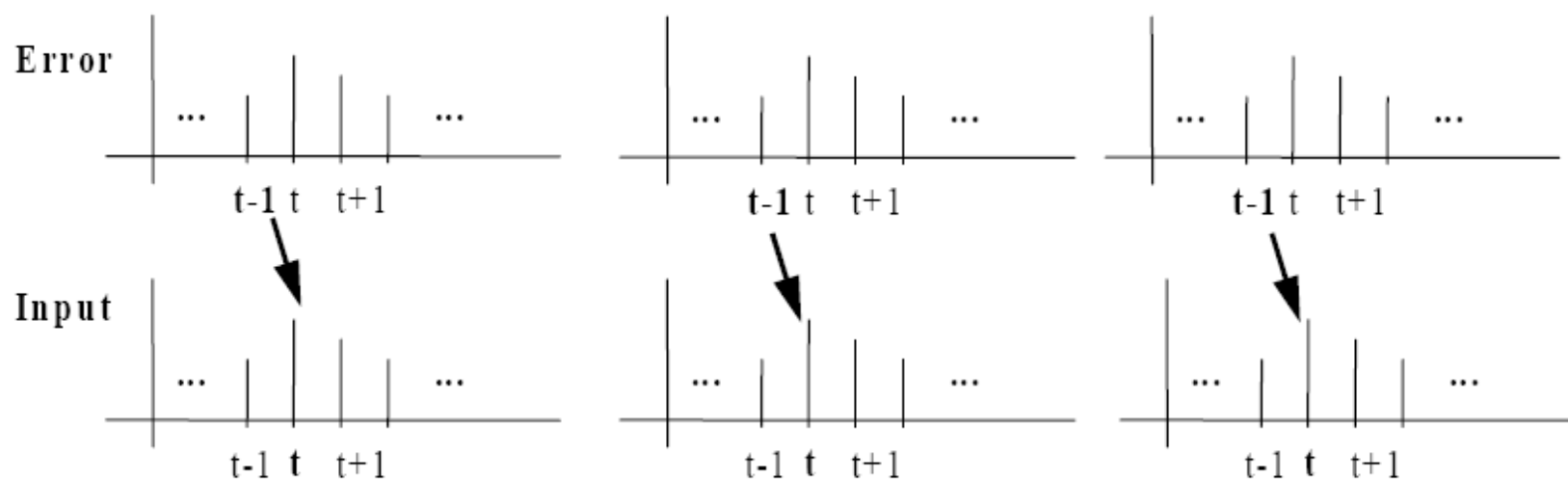


# 迭代学习控制的一般表示形式

- 系统: 
$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(x_k(t), u_k(t), t) \\ y_k(t) = g(x_k(t), u_k(t), t) \end{cases}$$
- 误差: 
$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$$
- 目标: 
$$\|e_{k+1}(t)\| \leq \rho \|e_k(t)\| \quad \rho < 1$$
- 学习律: 
$$u_{k+1}(t) = L(u_k(t), e_k(t))$$



(a) ILC:  $u_{k+1}(t) = u_k(t) + f(e_k(t+1))$



(b) Conventional feedback:  $u_{k+1}(t) = f(e_{k+1}(t-1))$

# 迭代学习控制的特点

- 适合于具有某种重复运动性质的被控对象；
- 实现完全跟踪，这不同于渐近跟踪；
- 采用“在重复中学习”的学习策略，具有记忆系统和经验修正机制；
- 在遇到类似控制任务时，能根据记忆系统中的信息迅速调整控制信号；
- 方式一般比较简单，需要较少的先验知识；
- 适用于不精确已知（甚至未知）被控对象特性的非线性系统；
- 在线计算负担小，适合于快速运动控制。

# 迭代学习控制与其它控制的区别

- 迭代控制与最优控制的区别：
  - 最优控制根据系统模型计算最优输入，
  - 迭代控制则通过先前试验获得最好输入。
- 迭代控制与自适应控制区别：
  - 迭代控制的算法是在每次试验后离线实现的，
  - 自适应控制的算法是在线算法，而且需要大量计算。



# 迭代学习控制的一般假设条件

- 系统每次运行时间间隔是有限的固定间隔；
- 系统的期望轨迹总是预先给定且已知的；
- 系统的初始条件重复；
- 系统的动态结构在每次运行中保持不变；
- 系统每次运行的输出可测；
- 存在唯一的理想控制使得系统的状态和输出为期望的状态和输出。

# 迭代学习控制系统设计的目标

- 收敛性：构造了一系列迭代控制序列 $\{u_k\}$ ，收敛于一个可实现的控制信号 $u_*(t)$ ，且 $u_*(t)$ 为如下最优问题 $\min_{u(t)} \|y_d(t) - y(t)\|$ 的解。
- 迭代学习收敛速度：最好具有指数收敛速率。
- 迭代学习控制的鲁棒性：在系统存在不确定的未建模动态，各种不确定的干扰和初始状态偏移。

# 线性系统迭代学习控制算子表示

- 线性算子由有界线性算子描述  $y = T_s u$
- 假设学习控制器为  $L$ ，且标：迭代得出控制  $u^*$ ，使得  $y_d = T_s u^*$  或  $y_d$  与  $T_s u^*$  在给定的区间上尽可能接近。即寻找一系列输入  $u_k$ ，使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u^*$
- 迭代学习律的一般形式： $u_{k+1} = T_u u_k + T_e (y_d - y_k)$   
这里， $T_u$  和  $T_e$  均为线性算子。
- 定理：对于线性时不变系统， $y_k = T_s u_k$ ，令学习控制算法为  $u_{k+1} = T_u u_k + T_e (y_d - y_k)$ ，如果  $\|T_u - T_e T_s\| < 1$ ，则  $u_k$  收敛于固定点  $u^*$ ，且  $u^*$  由下式给定：

$$u^*(t) = (I - T_u + T_e T_s)^{-1} T_e y_d(t)$$

极限误差为：

$$e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - y_d) = \left( I - T_s (I - T_u + T_e T_s)^{-1} T_e \right) y_d(t)$$

# 定理证明

**证明：注意到下一个输入  $u_{k+1}$  可表示成**

$$u_{k+1} = T_u u_k + T_e (y_d - y_k) = T_u u_k + T_e (y_d - T_s u_k) \triangleq f(u_k)$$

**因为**  $\|f(x_1) - f(x_2)\| = \|T_u(x_1 - x_2) - T_e T_s(x_1 - x_2)\| \leq \|T_u - T_e T_s\| \|x_1 - x_2\|$

**由压缩映射原理可知，由  $\|T_u - T_e T_s\| < 1$  可知  $u_k$  收敛。**

**此时，极限应满足  $u^* = T_u u^* + T_e (y_d - T_s u^*)$**

**故  $u^*(t) = (I - T_u + T_e T_s)^{-1} T_e y_d(t)$**

**最后，将  $u^*$  的表达式代入  $e^*$ ， $e^*(t) = (I - T_s (I - T_u + T_e T_s)^{-1} T_e) y_d(t)$**

**证毕。**

- **注1：**  $T_u = I$ 时，零误差。此时， $u^*(t) = (T_e T_s)^{-1} T_e y_d(t) = T_s^{-1} y_d(t)$   
因此，迭代学习控制的本质是通过迭代学习逐渐构成逆系统的过程。
- **注2：**  $T_u = I$ 时，收敛条件为  $\|I - T_e T_s\| < 1$

# PID型学习律

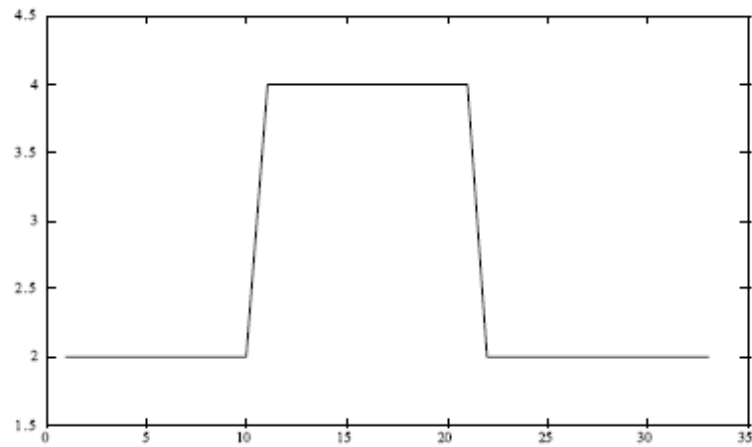
$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_P e_k(t) + \Gamma_I \int_0^t e_k(\tau) d\tau + \Gamma_D \dot{e}_k(t)$$

- 特点：
  - 算法极其简单；
  - 收敛条件与系统相对阶密切相关；
  - 收敛的充分条件中仅包含很少的系统参数，对不确定系统具有良好的鲁棒性。

# 简单例子

- 系统  $y(t+1) = -0.7y(t) - 0.012y(t-1) + u(t)$   
 $y(0) = 2$   
 $y(1) = 2$

- 期望轨迹



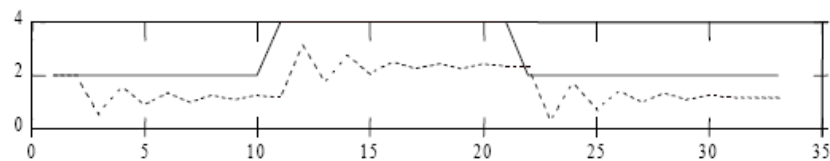
# 仿真结果

## ■ 学习律

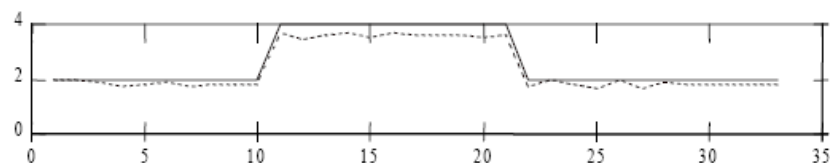
$$u_1(t) = u_0(t) + 0.5e_0(t+1)$$

## ■ a, b, c分别为第1、5、10次运行的结果;

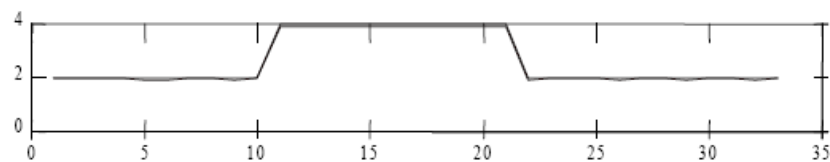
## ■ d为第10次运行的控制输入



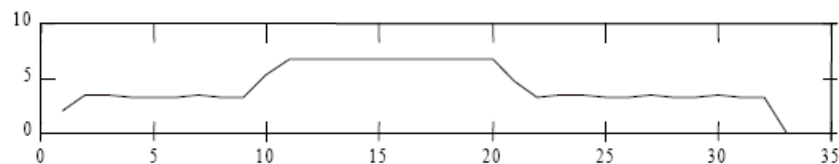
(a)



(b)



(c)



(d)

# 常用迭代学习控制律

- 开环**PID**型迭代学习控制律:

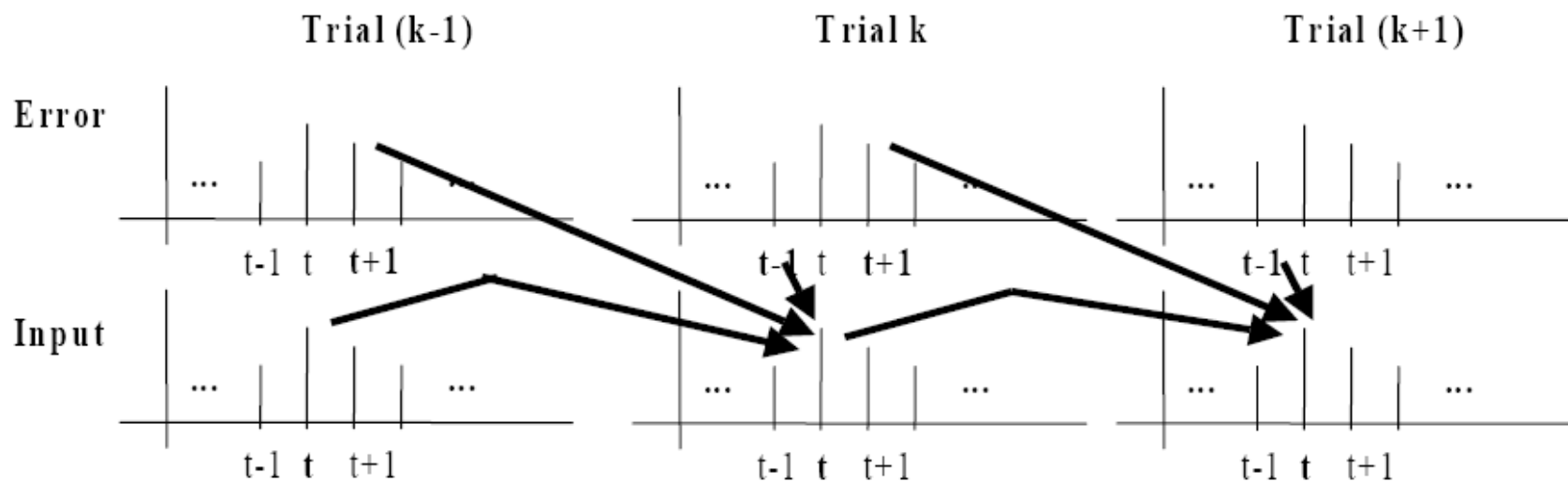
$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_P e_k(t) + \Gamma_I \int_0^t e_k(s) ds + \Gamma_D \frac{d}{dt} e_k(t)$$

- 闭环**PID**型迭代学习控制律:

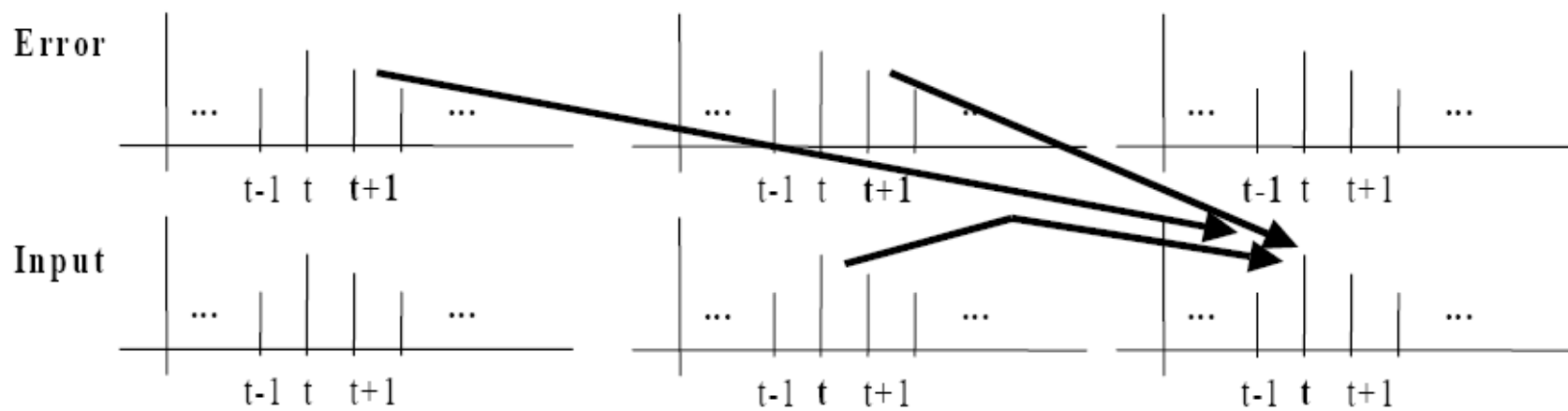
$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_P e_{k+1}(t) + \Gamma_I \int_0^t e_{k+1}(s) ds + \Gamma_D \frac{d}{dt} e_{k+1}(t)$$

- 在系统满足**Lipshitz**条件的情况下，**D**作用的参数与系统的直接输入输出项满足一定条件时，**PID**型迭代学习控制收敛。





(a) ILC with Current Cycle Feedback



(b) Higher-Order ILC

# 迭代学习控制在工业过程中的应用

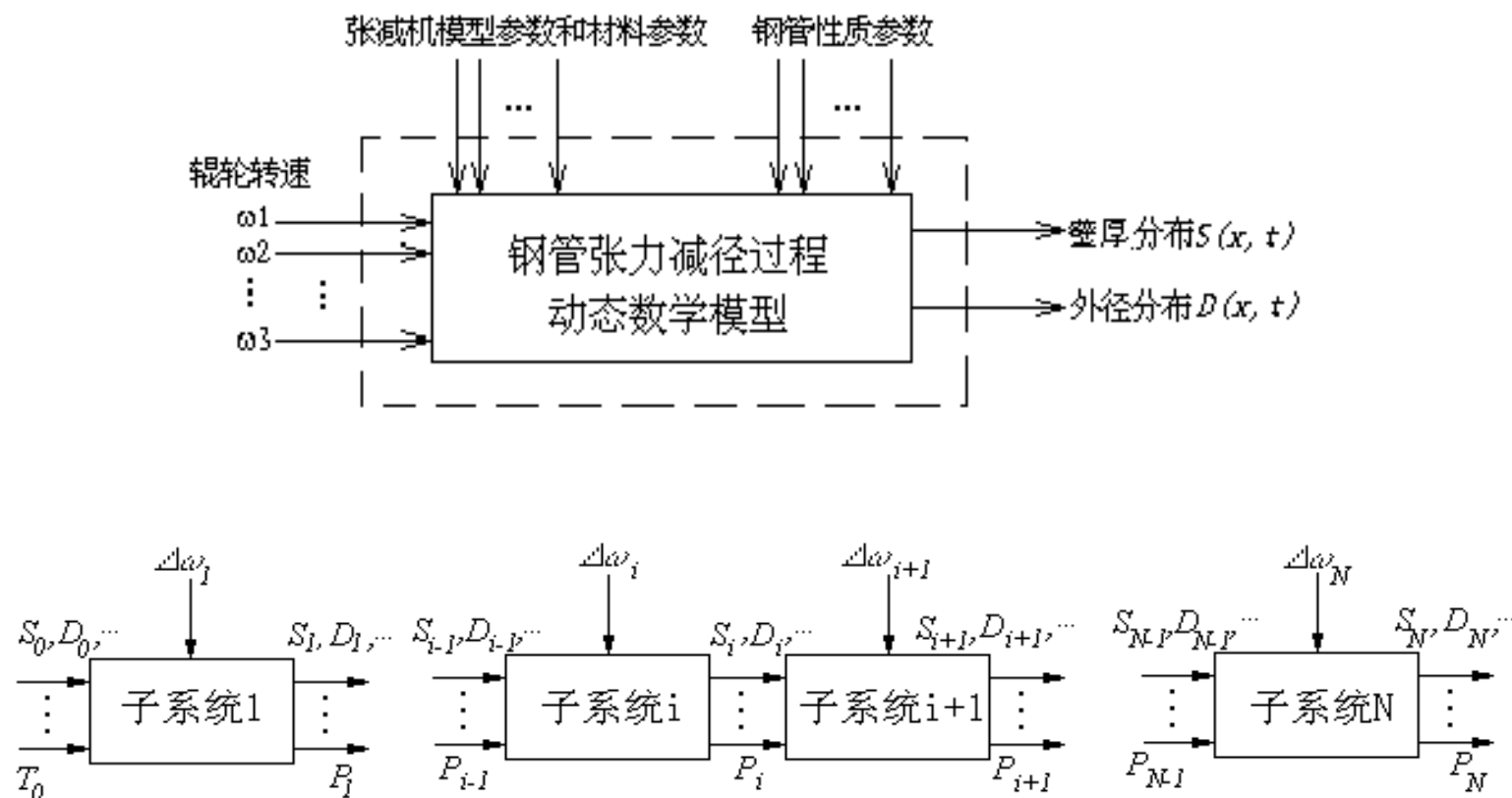
- 工业生产线上的机械手
- 数控车床
- 直线电机
- 压塑机
- 半导体晶片生产
- 过程工业中的批处理过程
- 无缝钢管轧制

# 张力减径过程

- 由多架带孔型的三辊式轧机组成，轧机相互紧靠，各轧辊的孔型预先确定；
- 不带芯棒，利用各机架轧辊转速的速差作用在钢管上所产生的张力进行减径；
- 通过调整轧辊间的转速差可以调节轧辊间的张力，从而调节轧成产品壁厚度。



# 张减过程数学模型结构



# 从系统控制观点看张减过程

- 张减过程具有高度非线性，时变性、不确定性，机理复杂，一般无法获得精确的数学模型。
- 通过对机理分析所得到的张减过程动态数学模型往往是一个多维的分布参数模型，它们的求解必须采用有限元等计算方法进行数值计算，计算量非常大，无法满足实时控制快速性的要求。
- 张减过程存在不确定的外部干扰和内部参数变化，生产节奏的快速，检测和调节手段的缺乏使传统控制手段难以应用。
- 张减过程是具有周期重复特点，可以利用前面轧制钢管的信息来调整后面轧制钢管的速度设定，这提示我们可以采用迭代学习控制技术。

# 实施迭代学习控制的可行性

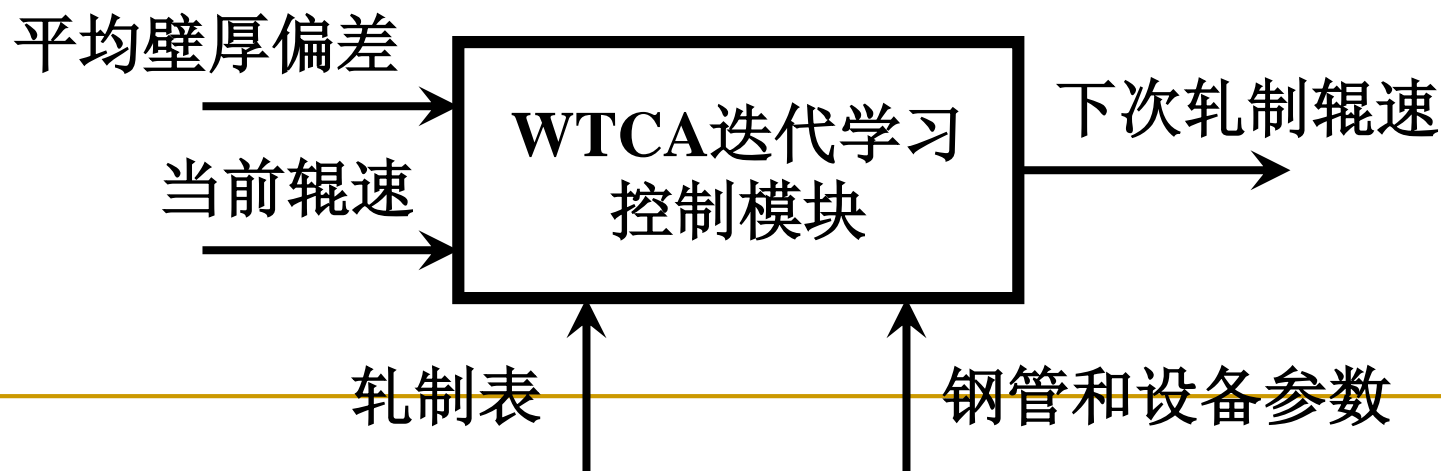
- 在张减机的入口处和出口处装有在线测厚仪，可以在线测量钢管的壁厚；
- 在张减机的轧辊电机上装有电流记录仪，可在线记录每个轧辊电机的最大、最小电流；
- 在生产中可根据钢管的在线测厚数据和轧辊的电流数据调整各轧辊的转速，从而达到调节平均壁厚的目的。

# 平均壁厚WTCA迭代学习控制

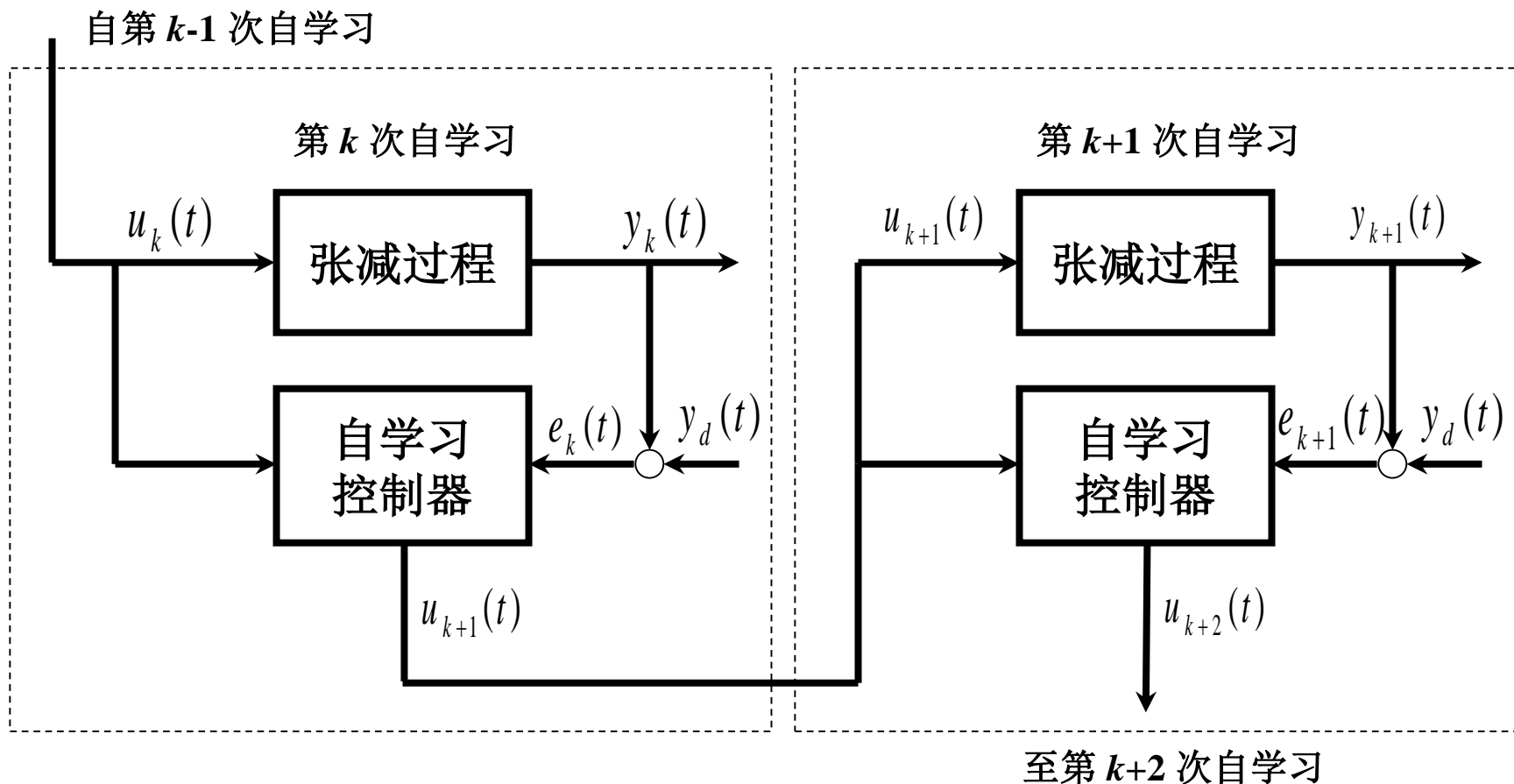
- 有 $l$ 个机架的轧辊参与平均壁厚控制的转速分布的调整

$$N^{k+1} = N^k + P e^k$$

$$e^k = s^d - s^k \quad P_i = \frac{(n_l^k - n_i^k)}{(n_l^k - n_1^k)} \cdot \frac{(D^d - s^d - s^k)}{(D^d - s^k) s^k} \cdot n_1^k$$



# 壁厚自适应控制的运行流程

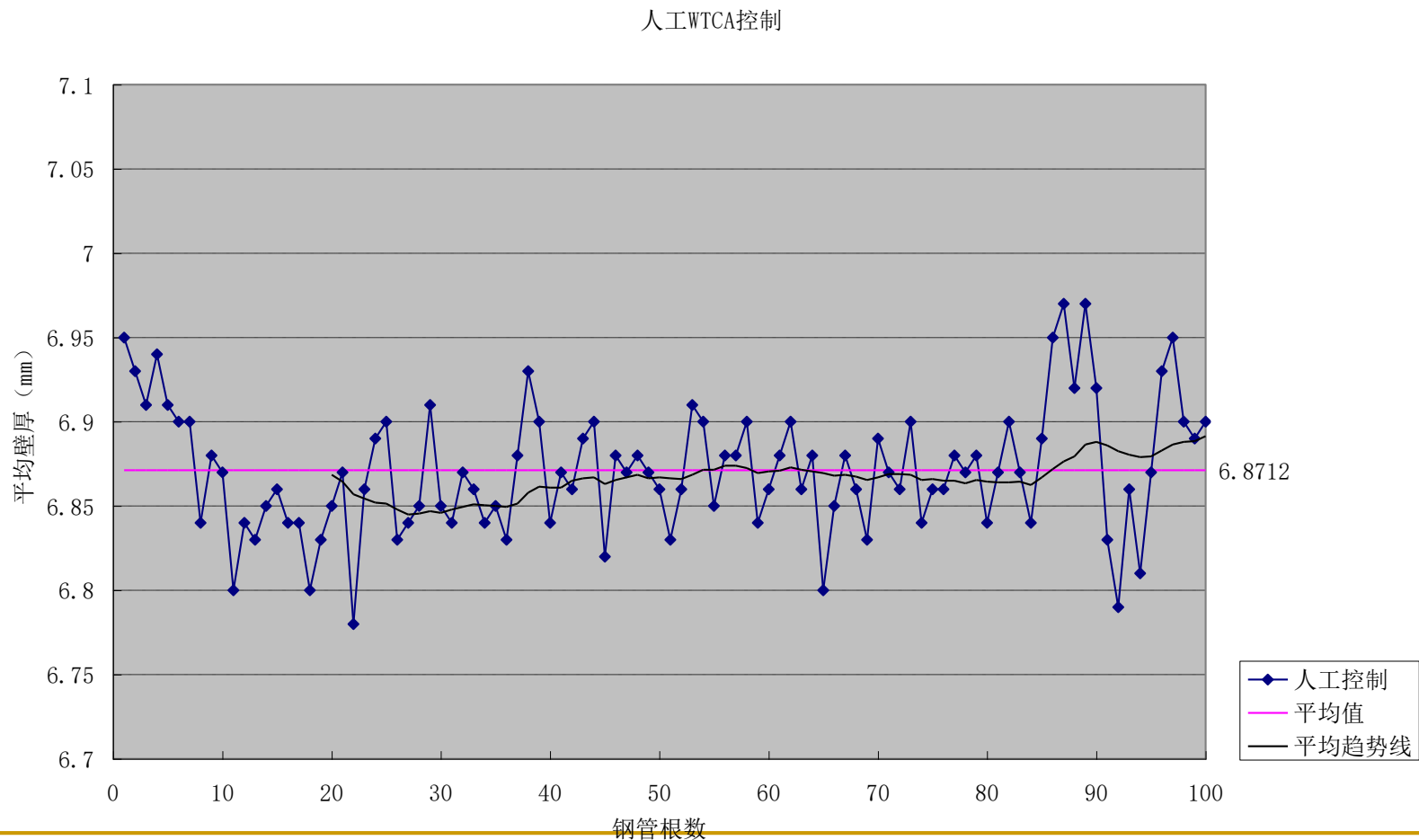




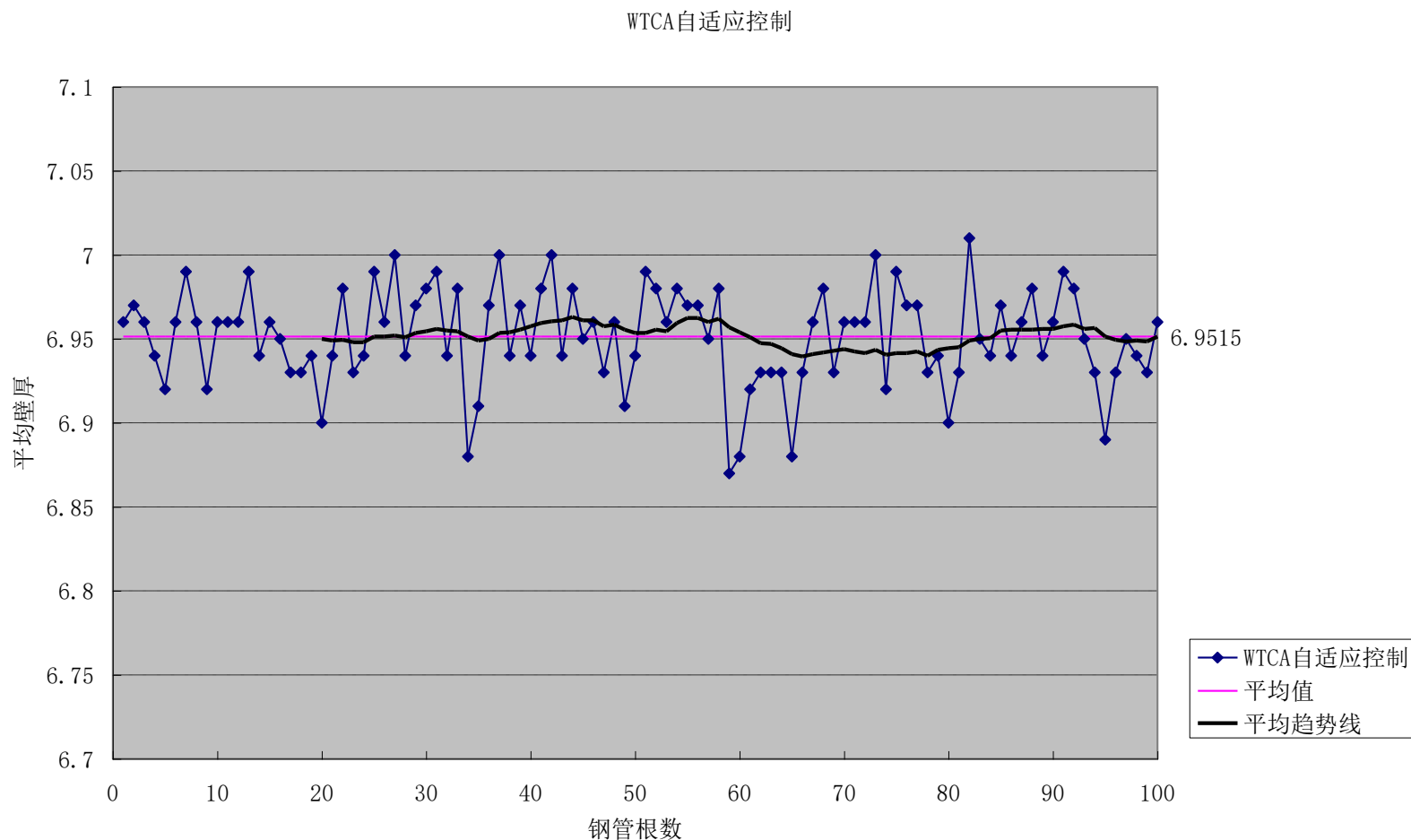
# 平均壁厚人工控制与迭代学习控制比较

规格代号	人工控制误差		学习控制误差		学习控制误差与人工控制误差比较	
	均值 (mm)	方差 (mm <sup>2</sup> )	均值 (mm)	方差 (mm <sup>2</sup> )	均值之比	方差之比
1	0.0200	0.0378	0.0035	0.0291	17.5%	77.0%
2	0.0036	0.0236	0.0080	0.0177	22.2%	75.0%
3	0.0400	0.0529	0.0060	0.0462	15.0%	87.3%
4	0.0960	0.2415	0.0130	0.1884	13.5%	78.0%
5	0.0890	0.1643	0.0090	0.1102	10.1%	67.0%

# 平均壁厚人工控制结果



# 平均壁厚迭代学习控制结果



# 平均壁厚迭代学习控制实际轧制试验结论

- 经数次（3至5次）优化后，可使钢管达到或接近目标壁厚。
- 迭代学习控制的平均壁厚的误差与人工控制相比，下降了70%以上。
- 迭代学习控制一直根据生产的实际工况进行调整，以保证所轧钢管的平均壁厚不偏离目标壁厚。
- 迭代学习控制可使钢管的实际平均壁厚跟踪目标壁厚值的改变。

## 四、重复学习控制理论

# 重复学习控制问题的提出

- 重复学习控制理论是根据生产过程控制的实际需要而提出来的控制系统设计理论。
- 针对重复性质的控制任务，在连续运行过程中，采用伺服控制对周期性外激励信号进行跟踪或抑制。
- 最初的方案来源于质子同步加速主环电源的控制。
- 对于周期性外激励信号，即使采用常规自适应控制，在信号周期性变化时，自适应的过程也发生重复性适应变化过程，导致系统的动态性能在每周期中发生相同的波动，体现为没有学习记忆功能。

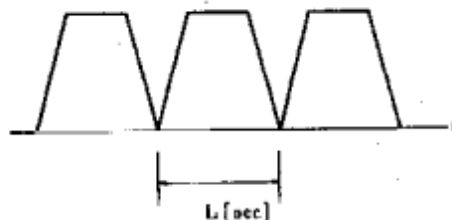
# 重复学习控制的目标及应用对象

## ■ 控制目标

- 周期为 $L$ 的任意目标信号作为跟踪信号
- 控制精度要求很高

## ■ 应用对象

- 连续运行的对象
- 重复性质的任务



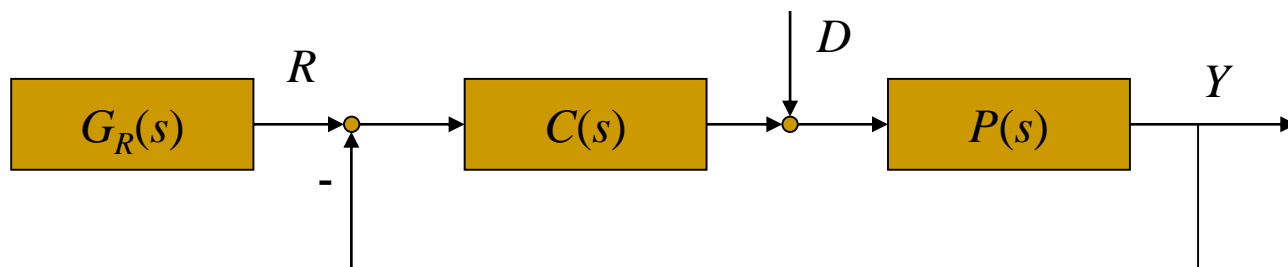
# 伺服系统设计的基本要求

- 稳定性
  - 外部稳定性
  - 内部稳定性
- 稳态特性
- 过渡过程特性
- 鲁棒性



# 内模原理

- 为构成无稳态偏差的控制系统，必须使闭环内具有对应于目标输入的补偿环节
- 内模原理：若如图的闭环系统是稳定的，则控制对象输出  $y(t)$  无稳态误差地跟踪目标输入  $r(t)$  的充分必要条件是闭环内（开环传递函数  $G(s) = P(s)C(s)$ ）包含有目标输入的产生模型  $G_R(s)$



# 一些目标信号的模型

- 阶跃信号:  $\frac{1}{s}$
- 斜坡信号:  $\frac{1}{s^2}$
- 正弦信号:  $\frac{1}{s^2 + \omega^2}$

# 构成伺服系统的条件

## ■ 要求

- 闭环系统是稳定的
- 无稳态偏差

## ■ 条件

- 在闭环内具有内部模型
- 无零极点相消，即控制对象的零点与目标输入产生模型的极点不相同

# 内模原理的应用例

- 为了使伺服控制系统在阶跃输入下达到稳定跟踪或者在阶跃扰动下达到稳定抑制，必须把积分补偿器引入闭环系统。
- 只要把积分补偿器引入系统，使其闭环系统稳定，即么就能够实现一个没有稳定误差的伺服系统。
- 根据内模原理，对于一个具有单一振荡频率 $\omega$ 的正弦输入（函数），只要把传递函数为 $1/(s^2+\omega^2)$ 的机构设置在闭环系统内作为内模即可。

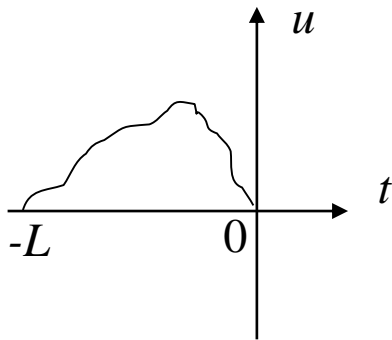
# 重复学习控制的思路

- 如果能设计出机构能产生具有固定周期  $L$  的任意周期信号，并且被设置在闭环内作为内模，则由内模原理，该控制系统能跟踪周期  $L$  的任意周期信号。

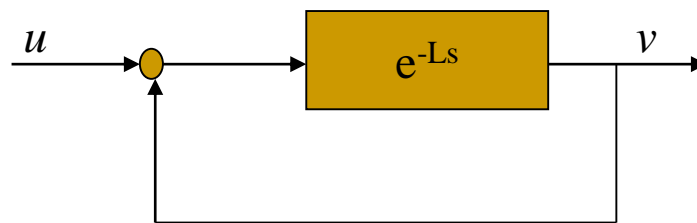
# 周期为 $L$ 的任意目标信号的产生

- 由内模原理，希望设计一个机构产生具有固定周期 $L$ 的周期信号，并且被设置在闭环内作为内模。
- 周期 $L$ 的周期信号的产生方法
  - 给出一个对应于一个周期的任意初始函数，把该函数存储起来，每隔一个周期 $L$ 就重复取出此函数。

# 周期函数发生器



原始信号



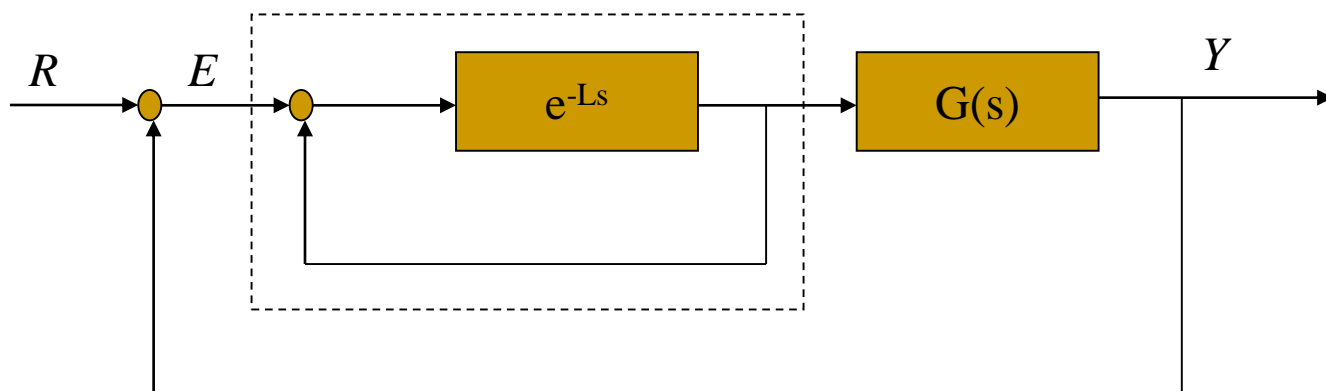
周期函数发生器

## ■ 周期函数发生器的传递函数

$$F(s) = \frac{e^{-Ls}}{1 - e^{-Ls}}$$

# 最简单的重复控制系统

- 将周期函数发生器作为内模设置在闭环内，就能构成对周期为 $L$ 的任意目标信号均为无稳态误差的伺服系统，称为重复控制系统
- 周期函数函数发生器在此称为重复补偿器



重复控制系统基本结构



# 重复控制仿真实验

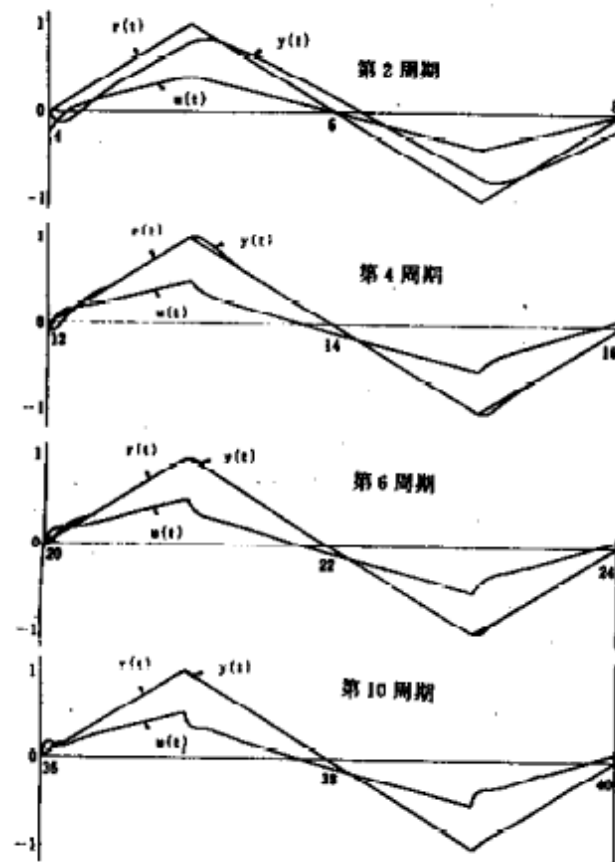
## ■ 系统方程

$$G(s) = \frac{15s + 15}{2s^2 + 20s + 15}$$

## ■ 目标输入为三角波， 初态为

$$y(0) = 0.5$$

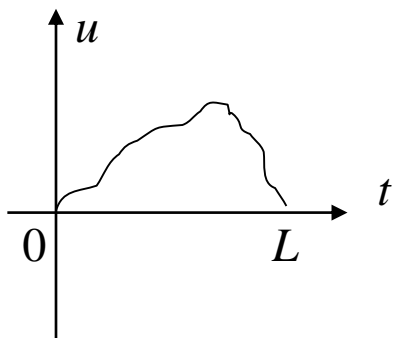
$$\dot{y}(0) = 0$$



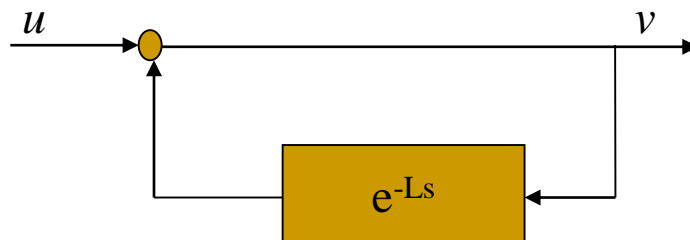
# 周期函数发生器的因果表达

## ■ 物理可实现的周期函数发生器

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ls}}$$



原始信号

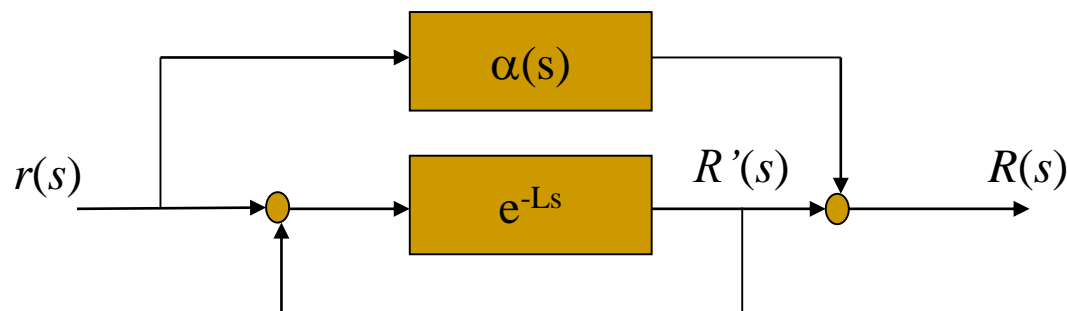


周期函数发生器

- 与原周期函数发生器相比，由于有了直接项，响应提前了一个周期

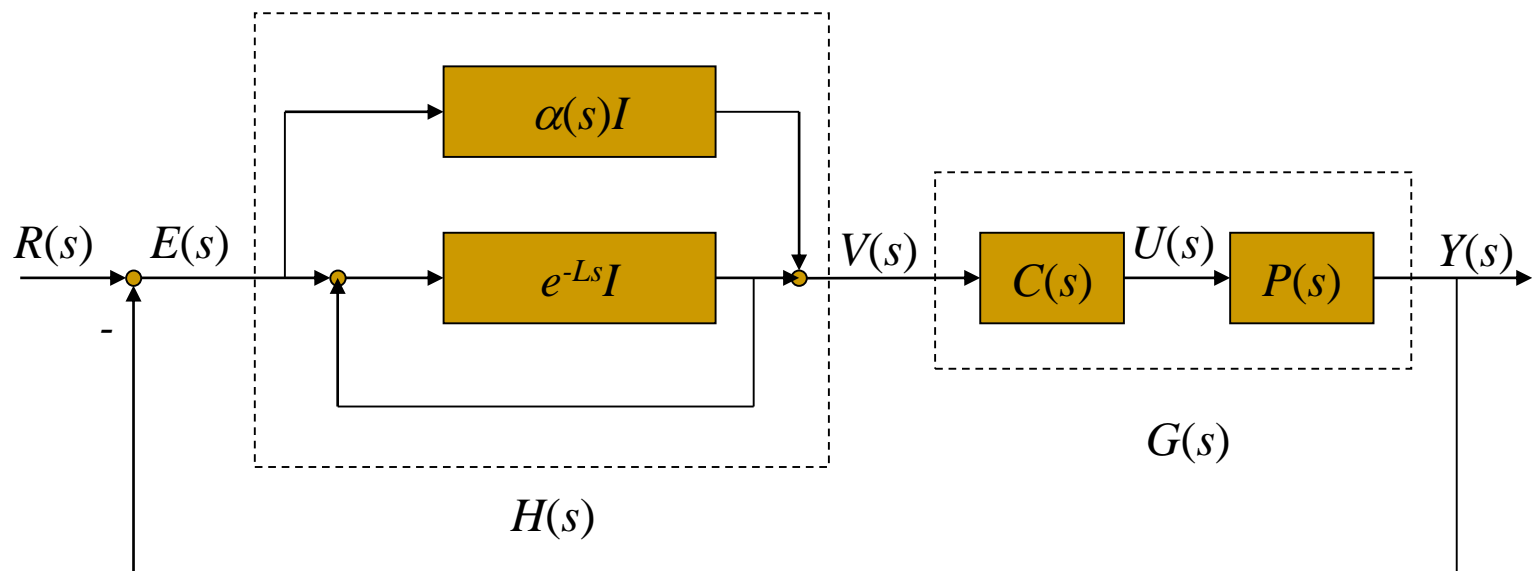
# 改善性能的重复控制器

- 由于重复控制在正反馈通道上引入了时滞，必然为系统的镇定带来了麻烦。
- 类似于 $PID$ 控制， $I$ 作用可减少稳态误差，引入 $P$ 控制可改善系统的响应快速性和稳定性。
- 在重复控制中，通过附加适当增益通道来增加控制收敛的快速性，扩大稳定范围。



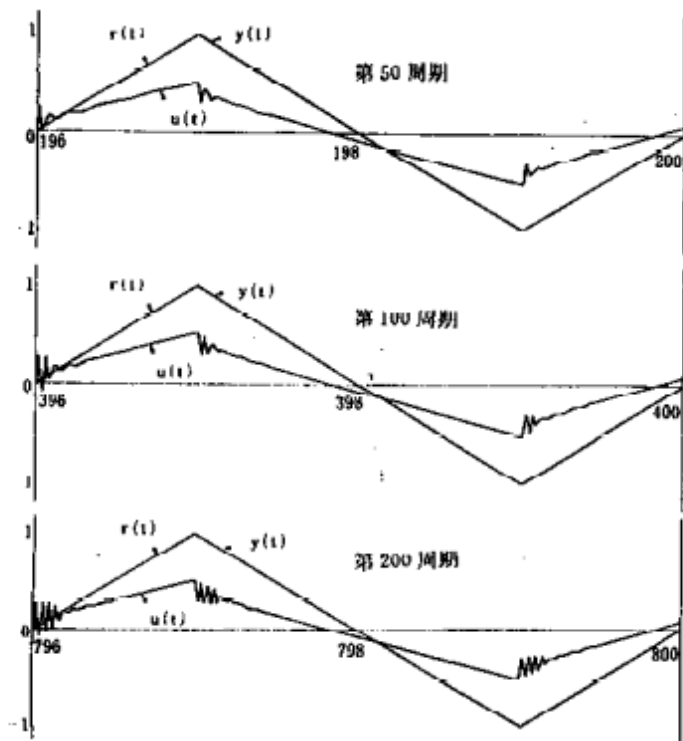
$PR$ 重复控制器

# 重复控制系统的结构

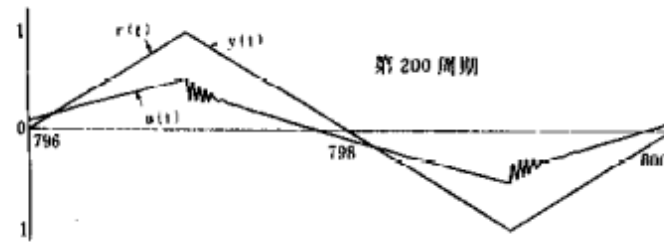


# 再次考察重复控制仿真实验

■ 初态为  $y(0) = 0.5$



• 初态为  $y(0) = 0$



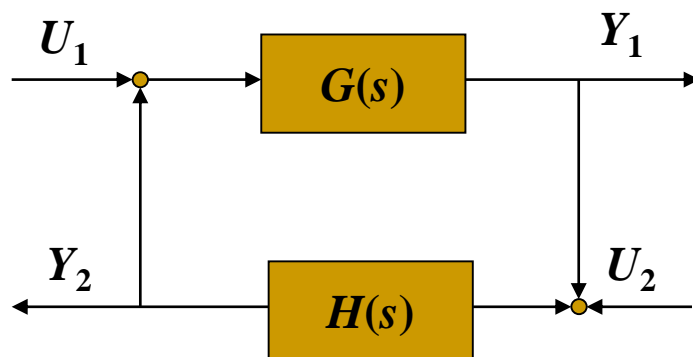
• 输出跟踪了目标输入，  
但控制输入的界不能保证。

# 小增益定理

- 考虑如图所示的闭环系统，其中 $G(s)$ 和 $H(s)$ 均是稳定的（此时闭环系统不一定稳定），如果

$$\sup_{-\infty < \omega < \infty} |G(j\omega)| |H(j\omega)| < 1$$

成立，则闭环系统稳定。

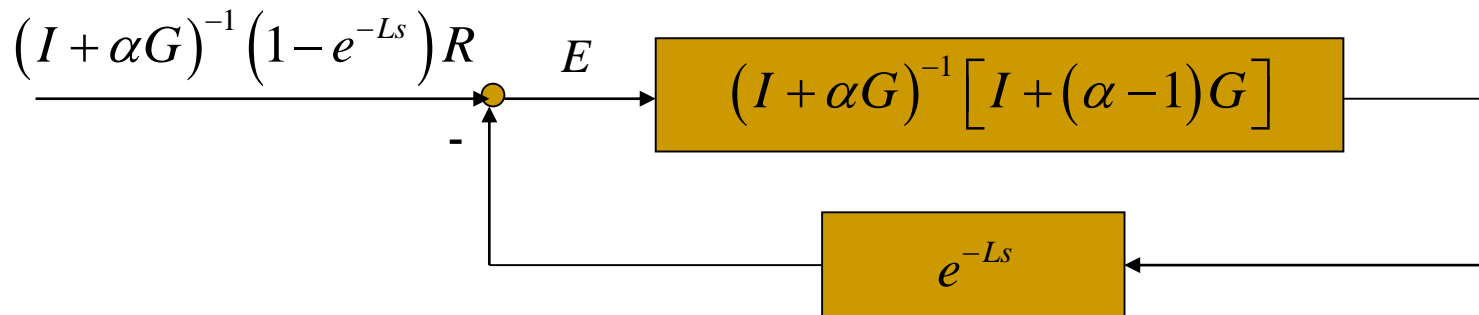


# 小增益定理讨论

- 可以推广到没有记忆的非线性系统。
- 在多变量系统的情形，只要用最大奇异值在虚轴上的上限代替无穷范数。
- 定理条件意味着在所有的频率上开环增益均小于1，故称为小增益。
- 从Bode图中可以进行分析，该条件为闭环系统稳定仅考虑幅值条件，不考虑相位条件的保守条件。
- 由于重复控制引入了时滞，是纯相位旋转，因此，对于重复控制，上述条件在高频部分接近于必要条件。
- 只能保证输入输出稳定性。

# 重复控制系统的稳定性

- 稳定性条件（输入输出稳定性）：对于任意的有界目标函数，系统的偏差是有界的。
  - $[I + \alpha(s)G(s)]^{-1} G(s)$  是稳定的有理函数矩阵；
  - 满足条件  $\|(I + \alpha G)^{-1} [I + (\alpha - 1)G]\|_{\infty} < 1$
- 若控制对象的直达项不是满秩的（此时系统严格正则），则重复控制系统不是指数渐近稳定的。





# 重复控制系统收敛条件

## ■ 收敛条件

$$\left\| (I + \alpha G)^{-1} [I + (\alpha - 1)G] \right\|_{\infty} < 1$$

## ■ 若 $\alpha(s) = 0$ , 则

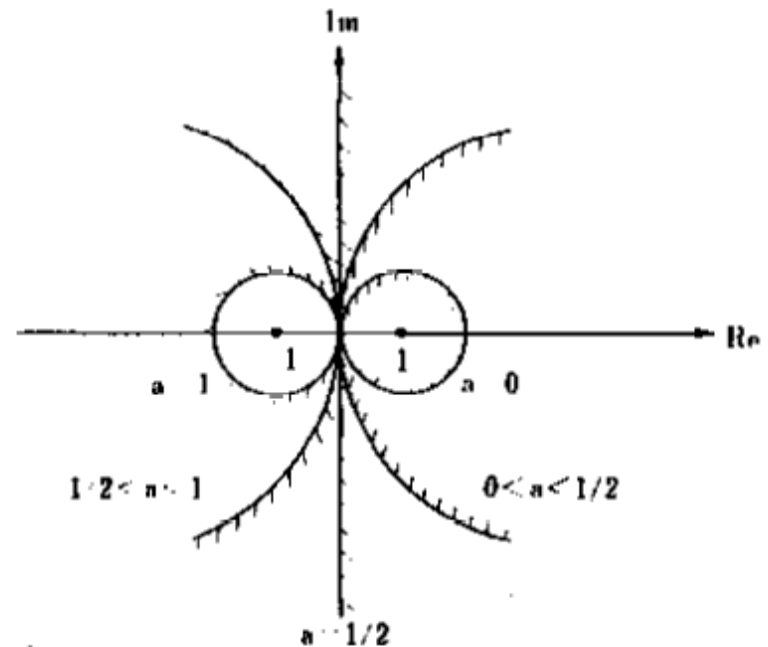
$$\|I - G\|_{\infty} < 1$$

## ■ 若 $\alpha(s) = 1$ , 则

$$\|I + G\|_{\infty} > 1$$

## ■ 若 $\alpha(s) = \frac{1}{2}$ , 则

$$\left\| \left( I + \frac{1}{2}G \right)^{-1} \left( I - \frac{1}{2}G \right) \right\|_{\infty} < 1$$



# 严格正则例子

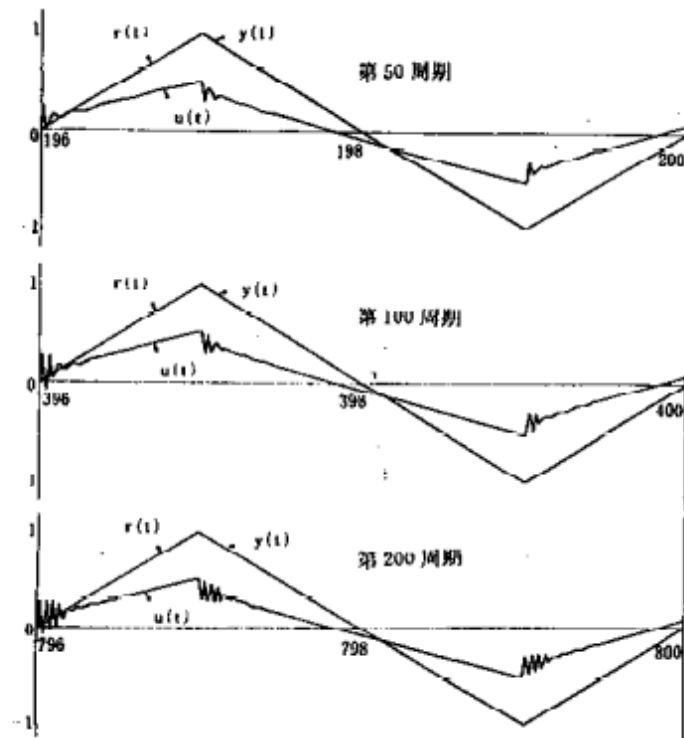
- 由于前例系统为严格正则系统

$$G(s) = \frac{15s + 15}{2s^2 + 20s + 15}$$

故系统稳定性条件不能满足

$$y(0) = 0.5$$

$$\dot{y}(0) = 0$$



# 重复控制与迭代控制的比较

## ■ 相似

- 在控制模式上具有密切关系，均着眼于有限时间内的响应
- 都利用偏差函数来更新下一次输入

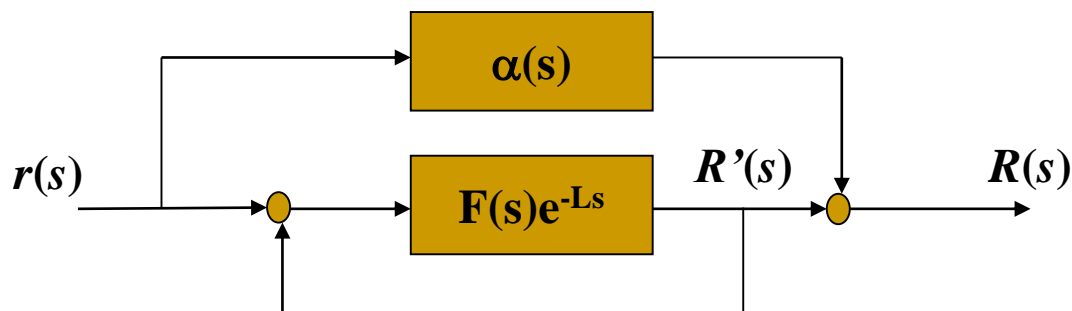
## ■ 差异

- 重复控制构成一个完全闭环系统，进行连续运行；而迭代控制每次都是独立计算，每试行一次，系统的初始条件被复原一次
- 重复控制稳定性要求高，迭代控制稳定性要求低
- 两种控制的收敛条件不同，而且用不同的方法确定
- 迭代控制可离线计算，重复控制不可离线计算
- 迭代控制要求系统不变性，重复控制仅要求跟踪信号的周期不变性

# 改进型重复学习控制的结构及稳定条件

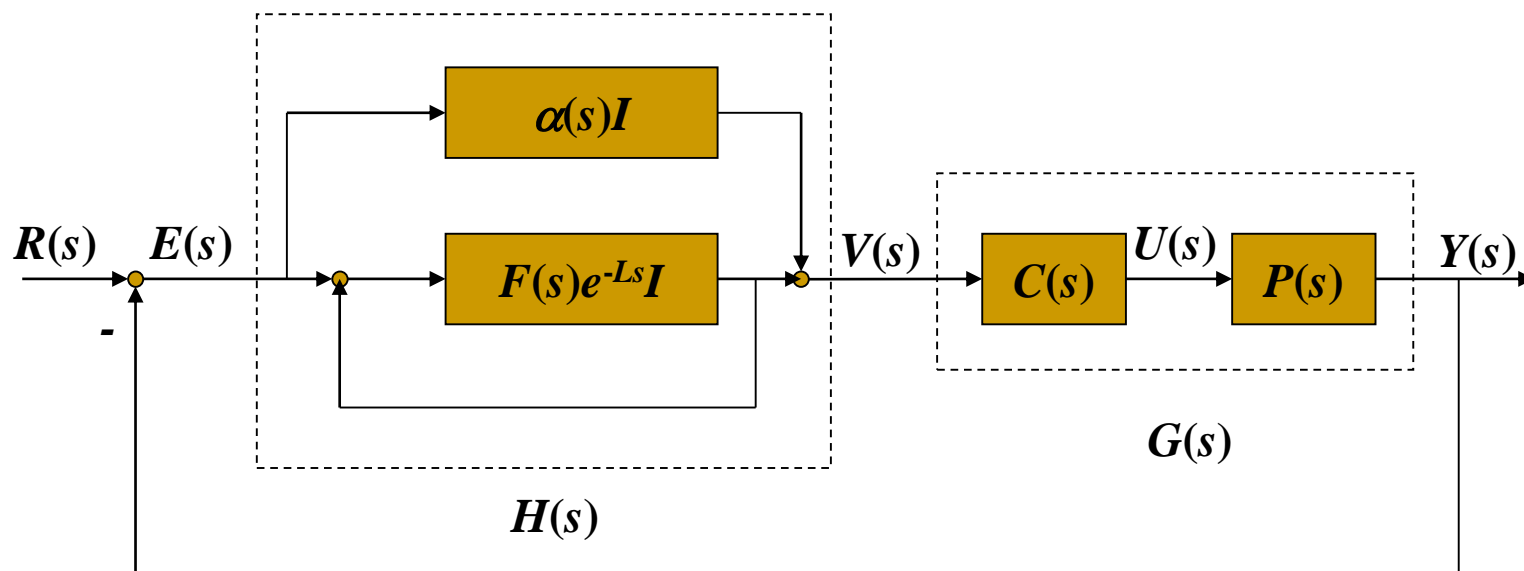
# 重复控制方案改进的思路

- 在实际系统中，通常跟踪周期函数并不需要高频成分，这一点为方案的进一步改进带来了可能。
- 针对严格正则的系统，可以考虑在时滞环节前设置低通滤波器，用来截止不需要的高频成分。
- 改进型重复控制器在时滞部分前设置了传递函数为 $F(s)$ 的低通滤波器，该滤波器要求是稳定的，但不一定是严格真的。



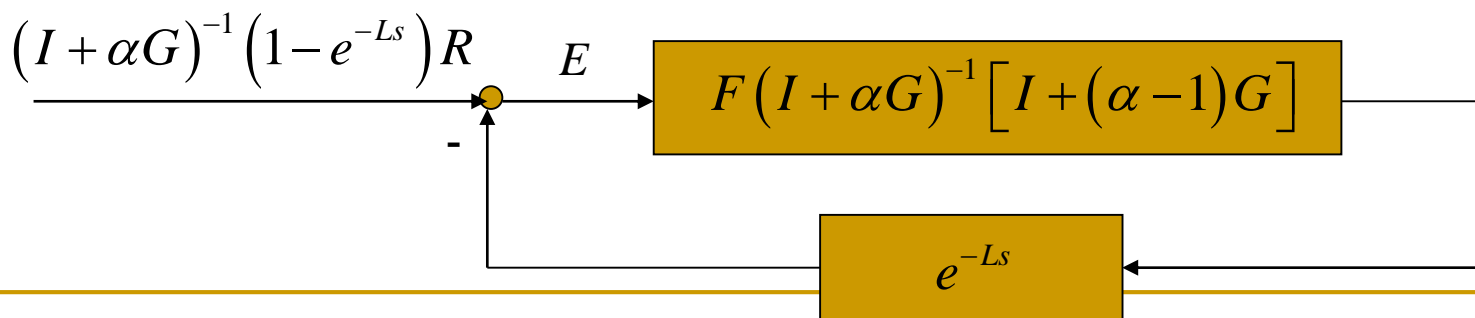
改进型重复控制器

# 改进型重复控制系统的结构



# 改进型重复控制系统的稳定性

- 稳定性条件（指数渐近稳定性）：对于任意的有界目标函数，系统的偏差是有界的且指数渐近收敛。（为达到稳定化，放弃了目标输入高频成分的跟踪）
  - $[I + \alpha(s)G(s)]^{-1} G(s)$  是稳定的有理函数矩阵；
  - 满足条件  $\|F(I + \alpha G)^{-1} [I + (\alpha - 1)G]\|_{\infty} < 1$
- 若  $F(s) = 1$ ，则偏差指数渐近收敛于0（完全跟踪）



# 改进型重复控制系统收敛条件

## ■ 收敛条件

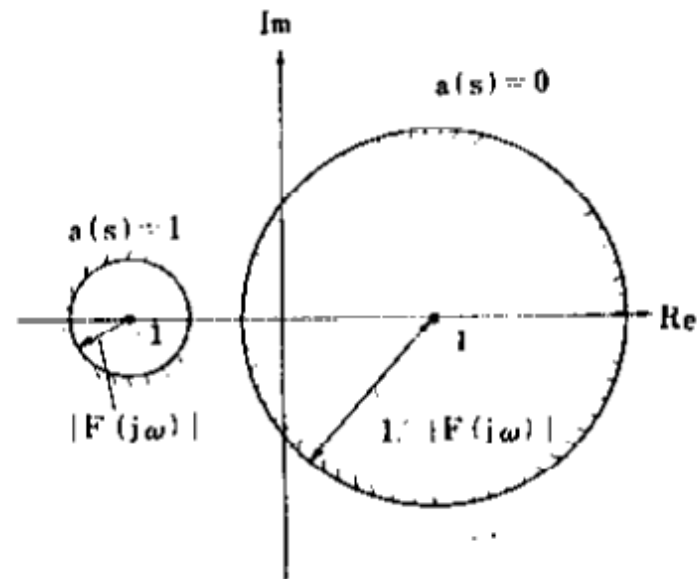
$$\left\| F(I + \alpha G)^{-1} [I + (\alpha - 1)G] \right\|_{\infty} < 1$$

## ■ 若 $\alpha(s) = 0$ ，则

$$\left| 1 - G(j\omega) \right| < \frac{1}{\left| F(j\omega) \right|}, \quad \forall \omega$$

## ■ 若 $\alpha(s) = 1$ ，则

$$\left| 1 + G(j\omega) \right| > \left| F(j\omega) \right|, \quad \forall \omega$$



- 圆半径随频率变化，提供了设计的自由度
- 通过高频段滤波器的设计，可以获得希望的稳定裕量



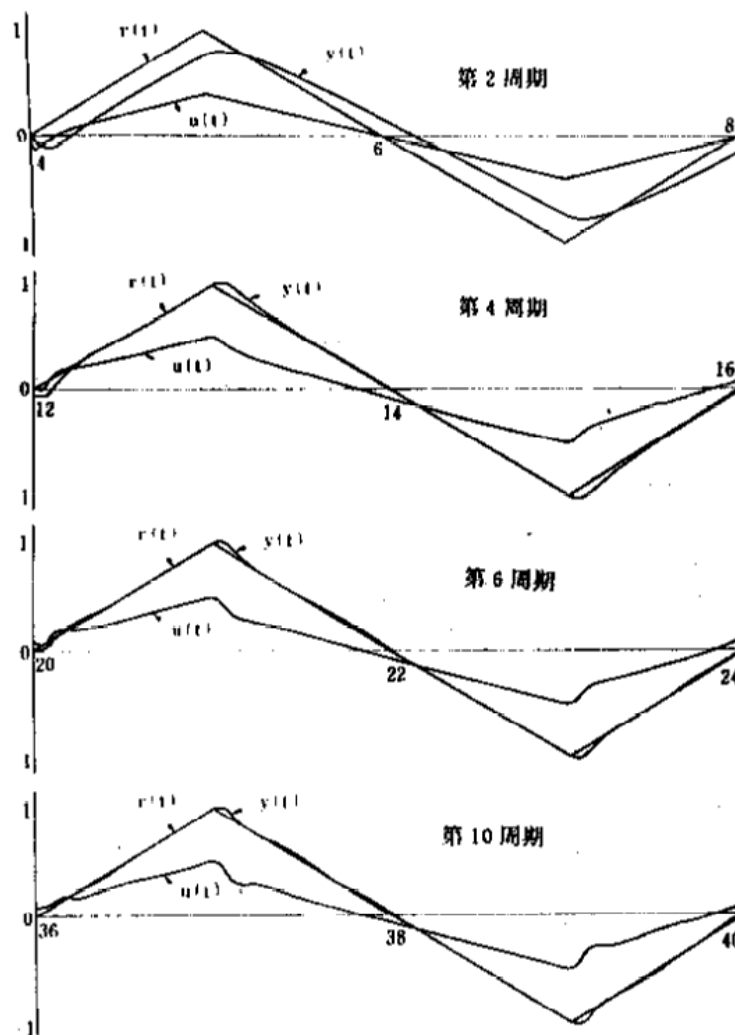
# 改进型重复控制仿真例

- 前例中引入低通滤波器

$$F(s) = \frac{1}{1 + 0.01s}$$

- 在三角波转折点之上存在稳态偏差

- 控制输入的波形非常光滑

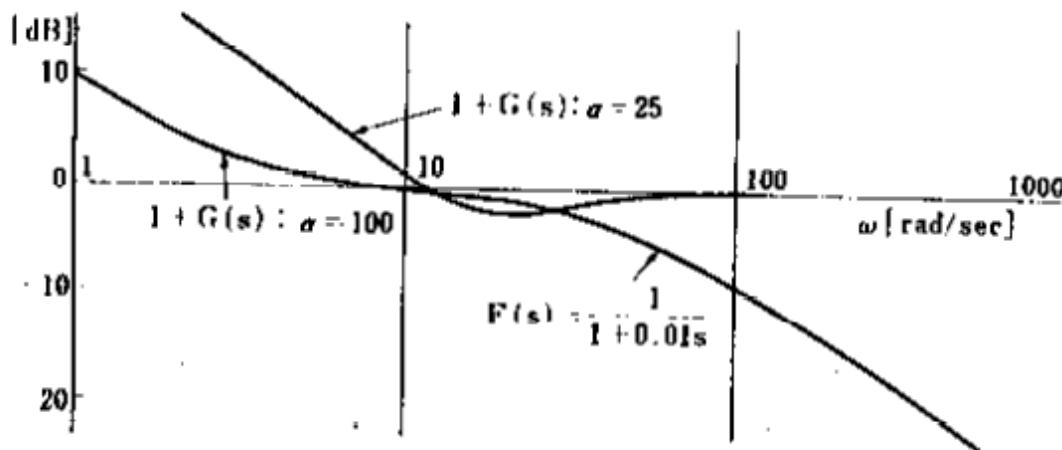


# 稳定性条件的验证例子

系统  $G(s) = \frac{300}{s(s+a)}$ ，低通滤波器  $F(s) = \frac{1}{1+0.01s}$

附加通道  $\alpha(s) = 1.0$

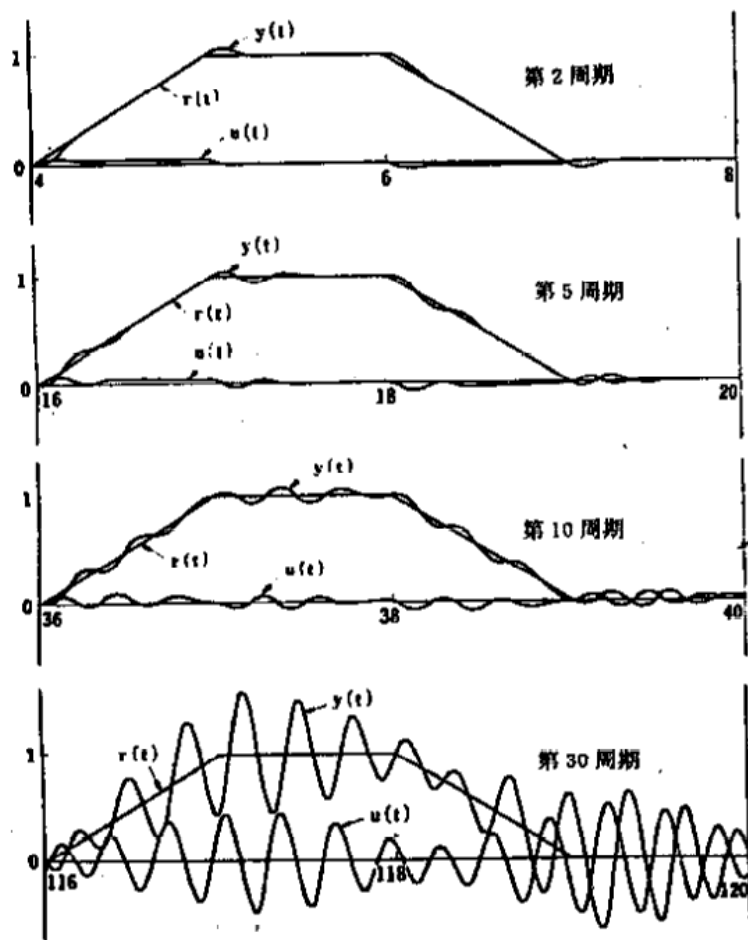
稳定性条件  $|1+G(j\omega)| > |F(j\omega)|, \forall \omega$



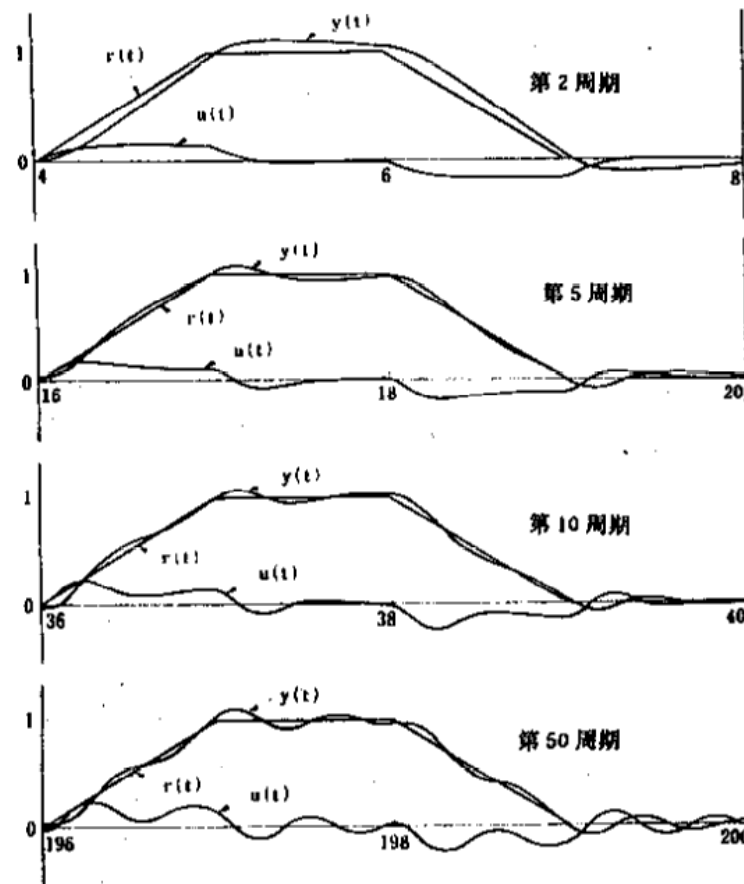
$a=25$ 、 $a=100$ 时及滤波器的Bode图

由图中判断 $a=25$ 时稳定条件不满足、 $a=100$ 时稳定条件满足

# 仿真结果



(a)  $a=25$



(b)  $a=100$

# 改进型重复控制系统偏差的讨论

- 若选择滤波器为严格真的，则闭环系统是迟后型的时滞系统，比较容易镇定。
- 通过引入滤波器来移动重复补偿器的极点以保证稳定性条件成立。
- 引入的滤波器破坏了内模原理的条件，因此，即使镇定了闭环系统，一般也存在稳态误差。
- 在不引入滤波器的严格意义上的重复控制系统，只有控制对象不存在直达项时才不能稳定化。
- 改进型重复控制系统的设计存在跟踪性能和稳定性之间的折衷处理。

# 滤波器的选择

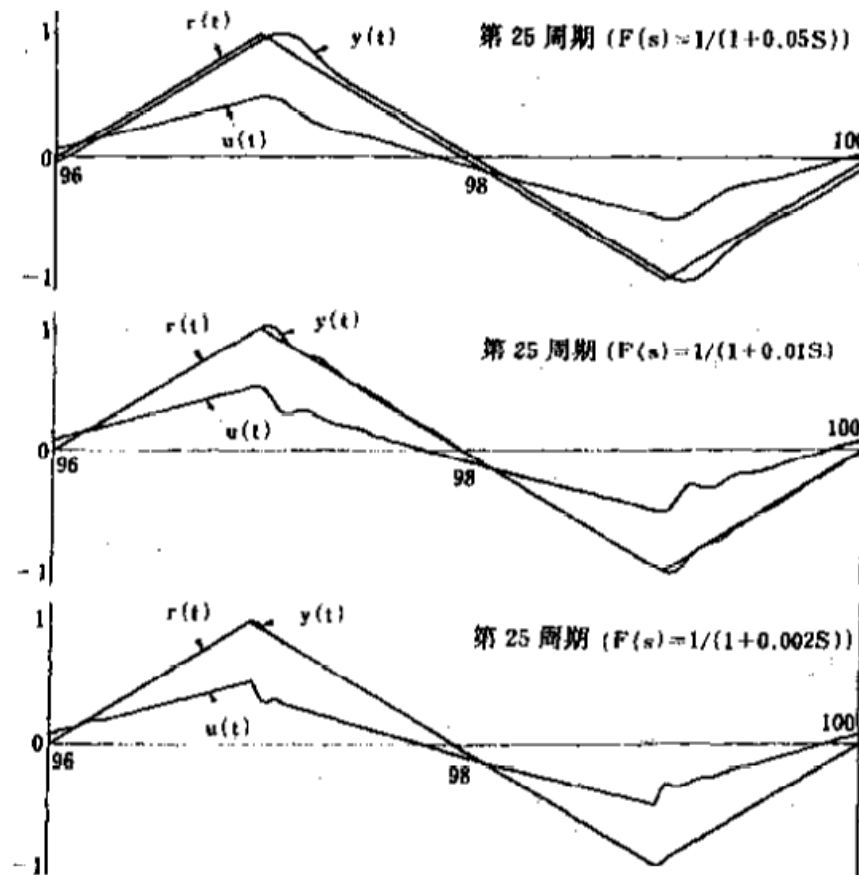
- 跟踪性能和稳定性之间的折衷处理需要通过滤波器的选择实现。
- 一般地希望滤波器在重要的低频段成分上尽量接近于1，并尽量抑制在剪切频率以上的不必要的高频成分。
- 针对实际情况，可以根据目标信号的频率成分决定低通滤波器，在保证系统稳定性的条件下，尽量增大剪切频率。

# 滤波器与稳态跟踪特性间的关系

■ 例  $F(s) = \frac{1}{1 + 0.01s}$

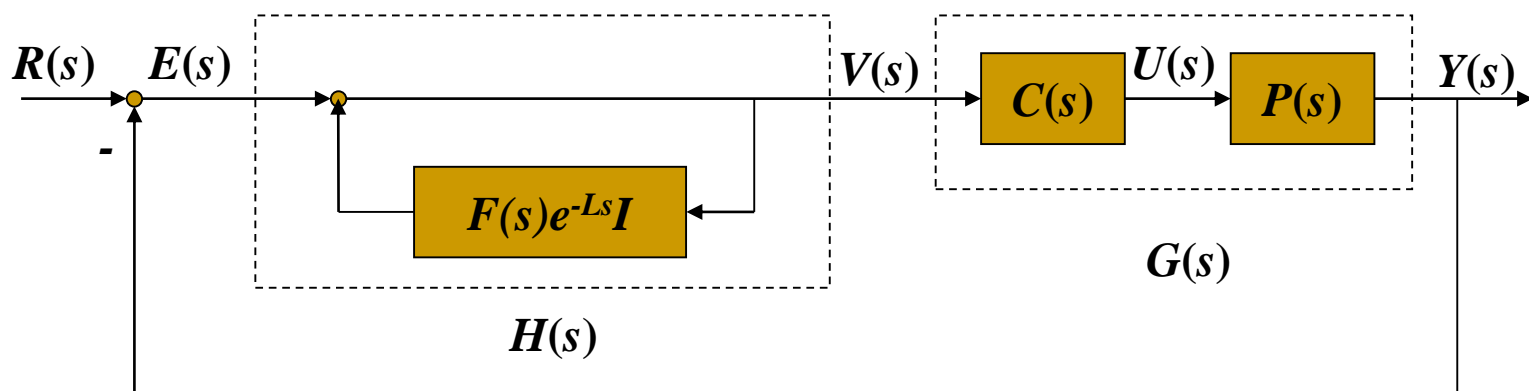
$\tau = 0.05, 0.01, 0.002$

- $\tau$  越小,  $F(s)$  越接近 1,  
跟踪范围越大, 稳态偏差越小



# 改进型重复控制系统的设计方法

- 考虑  $\alpha(s)=1$ ，稳定条件为  $|1 + G(j\omega)| > |F(j\omega)|, \quad \forall \omega$



- 根据常规控制器和滤波器的设计顺序，可以有两类设计步骤

# 改进型重复控制系统的设计方法

## ■ 设计步骤1（先设计C(s)，后设计F(s)）

- 1、决定补偿器C(s)，使  $|1+G(j\omega)|$  在剪切频率限定的跟踪范围  $\Omega_t := \{\omega: \omega \leq \omega_t\}$  上大于1，即满足

$$|1+G(j\omega)| > 1, \quad \forall \omega \in \Omega_t$$

- 2、决定滤波器F(s)，在Bode图上绘出  $|1+G(j\omega)|$  并使  $|F(j\omega)|$  位于其下方，即满足条件

$$|1+G(j\omega)| > |F(j\omega)|, \quad \forall \omega$$

要求

$$F(j\omega) \approx 1, \quad \forall \omega \in \Omega_t$$

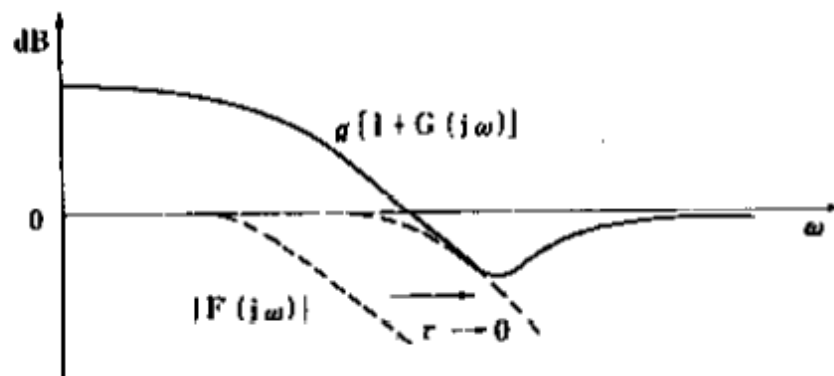


# 改进型重复控制系统的性能

- 若 $F(s)=0$ ，则改进型重复控制系统即退化为一般的控制系统，因此，改进型重复控制系统的各种特性均比常规控制系统特性要好。
- 改进型重复控制系统可以认为是一般控制系统的偏差端加进一个周期前的信息，此时，一般控制系统的特性越好，得到重复控制系统的特性也越好。

# 设计步骤中需考虑的方面

- 一般地，扩大跟踪范围与保证鲁棒稳定性存在折衷关系，因此必须在设计上考虑这两个方面。
  - 如果扩大跟踪范围（改善灵敏度特性），则一般控制系统中会恶化系统鲁棒稳定性。
  - 如果扩大滤波器的频率范围，则稳定裕量将变小。



设计步骤中滤波器的决定方法

# 改进型重复控制系统的设计方法

## ■ 设计步骤2（先设计 $F(s)$ ，后设计 $C(s)$ ）

- 1、决定滤波器 $F(s)$ ，使  $F(j\omega)$  在剪切频率限定的跟踪范围  $\Omega_t := \{\omega : \omega \leq \omega_t\}$  上满足

$$F(j\omega) \approx 1, \quad \forall \omega \in \Omega_t$$

- 2、决定补偿器 $C(s)$ ，使满足条件

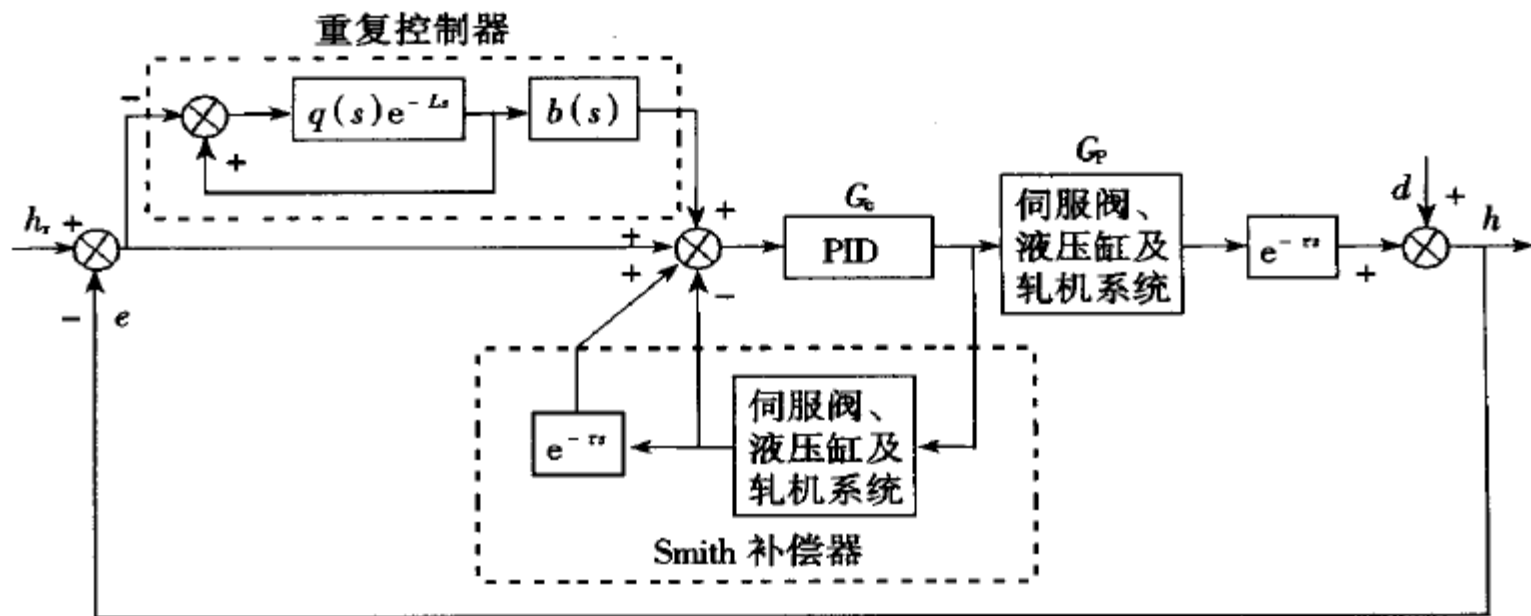
$$|1 + G(j\omega)| > |F(j\omega)|, \quad \forall \omega$$

# 重复学习控制的应用例子

# 基于重复控制的冷轧带钢厚度控制系统

- 厚度精度是衡量板带材产品质量的重要技术指标之一。
- 带钢轧制是一个复杂的非线性过程,带钢原料性质、处理量变化等也会导致过程模型发生变化。
- 轧辊偏心是高精度冷轧机厚度控制不能忽视的问题。轧辊偏心对厚度影响体现在以下两个方面:
  - 辊缝的周期性变化造成带钢厚度的周期性变动;
  - 使常规厚度控制系统的调节质量恶化。
- 可采用重复控制进行偏心补偿。

# 厚度控制系统的结构



# 轧机的数学模型

- 轧机对象由伺服阀、液压缸和轧机系统及检测滞后组成。包括厚度动态模型、厚度执行结构和厚度检测三个部分，可以用一个一阶系统模拟，用如下函数描述：

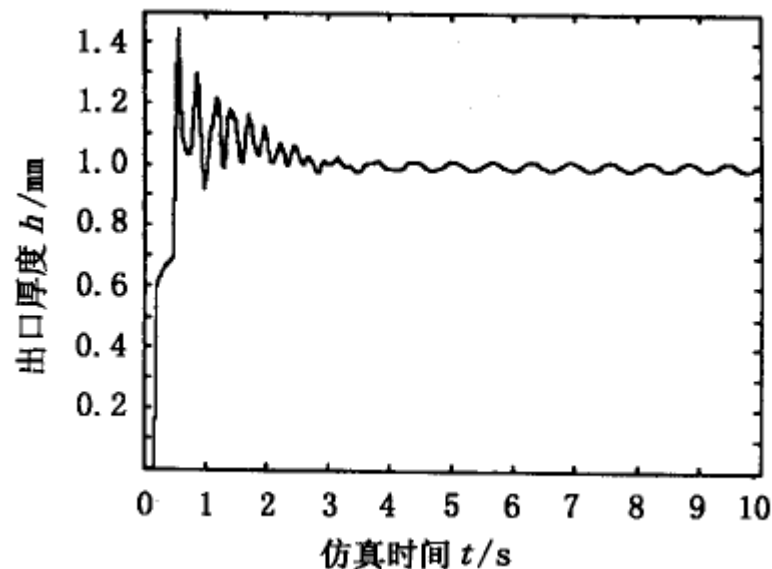
$$G_p(s) = \frac{K_s C_p}{C_p + Q} \cdot \frac{e^{-Ls}}{Ts + 1}$$

- $C_p$ 和 $Q$ 分别为轧机纵向刚度系数和轧件塑性系数， $K_s$ 、 $T$ 分别为放大系数和惯性时间常数。

# 系统仿真

轧机基本参数为：

- 轧机入口厚度1.5mm
- 出口厚度1mm
- $C_p=4700\text{kN/mm}$
- $Q=1\,931\text{ kN/mm}$
- 轧制速度5 m/s
- 测厚仪到轧机中心线1.8m
- 厚度检测滞后时间 $\tau=0.36\text{s}$
- 液压压下装置 $K_s=1$ ， $T=0.05\text{s}$
- 采样时间 $T_s=1\text{ ms}$





- 简单的东西总是好的，繁琐的东西是不能用的。  
***Complex theories do not work, simple algorithms do.***
- 没有什么比一个好的理论更实用了。  
***Nothing is more practical than a good theory.***