

# Assignment2

PhilFan

2023 年 7 月 4 日

# 目录

1 不可压缩 Navier-Stokes 方程	1
2 计算域、交错网格和边界条件	3

## 1 不可压缩 Navier-Stokes 方程

二维不可压缩流体的流场完全由速度向量  $q = (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$  和压力  $p(x, y) \in \mathbb{R}$  描述。这些函数是以下守恒定律的解 [1]:

- 质量守恒:

$$\operatorname{div}(q) = 0, \quad (1.1)$$

或者用散度算子<sup>1</sup> 的显式形式表示为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- 动量守恒方程的紧凑形式<sup>2</sup>:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div}(q \otimes q) = -\mathcal{G}p + \frac{1}{Re}\Delta q \quad (1.2)$$

或者显式形式为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases} \quad (1.3)$$

上述方程是以无量纲形式书写的, 使用以下缩放变量:

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{L}, u = \frac{u^*}{V_0}, v = \frac{v^*}{V_0}, t = \frac{t^*}{L/V_0}, p = \frac{p^*}{\rho_0 V_0^2} \quad (1.4)$$

其中上标 (\*) 表示以物理单位测量的变量。常数  $L$  和  $V_0$  分别是表征模拟流动的参考长度和速度。维数无关数  $Re$  称为雷诺数, 用于量化流动中惯性项 (或对流项) 和粘性项 (或扩散项) 之间的相对重要性<sup>3</sup>:

<sup>1</sup>这里我们回顾一下二维场中  $\nabla$  散度、梯度和拉普拉斯算子的定义: y 如果  $v = (v_x, v_y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  则

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \mathcal{G}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \text{ and } \Delta v = (\Delta v_x, \Delta v_y).$$

<sup>2</sup>我们用  $\otimes$  表示张量积。

<sup>3</sup>在第一章中讨论了描述对流和扩散现象的模型标量方程。

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad (1.5)$$

其中  $\nu$  是流体的运动粘度。

总结来看, 在这个项目中将通过数值方法求解的 Navier-Stokes PDE 系统由定义; 初始条件 ( $t = 0$ ) 时和边界条件将在下面的部分讨论。

## 2 计算域、交错网格和边界条件

通过考虑一个带周期边界条件的矩形域  $L_x \times L_y$  (见1)，数值求解 Navier-Stokes 方程大大简化了。速度  $q(x, y)$  和压力  $p(x, y)$  在整个区域上的周期性可以数学地表示为：

$$\begin{aligned} q(0, y) &= q(L_x, y), p(0, y) = p(L_x, y), \forall y \in [0, L_y] \\ q(x, 0) &= q(x, L_y), p(x, 0) = p(x, L_y), \forall x \in [0, L_x] \end{aligned} \quad (2.1)$$

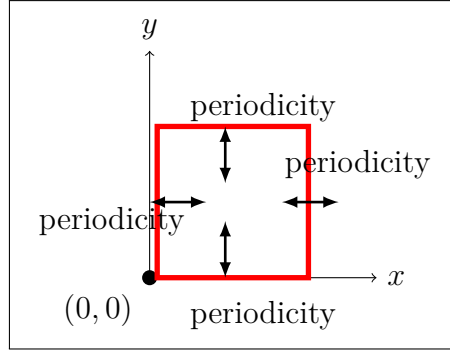


图 1: Pic1

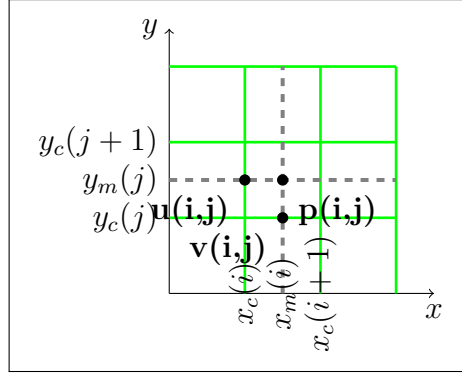


图 2: Pic2

解将被计算的点按照矩形均匀的二维网格分布在域中。由于不是所有变量在我们的方法中共享相同的网格，我们首先定义一个主要网格（见2，

沿着  $x$  方向取  $n_x$  个计算点, 沿着  $y$  方向取  $n_y$  个计算点:

$$\begin{aligned} x_c(i) &= (i-1)\delta x, & \delta x &= \frac{L_x}{n_x-1}, & i &= 1, \dots, n_x \\ y_c(j) &= (j-1)\delta y, & \delta y &= \frac{L_y}{n_y-1}, & j &= 1, \dots, n_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

次要网格由主要网格单元的中心定义:

$$\begin{aligned} x_m(i) &= (i-1/2)\delta x, & i &= 1, \dots, n_{xm}, \\ y_m(j) &= (j-1/2)\delta y, & j &= 1, \dots, n_{ym}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中我们使用了简写符号  $n_{xm} = n_x - 1$ ,  $n_{ym} = n_y - 1$ 。在计算单元内部, 定义为矩形区域  $[x_c(i), x_c(i+1)] \times [y_c(j), y_c(j+1)]$ , 未知变量  $u$ 、 $v$ 、 $p$  将作为在不同空间位置的解的近似值计算:

- $u(i, j) \approx u(x_c(i), y_m(j))$  (单元的西侧面),
- $v(i, j) \approx v(x_m(i), y_c(j))$  (单元的南侧面),
- $p(i, j) \approx p(x_m(i), y_m(j))$  (单元的中心)。

这种交错排列的变量排列具有压力和速度之间强耦合的优点。它还有助于避免在共位排列 (所有变量都在相同的网格点上计算) 中遇到的稳定性和收敛性问题 (参见本章末尾的参考文献)。

## 参考文献

- [1] Ionut Danaila, Pascal Joly, Sidi Mahmoud Kaber, and Marie Postel. An introduction to scientific computing. 2007.