Assignment2

PhilFan

2023 年 7 月 4 日

目录

1 不可压缩 Navier-Stokes 方程

二维不可压缩流体的流场完全由速度向量 $q = (u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$ 和压力 $p(x,y) \in \mathbb{R}$ 描述。这些函数是以下守恒定律的解 [1]：

- 质量守恒：

$$div(q) = 0, \tag{1.1}$$

或者用散度算子[1] 的显式形式表示为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- 动量守恒方程的紧凑形式[2]：

$$\frac{\partial q}{\partial t} + div(q \otimes q) = -\mathscr{G}p + \frac{1}{Re}\Delta q \tag{1.2}$$

或者显式形式为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x} + \dfrac{\partial uv}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{Re}(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial uv}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{1}{Re}(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \end{cases} \tag{1.3}$$

上述方程是以无量纲形式书写的，使用以下缩放变量：

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{L}, u = \frac{u^*}{V_0}, v = \frac{v^*}{V_0}, t = \frac{t^*}{L/V_0}, p = \frac{p^*}{\rho_0 V_0^2} \tag{1.4}$$

其中上标 $(*)$ 表示以物理单位测量的变量。常数 L 和 V_0 分别是表征模拟流动的参考长度和速度。维数无关数 Re 称为雷诺数，用于量化流动中惯性项（或对流项）和粘性项（或扩散项）之间的相对重要性[3]：

[1]这里我们回顾一下二维场中 v 散度、梯度和拉普拉斯算子的定义：y 如果 $v = (v_x, v_y) : \mathbb{R}^{\nvDash} \mapsto \mathbb{R}^{\nvDash}$,$\varphi : \mathbb{R}^{\nvDash} \mapsto \mathbb{R}$ 则

$$div(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \mathscr{G}_\varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}), \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, and \quad \Delta v = (\Delta v_x, \Delta v_y).$$

[2]我们用 $\otimes$ 表示张量积。

[3]在第一章中讨论了描述对流和扩散现象的模型标量方程。

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \tag{1.5}$$

其中 ν 是流体的运动粘度。

总结来看，在这个项目中将通过数值方法求解的 Navier-Stokes PDE 系统由定义；初始条件 $(t = 0)$ 时和边界条件将在下面的部分讨论。

2 计算域、交错网格和边界条件

通过考虑一个带周期边界条件的矩形域 $L_x \times L_y$（见图 12.1），数值求解 Navier-Stokes 方程大大简化了。速度 $q(x, y)$ 和压力 $p(x, y)$ 在整个区域上的周期性可以数学地表示为：

$$\begin{aligned} &q(0,y)=q(L_x,y), p(0,y)=p(L_x,y), \forall y \in [0,L_y] \\ &q(x,0)=q(x,L_y), p(x,0)=p(x,L_y), \forall x \in [0,L_x] \end{aligned} \tag{2.1}$$

解将被计算的点按照矩形均匀的二维网格分布在域中。由于不是所有变量在我们的方法中共享相同的网格，我们首先定义一个主要网格（见图 12.1），沿着 x 方向取 n_x 个计算点，沿着 y 方向取 n_y 个计算点：

$$\begin{aligned} x_c(i) &= (i-1)\delta x, \quad \delta x = \frac{L_x}{n_x - 1}, \quad i = 1, ..., n_x \\ y_c(j) &= (j-1)\delta y, \quad \delta y = \frac{L_y}{n_y - 1}, \quad j = 1, ..., n_y \end{aligned} \tag{2.2}$$

次要网格由主要网格单元的中心定义：

$$\begin{aligned} x_m(i) &= (i-1/2)\delta x, \quad i = 1, ..., n_{xm}, \\ y_m(j) &= (j-1/2)\delta y, \quad j = 1, ..., n_{ym}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中我们使用了简写符号 $n_{xm} = n_x - 1$，$n_{ym} = n_y - 1$。在计算单元内部，定义为矩形区域 $[x_c(i), x_c(i+1)] \times [y_c(j), y_c(j+1)]$，未知变量 u、v、p 将作为在不同空间位置的解的近似值计算：

- $u(i,j) \approx u(x_c(i), y_m(j))$（单元的西侧面），
- $v(i,j) \approx v(x_m(i), y_c(j))$（单元的南侧面），
- $p(i,j) \approx p(x_m(i), y_m(j))$（单元的中心）。

这种交错排列的变量排列具有压力和速度之间强耦合的优点。它还有助于避免在共位排列（所有变量都在相同的网格点上计算）中遇到的稳定性和收敛性问题（参见本章末尾的参考文献）。

参考文献

[1] Ionut Danaila, Pascal Joly, Sidi Mahmoud Kaber, and Marie Postel. An introduction to scientific computing. 2007.