Devoir numérique

par

Guillaume Vollant-Boulé (111 158 968)
guillaume.vollant-boule.1@ulaval.ca

&

Philippe Carpentier-Savard (111 144 169)
philippe.carpentier-savard.1@ulaval.ca

Travail remis au Professeur Louis Archambault
pour le cours
PHY-1007 Électromagnétisme

Université Laval

Département de physique, de génie physique et d'optique

10 avril 2017

Question 1

Le potentiel total est la somme des potentiels de chaque segment par rapport aux autres. Pour un segment 1 par rapport à un segment 2, cela pourrait être exprimé de telle manière :

$$4\pi\epsilon_0 V_0 \simeq \frac{\rho \cdot h}{|x_1 - x_1|} + \frac{\rho \cdot h}{|x_1 - x_2|}$$

Évidemment, on ne peut trouver le potentiel d'un segment par rapport à lui-même, mais on peut trouver le potentiel en son centre. On isole la densité surfacique d'une tranche mince d'un segment au rayon a, car on découpe celui-ci sur sa longueur.

$$\rho_s = \frac{\rho}{2\pi a}$$

On trouve ensuite le potentiel au centre sur l'axe x pour une largeur $h = {}^{L}\!/_{N}$

$$\begin{aligned}
4\pi\epsilon_0 V &= \rho_s \int \frac{1}{\mathscr{r}}\, ds \\
&= \rho_s \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, ds \\
&= \rho_s \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, d\phi\, dx \\
&= 2\pi a\, \rho_s \ln\left(\frac{h/2 + \sqrt{h^2/4 + a^2}}{-h/2 + \sqrt{h^2/4 + a^2}}\right) && \text{(Schaum's 17.9.1)} \\
&= 2\rho \ln\left(\frac{h}{a}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, le coefficient de chaque segment sera

$$A_{i,i} = 2\ln\left(\frac{h}{a}\right)$$

On peut donc assembler la matrice carrée A du système linéaire $\mathbf{V} = \mathbf{A}\rho$

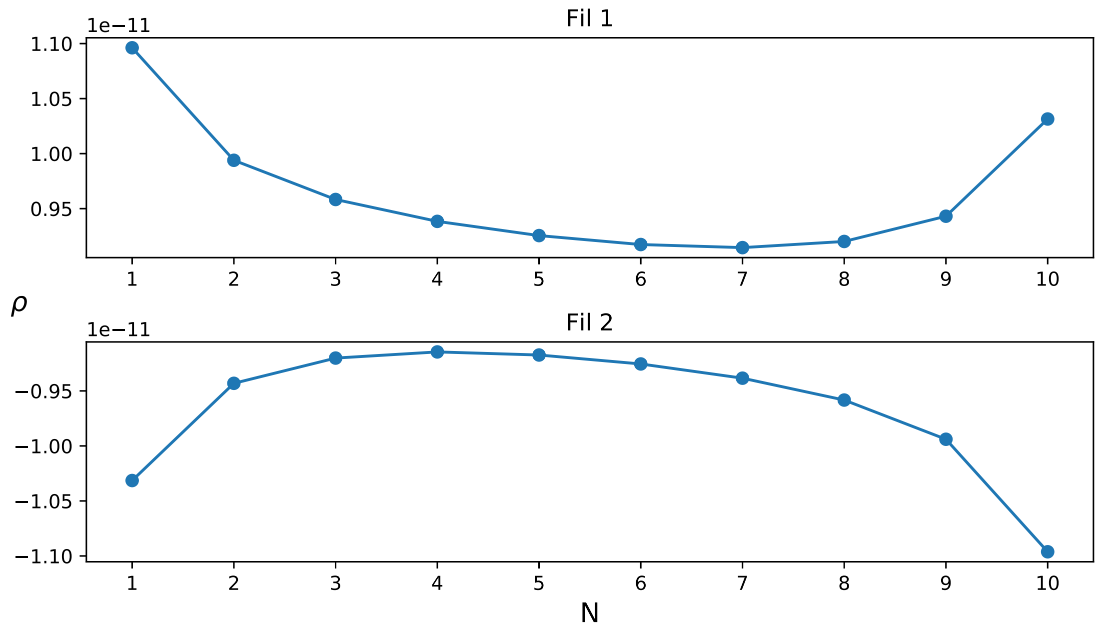
$$\begin{bmatrix} 4\pi\epsilon_0 V_0 \\ \vdots \\ 4\pi\epsilon_0 V_0 \\ -4\pi\epsilon_0 V_0 \\ \vdots \\ -4\pi\epsilon_0 V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ln\left(\frac{h}{a}\right) & \frac{h}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} & \frac{h}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_3|} & \cdots & \cdots & \frac{h}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_{2N}|} \\ \frac{h}{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|} & \ddots & & & & \vdots \\ \frac{h}{|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1|} & & & & & \frac{h}{|\mathbf{x}_{2N-2}-\mathbf{x}_{2N}|} \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{h}{|\mathbf{x}_{2N-1}-\mathbf{x}_{2N}|} \\ \frac{h}{|\mathbf{x}_{2N}-\mathbf{x}_1|} & \cdots & \cdots & \frac{h}{|\mathbf{x}_{2N}-\mathbf{x}_{2N-2}|} & \frac{h}{|\mathbf{x}_{2N}-\mathbf{x}_{2N-1}|} & 2\ln\left(\frac{h}{a}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{2N} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{x}_i$ représente la position vectorielle de chaque segment, avec $i \in [1, N]$ pour les segments du fil 1, et $i \in [N+1, 2N]$ pour les segments du fil 2.

Question 2

Lorsque $N = 10$, la capacité du système est de 4.884 pF, et lorsque $N = 20$, la capacité est de 4.947 pF. La deuxième valeur est environ 13% plus grande que la première. Ceci est étrange, puisque la valeur analytique est de 4.476 pF, soit environ 8% plus petite que pour $N = 10$. La méthode des moments pourrait donc s'avérer légèment inexacte pour calculer la capacité.

Question 3



La capacité du système est de 4.820 pF

Question 4

La capacité du système est de 5.343 pF