

Wahrscheinlichkeitstheorie anhand der Vorlesung  
von Dr. Arleta Szkola,  
Universität Leipzig

Phil Trommer

5. Dezember 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>II</b>	<b>Thematischer Vorlesungsbeginn</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Laplace - Modell</b>	<b>6</b>
1.1	Definition . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>8</b>
2.1	Definition Kartesisches Produkt . . . . .	9
2.2	Definition Endlichkeit . . . . .	10
2.3	Definition Mächtigkeit . . . . .	10
2.4	Lemma . . . . .	11
2.5	Satz . . . . .	11
2.6	Binomischer Lehrsatz . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle</b>	<b>11</b>
3.1	Definition Abzählbar & Unendlich . . . . .	12
3.2	Definition Diskreter W-Raum . . . . .	12
3.3	Definition Ereignisraum . . . . .	12
3.4	Satz (Begründung für die Interpretation) . . . . .	12
3.5	Beispiel Urne . . . . .	13
3.6	Definition Mengen in Funktionen . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	<b>14</b>
4.1	Definition Zufallsvariable . . . . .	14
4.2	Theorem . . . . .	15
4.2.1	Beispiel Augensumme . . . . .	16
4.3	Definition Bernoulli-Verteilung . . . . .	16
4.4	Definition Bernoulli-Experiment . . . . .	16
4.5	Definition Indikatorfunktion . . . . .	17
4.5.1	Beispiel . . . . .	17
4.5.2	Definition . . . . .	17
4.6	Definition Gleichverteilte Zufallsvariablen . . . . .	18
4.7	Definition Binomialverteilung . . . . .	18
4.8	Definition . . . . .	18
4.8.1	Hypergeometrisch verteilte Zufallsvariablen . . . . .	19
4.9	Definition Zähldichte . . . . .	20
4.10	Definition Geometrische Verteilung . . . . .	20
4.11	Definition Poisson-Verteilung . . . . .	21

<b>5</b>	<b>Erwartungswerte und Varianz</b>	<b>21</b>
5.1	Definition Reelwertigen Zufallsvariable . . . . .	21
5.2	Definition Erwartungswert . . . . .	22
5.3	Theorem . . . . .	24
5.4	Definition . . . . .	24
5.5	Lemma . . . . .	24
5.6	Theorem . . . . .	25
5.7	Definition Varianz . . . . .	25
	5.7.1 Endliche Zufallsvariable . . . . .	25
	5.7.2 Abzählbare Zufallsvariable . . . . .	25
5.8	Definition Standardabweichung . . . . .	26
5.9	Definition Zweiter Moment . . . . .	27
5.10	Theorem . . . . .	27

# Teil I

## Einleitung

### Inhalte

- Wahrscheinlichkeitstheorie
- mathematische Statistik
- beide unter dem Begriff *Stochastik* zusammengefasst

### Literaturempfehlungen

- Hans-Otto-Georgii : “Stochastik”

### Ausgangsfrage:

Ist Zufall etwas fundamentales?

### Zentrale Frage:

Was ist die **WS** (Wahrscheinlichkeit) eines zufälligen Ereignisses?  
Ursprünglich existierten folgenden 2 Definitionen.

#### **(1) Frequentistische Definition:**

Die WS eines zufälligen Ereignisses ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

#### **(2) Bayes'sche Definition:**

Die WS eines zufälligen Ereignisses ist ein Maß dafür, wie stark man vom Eintreten dieses Ereignisses überzeugt ist.

### Moderner Zugang

- Der moderne Zugang geht auf Alexander Kolmogorov zurück  
     $\hookrightarrow$  *Kolmogorov'schen Axiome*
  - A1 Die WS eines Ereignisses ist eine reelle Zahl  $x$  mit  $0 \leq x \leq 1$

- A2 Das sichere Ereignis hat die WS = 1
- A3 Eine abzählbare Vereinigung sich gegenseitig ausschließender Ereignisse hat die WS gleich der Summe der einzelnen WS.
  - Diese Axiome bilden die Grundlage der modernen Formulierung der **WT** (Wahrscheinlichkeitstheorie)
    - “moderne Formulierung”
    - $\hookrightarrow$  basiert auf dem Konzept des *W-Raumes* (Wahrscheinlichkeitsraum)
- Sei  $\Omega$  (Omega) eine Menge (die Elemente heißen *Elementarereignisse*)
  - Sei  $\mathcal{A}$  ein geeignetes System von Teilmengen von  $\Omega$  ( diese Mengen heißen *Ereignisse*)
  - Und sei  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$  eine Abbildung
    - $\hookrightarrow$  *W-Maß* (Wahrscheinlichkeitsmaß)
  - Die Abbildung  $P$  erfüllt dabei diese Rechenregeln:
    - (i)  $P(\Omega) = 1$
    - (ii)  $P(A^c) = 1 - P(A)$  , mit  $A^c = \Omega \setminus A$  und  $\forall A \in \mathcal{A}$
    - (iii)  $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ ,  $A_n \in \mathcal{A}$
- Damit heißt  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein W-Raum.

## Teil II

# Thematischer Vorlesungsbeginn

## 1 Laplace - Modell

↪ einfachstes Modell für ein Zufallsexperiment

Sei  $\Omega$  eine Menge

↪  $\Omega$  ist Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes, wenn  $\Omega$  alle möglichen Ausgänge des Experiments erfasst

↪ jedes  $\omega \in \Omega$  ist ein mögliches Ergebnis/Ausgang welches *Elementarereignis* genannt wird.

Ist  $\Omega$  eine höchstens abzählbare Menge, dann heißt jede Teilmenge  $E$  von  $\Omega$  ein Ereignis.  
( $\forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$  ist ein Ereignis)

### 1.1 Definition

Ein Zufallsexperiment heißt *Laplace-Experiment* der Ordnung  $N \in \mathbb{N}$ , wenn die Ergebnismenge  $\Omega$  endlich ist mit  $|\Omega| = N$  und die Elementarereignisse alle gleichwahrscheinlich sind, d.h. die WS für das Eintreten des Elementarereignisses  $\omega \in \Omega$  ist  $\frac{1}{N}$ . (Formal:  $P(\omega) = \frac{1}{N}$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ )

### Beispiel “Spielwürfel”

↪ Augenzahlen 1 - 6 entsprechen den möglichen Ausgängen des Experiments

↪  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$  Ergebnismenge

$N = |\Omega| = 6$  ist die Ordnung

Im Laplace-Modell ist die WS für das Eintreten eines Ereignisses  $E \in \mathcal{P}(\Omega)$  gegeben durch

$$P(E) = \frac{|E|}{N}$$

Denn gemäß den A1 - A3 gilt

$$P(E) =_{A3} \sum_{\omega \in E} P(\omega) = \sum_{\omega \in E} \frac{1}{N} = \frac{|E|}{N}$$

Beispiel

E: es fällt eine ungerade Augenzahl,  $E = \{1,3,5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$

$$\hookrightarrow P(E) = P(\{1,3,5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Beispiel:

A ist ein Alphabet mit 5 Buchstaben, d.h.  $|A| = 5$

Frage:

Wie groß ist die WS, das ein zufällig gewähltes Wort der Länge 3 genau 2 verschiedene Buchstaben enthält?

Antwort:

$$\Omega = A \times A \times A$$

$$|\Omega| = |A^3| = 125$$

Ereignis E: Wort der Länge 3 enthält genau 2 verschiedene Buchstaben

$$|E| = ? \quad |E| = 5 * 4 * 3 = 60$$

$\hookrightarrow$  Möglichkeiten, um das doppelt vorkommende Symbol zu wählen

Daraus folgt

$$P(E) = \frac{60}{125}$$

Beispiel: "Wiederholtes Werfen eines Spielwürfels"

(fair, 6-seitig)

Der Würfel wird n -mal geworfen und jedes mal die Augenzahl notiert.

$\hookrightarrow$  Es handelt sich um ein Laplace-Experiment der Ordnung  $N = ?$

$$\hookrightarrow \Omega = \{1, \dots, 6\}^n = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} \times \dots$$

$$\hookrightarrow N = |\Omega| = 6^n$$

Für jedes  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$  gilt  $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6^n} = 6^{-n}$  Wir betrachten

- a)  $E_i$  : beim i-ten Wurf fällt die "6"
- b)  $\tilde{E}_i$  : nur beim i-ten Wurf fällt die 6
- c)  $E$  : die 6 fällt genau einmal

Zu a)

$$E_i = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega | \omega_i = 6\}$$

$$\Rightarrow |E_i| = 6^{n-i} \Rightarrow P(E_i) = \frac{6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6}$$

Zu b)

$$\tilde{E}_i = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega | \omega_i = 6, \omega_k \neq 6, \forall k \neq i\}$$

$$\Rightarrow |\tilde{E}_i| = 5^{n-i} * 1 \Rightarrow P(\tilde{E}_i) = \frac{5^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6} * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

Zu c)

$$E = \bigcup_{i=1}^n \tilde{E}_i = \tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2 \cup \dots \cup \tilde{E}_n$$

$$\Rightarrow |E| = \sum_{i=1}^n |\tilde{E}_i| = n * 5^{n-1} \Rightarrow P(E) = \frac{n}{6} * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

## 2 Kombinatorik

Unser Kontext: Laplace-Experiment

$\hookrightarrow$  Formel für WS eines Ereignisses

$$E \subset \Omega \quad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Das Urnenmodell:

- Urne enthält endlich viele gleichartige (in Größe, Gewicht, etc.) Kugeln
- Die Urne ist formal eine Menge  
 $\hookrightarrow$  wir denken uns die Kugeln durchnummeriert
- Die Kugeln werden nacheinander *blind* der Urne entnommen

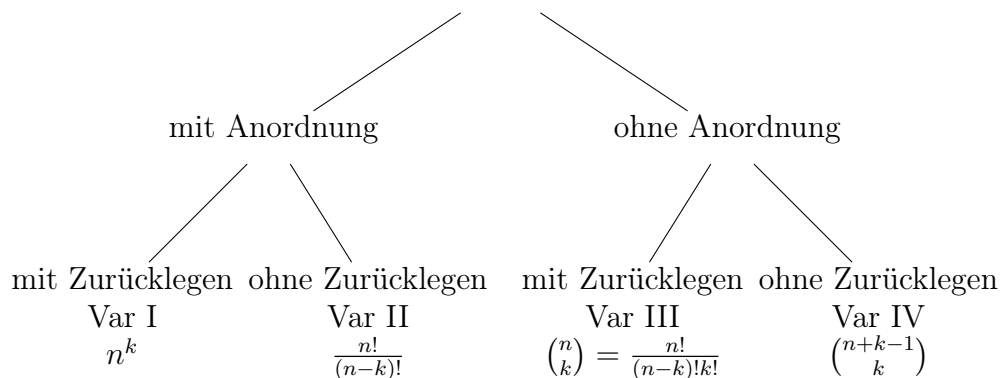
Man unterscheidet die Varianten:

- Wiederholtes Ziehen mit Zurücklegen
- Wiederholtes Ziehen ohne Zurücklegen

Sowie

- mit Anordnung (unter Beachtung der Reihenfolge der Ausgänge der Einzelbeziehungen)
- ohne Anordnung

$\hookrightarrow$  insgesamt 4 Varianten





Es gilt  $|U| = n$ ,  $k$  ist stetig Zu Var I :

“Anzahl der 7 stelligen Telefonnummern ( $10^7$ )”

Zu Var II :

“Platzierung der ersten 3 Gewinner eines Wettbewerbes mit  $n$  Teilnehmern”  $= n * (n - 1)(n - 2)$

Zu Var IV :

“Wahlergebnisse einer Wahl in Parteien &  $k$  Wähler (mit je einer Stimme)”

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k), a_i \in \bigcup, \forall i = 1, \dots, k$$

$$\text{und } a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k\}$$

$\hookrightarrow$  hiermit wird die Vorgabe “ohne Anordnung” formuliert

Betrachte auf  $\Omega$  die Abbildung  $f$ , die durch folgende Vorschrift definiert ist.

$$(a_1, \dots, a_k) \rightarrow (a_1 + 0, a_2 + 1, a_3 + 2, \dots, a_k + k - 1)$$

Die Abbildung  $f$  bildet  $\Omega$  bijektiv auf  $B = f(\Omega)$  ab, wobei

$$B = \left\{ (b_1, \dots, b_k) \mid b_1 < b_2 < \dots < b_k, \quad b_i \in \bigcup_{n+k-1}, \forall i = 1, \dots, k \right\}$$

Damit ist  $|\Omega| = |B|$  ( $\Omega$  und  $B$  sind gleichmächtig).  $B$  ist aber die Ergebnismenge des Zufallsexperimentes der Var III im Urnenmodell.

**Wir beobachten:** Die Ergebnismengen von Zufallsexperimenten die jeweils eine der Varianten im Urnenmodell entsprechen, lassen sich in der Form eines karthesischen Produktes von (endlichen) Mengen bzw. einer Teilmenge davon, darstellen.

## 2.1 Definition Karthesisches Produkt

Seien  $A, B$  zwei beliebige Mengen. Dann heißt

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

karthesisches Produkt von  $A$  und  $B$ . Ist  $k > 2$  und  $A_1, \dots, A_k$  Mengen so definieren wir entsprechend

$$A_1 \times \dots \times A_k := \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in A_i, i = 1, \dots, k\}$$

Sind  $A_i = A, i = 1, \dots, k$ , so schreiben wir kurz  $A^k$  für  $A_1 \times \dots \times A_k$  Bemerkung:

$(a, b) \in A \times B$  ist ein *geordnetes Paar*.

$$\hookrightarrow (a, b) \neq (b, a)$$

Wichtig ist die Unterscheidung zwischen  $(a, b)$  und  $\{a, b\}$  da hier  $\{a, b\} = \{b, a\}$  gilt.

## 2.2 Definition Endlichkeit

Eine Menge  $A$  die nur endlich viele Elemente enthält, heißt *endlich*. Sonst heißt sie *unendliche Menge*. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge  $A$  wird *Mächtigkeit* von  $A$  genannt und mit  $|A|$  bezeichnet.

## 2.3 Definition Mächtigkeit

Zwei Mengen  $A, B$  heißen *gleichmächtig*, wenn eine bijektive Abbildung

$$f : A \rightarrow B$$

existiert.

**Beispiel:**  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$  sind gleichmächtig, da folgende Abbildung bijektiv ist

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1-n}{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Explizite Darstellung der Ergebnismengen der Variante I-IV

- Var I:

$$\{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, k\}, \forall i = 1, \dots, k\} = \{1, \dots, n\}^k =: \Omega_I$$

- Var II:

$$\{(a_1, \dots, a_k) \in \{1, \dots, n\}^k : a_i \neq a_j \forall i, j = 1, \dots, k \text{ mit } i \neq j\} =: \Omega_{II}$$

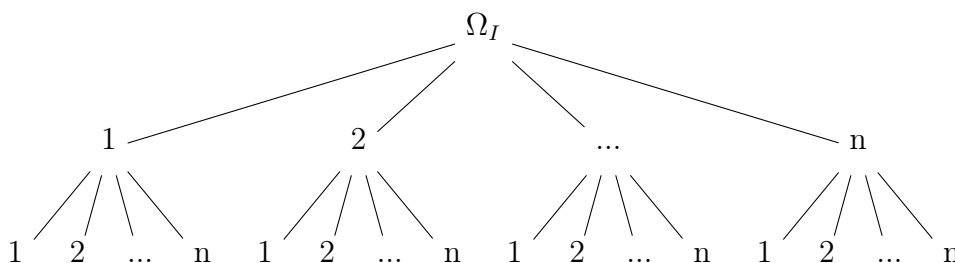
- Var III:

$$\{(a_1, \dots, a_k) \in \{1, \dots, n\}^k : a_1 < a_2 < \dots < a_k\} =: \Omega_{III}$$

- Var IV:

$$\{(a_1, \dots, a_k) \in \{1, \dots, n\}^k : a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k\} =: \Omega_{IV}$$

- Baumdiagramm:



- Jeder der Pfade stellt einen möglichen Ausgang des Zufallsexperimentes der Variante I im Urnenmodell dar.
- Für Varianten II - IV müssten bestimmte Pfade weggelassen bzw. miteinander identifiziert werden (z.B. kein doppeltes Vorkommen).

## 2.4 Lemma

Für zwei endliche Mengen  $A, B$  gilt

$$|A \times B| = |A| * |B|$$

## 2.5 Satz

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Beweis:

- 1)  $\binom{n}{k}$  = Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$
- 2) Mit jeder  $k$ -elementigen Teilmenge wird auch ihr Komplement  $T^C$  festgelegt. Es handelt sich dann um eine  $(n-k)$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$

$$\hookrightarrow |\{T \subset \{1, \dots, n\} : |T| = k\}| = |\{T^C : T \subset \{1, \dots, n\} \text{ und } |T^C| = k\}|$$

1) & 2) zusammen ergeben die Aussage ■

## 2.6 Binomischer Lehrsatz

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$$

Beweis:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) * \dots (a+b)$$

Durch ausmultiplizieren erhalten wir eine Summe, bei der jeder Term ein Produkt von  $n$  Faktoren ist. Jeder der Faktoren kann nur die Werte "a" oder "b" annehmen.

$\hookrightarrow$  Die Terme sind von der Gestalt  $a^k b^{n-k}$ , wobei  $k = 0, \dots, n$ . Für jedes feste  $k$  gibt es genau  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten ■

## 3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle

Als Verallgemeinerung des Laplace-Modells im folgendem Sinn:

- endliche oder abzählbar unendliche Ergebnismenge
- die Elementarereignisse (typischerweise) nicht mehr alle gleichwahrscheinlich

### 3.1 Definition Abzählbar & Unendlich

Eine Menge  $\Omega$  heißt abzählbar unendlich, wenn sie mit  $\mathbb{N}$  gleichmächtig ist.

### 3.2 Definition Diskreter W-Raum

Sei  $\Omega$  eine höchstens abzählbare nichtleere Menge und

$$\rho : \Omega \rightarrow [0, 1], \omega \mapsto \rho(\omega)$$

eine Funktion mit

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

Dann heißt  $\rho$  eine (*Zähl*)-*Dichte*, W-Vektor oder Gewichtsfunktion auf  $\Omega$ . Die Abbildung

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1], E \mapsto P(E) := \sum_{\omega \in E} \rho(\omega)$$

wird als W-Maß auf  $\mathcal{P}(\Omega)$  genannt.  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  wird als *diskreter W-Raum* bezeichnet.

### 3.3 Definition Ereignisraum

Sei  $\Omega$  eine höchstens abzählbare Ergebnismenge. Dann versteht man unter einem *Ereignisraum* das Paar  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ .

**Frage:** Warum wird  $P$  als W-Maß bezeichnet?

- Der Wert  $P(E)$ , den  $P$  dem Ereignis  $E \in \mathcal{P}(\Omega)$  zuordnet, wird als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $E$  interpretiert
- Speziell für Elementarereignisse  $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$  erhalten wir gemäß der Definition von  $P$  die Relation

$$P(\{\omega\}) = \rho(\omega)$$

### 3.4 Satz (Begründung für die Interpretation)

Ist  $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine Gewichtsfunktion, d.h.

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1,$$

dann erfüllen die Funktionswerte  $P(E), E \in \mathcal{P}(\Omega)$  des zugehörigen W-Maßes

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1], E \mapsto P(E) = \sum_{\omega \in E} \rho(\omega)$$

die *kolmogorowschen Axiome* A1 bis A3 (siehe Einleitung).

**Beweis:**

zu A1) zu zeigen ist  $0 \leq P(E) \leq 1, \forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in E} \rho(\omega) \geq \sum_{\omega \in E} 0$$

$$\hookrightarrow \rho(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$$

$$P(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in E} \rho(\omega) \leq \sum_{\omega \in E \cup E^C} \rho(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

$$\hookrightarrow \text{da } \rho(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$$

zu A2)

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

zu A3) Seien  $E_1, \dots, E_n$  paarweise disjunkte Ereignisse

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^n E_i} \rho(\omega) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

### 3.5 Beispiel Urne

Sei  $U$  eine Urne mit  $n$  Kugeln, d.h.  $|U| = n$ . Die Kugeln in  $U$  besitzen ein weiteres Unterscheidungsmerkmal, hier die Farbe.

- Sei  $S \subset U$  die Teilmenge der schwarzen Kugeln
- Sei  $W \subset U$  die Teilmenge der weißen Kugeln
- Gelte  $S \cup W = M$

Betrachte das *Zufallsexperiment*  $\mathcal{E}$ :

Es wird eine Kugel aus  $M$  entnommen und die Farbe notiert.

$\hookrightarrow$  Ergebnismenge von  $\mathcal{E} : \Omega = \{s, w\}$

$\rightarrow$  **Frage:** Wie wahrscheinlich ist es, das ich eine schwarze Kugel ziehe?

**Antwort:**  $P(E) = \frac{|S|}{M} = \tilde{P}(S)$

**Begründung:** Dem Experiment  $\mathcal{E}$  liegt ein Laplace-Experiment  $\tilde{\mathcal{E}}$  zugrunde.

$\tilde{\mathcal{E}}$ : Es wird eine Kugel aus  $M$  gezogen mit dem zugehörigen W-Raum

$$(\tilde{\Omega} = U, \mathcal{P}(U), \tilde{P}) \quad \text{wobei} \quad \tilde{P}(E) = \frac{|E|}{n}$$

Betrachten wir jetzt die Abbildung

$$f(\tilde{\omega}) = \begin{cases} s & , \text{ falls } \tilde{\omega} \in S \\ w & , \text{ sonst } \hat{=} \tilde{\omega} \in W \end{cases}$$

Dann erhalten wir die Ergebnismenge  $\Omega$  von  $\mathcal{E}$  als Bildmenge von  $\tilde{\Omega} = U$  unter der Abbildung  $f$ , das heißt

$$\Omega = f(\tilde{\Omega})$$

und die Gewichtsfunktion:

$$\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

ergibt sich aus

$$\rho(\omega) = P(\{\omega\}) = \tilde{P}(f^{-1}(\{\omega\})) = \frac{|f^{-1}(\{\omega\})|}{n}$$

### 3.6 Definition Mengen in Funktionen

Seien  $A, B$  nichtleere Mengen und

$$f : A \rightarrow B$$

eine Abbildung mit dem Definitionsbereich  $A$  und Bildbereich  $B$ . Für jedes  $M \subset A$  heißt die Menge

$$f(M) = \{f(a) \in B : a \in M\} \subset B$$

Die *Urbildmenge* von  $S \subset B$  und  $f$  ist gegeben durch

$$f^{-1}(S) := \{a \in A : f(a) \in S\}$$

**Beispiel:**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , x \mapsto e^x, \quad f^{-1}([0, 1]) = \mathbb{R}$$

## 4 Zufallsvariablen

### 4.1 Definition Zufallsvariable

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega'), P)$  diskreter W-Raum

- $\Omega$  höchstens abzählbar  
 $\hookrightarrow X : \Omega' \rightarrow \Omega$  heißen Zufallsvariablen mit Werten in  $\Omega$  und Verteilung

$$P_X(E) := P(X^{-1}(E)), \forall E \subset \Omega$$

- Mit dem Konzept einer Zufallsvariable werden in der Wahrscheinlichkeitstheorie Zufallsexperimente beschrieben.
- Eine Zufallsvariable mit Werten in  $\Omega$  beschreibt ein Zufallsexperiment, dessen Ergebnismenge gleich  $\Omega$  oder einer Teilmenge von  $\Omega$  ist. Genauer gibt  $X(\Omega')$  die Ergebnismenge des Zufallsexperimentes an.
- Die Verteilung  $P_X$  der Zufallsvariable  $X$  ist formal ein W-Maß. Damit stellt das Tripel  $(\Omega, \mathcal{P}\Omega, P_X)$  einen diskreten W-Raum dar.

## 4.2 Theorem

Seien  $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P)$  ein diskreter W-Raum und  $X$  eine Abbildung auf  $\Omega'$ , dann ist durch

$$P_X : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$E \mapsto P(X^{-1}(E))$$

wobei  $\Omega = X(\Omega')$  ein W-Maß auf  $\mathcal{P}(\Omega)$  definiert.

**Beweis:** Wir konstruieren eine Gewichtsfunktion

$$\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

so dass  $\forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$  gilt:

$$P_X(E) = \sum_{\omega \in E} \rho(\omega)$$

**Unser Ansatz:**

$$\forall \omega \in \Omega$$

$$\rho(\omega) = P(X^{-1}(\{\omega\})) \quad \text{mit} \quad X^{-1}(\{\omega\}) \subset \Omega'$$

Da  $P$  nach Voraussetzung ein W-Maß ist, gilt dann  $\rho(\omega) \in [0, 1]$ .

Zum anderen erhalten wir

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} P(X^{-1}(\{\omega\})) \stackrel{\text{i}}{=} P\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} X^{-1}(\{\omega\})\right) = P(\Omega') = 1 \quad \blacksquare$$

---

<sup>i</sup>Siehe 3.4

### 4.2.1 Beispiel Augensumme

Zufallsexperiment  $\mathcal{E}$ : Es werden 2 Spielwürfel nacheinander geworfen und die Augensumme notiert.

$\hookrightarrow$  **Frage:** Was ist das geeignete W-Modell für  $\mathcal{E}$ ?

**alternativ:** Wie sieht die Zufallsvariable  $X$ : “Augensumme von zwei 6-seitigen Würfeln” formal aus?

**Antwort:** Die Ergebnismenge von  $\mathcal{E}$  ist  $\Omega = \{2, \dots, 12\} \Rightarrow |\Omega| = 11$

**Beobachtung:** Das Laplace-Modell scheint ungeeignet, da es mit dem Zufallsexperiment  $\mathcal{E}$ : “Ein Spielwürfel wird 2 mal nacheinander geworfen und die Augenzahl notiert” nicht konsistent ist.

Wir formulieren eine geeignete Abbildung:

$$\begin{aligned} X : \Omega' &\rightarrow \Omega \quad \text{wobei} \quad \Omega' = \{1, \dots, 6\}^2, \quad |\Omega'| = 36 \\ &\hookrightarrow (a, b) \rightarrow a + b \\ \Rightarrow \rho(\omega) &= P(\{\omega\}) := P'(X^{-1}(\{\omega\})) = \frac{|X^{-1}(\{\omega\})|}{36} \\ &= \frac{|\{(a, b) : a, b \in \{1, \dots, 6\}, a + b = \omega\}|}{36} \\ &\hookrightarrow \rho(\omega) = \frac{1}{36} * (6 - |\omega - 7|), \quad \omega \in \{1, \dots, 12\} = \Omega \end{aligned}$$

Die Verteilung  $P_X$  ist dann das W-Maß zur Gewichtsfunktion  $\rho$ , die in der vorherigen Gleichung festgelegt ist. Es gibt mehrere wichtige Verteilungen.

### 4.3 Definition Bernoulli-Verteilung

Sei  $p \in [0, 1]$ . Die Verteilung auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ , wobei  $\Omega = \{0, 1\}$ , zur Gewichtsfunktion  $\rho(1) = p$  und  $\rho(0) = 1 - p$  heißt *Bernoulli-Verteilung zum Parameter  $p$*  und wird mit  $B_p$  bezeichnet.

### 4.4 Definition Bernoulli-Experiment

Ein Zufallsexperiment heißt *Bernoulli-Experiment*, wenn es durch eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable beschrieben wird.

Bernoulli-Experimente haben folgende Eigenschaften:

- Ergebnismenge =  $\{0, 1\}$
- Modellieren zum Beispiel das Werfen einer Münze, wobei “Zahl” und “Kopf” durch die Werte “0” bzw. “1” kodiert werden



- Allgemein interpretiert man

$$\begin{aligned} 1 &\hat{=} \text{Treffer/Erfolg} \\ 0 &\hat{=} \text{kein Treffer/Misserfolg} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow B_p$  ist die Bernoulli-Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$

- Häufig steht “1” sinngemäß für “Ja” und “0” für “Nein”, wenn die betreffende Zufallsvariable das Eintreten bzw. Nicht-Eintreten eines Ereignisses beschreibt.

## 4.5 Definition Indikatorfunktion

Seien  $\Omega$  eine Menge und  $M \subseteq \Omega$ . Die auf  $\Omega$  definierte Funktion

$$1_M(\omega) := \begin{cases} 1 & , \omega \in M \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* von  $M$  auf  $\Omega$ .

### 4.5.1 Beispiel

**Beispiel 1** Ein 6-seitiger Würfel wird geworfen und die Augenzahl “6” als Treffer gewertet.

$\hookrightarrow$  Zufallsvariable: Es wird ein Treffer erzielt ist Bernoulli-verteilt zum Parameter  $p = \frac{1}{6}$   
 $\hookrightarrow$  formal:

$$\begin{aligned} X : \{1, \dots, 6\} &\rightarrow \{0, 1\} \\ \omega &\rightarrow 1_{\{6\}}(\omega) \end{aligned}$$

**Beispiel 2** Ein 6-seitiger Würfel wird dreimal nacheinander geworfen und jeweils die Augenzahl notiert. Ab einer Augensumme =15 wird ein Gewinn ausgezahlt.

$\hookrightarrow$  Zufallsvariable  $Z$ : Gewinnauszahlung  
 $\hookrightarrow$  formell:

$$Z = 1_{\{X \geq 15\}} \circ X^{\text{ii}}$$

somit  $Z : \{1, \dots, 6\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$

### 4.5.2 Definition

Seien  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  zwei Abbildungen. Dann ist die Verkettung  $g \circ f$  definiert als die Abbildung

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad a \mapsto g \circ f(a) := g(f(a))$$

---

<sup>ii</sup>Zufallsvariable: Augensumme nach 3 Würfeln

## 4.6 Definition Gleichverteilte Zufallsvariablen

Sei  $\Omega$  eine endliche Menge. Das W-Maß auf  $\Omega$  mit der (konstanten) Zähldichte

$$\rho(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \omega \in \Omega$$

heißt *Gleichverteilung auf  $\Omega$*  und wird mit  $\mathcal{U}_\Omega$  bezeichnet.

## 4.7 Definition Binomialverteilung

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, 1)$ . Das W-Maß auf  $\{0, 1, \dots, n\}$  mit der Zähldichte

$$\rho(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

heißt *Binomialverteilung zu den Parametern  $n$  und  $p$* . (Notation =  $B_{n,p}$ )

**Beispiel:** Beim  $n$ -maligen Werfen eines 6-seitigen Würfels wird jedes Mal, wenn die Augenzahl “6” fällt, ein Treffer gezählt.

$\hookrightarrow$  Zu  $X$ : Anzahl der Treffer bei  $n$  Versuchen

$X$  ist *binomialverteilt*.

**Herleitung:** Das zugrunde liegende Zufallsexperiment ist

$\mathcal{E}'$ : ein fairer 6-seitiger Würfel wird  $n$ -mal geworfen und jeweils die Augenzahl notiert.  $\mathcal{E}'$  stellt ein Laplace-Experiment der Ordnung  $N = 6^n$  dar. Bezeichne  $\Omega'$  die Ergebnismenge, d.h.  $\Omega' = \{1, \dots, 6\}^n$ , dann ist  $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), \mathcal{U}_{\Omega'})$  der zugehörige Laplace-Raum.

$$X : \Omega' \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \mapsto \sum_{i=1}^n 1_{\{6\}}(\omega_i)$$

Diese Abbildung stellt die betreffende Zufallsvariable  $X$  dar!

$$\begin{aligned} \hookrightarrow P_X(\{k\}) &= \mathcal{U}_{\Omega'}(X^{-1}(\{k\})) \\ &= \frac{|X^{-1}(\{k\})|}{6^n} \\ &= \frac{\binom{n}{k} * 5^{n-k}}{6^{n-k+k}} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

## 4.8 Definition

Seien  $P$  ein W-Maß und  $X$  eine Zufallsvariable. Wir schreiben  $X \sim P$ , wenn die Verteilung  $P_X$  von  $X$  gleich  $P$  ist.

#### 4.8.1 Hypergeometrisch verteilte Zufallsvariablen

**Beispiel** In einer Urne befinden sich  $N$  Kugeln, davon sind  $k$  rot und die anderen  $N - k$  Kugeln sind weiß. Es werden  $m$  Kugeln blind gezogen.

$\hookrightarrow$  Frage: Wie ist folgende Zufallsvariable  $X$  verteilt?

$X$ : Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe (vom Umfang  $m$ )

Wir stellen  $X$  als eine Abbildung auf dem Laplace-Raum  $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P)$  dar, der zum Laplace-Experiment  $\mathcal{E}'$  gehört.

$\hookrightarrow \mathcal{E}'$ : Es werden  $m$  Kugeln blind und gleichzeitig aus der Urne gezogen

$\hookrightarrow$  Ergebnismenge  $\Omega'$  zu  $\mathcal{E}'$ :

$$\begin{aligned}\Omega' &= \{X \subseteq \{1, \dots, N\} : |X| = m\} \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_m) : \forall i = 1, \dots, m : \omega_i \in \{1, \dots, N\}, \\ &\quad \text{und } \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m\}\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow |\Omega'| = \binom{N}{m}$$

Bezeichne jetzt  $K$  die Teilmenge der roten Kugeln. Die Zufallsvariable  $X$  wird als Abbildung auf  $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), \mathcal{U}_{\Omega'})$  dargestellt.

$$X : \omega \in \Omega' \mapsto \sum_{i=1}^m 1_K(\omega_i)$$

$\hookrightarrow$  Verteilung  $P_X$  von  $X$  ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}P_X(\{l\}) &= \mathcal{U}_{\Omega'}(X^{-1}(\{l\})), \forall l = 0, \dots, \min\{m, k\} \\ &= \frac{\binom{k}{l} * \binom{N-k}{m-l}}{\binom{N}{m}}\end{aligned}$$

In folgenden Fällen ist  $X^{-1}(\{l\}) = \emptyset$ :

- $l > k$
- $N - k < m - l$

$$\hookrightarrow X(\Omega') = \{l * \max\{0, \min(N - k, m)\} \leq l \leq \min\{m, k\}\}$$

**Bemerkung:** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & , k < 0 \\ 0 & , k > n \\ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & , \text{sonst} \end{cases}$$

## 4.9 Definition Zähldichte

Seien  $\mathcal{N}, m, k \in \mathbb{N}$  mit  $K < \mathbb{N}$  und  $m \leq \mathbb{N}$ . Das W-Maß mit der *Zähldichte*

$$\rho : \{0, 1, \dots, m\} \rightarrow [0, 1], \quad l \mapsto \frac{\binom{k}{l} \binom{n-k}{m-l}}{\binom{N}{m}}$$

Beispiele für Zufallsvariablen, die abzählbar unendlich viele Werte annehmen.

- *Geometrische Verteilung*

## 4.10 Definition Geometrische Verteilung

Sei  $p \in (0, 1)$ . Das W-Maß mit der Zähldichte

$$k \in \mathbb{N}_0 \rightarrow \rho(k) := (1 - p)^k * p$$

heißt *geometrische Verteilung* zum Parameter  $p$  und wird mit  $G_p$  bezeichnet.

**Bemerkung:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k p \quad \text{iii}$$

**Beispiel:** Eine Münze wird so lange geworfen bis  $Z$  fällt.

$\hookrightarrow$  Zufallsvariable:  $X$  Anzahl der Versuche, bis  $Z$  fällt ist geometrisch verteilt zum Parameter  $p = 0,5$ .

**Diskussion:** Da es beliebig viele Versuche sein können bis  $Z(=1)$  fällt, scheint folgende Menge geeignet, in  $X$  auf  $\Omega$  zu modellieren.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in \{0, 1\} : \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Modifizierte Version: Wir brechen nach  $n$  Versuchen ab, unabhängig davon ob ein Treffer erzielt wurde oder nicht.

$$\tilde{\Omega} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i = 1, \dots, n\}$$

$X$  ist Anzahl der Versuche bis eine 1 fällt. Dies wird dargestellt als Abbildung auf den Laplace-Raum  $(\tilde{\Omega}, \mathcal{P}(\tilde{\Omega}), P)$

**Konkret:**

$$X : (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{\Omega} \rightarrow \begin{cases} k \in \{0, \dots, n-1\} & \text{, so dass } x = 1 \text{ und } x_j = 0 \\ n & \text{, sonst} \end{cases}$$

---

iii geometrische Reihe

$$\hookrightarrow \rho(k) = P_X(\{k\}) = \frac{|X^{-1}(\{k\})|}{2^n} = \frac{2^{n-k-1}}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^k * \frac{1}{2} \quad \forall k = 0, \dots, n-1$$

Das nennt man auch *Poisson-Verteilung*

## 4.11 Definition Poisson-Verteilung

Sei  $d > 0$ . Das W-Maß mit der Zähldichte

$$\rho : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, 1], k \mapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

heißt *Poisson-Verteilung* zum Parameter  $d$  und wird mit  $P_\lambda$  bezeichnet.

### Bemerkung:

- $\lambda$  wird als mittlere Rate interpretiert, mit der ein Ereignis in einem vorgegebenen Zeitfenster  $J$  beobachtet wird
- $\mathcal{P}_\lambda$  ist die Verteilung der Zufallsvariablen “Anzahl der Ergebnisse in  $J$ ”

### Beispiele:

- Anzahl der ankommenden E-Mails/Tag
- Anzahl der Versicherungsfälle pro Jahr
- Anzahl der Kunden pro Stunde

### Bemerkungen:

$$\rho(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

$$\hookrightarrow \text{Dichte } e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

## 5 Erwartungswerte und Varianz

### 5.1 Definition Reelwertigen Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable, die Werte in  $\mathbb{R}$  annimmt heißt *reelle Zufallsvariable*. Alle bisherigen Zufallsvariablen sind Beispiele reeller Zufallsvariablen. Genauer handelt es sich bei den Zufallsvariablen um *diskret verteilte* Zufallsvariablen. Das für diese ist, dass die Werte in einer höchstens abzählbaren Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}$  annehmen:

- $\Omega = \{0, 1\}$  bei  $X \sim \mathcal{B}_p$  ( $p \in [0, 1]$ )

- $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$  bei  $X \sim \mathcal{B}_{n,p}$
- $\Omega = \{0, 1, \dots, m\}$  bei  $X \sim \mathcal{H}_{m,k,N-k}$
- $\Omega = \mathbb{N}$  bei  $X \sim \mathcal{P}_\lambda$  sowie  $X \sim \mathcal{G}_p$

Jede auf einem diskreten W-Raum  $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P)$  definierte Zufallsvariable  $X$  gehört zu den diskreten Zufallsvariablen, denn  $X(\Omega')$  ist eine höchstens abzählbare Menge.

## 5.2 Definition Erwartungswert

Sei  $X$  eine reelle Zufallsvariable, die Werte in einer endlichen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}$  annimmt, dann heißt der Wert

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x \in \Omega} x P(X = x) = \sum_{x \in \Omega} x P_X(\{x\})$$

*Erwartungswert von  $X$ .*

Sei  $X$  eine Zufallsvariable, die abzählbar unendlich viele Werte  $x_i, i \in \mathbb{N}$  annehmen kann, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i$ , so heißt

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

*Erwartungswert (EW) von  $X$ , wenn die eben aufgeführte Reihe absolut konvergent ist.*

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ absolut konvergent} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$$

Der Erwartungswert ist eine reelle Zahl.

### Interpretation:

- Diese Zahl gibt den Wert an, den die betreffende Zufallsvariable im Mittel annimmt. Dabei gewichten wir die einzelnen Werte  $x$ , die  $X$  annehmen kann, entsprechend der Wahrscheinlichkeit  $p_x$  des Eintretens des Elementarereignisses  $X = x$ .
- Wenn wir das Experiment  $X$  unter identischen Bedingungen und ohne gegenseitige Beeinflussung oft wiederholen, erwarten wir, dass das arithmetische Mittel der einzelnen Ergebnisse für ein geeignetes W-Modell nah bei  $\mathbb{E}(X)$  liegt

### Beispiele

- a) Erwartungswert von  $X \sim \mathcal{B}_p$   
 $\mathbb{E}(X) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$

b)  $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$  und  $X \sim \mathcal{U}_\Omega$ :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ entspricht Mittel der Zahlen } x_1, \dots, x_n$$

c) Erwartungswert von  $X \sim \mathcal{B}_{n,p}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \mathcal{B}_{n,p}(\{k\}) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n np \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-1-l} = np \end{aligned}$$

d) Erwartungswert von  $X \sim \mathcal{P}_\lambda$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathcal{P}_\lambda(\{k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

## Zusammenhang zwischen Poisson-und Binomialverteilung

### Beispiel:

- Sei  $\lambda > 0$  die mittlere Anzahl von Kunden, die ein Blumengeschäft im Zeitintervall  $I$  (z.B.  $I = 10$  Stunden) betreffen.
- Wir zerlegen das Zeitintervall  $I$  in  $n$  gleich große Teilintervalle
- Mit wachsendem  $n$  wird bei festen  $I$  die Länge der Teilintervalle<sup>iv</sup> immer kürzer

$\hookrightarrow$  Ansatz für die Wahrscheinlichkeit  $p_n$ , dass ein Teilintervall der Länge  $\frac{I}{n}$  ein Kunde den Laden betritt

$$p_n = \frac{\lambda}{n}$$

---

<sup>iv</sup> =  $\frac{I}{n}$

**Annahme:** Ob ein Kunde im gegebenen Teilintervall den Laden betritt ist unabhängig davon, ob im anderen Teilintervall das Ereignis eintritt.

$\hookrightarrow$  Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Intervall  $I$  der Blumenladen von  $k$  Kunden besucht wird, wird entsprechend durch die Binomialverteilung bestimmt:

$$\mathcal{B}_{n, p_n = \frac{\lambda}{n}}(\{k\}) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Dann lässt sich zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_{n, \frac{\lambda}{n}}(\{k\}) = \mathcal{P}_\lambda(\{k\})$$

### 5.3 Theorem

Seien  $\lambda > 0$  und  $p_n \in (0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} n p_n = \lambda$ . Dann gilt für jedes  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_{n, p_n}(\{k\}) = \mathcal{P}_\lambda(\{k\})$$

### 5.4 Definition

Seien  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Folgen

$$f(k) \sim g(k) \text{ für } k \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{f(k)}{g(k)} = 1 \text{ für } k \rightarrow \infty$$

### 5.5 Lemma

Sei  $k \in \mathbb{N}$ , dann gilt im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$$

**Beweis zu Lemma 5.4**

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n^k}{k!} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} \\ &= \frac{n^k}{k!} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n} \frac{n(1-\frac{2}{n})}{n} \dots \frac{n(1-\frac{k-1}{n})}{n} \\ &\sim \frac{n^k}{k!} \end{aligned}$$



## 5.6 Theorem

Sei  $\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P$  ein diskreter W-Raum und  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}(X)$  und  $\mathbb{E}(Y)$  definiert. Dann gilt:

a)  $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

b)  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

c)  $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

**Beweis:** a)

$$\mathbb{E}(cX) \stackrel{!}{=} \sum_{z \in \Omega} z P_{cX}(\{z\}) = \sum_{z \in c\Omega} z P_X\left(\left\{\frac{z}{c}\right\}\right) = \sum_{x \in \Omega} cx P_X(\{x\}) = c\mathbb{E}(X)$$

1.  $cX$  ist eine Zufallsvariable mit Werten in  $c\Omega =: \{cx \in \mathbb{R} : x \in \Omega\}$  eine Verteilung  $P_{cX}$

2.

$cX : \Omega \mapsto c\Omega$  ist eine Zufallsvariable über  
 $x \mapsto cX \quad (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_X)$ , wobei

$$P_X = P \circ X^{-1}$$

$$\hookrightarrow P_{cX} = P_X \circ (cX)^{-1} \Rightarrow P_{cX}(\{z\}) = P_X(cX = z) = P_X\left(\left\{\frac{z}{c}\right\}\right)$$

## 5.7 Definition Varianz

### 5.7.1 Endliche Zufallsvariable

Sei  $X$  eine endlich Zufallsvariable, mit Werten  $x \in \Omega$ , mit Wahrscheinlichkeit  $p_x$ . Dann heißt:

$$\sum_{x \in \Omega} (x - \mathbb{E}(X))^2 p_x =: \text{Var}(X)$$

die *Varianz*<sup>v</sup> von  $X$ .

### 5.7.2 Abzählbare Zufallsvariable

Sei  $X$  eine abzählbare, unendliche Zufallsvariable, mit den Werten  $x \in \Omega$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , mit einem abzählbaren  $\Omega$  mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  und der Erwartungswert  $\mathbb{E}(X)$  ist konvergent. Dann heißt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i =: \text{Var}(X)$$

---

<sup>v</sup>Auch *Streuung* genannt.

die Varianz von  $X$ .

**Bemerkung:**

$$\text{Var}(X) \geq 0$$

$$\text{Var}(X) = \infty \text{ sind möglich}$$

$$\forall X \exists v \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{Var}(X) = v$$

## 5.8 Definition Standardabweichung

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $\text{Var}(X) \in \mathbb{R}$ , dann wird

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

*Standardabweichung* genannt.

**Interpretation:** Die Varianz gibt den Mittelwert der Abweichung zum Quadrat der Zufallsvariable  $X$  gegenüber des Erwartungswertes  $\mathbb{E}(X)$  an.

a)  $X \sim \mathcal{B}_p$ , mit  $\mathbb{E}(X) = p$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (1-p)^2 p + (0-p)^2 (1-p) \\ &= (1-p) (p(1-p) + p^2) \\ &= (1-p) (p - p^2 + p^2) \\ &= (1-p) p \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{und } \sigma(X) = \sqrt{(1-p)p}$$

b)  $X \sim \mathcal{U}_{\Omega_n}$  mit  $\Omega_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \text{Dann ist } \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \Omega_n} x =: \bar{x} \\
 \hookrightarrow \text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \\
 &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2
 \end{aligned}$$

## 5.9 Definition Zweiter Moment

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Werten  $x \in \Omega$  mit Wahrscheinlichkeiten  $p_x$ , wenn

$$\sum_{x \in \Omega} x^2 p_x$$

konvergent, dann nennt man diesen Wert *das zweite Moment von  $X$* .

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in \Omega} x^2 p_x$$

## 5.10 Theorem

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit reellen, diskreten Werten und dem Erwartungswert  $\mathbb{E}(X) = m$ . Wenn  $\mathbb{E}(X^2) \in \mathbb{R}$ , dann gilt:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

.