Wahrscheinlichkeitstheorie anhand der Vorlesung von Dr. Arleta Szkola, Universität Leipzig

Phil Trommer

30. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Einleitung

Inhalte

- Wahrscheinlichkeitstheorie
- mathematische Statistik
- beide unter dem Begriff *Stochastik* zusammengefasst

Literaturempfehlungen

- Hans-Otto-Georgii : "Stochastik"

Ausgangsfrage:

Ist Zufall etwas fundamentales?

Zentrale Frage:

Was ist die **WS** (Wahrscheinlichkeit) eines zufälligen Ereignisses?
Ursprünglich existierten folgenden 2 Definitionen.

(1) Frequentistische Definition:

Die WS eines zufälligen Ereignisses ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

(2) Bayes'sche Definition:

Die WS eines zufälligen Ereignisses ist ein Maß dafür, wie stark man vom Eintreten dieses Ereignisses überzeugt ist.

Moderner Zugang

- Der moderne Zugang geht auf Alexander Kolmogorov zurück
  $\hookrightarrow$ *Kolmogorov'schen Axiome*

- A1 Die WS eines Ereignisses ist eine reele Zahl x mit $0 \leq \ x \leq \ 1$
- A2 Das sichere Ereignis hat die WS = 1
- A3 Eine abzählbare Vereinigung sich gegenseitig ausschließender Ereignisse hat die WS gleich der Summe der einzelnen WS.
  - Diese Axiome bilden die Grundlage der modernen Formulierung der **WT** (Wahrscheinlichkeitstheorie)
    "moderne Formulierung"
    $\hookrightarrow$ basiert auf dem Konzept des *W-Raumes* (Wahrscheinlichkeitsraum)

- Sei Ω (Omega) eine Menge (die Elemente heißen *Elementarereignisse*)
  - Sei A ein geeignetes System von Teilmengen von Ω (diese Mengen heißen *Ereignisse*)
  - Und sei P: $A \to$ [0,1] eine Abbildung
    $\hookrightarrow$ *W-Maß* (Wahrscheinlichkeitsmaß)
  - Die Abbildung P erfüllt dabei diese Rechenregeln:
    (i) $P\,(\Omega) = 1$
    (ii) $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$, mit $A^{\complement} = \Omega \setminus A$ und $\forall A \in A$
    (iii) $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n), \quad A_n \in A$

- Damit heißt (Ω, A , P) ein W-Raum.

Teil II
Thematischer Vorlesungsbeginn

1 Laplace - Modell

$\hookrightarrow$ einfachstes Modell für ein Zufallsexperiment

Sei Ω eine Menge
$\hookrightarrow$ Ω ist Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes, wenn Ω alle möglichen Ausgänge des Experiments erfasst
$\hookrightarrow$ jedes $\omega \in \Omega$ ist ein mögliches Ergebnis/Ausgang welches *Elemtarereignis* genannt wird.
Ist Ω eine höchstens abzählbare Menge, dann heißt jede Teilmenge E von Ω ein Ereignis. ($\forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein Ereignis)

1.1 Definition

Ein Zufallsexperiment heißt *Laplace-Experiment* der Ordnung $N \in \mathbb{N}$, wenn die Ergebnissmenge Ω endlich ist mit $|\Omega| =$ N und die Elementarereignisse alle gleichwahrscheinlich sind, d.h. die WS für das Eintreten des Elementarereignisses $\omega \in \Omega$ ist $\frac{1}{N}$. (Formal: $P(\omega) = \frac{1}{N} \;\; , \;\; \forall \omega \in \Omega$)

Beispiel "Spielwürfel"

$\hookrightarrow$ Augenzahlen 1 - 6 entsprechen den möglichen Ausgängen des Experiments
$\hookrightarrow \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ Ergebnismenge
N $= |\Omega| = 6$ ist die Ordnung
Im Laplace-Modell ist die WS für das Eintreten eines Ereignisses $E \in P(\Omega)$ gegeben durch

$$P(E) = \frac{|E|}{N}$$

Denn gemäß den *A1 - A3* gilt
$P(E) =_{A3} \sum_{\omega \in E} P(\omega) = \sum_{\omega \in E} \frac{1}{N} = \frac{|E|}{N}$
Beispiel
E: es fällt eine ungerade Augenzahl , E $= \{1,3,5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$

$$\hookrightarrow P(E) = P(\{1,3,5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Beispiel:
A ist ein Alphabet mit 5 Buchstaben, d.h. |A| = 5

Frage:
Wie groß ist die WS, das ein zufällig gewähltes Wort der Länge 3 genau 2 verschiedene Buchstaben enthält?
Antwort:

$$\Omega = A \times A \times A$$

$$|\Omega| = |A^3| = 125$$

Ereignis E: Wort der Länge 3 enthält genau 2 verschiedene Buchstaben

$$|E| = ? \quad |E| = 5 * 4 * 3 = 60$$

$\hookrightarrow$ Möglichkeiten, um das doppelt vorkommende Symbol zu wählen
Daraus folgt

$$P(E) = \frac{60}{125}$$

Beispiel: "Wiederholtes Werfen eines Spielwürfels"
(fair, 6-seitig)
Der Würfel wird n -mal geworfen und jedes mal die Augenzahl notiert.
$\hookrightarrow$ Es handelt sich um ein Laplace-Experiment der Ordnung N = ?

$$\hookrightarrow \Omega = \{1, ..., 6\}^n = \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\} \times .....$$

$$\hookrightarrow N = |\Omega| = 6^n$$

Für jedes $\omega = (\omega_1, ..., \omega_1) \in \Omega$ gilt P($\{\omega\}$) = $\frac{1}{6^n} = 6^{-n}$ Wir betrachten

a) E_i : beim i-ten Wurf fällt die "6"

b) $\tilde{E}_i$: nur beim i-ten Wurf fällt die 6

c) E : die 6 fällt genau einmal

Zu a)

$$E_i = \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega | \omega_i = 6\}$$

$$\Rightarrow |E_i| = 6^{n-i} \Rightarrow P(E_i) = \frac{6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6}$$

Zu b)

$$\tilde{E}_i = \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega | \omega_i = 6, w_k \neq 6, \forall k \neq i\}$$

$$\Rightarrow |\tilde{E}_i| = 5^{n-i} * 1 \Rightarrow P(\tilde{E}_i) = \frac{5^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6} * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

Zu c)

$$E = \bigcup_{i=1} \tilde{E}_i = \tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2 \cup ... \cup \tilde{E}_n$$

$$\Rightarrow |E| = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{E}_i| = n * 5^{n-1} \Rightarrow P(E) = \frac{n}{6} * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

2 Kombinatorik

Unser Kontext: Laplace-Experiment
$\hookrightarrow$ Formel für WS eines Ereignisses

$$E \subset \Omega \qquad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Das Urnenmodel:

- Urne enthält endlich viele gleichartige (in Größe, Gewicht, etc.) Kugeln
- Die Urne ist formal eine Menge
  $\hookrightarrow$ wir denken uns die Kugeln durchnummeriert
- Die Kugeln werden nacheinander *blind* der Urne entnommen

Man unterscheidet die Varianten:

- Wiederholtes Ziehen mit Zurücklegen
- Wiederholtes Ziehen ohne Zurücklegen

Sowie

- mit Anordnung (unter Beachtung der Reihenfolge der Ausgänge der Einzelbeziehungen)
- ohne Anordnung

$\hookrightarrow$ insgesamt 4 Varianten

mit Anordnung | ohne Anordnung

mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
Var I	Var II	Var III	Var IV
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Es gilt $|U| = n$, k ist stetig
Zu Var I :
"Anzahl der 7 stelligen Telefonnummern (10^7)"
Zu Var II :
"Platzierung der ersten 3 Gewinner eines Wettbewerbes mit n Teilnehmern"
$= n * (n-1)(n-2)$
Zu Var IV :
"Wahlergebnisse einer Wahl in Parteien & k Wähler (mit je einer Stimme)"

$$\Omega = \{(a_1, ..., a_k), a_i \in \bigcup, \forall i = 1, ..., k$$

$$\text{und} \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_k\}$$

$\hookrightarrow$ hiermit wird die Vorgabe "ohne Anordnung" formuliert
Betrachte auf Ω die Abbildung f, die durch folgende Vorschrift definiert ist.

$$(a_1, ..., a_k) \to (a_1 + 0, a_2 + 1, a_3 + 2, ..., a_k + k - 1)$$

Die Abbildung f bildet Ω bijektiv auf $B = f(\Omega)$ ab, wobei

$$B = \left\{(b_1, ..., b_k)|b_1 < b_2 < ... < b_k, \quad b_i \in \bigcup_{n+k-1}, \forall i = 1, ...k\right\}$$

Damit ist $|\Omega| = |B|$ (Ω und B sind gleichmächtig). B ist aber die Ergebnismenge des Zufallsexperimentes der **Var III** im Urnenmodell.

Wir beobachten: Die Ergebnismengen von Zufallsexperimenten die jeweils eine der Varianten im Urnenmodell entsprechen, lassen sich in der Form eines karthesischen Produktes von (endlichen) Mengen beziehungsweise einer Teilmenge davon, darstellen.

2.1 Definition Karthesisches Produkt

Seien A, B zwei beliebige Mengen. Dann heißt

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

karthesisches Produkt von A und B. Ist $k > 2$ und $A_1, ...A_k$ Mengen so definieren wir entsprechend

$$A_1 \times ... \times A_k := \{(a_1, ..., a_k) : a_i \in A_i, i = 1, ..., k\}$$

Sind $A_i = A, i = 1, ..., k$, so schreiben wir kurz A^k für $A_1 \times ... \times A_k$ Bemerkung:
$(a, b) \in A \times B$ ist ein *geordnetes Paar.*

$$\hookrightarrow (a, b) \neq (b, a)$$

Wichtig ist die Unterscheidung zwischen $(a, b) und \{a, b\}$ da hier $\{a, b\} = \{b, a\}$ gilt.

2.2 Definition Endlichkeit

Eine Menge A die nur endlich viele Elemente enthält, heißt *endlich*. Sonst heißt sie *unendliche Menge*. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge A wird *Mächtigkeit* von A genannt und mit $|A|$ bezeichnet.

2.3 Definition Mächtigkeit

Zwei Mengen A, B heißten *gleichmächtig*, wenn eine bijektive Abbildung

$$f : A \to B$$

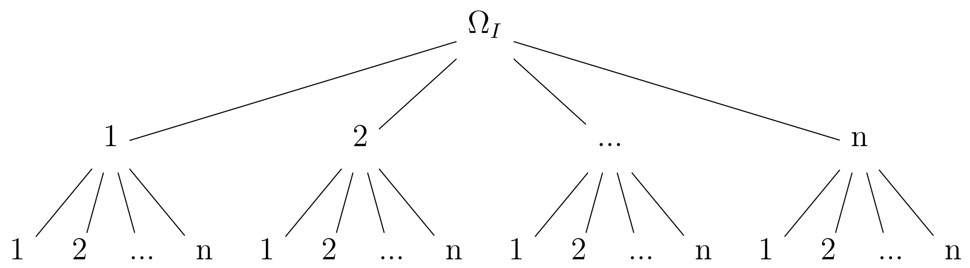
existiert.

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig, da folgende Abbildung bijektiv ist

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \to f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Explizite Darstellung der Ergebnismengen der Variante I-IV

- Var I:
$$\{(a_1, ..., a_k) : a_i \in \{1, ..., k\}, \forall i = 1, ..., k\} = \{1, ..., n\}^k =: \Omega_I$$
- Var II:
$$\{(a_1, ..., a_k) \in \{1, ..., n\}^k : a_i \neq a_j \forall i, j = 1, ..., k \text{ mit } i \neq j\} =: \Omega_{II}$$
- Var III:
$$\{(a_1, ..., a_k) \in \{1, ..., n\}^k : a_1 < a_2 < ... < a_k\} =: \Omega_{III}$$
- Var IV:
$$\{(a_1, ..., a_k) \in \{1, ..., n\}^k : a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k\} =: \Omega_{IV}$$
- Baumdiagramm:



- Jeder der Pfade stellt einen möglichen Ausgang des Zufallsexperimentes der Variante I im Urnenmodell dar.
- Für Varianten II - IV müssten bestimmte Pfade weggelassen bzw. miteinander identifiziert werden (z.B. kein doppeltes Vorkommen).

2.4 Lemma Mächtigkeit des karthesischen Produktes

Für zwei eindliche Mengen A, B gilt

$$|A \times B| = |A| * |B|$$

2.5 Satz Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Beweis:

1) $\binom{n}{k}$ = Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, ..., n\}$
2) Mit jeder k-elementigen Teilmenge wird auch ihr Komplement T^C festgelegt. Es handelt sich dann um eine $(n-k)$-elementige Teilmenge von $\{1, ..., n\}$

$$\hookrightarrow |\{T \subset \{1, ..., n\} : |T| = k\}| = |\left\{T^C : T \subset \{1, ..., n\}\; und\; |T^C| = k\right\}|$$

1) & 2) zusammen ergeben die Aussage ■

2.6 Binomischer Lehrsatz

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$$

Beweis:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) * ...(a+b)$$

Durch ausmultiplizieren erhalten wir eine Summe, bei der jeder Term ein Produkt von n Faktoren ist. Jeder der Faktoren kann nur die Werte "a" oder "b" annehmen.
$\hookrightarrow$ Die Terme sind von der Gestalt $a^k b^{n-k}$, wobei $k = 0, ..., n$ Für jedes feste k gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten ■

3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle

Als Verallgemeinerung des Laplace-Modells im folgendem Sinn:

- endliche oder abzählbar undendliche Ergebnismenge
- die Elemtarereignisse (typischerweise) nicht mehr alle gleichwahrscheinlich

3.1 Definition Abzählbar & Unendlich

Eine Menge Ω heißt abzählbar unendlich, wenn sie mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist.

3.2 Definition Diskreter W-Raum

Sei Ω eine höchstens abzählbare nichtleere Menge und

$$\rho : \Omega \to [0,1], \omega \to \rho(\omega)$$

eine Funktion mit

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

Dann heißt ρ eine *(Zähl)-Dichte*, W-Vektor oder Gewichtsfunktion auf Ω. Die Abbildung

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], E \mapsto P(E) := \sum_{\omega \in E} \rho(\omega)$$

wird als W-Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ genannt. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ wird als *diskreter W-Raum* bezeichnet.

3.3 Definition Ereignisraum

Sei Ω eine höchstens abzählbare Ergebnismenge. Dann versteht man unter einem *Ereignisraum* das Paar $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Frage: Warum wird P als W-Maß bezeichnet?

- Der Wert $P(E)$, den P dem Ereignis $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ zuordnet, wird als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E interpretiert
- Speziell für Elementarereignisse $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ erhalten wir gemäß der Definition von P die Relation

$$P(\{\omega\}) = \rho(\omega)$$

3.4 Satz (Begründung für die Interpretation)

Ist $\rho : \Omega \to [0,1]$ eine Gewichtsfunktion, d.h.

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1,$$

dann erfüllen die Funktionswerte $P(E), E \in \mathcal{P}(\Omega)$ des zugehörigen W-Maßes

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], E \to P(E) = \sum_{\omega \in E} \rho(\omega)$$

die *kolmogorovschen Axiome* A1 bis A3 (siehe Einleitung).

Beweis:

zu A1) zu zeigen ist $0 \leq P(E) \leq 1, \forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(E) =^{def} \sum_{\omega \in E} \rho(\omega) \geq \sum_{\omega \in E} 0$$

$$\hookrightarrow \rho(\omega) \geq 0 \,, \forall \omega \in \Omega$$

$$P(E) =^{def} \sum_{\omega \in E} \rho(\omega) \leq \sum_{\omega \in E \cup E^C} \rho(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} = 1$$

$$\hookrightarrow \text{ da } \rho(\omega) \geq 0 \,, \forall \omega \in \Omega$$

zu A2)

$$\mathcal{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

zu A3) Seien $E_1, ..., E_n$ paarweise disjunkte Ereignisse

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{n}(E_i)} \rho(\omega) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

3.5 Beispiel Urne

Sei U eine Urne mit n Kugeln, d.h. $|U| = n$. Die Kugeln in U besitzen ein weiteres Unterscheidungsmerkmal, hier die Farbe.

- Sei $S \subset U$ die Teilmenge der schwarzen Kugeln
- Sei $W \subset U$ die Teilmenge der weißen Kugeln
- Gelte $S \cup W = M$

Betrachte das *Zufallsexperiment* $\mathcal{E}$:
Es wird eine Kugel aus M entnommen und die Farbe notiert.
$\hookrightarrow$ Ergebnismenge von $\mathcal{E} : \Omega = \{s, w\}$

$\rightarrow$ **Frage:** Wie wahrscheinlich ist es, das ich eine schwarze Kugel ziehe?

Antwort: $P(E) = \frac{|S|}{M} = \tilde{P}(S)$

Begründung: Dem Experiment $\mathcal{E}$ liegt ein Laplace-Experiment $\tilde{\mathcal{E}}$ zugrunde.
$\tilde{\mathcal{E}}$: Es wird eine Kugel aus M gezogen mit dem zugehörigen W-Raum

$$(\tilde{\Omega} = U, \mathcal{P}(U), \tilde{P}) \quad wobei \quad \tilde{P}(E) = \frac{|E|}{n}$$

Betrachten wir jetzt die Abbildung

$$f(\tilde{\omega}) = \begin{cases} s & \text{, falls } \tilde{\omega} \in S \\ w & \text{, sonst } \widehat{=} \tilde{\omega} \in W \end{cases}$$

Dann erhalten wir die Ergebnismenge Ω von $\mathcal{E}$ als Bildmenge von $\tilde{\Omega} = U$ untert der Abbildung f, das heißt

$$\Omega = f(\tilde{\Omega})$$

und die Gewichtsfunktion:

$$\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

ergibt sich aus

$$\rho(\omega) = P(\{\omega\}) = \tilde{P}(f^{-1}(\{\omega\})) = \frac{|f^{-1}(\{\omega\})|}{n}$$

3.6 Definition Mengen in Funktionen

Seien A, B nichtleere Mengen und

$$f : A \rightarrow B$$

eine Abbildung mit dem Definitionsbereich A und Bildbereich B. Für jedes $M \subset A$ heißt die Menge

$$f(M) = \{f(a) \in B : \ a \in M\} \subset B$$

Die *Urbildmenge* von $S \subset B$ und f ist gegeben durch

$$f^{-1}(S) := \{a \in A : \ f(a) \in S)\}$$

Beispiel:

$$f : \ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , x \longmapsto e^x, \quad f^{-1}([0, 1]) = \mathbb{R}$$

4 Zufallsvariablen

4.1 Definition Zufallsvariable

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega^{'}), P)$ diskreter W-Raum
- Ω höchstens abzählbar
  $\hookrightarrow X : \Omega^{'} \to \Omega$ heißen Zufallsvariablen mit Werten in Ω und Verteilung

$$P_X(E) := P(X^{-1}(E)),\ \forall E \subset \Omega$$

- Mit dem Konzept einer Zufallsvariable werden in der Wahrscheinlichkeitstheorie Zufallsexperimente beschrieben.
- Eine Zufallsvariable mit Werten in Ω beschreibt ein Zufallsexperiment, dessen Ergebnismenge gleich Ω oder einer Teilmenge von Ω ist. Genauer gibt $X(\Omega^{'})$ die Ergebnismenge des Zufallsexperimentes an.
- Die Verteilung P_X der Zufallsvariable X ist formal ein W-Maß. Damit stellt das Tripel $(\Omega, \mathcal{P}\Omega, P_X)$ einen diskreten W-Raum dar.

4.2 Theorem

Seien $(\Omega^{'}, \mathcal{P}(\Omega^{'}), P)$ ein diskreter W-Raum und X eine Abbildung auf $\Omega^{'}$, dann ist durch

$$P_X :\ P(\Omega) \to [0, 1]$$

$$E \longmapsto P(X^{-1}(E))$$

wobei $\Omega = X(\Omega^{'})$ ein W-Maß auf $P(\Omega)$ definiert.

Beweis: Wir konstruieren eine Gewichtsfunktion

$$\rho : \Omega \to [0, 1]$$

so dass $\forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt:

$$P_X(E) = \sum_{\omega \in E} \rho(\omega)$$

Unser Ansatz:

$$\forall \omega \in \Omega$$

$$\rho(\omega) = P(X^{-1}(\{\omega\})) \quad mit \quad X^{-1}(\{\omega\}) \subset \Omega^{'}$$

Da P nach Voraussetzung ein W-Maß ist, gilt dann $\rho(\omega) \in [0,1]$.
Zum anderen erhalten wir

$$\sum_{\omega\in\Omega} \rho(\omega) =^{def} \sum_{\omega\in\Omega} P\left(X^{-1}(\{\omega\}\right) =^{\text{i}} P\left(\bigcup_{\omega\in\Omega} X^{-1}(\{\omega\})\right) = P(\Omega') = 1 \quad \blacksquare$$

4.2.1 Beispiel Augensumme

Zufallsexperiment $\mathcal{E}$: Es werden 2 Spielwürfel nacheinander geworfen und die Augensumme notiert.

$\hookrightarrow$ **Frage:** Was ist das geeignete W-Modell für $\mathcal{E}$?
alternativ: Wie sieht die Zufallsvariable X: "Augensumme von zwei 6-seitigen Würfeln" formal aus?

Antwort: Die Ergebnismenge von $\mathcal{E}$ ist $\Omega = \{2, ..., 12\} \Rightarrow |\Omega| = 11$

Beobachtung: Das Laplace-Modell scheint ungeeignet, da es mit dem Zufallsexperiment $\mathcal{E}$: "Ein Spielwürfel wird 2 mal nacheinander geworfen und die Augenzahl notiert" nicht konsistent ist.
Wir formulieren eine geeignete Abbildung:

$$X : \Omega' \to \Omega \quad \text{wobei} \quad \Omega' = \{1, ..., 6\}^2\ ,\ |\Omega'| = 36$$

$$\hookrightarrow (a,b) \to a+b$$

$$\Rightarrow\ \rho(\omega) = P(\{\omega\}) := P'(X^{-1}(\{\omega\})) = \frac{|X^{-1}(\{\omega\})|}{36}$$

$$= \frac{|\{(a,b):\ a,b \in \{1, ...6\}\ ,\ a+b=\omega\}}{36}$$

$$\hookrightarrow \rho(\omega) = \frac{1}{36} * (6 - |\omega - 7|)\ ,\ \omega \in \{1, ..., 12\} = \Omega$$

Die Verteilung P_X ist dann das W-Maß zur Gewichtsfunktion ρ, die in der vorherigen Gleichung festgelegt ist. Es gibt mehrere wichtige Verteilungen.

4.3 Definition Bernoulli-Verteilung

Sei $p \in [0,1]$. Die Verteilung auf $\mathcal{P}(\Omega)$, wobei $\Omega = \{0,1\}$, zur Gewichtsfunktion $\rho(1) = p$ und $\rho(0) = 1-p$ heißt *Bernoulli-Verteilung zum Parameter* p und wird mit B_p bezeichnet.

[i] Siehe 3.4

4.4 Definition Bernoulli-Experiment

Ein Zufallsexperiment heißt *Bernoulli-Experiment*, wenn es durch eine Bernoulli -verteilte Zufallsvariable beschrieben wird.
Bernoulli-Experimente haben folgende Eigenschaften:

- Ergebnismenge $= \{0, 1\}$
- Modellieren zum Beispiel das Werfen einer Münze, wobei "Zahl" und "Kopf" durch die Werte "0" bzw. "1" kodiert werden
- Allgemein interpretiert man

$$\begin{aligned} 1 &\;\widehat{=}\; \text{Treffer/Erfolg} \\ 0 &\;\widehat{=}\; \text{kein Treffer/Misserfolg} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ B_p ist die Bernoulli-Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

- Häufig steht "1" sinngemäßt für "Ja" und "0" für "Nein", wenn die betreffende Zufallsvariable das Eintreten bzw. Nicht-Eintreten eines Ereignisses beschreibt.

4.5 Definition Indikatorfunktion

Seinen Ω eine Menge und $M \subseteq \Omega$. Die auf Ω definierte Funktion

$$\mathit{1}_M(\omega) := \begin{cases} 1 & , \omega \in M \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* von M auf Ω.

4.5.1 Beispiel

Beispiel 1 Ein 6-seitiger Würfel wird geworfen und die Augenzahl "6" als Treffer gewertet.

$\hookrightarrow$ Zufallsvariable: Es wird ein Treffer erzielt ist Bernoulli-verteilt zum Parameter $p = \frac{1}{6}$
$\hookrightarrow$ formal:

$$\begin{aligned} X : \{1, ..., 6\} &\to \{0, 1\} \\ \omega &\to \mathit{1}_{\{6\}}(\omega) \end{aligned}$$

Beispiel 2 Ein 6-seitiger Würfel wird dreimal nacheinander geworfen und jeweils die Augenzahl notiert. Ab einer Augensumme =15 wird ein Gewinn ausgezahlt.

$\hookrightarrow$ Zufallsvariable Z: Gewinnauszahlung
$\hookrightarrow$ formall:

$$Z = \mathit{1}_{\{X \geq 15\}} \circ X^{\text{ii}}$$

[ii] Zufallsvariable: Augensumme nach 3 Würfen

somit $Z : \{1, ..., 6\}^3 \to \{0, 1\}$

4.5.2 Definition

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Dann ist die Verkettung $g \circ f$ definiert als die Abbildung

$$g \circ f : \quad A \to C, \ a \to g \circ f(a) := g\,(f(a))$$

4.6 Definition Gleichverteilte Zufallsvariablen

Sei Ω eine endliche Menge. Das W-Maß auf Ω mit der (konstanten) Zähldichte

$$\rho(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}\,, \ \ \omega \in \Omega$$

heißt *Gleichverteilung auf* Ω und wird mit $\mathcal{U}_\Omega$ bezeichnet.

4.7 Definition Binomialverteilung

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Das W-Maß auf $\{0, 1, ..., n\}$ mit der Zähldichte

$$\rho(k) := \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}\,, \ \ \forall\, k = 0, 1, ..., n$$

heißt *Binomialverteilung zu den Parametern* n *und* p. (Notation $= B_{n,p}$)

Beispiel: Beim n-maligen Werfen eines 6-seitigen Würfels wird jedes Mal, wenn die Augenzahl “6” fällt, ein Treffer gezählt.
$\hookrightarrow$ Zu X: Anzahl der Treffer bei n Versuchen
X ist *binomialverteilt.*

Herleitung: Das Zugrunde liegende Zufallsexperiment ist
$\mathcal{E}'$: ein fairer 6-seitiger Würfel wird n-mal geworfen und jeweils die Augenzahl notiert. $\mathcal{E}'$ stellt ein Laplace-Experiment der Ordnung $N = 6^n$ dar. Bezeichne Ω' die Ergebnismenge, d.h. $\Omega' = \{1, ..., 6\}^n$, dann ist $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), \mathcal{U}_{\Omega'})$ der zugehörige Laplace-Raum.

$$X : \Omega' \to \{0, 1, ..., n\}$$

$$\omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{6\}}(\omega_i)$$

Diese Abbildung stellt die betreffende Zufallsvariable X dar!

$$\begin{aligned}\hookrightarrow P_X(\{k\}) &= \mathcal{U}_{\Omega'}\left(X^{-1}(\{k\})\right) \\ &= \frac{|X^{-1}(\{k\})|}{6^n} \\ &= \frac{\binom{n}{k} * 5^{n-k}}{6^{n-k+k}} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

4.8 Definition

Seien P ein W-Maß und X eine Zufallsvariable. Wir schreiben $X\ P$, wenn die Verteilung P_X von X gleich P ist.

4.8.1 Hypergeometrisch verteilte Zufallsvariablen

Beispiel In einer Urne befinden sich N Kugeln, davon sind k rot und die anderen $N-k$ Kugeln sind weiß. Es werden m Kugeln blind gezogen.
$\hookrightarrow$ Frage: Wie ist folgende Zufallsvariable X verteilt?
X: Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe(vom Umfang m)
Wir stellen X als eine Abbildung auf dem Laplace-Raum $(\Omega^{'}, \mathcal{P}(\Omega^{'}), P)$ dar, der zum Laplace-Experiment $\mathcal{E}^{'}$ gehört.

$\hookrightarrow$ $\mathcal{E}^{'}$: Es werden m Kugeln blind und gleichzeitig aus der Urne gezogen

$\hookrightarrow$ Ergebnismenge $\Omega^{'}$ zu $\mathcal{E}^{'}$:

$$\begin{aligned}\Omega^{'} &= \{X \subseteq \{1, ..., N\} \ : \ |X| = m\} \\ &= \{(\omega_1, ..., \omega_m) : \forall i = 1, ..., m \ : \omega_i \in \{1, ..., N\}, \\ &\quad \text{und } \omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_m\}\end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ $|\Omega^{'}| = \binom{N}{m}$

Bezeichne jetzt K die Teilmenge der roten Kugeln. Die Zufallsvariable X wird als Abbildung auf $(\Omega^{'}, \mathcal{P}(\Omega^{'}), \mathcal{U}_{\Omega'})$ dargestellt.

$$X : \omega \in \Omega^{'} \longmapsto \sum_{i=1}^{m} \mathit{1}_K(\omega_i)$$

$\hookrightarrow$ Verteilung P_X von X ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}P_X(\{l\}) &= \mathcal{U}_{\Omega'}\left(X^{-1}(\{l\})\right), \ \forall l = 0, ..., min\{m, |k|\} \\ &= \frac{\binom{k}{l} * \binom{N-K}{m-l}}{\binom{N}{m}}\end{aligned}$$

In folgenden Fällen ist $X^{-1}(\{l\}) = \emptyset$:

- $l > k$
- $N - k < m - l$

$$\hookrightarrow X\left(\Omega^{'}\right) = \{l * max\{0, mi\,(N-k)\} \leq l \leq min\{m, k\}\}$$

Bemerkung: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & , k < 0 \\ 0 & , k > n \\ \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} & , \text{sonst} \end{cases}$$

4.9 Definition Zähldichte

Seien $\mathcal{N}, m, k \in \mathbb{N}$ mit $K < \mathbb{N}$ und $m \leq \mathbb{N}$. Das W-Maß mit der *Zähldichte*

$$\rho : \{0, 1, ...m\} \to [0, 1], \;\; l \to \frac{\binom{k}{l}\binom{n-k}{m-l}}{\binom{N}{m}}$$

Beispiele für Zufallsvariablen, die abzählbar unendlich viele Werte annehmen.

- *Geometrische Verteilung*

4.10 Definition Geometrische Verteilung

Sei $p \in (0, 1)$. Das W-Maß mit der Zähldichte

$$k \in \mathbb{N}_0 \to \rho(k) := (1-p)^k * p$$

heißt *geometrische Verteilung* zum Parameter p und wird mit G_p bezeichnet.

Bemerkung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p \quad \text{iii}$$

Beispiel: Eine Münze wird so lange geworden bis Z fällt.
$\hookrightarrow$ Zufallsvariable: X Anzahl der Versuche, bis Z fällt ist geometrisch verteilt zum Parameter $p = 0, 5$.

[iii] geometrische Reihe

Diskussion: Da es beliebig viele Versuche sein können bis $Z(=1)$ fällt, scheint folgende Menge geeignet, in X auf Ω zu modellieren.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, ...) : x_i \in \{0,1\} : \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Modifizierte Version: Wir brechen nach n Versuchen ab, unabhängig davon ob ein Treffer erzielt wurde oder nicht.

$$\tilde{\Omega} = \{(x_1, ..., x_n\} : x_i \in \{0,1\} \forall i = 1, ..., n\}$$

X ist Anzahl der Versuche bis eine *1* fällt. Dies wird dargestellt als Abbildung auf den Laplace-Raum $(\tilde{\Omega}, \mathcal{P}(\tilde{\Omega}), P)$

Konkret:

$$X : (x_1, ..., x_n) \in \tilde{\Omega} \to \begin{cases} k \in \{0, ..., n-1\} & \text{,so dass } x = 1 \text{ und } x_j = 0 \\ n & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \rho(k) = P_X(\{k\}) = \frac{|X^{-1}(\{k\})|}{2^n} = \frac{2^{n-k-1}}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^k * \frac{1}{2} \; \forall k = 0, ..., n-1$$

Das nennt man auch *Poisson-Verteilung*

4.11 Definition Poisson-Verteilung

Sei $d > 0$. Das W-Maß mit der Zähldichte

$$\rho : \mathbb{N}_0 \to [0,1], k \mapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

heißt *Poisson-Verteilung* zum Parameter d und wird mit P_λ bezeichnet.

Bemerkung:

- λ wird als mittlere Rate interpretiert, mit der ein Ereignis in einem vorgegebenen Zeitfenster J beobachtet wird
- $\mathcal{P}_\lambda$ ist die Verteilung der Zufallsvariablen "Anzahl der Ergebnisse in J"

Beispiele:

- Anzahl der ankommenden E-Mails/Tag
- Anzahl der Versicherungsfälle pro Jahr
- Anzahl der Kunden pro Stunde

Bemerkungen:

$$\rho(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, ...$$

$$\hookrightarrow \text{Dichte } e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\lambda}}{k!}$$

5 Erwartungswerte und Varianz

5.1 Definition Reelwertigen Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable, die Werte in $\mathbb{R}$ annimmt heißt *reele Zufallsvariable.* Alle bisherigen Zufallsvariablen sind Beispiele reeller Zufallsvariablen. Genauer handelt es sich bei den Zufallsvariablen um *diskret verteilte* Zufallsvariablen. Das für diese ist, dass die Werte in einer höchstens abzählbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ annehmen:

- $\Omega = \{0, 1\}$ bei $X \sim \mathcal{B}_p \quad (p \in [0, 1])$
- $\Omega = \{0, 1, ..., n\}$ bei $X \sim \mathcal{B}_{n,p}$
- $\Omega = \{0, 1, ..., m\}$ bei $X \sim \mathcal{H}_{m,k,N-k}$
- $\Omega = \mathbb{N}$ bei $X \sim \mathcal{P}_{\lambda}$ sowie $X \sim \mathcal{G}_p$

Jede auf einem diskreten W-Raum $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P)$ definierte Zufallsvariable X gehört zu den diskreten Zufallsvariablen, denn $X(\Omega')$ ist eine höchstens abzählbare Menge.

5.2 Definition Erwartungswert

Sei X eine reele Zufallsvariable, die Werte in einer endlichen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ annimmt, dann heißt der Wert

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x\in\Omega} xP(X = x) = \sum_{x\in\Omega} xP_X(\{x\})$$

Erwartungswert von X.

Sei X eine Zufallsvariable, die abzählbar unendlich viele Werte $x_i, i \in \mathbb{N}$ annehmen kann, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p, so heißt

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Erwartungswert (EW) von X, wenn die eben aufgeführte Reihe absolut konvergent ist.

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ absolut konvergent } \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$$

Der Erwartungswert ist eine reelle Zahl.

Interpretation:

- Diese Zahl gibt den Wert an, den die betreffende Zufallsvariable im Mittel annimmt. Dabei gewichten wir die einzelnen Werte x, die X annehmen kann, entsprechend der Wahrscheinlichkeit p_x des Eintretens des Elementarereignisses $X = x$.
- Wenn wir das Experiment X unter identischen Bedingungen und ohne gegenseitige Beeinflussung oft wiederholen, erwarten wir, das dass arithmetische Mittel der einzelnen Ergebnisse für ein geeignetes W-Modell nah bei $\mathbb{E}(X)$ liegt

Beispiele

a) Erwartungswert von $X \sim \mathcal{B}_p$
$\mathbb{E}(X) = 0(1-p) + 1 * p = p$

b) $\Omega = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}$ und $X \sim \mathcal{U}_\otimes$:
$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ entspricht Mittel der Zahlen $x_1, ..., x_n$

c) Erwartungswert von $X \sim \mathcal{B}_{n,p}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k\mathcal{B}_{n,p}(\{k\}) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(n-k)!k!} p\, p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n np \binom{n-1}{k-n} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{l=o}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-1-l} = np
\end{aligned}$$

d) Erwartungswert von $X \sim \mathcal{P}_\lambda$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^\infty k\, \mathcal{P}_\lambda(\{k\}) \\
&= \sum_{k=1}^\infty k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen Poisson-und Binomialverteilung

Beispiel:

- Sei $\lambda > 0$ die mittlere Anzahl von Kunden, die ein Blumengeschäft im Zeitintervall I (z.B. $I = 10$ Stunden) betreffen.
- Wir zerlegen das Zeitintervall I in n gleich große Teilintervalle
- Mit wachsendem n wird bei festen I die Länge der Teilintervalle[iv] immer kürzer

$\hookrightarrow$ Ansatz für die Wahrscheinlichkeit p_n, dass ein Teilintervall der Länge $\frac{I}{n}$ ein Kunde den Laden betritt

$$p_n = \frac{\lambda}{n}$$

Annahme: Ob ein Kunde im gegebenen Teilintervall den Laden betritt ist unabhängig davon, ob im anderen Teilintervall das Ereignis eintritt.
$\hookrightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Intervall I der Blumenladen von k Kunden besucht wird, wird entsprechend durch die Binomialverteilung bestimmt:

$$\mathcal{B}_{n,\,p_n=\frac{\lambda}{n}}(\{k\}) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Dann lässt sich zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{n,\frac{\lambda}{n}}(\{k\}) = \mathcal{P}_\lambda(\{k\})$$

5.3 Theorem

Seien $\lambda > 0$ und $p_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge, so dass $\lim_{n\to\infty} n\,p_n = \lambda$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{n,p_n}(\{k\}) = \mathcal{P}_\lambda(\{k\})$$

5.4 Definition

Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zwei Folgen

$$f(k) \sim g(k) \text{ für } k \to \infty \Leftrightarrow \frac{f(k)}{g(k)} = 1 \text{ für } k \to \infty$$

[iv] $= \frac{I}{n}$

5.5 Lemma

Sei $k \in \mathbb{N}$, dann gilt im Grenzwert $n \to \infty$

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$$

Beweis zu Lemma 5.4

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n^k}{k!}\frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^{k-1}} \\ &= \frac{n^k}{k!}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n}\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n}...\frac{n\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{n} \\ &\sim \frac{n^k}{k!}\end{aligned}$$

5.6 Theorem

Sei $\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P)$ eine diskreter W-Raum und X, Y zwei Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ definiert. Dann gilt:

a) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

b) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

c) $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

Beweis: a)

$$\mathbb{E}(cX) \overset{1}{=} \sum_{z\in\Omega} zP_{cX}(\{z\}) = \sum_{z\in c\Omega} zP_X\left(\left\{\frac{z}{c}\right\}\right) = \sum_{x\in\Omega} cxP_X(\{x\}) = c\mathbb{E}(X)$$

1. cX ist eine Zufallsvariable mit Werten in $c\Omega =: \{cx \in \mathbb{R} : x \in \Omega\}$ eine Verteilung P_cX

2.

$$\begin{aligned} cX : \Omega \mapsto c\Omega &\quad \text{ist eine Zufallsvariable über} \\ x \mapsto cX &\quad (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_X) \text{ , wobei}\end{aligned}$$

$$P_X = P \circ X^{-1}$$

$$\hookrightarrow P_{cX} = P_X \circ (cX)^{-1} \Rightarrow P_cX(\{z\}) = P_X(cX = z) = P_X\left(\left\{\frac{z}{c}\right\}\right)$$

5.7 Definition Varianz

5.7.1 Endliche Zufallsvariable

Sei X eine endlich Zufallsvariable, mit Werten $x \in \Omega$, mit Wahrscheinlichkeit p_x. Dann heißt:

$$\sum_{x \in \Omega} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, p_x =: \mathrm{Var}(X)$$

die *Varianz*[v] von X.

5.7.2 Abzählbare Zufallsvariable

Sei X eine abzählbar, unendliche Zufallsvariable, mit den Werten $x \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, mit einem abzählbaren Ω mit Wahrscheinlichkeit p_i und der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ ist konvergent. Dann heißt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \, p_i =: \mathrm{Var}(X)$$

die Varianz von X.

Bemerkung:

$$\mathrm{Var}(X) \geq 0$$
$$\mathrm{Var}(X) = \infty \text{ sind möglich}$$

$$\forall X \exists v \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \mathrm{Var}(X) = v$$

5.8 Definition Standardabweichung

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathrm{Var}(X) \in \mathbb{R}$, dann wird

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Standardabweichung genannt.

Interpretation: Die Varianz gibt den Mittelwert der Abweichung zum Quadrat der Zufallsvariable X gegenüber des Erwartungswertes $\mathbb{E}(X)$ an.

[v] Auch *Streuung* genannt.

a) $X \sim \mathcal{B}_p$, mit $\mathbb{E}(X) = p$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= (1-p)^2\, p + (0-p)^2\,(1-p) \\ &= (1-p)\left(p\,(1-p) + p^2\right) \\ &= (1-p)\left(p - p^2 + p^2\right) \\ &= (1-p)\,p \\ \text{und } \sigma(X) &= \sqrt{(1-p)\,p}\end{aligned} \tag{1}$$

b) $X \sim \mathcal{U}_{\Omega_n}$ mit $\Omega_n = \{x_1, ..., x_n\}, \quad x_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{Dann ist } \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{n}\sum_{x\in\Omega_n} x =: \bar{x} \\ \hookrightarrow \operatorname{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

5.9 Definition Zweiter Moment

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten $x \in \Omega$ mit Wahrscheinlichkeiten p_x, wenn

$$\sum_{x\in\Omega} x^2 p_x$$

konvergent, dann nennt man diesen Wert *das zweite Moment von* X.

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x\in\Omega} x^2 p_x$$

5.10 Theorem

Sei X eine Zufallsvariable mit reellen, diskreten Werten und dem Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = m$. Wenn $\mathbb{E}(X^2) \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

.

5.10.1 Beispiele

Beispiel 1: $X \sim \mathcal{B}_{n,p}$, $\mathbb{E}(X) = np$, $\operatorname{Var}(X) =$? bzw. $\sigma(X) =$?

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (np)^2 \\
&= \sum_{k=o}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} npk \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{(n-1)-l}, \quad \tilde{X} \sim \mathcal{B}_{n-1,p} \\
&= np \left(\mathbb{E}(\tilde{X}) + 1 \right) - (np)^2 = np\left((n-1)\,p + 1\right) - (np)^2 = np(1-p)
\end{aligned}$$

und $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Beispiel 2 X ist eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, 1\}$ und zugehöriger Zähldichte

$$\rho(-1) = \frac{1}{2} \text{ und } \rho(1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow \mathbb{E}(X) &= (-1)\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\
\operatorname{Var}(X) &= (-1)^2 \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
\hookrightarrow \sigma(X) &= \sqrt{1} = 1
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$X \sim P_\lambda \quad (\lambda > 0),\ \mathbb{E}(X) = \lambda$$

Wir brauchen das zweite Moment von X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) e^{-l} \frac{\lambda^l}{l!} \text{ , } l := k-1 \\
&= \lambda \cdot (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

6 Stochastische Unabhängigkeit

6.1 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter W-Raum. Zwei Ereignisse $E, F \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißen *stochastisch Unabhängig* bezüglich P, wenn

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

gilt.

Beispiel: Es wird ein blauer und ein roter Spielwürfel geworfen. Im entsprechenden Laplace-Modell mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$ sind die Ereignisse:

a) B: der blaue Würfel zeigt die Augenzahl "2"
R: der rote Würfel zeigt die Augenzahl "4"
stochastisch unabhängig, denn

$$|B| = |\,\{(b, r) \in \Omega : \ b = 2\}\,| = 6 \Rightarrow \ P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$|R| = |\,(\{(b, r) \in \Omega : \ r = 4\}\,| = 6 \Rightarrow \ P(R) = \frac{1}{6}$$

$$|B \cap R| = |\{(2, 4)\} = 1 \Rightarrow P(B \cap R) = \frac{1}{36}$$

d.h. $P(B \cap R) = P(B) \cdot P(R)$

b) B und $R_{>2}$: der rote Würfel zeigt die Augenzahl > 2 stochastisch unabhängig, denn

$$|R_{>2}| = |\{(b, r) \in \Omega : \ r > 2\}| = 6 \cdot 4 = 24 \Rightarrow P(R_{>2}) = \frac{2}{3}$$

$$|B \cap R_{>2}) = \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = P(B) \cdot P(R_{>2})$$

c) B und E_g: beide Augenzahlen sind gerade
stochastisch *abhängig*, denn

$$|E_g| = |\{(b,r) \in \Omega : \ b,r \in \{2,4,6\}\}| = 9 \Rightarrow \ P(E_g) = \frac{1}{4}$$

$$|E_g \cap B| = |\{(b,r) \in \Omega : \ b = 2, r \in \{2,4,6\}\}| = 3$$

$$\Rightarrow P(E_g \cap B) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = P(E_g) \cdot P(B)$$

d) B und E: beide Augenzahlen sind gerade oder beide sind ungerade

$$E = E_g \cup E_u \quad \Rightarrow P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

so dass B und E stochastisch unabhängig sind bezüglich $P = \mathcal{U}_\Omega$

Bemerkung: Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ein diskreter Ereignisraum. Dann sind je zwei disjunkte Ereignisse $E, F \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $E, F \neq \varnothing$ stochastisch abhängig bezüglich jedem W-Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, dessen zugehörige Zähldichte ρ auf Ω strikt positiv ist ($\rho(\omega) > 0 \, \forall \omega \in \Omega$), denn

$$P(E \cap F) = P(\varnothing) = 0 \neq \underbrace{P(E)}_{= \sum_{\omega \in E} \rho(\omega) > 0} \cdot P(F) > 0$$

6.2 Definition Unabhängige Zufallsvariablen

Seien $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter W-Raum und X, Y zwei Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ jeweils mit Werten in Ω_X beziehungsweise Ω_Y. Dann heißen X und Y unabhängige Zufallsvariablen, wenn $\{X \in E\}$ und $\{Y \in F\}$ bezüglich P stochastisch unabhängig sind für jede Wahl von Ereignissen $E \subset \Omega_X$ und $F \subset \Omega_Y$.

Beachte:

$$\{X \in E\} = X^{-1} \underbrace{(E)}_{\in \Omega_X} = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in E\}$$

Wir können die Unabhängigkeit von X & Y wie folgt definieren(*):
X, Y sind unabhängige Zufallsvariablen

$$:\Leftrightarrow P(X \in E, Y \in F) = P(X \in E) \cdot P(Y \in F) \quad \forall E \subseteq \Omega_X \, , \forall F \subseteq \Omega_Y$$

Aus dieser Relation folgt(**):

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad \forall x \in \Omega_X \text{ und } \forall y \in \Omega_Y$$

Umgekehrt impliziert (**) die Relation (*), d.h. das X und Y unabhängig sind. Wie sieht man das?

- $x \in \Omega \longmapsto \rho_X(x) := P(X = x)$ ist die Gewichtsfunktion der Verteilung P_X von X
- $y \in \Omega_Y \longmapsto \rho_Y(y) := P(Y = y)$ ist die Gewichtsfunktion der Verteilung P_Y von Y
- $(x, y) \in \Omega_X \times \Omega_Y \longmapsto P(X = x, Y = y)$ ist die Gewichtsfunktion der Verteilung einer Zufallsvariable mit Werten aus $\Omega_X \times \Omega_Y$

6.3 Lemma Unabhängigkeit

Unter der Voraussetzung aus der Definition Unabhängige Zufallsvariablen (siehe 6.2) sind zwei Zufallsvariablen X und Y auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ unabhängig genau dann, wenn für jedes $x \in \Omega_X$ und jedes $y \in \Omega_Y$ gilt

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

6.3.1 Beispiel 1

$\mathcal{E}$: n-maliges Werfen eines Spielwürfels
$\hookrightarrow$ Der W-Raum zu diesem Zufallsexperiment ist:

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P = \mathcal{U}_\Omega) \text{ mit } \Omega := \{1, ...6\}^n$$

Seien $1 \leq k, l \leq n$ mit $k \neq l$. Dann sind

- X_k: Augenzahl bei Wurf k, und
- X_l: Augenzahl bei Wurf l

Denn für jedes $x \in \Omega_{X_k} := X_k(\Omega)$ und jedes $y \in \Omega_{X_l} := X_l(\Omega)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P(X_k = x, X_l = y) &= P(\{\omega \in \Omega : \omega_k = x, \omega_l = y\}) \\ &= \frac{6^{n-2}}{6^n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(X_k = x) \cdot P(X_l = y) \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.3 sind somit X_k und X_l zwei unabhängige Variablen.

6.3.2 Beispiel 2

Gegeben: eine Urne mit 10 gleichartigen, aber nummerierten Kugeln.

Zufallsexperiment: Stichprobe ohne Zurücklegen: es werden 2 Kugeln nacheinander gezogen

- X: Nummer der ersten gezogenen Kugel
- Y: Nummer der zweiten gezogenen Kugel

6.4 Definition Familie von Ereignissen

Seien $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter W-Raum und I eine beliebige, nicht leere Indexmenge. Eine Familie von Ereignissen $E_i \in \mathcal{P}(\Omega) \in I$, heißt *stochastisch unabhängig*, wenn für jede endliche Teilmenge $J \in I$

$$P\left(\bigcap_{j\in J} E_j\right) = \prod_{j\in J} P(E_j)$$

gilt.

Beispiel: (Kontext: Beispiele zur Definition 6.1)
Die Familie der Ereignisse B, E und R ist nicht stochastisch unabhängig, obwohl die Ereignisse *paarweise* stochastisch unabhängig sind (Wie wir bereits nachgerechnet haben), denn

$$B \cap \ R \cap E = \varnothing \quad \Rightarrow P(\varnothing) = 0 \neq P(E) \cdot P(R) \cdot P(B)$$

Bemerkung: Auch die Familie B, E und R_4: **roter Würfel zeigt "4"** ist stochastisch *nicht* unabhängig.

6.5 Definition Unabhängige Familie

Seien $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter W-Raum, I eine beliebige, nicht-leere Indexmenge und $X_i, i \in I$ eine Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ jeweils mit Werten in einer höchstens abzählbaren Ω_{X_i}. Dann heißt die Familie $X_i, i \in I$ unabhängig, wenn für jede Wahl von Ereignissen $E_i \subset \Omega_i, i \in I$ eine stochastisch unabhängige Familie ist.

Standardbeispiel: Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{1, ..., 6\}^n$ und

$$\underbrace{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P = \mathcal{U}_\Omega)}_{\text{Experiment } \mathcal{E}\text{: n-maliges würfeln eines Würfels}}$$

.
Wir betrachten:

$$X_i : (\omega_1, ...\omega_n) \in \Omega \longmapsto \omega_i$$

$$P(X_{i_1} = x_{i_1}, ..., X_{i_m} = x_{i_m}) = \frac{6^{n-m}}{6^n} = \frac{1}{6^m} = \prod_{l=1}^{m} P(X_{i_l} = x_{i_l})$$

7 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Formaler Rahmen: $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretes W-Raum

<u>Gegeben</u>: $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse

<u>Annahme</u>: $P(A) > 0$

Szenario: Wir beobachten, dass A eingetreten ist.
$\hookrightarrow$ Frage: Wie ändert sich unter der obigen Annahme unsere Wahrscheinlichkeitsbewertung für B?
$\hookrightarrow$ Fallunterscheidung:

- Sind A und B stochastisch unabhängig
  $\hookrightarrow$ kein Anlass für eine Neubewertung

- A & B sind nicht stochastisch unabhängig
  $\hookrightarrow$ Wie genau soll die Neubewertung ausfallen?

Beispiel: Gegeben ist eine Urne mit N Kugeln, davon genau s schwarze und w weiße. D.h. $N = s + w$. $\hookrightarrow$ Modell: $U = \underbrace{\{1, ..., w\}}_{\text{Teilmenge der weißen Kugeln}} \cup \underbrace{\{w+1, ..., s+w\}}_{\text{Teilmenge der schwarzen Kugeln}}$

Zufallsexperiment: Es werden zwei Kugeln gezogen, ohne Zurücklegen.

$$\hookrightarrow \text{ Ergebnismenge } : \Omega = \{(k,l) : \ k,l \in U, k \neq l\}$$

$$\hookrightarrow |\Omega| = N \cdot (N-1) = (s+w) \cdot (s+w-1)$$

$$P = \mathcal{U}_\Omega \text{ Gleichverteilt auf } \Omega$$

Wir betrachten die Ereignisse:

A : 1. gezogene Kugel ist weiß

B : 2. gezogene Kugel ist weiß

A und B sind <u>nicht</u> stochastisch unabhängig bezüglich $P = \mathcal{U}_\Omega$, wobei $\Omega = \{(k,l) : \ k,l \in \mathcal{U}, k \neq l\}$, denn

- $P(A) = \frac{|A|}{(w+s)(w+s-1)} = \frac{w(w+s-1)}{(w+s)(w+s-1)} = \frac{w}{w+s}$

- $P(B) = P(A)$, da $|A| = |B|$ $(f : A \to B, (k,l) \to (l,k)$ ist eine Bijektion)

- $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{(w+s)(w+s-1)} \frac{w \cdot (w-1)}{(w+s)(w+s-1)} \neq \left(\frac{w}{w+s}\right)^2 = P(A) \cdot P(B)$
  $\hookrightarrow$ Bedingung für stochastische Unabhängigkeit <u>nicht</u> erfüllt $\Rightarrow$ A & B stochastisch unabhängig bezüglich $P = \mathcal{U}_\Omega$

Annahme: A ist eingetreten (1. gezogene Kugel ist weiß)

$\hookrightarrow$ **Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für B unter dieser Annahme?

Antwort:

$$\frac{w-1}{(w+s-1)} \neq \frac{w}{s+w} = P(B)$$

Hier gilt:

$$\frac{w-1}{w+s-1} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{w(w-1)}{(w+s)(w+s-1)} \cdot \frac{w+s}{w}$$

7.1 Definition Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter W-Raum und $A \subseteq \Omega$ mit $P(A) > 0$. Dann heißt für jedes $B \subseteq \Omega$

$$P(B|A) := \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit für B gegen A.

Beachte: Im Spezialfall, das A & B stochastisch unabhängig bezüglich P sind, gilt

$$P(B|A) = P(B) \left(\text{denn } P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(A)}\right)$$

Bemerkung: Bedingen macht keine Aussagen über Kausalitäten!
$\hookrightarrow$ Beispiel:

- 1. gezogene Kugel bleibt verdeckt
- 2. gezogene Kugel ist weiß (d.h. B tritt ein)

$\hookrightarrow$ **Frage:** Wahrscheinlichkeit dafür, dass A eingetreten ist, d.h. die verdeckte Kugel weiß ist?

$\hookrightarrow$ **Antwort:** $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{w-1}{w+s-1} \neq P(A)$

$\hookrightarrow$ Das Ereignis B hat keinen Einfluss auf das Eintreten von A. Trotzdem bewirkt B eine Neubewertung der Wahrscheinlichkeit für A. Das liegt daran das B Informationen aus A enthält. B wird nämlich durch A beeinflusst.

Beispiel: Ziehen einer Kugel aus einer von 2 Urnen.

Urne 1: enthält 7 rote und 3 schwarze Kugeln

Urne 2: enthält 9 rote und 1 schwarze Kugel

Es wird zufällig entschieden aus welcher Urne gezogen wird. (z.B. auf der Grundlage des Ergebnisses eines Münzwurfes)

Ergebnismenge des Zufallsexperimentes:

$$\Omega = \{1,2\} \times \{1,...,10\} = \{(a,b):\ a \in \{1,2\}\ ,\ b \in \{1,...,10\}\}$$

Wir betrachten die Ereignisse:

$$A = \{1\} \times \{1,...,10\} = \{(a,b) \in \Omega:\ a = 1\} \text{ (es wird aus Urne 1 gezogen)}$$

$$B = \{2\} \times \{1,...,10\} = \{(a,b) \in \Omega:\ a = 2\} \text{ (es wird aus Urne 2 gezogen)}$$

$$R = \{(a,b) \in \Omega\ ,\ a = 1,\ b \leq 7\} \cup \{(a,b) \in \Omega:\ a = 2,\ b \leq 9\}$$

$$S = \{(a,b) \in \Omega\ ,\ a = 1,\ b > 7\} \cup \{(a,b) \in \Omega:\ a = 2,\ b = 10\}$$

$\hookrightarrow$ **Frage:**

- Wahrscheinlichkeit, dass eine rote Kugel gezogen wird, wenn die Wahl für Urne 1 fällt. D.h. wir fragen nach der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(R|A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)}$$

- Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine schwarze Kugel gezogen wird, wenn die Wahl auf Urne 1 fällt:

$$\begin{aligned} P(S|A) &= \frac{P(S \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{|S \cap A|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\Omega|}{|A|} \\ &= \frac{|S \cap A|}{|A|} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen? D.h. $P(R) =?$

$$P(R) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}_{\text{Wofür stehen diese Zahlen genau}}$$

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(A) \cdot P(R|A) + P(B) \cdot P(R|B) \\
&= P(A) \cdot \frac{P(R \cap A)}{P(A)} + P(B) \cdot \frac{P(R \cap B)}{P(B)} \\
&\text{(da gilt: } A \cap B = \varnothing \Rightarrow (A \cap R) \text{ und } (B \cap R) \text{ sind disjunkt)} \\
&= P\left((R \cap A) \cup (R \cap B)\right) \\
&= P\left(R \cap \underbrace{(A \cup B)}_{=\Omega}\right) \\
&= P(R)
\end{aligned}$$

7.2 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter W-Raum und $n \in \mathbb{N}$. die Ereignisse $H_1, ...H_n \subset \Omega$ seien eine Zerlegung von Ω, d.h.

$$H_i \cap H_j = \varnothing \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\},\ i \neq j \text{ und } \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

Gilt $P(H_j) > 0\ \forall j = 1, ..., n$, dann gilt für jedes Ereignis $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)$$

Eine weitere mögliche Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene rote Kugel aus Urne 1 stammt.(siehe 7.1)

- $\hookrightarrow$ Frage: $P(A|R) = ?$
- $\hookrightarrow$ "Problem": Aus der Aufgabenstellung ist statt $P(A|R)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(R|A)$ leicht herzuleiten
- $\hookrightarrow$ Ansatz siehe "Formel von Bayer"(siehe 7.3)

7.3 Satz Formel von Bayer

Für alle Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $P(A) > 0$ gilt

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Beweis:

$$\frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

Beispiel: Ziehen einer Kugel aus einer von zwei Urnen:

Urne 1: genau 7 rote Kugeln und 3 schwarze Kugeln $\Rightarrow P(R|A) = \frac{7}{10}$

Urne 2: genau 1 rote und 9 schwarze Kugeln $\Rightarrow P(R|B) = \frac{1}{10}$

enthält.

$$\hookrightarrow P(R) = P(R|A)\cdot P(A) + P(R|B)\cdot P(B) = \frac{2}{5}$$

$\hookrightarrow$ **Frage:** $P(A|R) =?$ ($\widehat{=}$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Kugel aus Urne 1 stammt, wenn die Kugel rot ist.)

Antwort:

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)\cdot P(A)}{P(R)} = \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{8}$$

Zusammenfassung: Durch das Eintreten eines Ereignisses A muss die Wahrscheinlichkeit von allen anderen Ereignissen angepasst werden.
$\hookrightarrow$ Übergang zu einem neuen/modifizierten W-Maß P_A, welches die Information über das Eintreten von A berücksichtigt.[vi]
Wir fordern:

F1) $P_A(A) = 1$, **Motivation:** A stellt ein sicheres Ereignis dar

F2) Es gibt ein $k_A > 0$, so dass für jedes $C \subset A$gilt:

$$P_A(C) = k_A \cdot P(C)$$

$\hookrightarrow$ **Motivation/Beispiel:**

$$\text{WS für } = \begin{cases} \text{Schnee} & = \frac{1}{3} \\ \text{Regen} & = \frac{1}{3} \\ \text{niederschlagsfrei} & = \frac{1}{3} \end{cases}$$

[vi] $P \rightsquigarrow^A P_A$

7.4 Satz Existenz und Eindeutigkeit bedingter W-Maße

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter W-Raum und $A \subset \Omega$ mit $P(A) > 0$. Dann existiert genau ein W-Maß

$$P_A \,:\, \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

mit den Eigenschaften F1) und F2), nämlich

$$(P) \ni B \mapsto P_A(B) := P(B|A) \tag{2}$$

Beweis:

1) Wir verifizieren, dass Gleichung (2) F1) & F2 erfüllt:

   F1)
   $$P_A(A) = P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = 1$$

   F2)
   $$C \subset A \Rightarrow P_A(C) = P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \cdot P(A)$$

   $\hookrightarrow$ F2) ist erfüllt mit $k_A = \frac{1}{P(A)}$

2) Sei P_A: $P(\Omega) \to [0,1]$ ein W-Maß mit F1) & F2). Dann gilt:

   $$P_A \text{ F1) erfüllt } \Rightarrow P_A(A^C) = 1 - P_A(A) = 0 \tag{3}$$

   nun ist (A, A^C) eine Zerlegung von Ω
   $\hookrightarrow$ Nun betrachten wir für die beliebige $B \subset \Omega$ die Zerlegung

   $$B = (B \cap A)\dot{\cup}(B \cap A^C)$$

   $$\hookrightarrow P_A(B) = P_A(\underbrace{B \cap A}_{\subset A}) + \underbrace{P(\underbrace{B \cap A^C}_{\subset A^C})}_{=0, \text{ wegen } (3)}$$

   $$\hookrightarrow P_A(B) = P_A(B \cap A) = k_A \cdot P(B \cap A) \tag{4}$$

   Setze in Gleichung (4) : $B = A$

   $$\hookrightarrow 1 = P_A(B = A) = k_A \cdot P(A \cap A) = k_A \cdot P(A)$$

   $$\Leftrightarrow k_A = \frac{1}{P(A)}$$

Beispiel: Ein Beutel mit 3 Münzen:

- eine gewöhnliche Münze: **KZ**

- eine Münze: **KK**
- eine Münze: **ZZ**

Eine Münze wird zufällig gezogen und geworfen:

Annahme: Ergebnis ist “Zahl” (oben zu sehen)

Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf der Rückseite (unten) “Kopf” liegt?
Wir formulieren die relevanten Ereignisse.

A: gezogene Münze ist ZZ

B: gezogene Münze ist KK

C: gezogene Münze ist KZ

D: geworfene Münze zeigt nach oben “Z” (Zahl)

E: geworfene Münze zeigt nach unten “K” (Kopf)

Mit dieser Bezeichnung lautet die gestellte Frage: $P(E|D) =?$
Definitionsgemäß gilt:

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)}$$

$$\begin{aligned}\hookrightarrow P(D) &= P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) * P(C) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(D \cap E) &= P(D \cap E|A) \cdot P(A) + \cdots \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow P(E|D) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

8 Gemeinsame Verteilung

Ausgangspunkt: Es existiert ein diskreter W-Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Gegeben seien zwei Abbildungen X und Y auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
$\hookrightarrow$ Sie stellen Zufallsvariablen dar mit jeweils Werten in $X(\Omega) := \Omega_X$ und $Y(\Omega) =: \Omega_Y$, d.h.

$$X : \Omega \to \Omega_X \text{ und } Y : \Omega \to \Omega_Y$$

X und Y heißen unabhängige (siehe 6.2), wenn gilt:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B),\ \forall A \subset \Omega_X, \forall B \subset \Omega_Y$$

$$\begin{aligned} \text{Rechte Seite: } A \subset \Omega_X &\to P(X \in A) \hat{=} \text{ Verteilung von } X \\ B \subset \Omega_Y &\to P(Y \in B) \hat{=} \text{ Verteilung von } Y \end{aligned}$$

$$\text{Linke Seite: } (A \in \Omega_X, B \subset \Omega_Y) \to P(X \in A, Y \in B) \tag{5}$$

Frage: Stellt die Abbildung (siehe Gleichung(5) ebenfalls eine Verteilung/W-Maß dar?

Antwort: Das ist nicht der Fall, da der Definitionsbereich der Abbildung (Gleichung 5) zu klein ist. Er lässt sich nur mit einer echten Teilmenge der Potenzmenge des karthesischen Produktes $\Omega_X \times \Omega_Y$ identifizieren.

Beispiel: $\underbrace{\{1, 2\}}_{=\Omega_M} \times \underbrace{\{1, ..., 6\}}_{=\Omega_W} \hat{=}$ Ergebnismenge zum Zufallsexperiment, bei den eine Münze und ein Würfel geworfen werden. Betrachte das Ereignis:

$$E := \{(1, 2)\ ,\ (2, 1)\} \subseteq \Omega_M \times \Omega_W$$

$\hookrightarrow$ Offensichtlich existiert keine Teilmenge $A \subset \Omega_M$ und $B \subset \Omega_W$, so dass

$$E = A \times B = \{(x, y)\ :\ x \in A, y \in B\}$$

Diskussion: Wir stellen eine minimale Forderung an die Erweiterung des Definitionsbereiches (aus Gleichung 5).
$\hookrightarrow$ abstrakte Formulierungen: Sei Ω eine Menge und A ein System von Ereignissen bzw. Teilmengen von Ω. Wir fordern:

1. $\Omega \in A$

2. $E \in A \Rightarrow E^{\complement} = \Omega \setminus E \in A$

3. I eine abzählbare Indexmenge und $E_i \in A_i, i \in I$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i \in A_i$$

Im obigen Beispiel:

$$\begin{aligned} E = \{(1,2),(2,1)\} &= \{(1,2)\} \cup \{(2,1)\} \\ &= \underbrace{\{(1)\}}_{=\Omega_M} \times \underbrace{\{(2)\}}_{=\Omega_W} \end{aligned}$$

Forderung (1)-(3) auf dem fiktivem System von Ereignissen in $\Omega_X \times \Omega_Y$, welches mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega_X \times \Omega_Y)$ übereinstimmt.

8.1 Definition Gemeinsame Verteilung

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen diskreten W-Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ mit Werten in Ω_X und Ω_Y. Die *gemeinsame Verteilung* von X und Y ist definiert als das W-Maß auf $\mathcal{P}(\Omega_X \times \Omega_Y)$ welches durch

$$E \in \mathcal{P}(\Omega_X \times \Omega_Y) \longmapsto P((X,Y) \in E)$$

gegeben ist. Wir bezeichnen es mit $P_{(X,Y)}$. Beachte:

$$P_{(X,Y)}(E) = P((X,Y) \in E) = P(\{\omega \in \Omega : \ (X(\omega), Y(\omega)) \in E\}$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass es eine eindeutige Fortsetzung der Abbildung (Gleichung 5) zu einem W-Maß auf $\mathcal{P}(\Omega_X \times \Omega_Y)$ gibt und diese dann mit der gemeinsamen Verteilung von X und Y übereinstimmt.

8.2 Definition Produktmaß

Seien Q_1 und Q_2 zwei diskrete W-Maße jeweils auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega_1)$ und $\mathcal{P}(\Omega_2)$. Dann heißt das W-Maß P auf $\mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit der Eigenschaft:

$$P(E_1 \times E_2) = Q_1(E_1) \cdot Q_2(E_2), \ \forall E_i \in \mathcal{P}(\Omega_i), \ i = 1,2$$

das *Produktmaß* von Q_1 und Q_2 und wird mit $Q_1 \otimes Q_2$ bezeichnet.

8.3 Satz Unabhängige Familie

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Die gemeinsame Verteilung einer Familie X_i , $i = 1, ..., n$, von Zufallsvariablen jeweils mit der Verteilung P_X ist gleich dem Produktmaß

$$\bigotimes_{i=1}^{n} P_{X_i}$$

genau dann wenn die Familie *unabhängig* ist.
Die Gewichtsfunktion ρ der gemeinsamen Verteilung $P_{X_1,...,X_n}$ einer unabhängigen Familie ist gleich dem Produkt der Gewichtsfunktion ρ_i von X_i , $i = 1, ..., n$, d.h.

$$\rho(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \rho_i(x_i) \quad , \text{ für jedes } (x_1, ..., x_n) \in \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$$

Beispiel:

$$\rho(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{6^n} = \frac{1}{6} \cdot ... \cdot \frac{1}{6} = \rho(x_1) \cdot ... \cdot \rho(x_n)$$

als Gewichtsfunktion der Verteilung $P_{(X,Y)}$ wobei

$$X : \text{Augenzahl bei } i \text{ Versuchen}$$

Annahme: X und Y sind **nicht** unabhängig!
$\hookrightarrow$ Wir benutzen das Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit/W-Maße:
Für jedes $A \in \mathcal{P}(\Omega_X)$ mit $P_X(A) > 0$ gilt

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = \underbrace{P_X(A)}_{=P_X(A)} \cdot P(Y \in B | X \in A)$$

"Beweis":

$$\text{Linke Seite} = P\left(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)\right)$$
$$\text{Rechte Seite} = P\left(X^{-1}(A)\right) \cdot \frac{P\left(Y^{-1}(B) \cap X^{-1}(A)\right)}{P\left(X^{-1}(A)\right)}$$

9 Das schwache Gesetz der großen Zahlen (GGZ)

Ziel: Das Langzeitverhalten von Mittelwerten erfassen

Bernoulli's GGZ

$\hookrightarrow$ Es beschreibt das Verhalten der Langzeitmittelwerte von Beobachtungswerten, die man bei unabhängig durchgeführten Bernoulli-Experimenten erhält.

Genauer: Seien $p \in (0,1)$ und $X \sim B_p$, d.h. X ist Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
$\hookrightarrow$ Beispiel Münzwurf $\to$ bei fairer Münze ist $p = \frac{1}{2}$
Sei $n \in \mathbb{N}$. Es werden unabhängig voneinander n Bernoulli-Experimente durchgeführt, die jeweils die Zufallsvariablen

$$X_i \sim B_p\,, \quad i = 1, ..., n$$

beschrieben werden.
$\hookrightarrow$ Wir interessieren uns für die

- $\underbrace{\text{absolute Häufigkeit}}_{\hat{=}\text{ zufällige Anzahl der Treffer}}$ der $\underbrace{\text{Treffer}}_{\hat{=}X_i=1}$ bei n Einzelexperimenten.

$$\hookrightarrow S_n = X_1 + ... + X_n$$

- beziehungsweise die relative Häufigkeit der Treffer $\hat{=}\frac{1}{n}S_n =: \bar{S_n}$

Wir erinnern uns: $S_n \sim B_{n,p}$, d.h. S_n ist binomialverteilt zu den Parametern n und p.

Ziel: Das Verhalten der relativen Häufigkeit der Treffer mit wachsender Anzahl n der Versuche zu erfassen.

$\hookrightarrow$ **Frage:** $n = 10000$ Versuche mit einer fairen Münze
$\hookrightarrow$ Wie viele Treffer?
$\to$ **Antwort:** ungefähr $5000 \hat{=} \frac{1}{2}$ als relative Häufigkeit der Treffer.

$\hookrightarrow$ Variante: mit einer unfairen Münze mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p\left(\neq \frac{1}{2}\right)$
$\hookrightarrow$ **Frage:** Wie hoch ist die relative Häufigkeit der Treffer?
Antwort: ungefähr p

Es ist noch nicht klar, wie wir unsere Antwort formal darstellen können. Beispielsweise führt folgender naheliegender Ansatz nicht zum Ziel.

$$P\left(\left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i = \frac{1}{2}\right\}\right) = B_{2n,\frac{1}{2}}(\{n\})$$

$$= \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \to_{n\to\infty} 0$$

9.1 Satz Bernoullis GGZ

Sei $p \in (0,1)$. Seien $X_i \sim B_p$, $i \in \mathbb{N}$ und

$$\bar{S_n} := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i \,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt für ein beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{S_n} - p\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

Folgende Resultate gehen in den Beweis von Satz 9.1 ein.

1. $$\mathbb{E}(\bar{S_n}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot np = p$$

2. $$Var(\bar{S_n}) = Var\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \frac{p(1-p)}{n}$$

3. Tschebyscheff-Ungleichung

9.2 Lemma Rechenregeln für die Varianz

Sei X eine reelle, diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) = m$ und $Var(X) = v$. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} Var(aX) &= \mathbb{E}\left((aX)^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(aX\right)\right)^2 \\ \text{Liniarität des Erwartungswertes (siehe 5.6} \quad &= a^2\mathbb{E}(X^2) - (a\mathbb{E}(X))^2 \\ &= a^2 \cdot (\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2)) = a^2 \cdot Var(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu zeigen: } Var(x+b) &= Var(X) \\ Var(x+b) &= \mathbb{E}(\underbrace{(X+b)^2}_{X^2+2bX+b^2}) - \underbrace{(\mathbb{E}(X+b))^2}_{(\mathbb{E}(X)+b)^2} \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 2b\mathbb{E}(X) + b^2 - \left(\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 + 2b\mathbb{E}\left(X\right) + b^2\right) \end{aligned}$$

9.3 Lemma Tschebyscheff-Menge

Sei X eine reelle, diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) =$, und der Varianz $Var(X) = v$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$P\left(|X - m| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Beweis: Es ist zu zeigen $Var(X) \geq \varepsilon^2 \cdot P(|X - m| \geq \varepsilon)$ Sei $\tilde{X} := (X - m)^2$ wobei zu beachten ist, dass $\tilde{X} \geq 0$

$$Var(X) = \mathbb{E}(\tilde{X}) = \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\Omega}} \tilde{x} \cdot P_{\tilde{X}}(\{\tilde{x}\}) \geq \sum_{\tilde{x} \in M} \tilde{x} P_{\tilde{X}}(\{\tilde{x}\})$$

wobei $M \subseteq \tilde{\Omega}$, speziell $M := \{\tilde{X} \geq \varepsilon^2\}$ ist. Dann gilt demzufolge

$$\sum_{\tilde{x} \in M} \tilde{x} P_{\tilde{X}}(\{\tilde{x}\}) = \sum_{\tilde{x} \in M} \varepsilon^2 \cdot P_{\tilde{X}}(\{\tilde{x}\}) = \varepsilon^2 \cdot \underbrace{P\left((X - m)^2 \geq \varepsilon^2\right)}_{=|X-m|>\varepsilon}$$

Bemerkung:

$$P\left(|X - m| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Beweis zu Satz 9.1: schwache GGZ für Bernoulli-Zufallsvariablen.
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ und es gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\bar{S}_n - p\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\left|\bar{S}_n - \mathbb{E}\left(\bar{S}_n\right)\right| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \frac{Var(\bar{S}_n)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n^2} Var(S_n)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{p \cdot (1 - p)}{n \cdot \varepsilon^2} \lim_{n \to \infty} \end{aligned}$$

Bemerkung zu vorherigen Beweis:

$$\mathbb{E}\left(\bar{S}_n\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{=p} = p$$

9.4 Satz

Seien $m \in \mathbb{R}$ und $0 < v < +\infty$. Sei X_i , $i \in \mathbb{N}$ eine Folge von Zufallszahlen so dass

$$\mathbb{E}(X_i) = m\,, \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$Var(X_i) = v\ , \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \leq \varepsilon\right) = 0$$

9.5 Lemma

Seien $n \in \mathbb{N}$ und X_i , $i = 1, ..., n$ paarweise unabhängige reelle (diskrete) Zufallsvariablen jeweils mit dem Erwartungswert $\mathbb{E}(X_i) = m_i \in \mathbb{R}$ und der Varianz $Var(X_i) = v_i < +\infty$. Dann gilt:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

9.6 Definition Unkorrelation & Kovarianz

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen *unkorreliert*, wenn die sogenannte *Kovarianz*:

$$Cov(X,Y) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}\left(X\right)) \cdot (Y - \mathbb{E}\left(Y\right))\right)$$

verschwindet. Das heißt, dass $Cov(X,Y) = 0$

Bemerkung:

1. $Cov(X,X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = Var(X)$
2. X und Y unabhängig $\Rightarrow$ X und Y unkorreliert (Rückimplikation gilt nicht!)

9.7 Satz Gleichheit von Bienaymé

Seien X_i , $i = 1, ..., n$ paarweise unkorrelierte, reelle und diskrete Zufallsvariablen, dann gilt Satz 9.5 .

Beweis:

$$
\begin{aligned}
Var\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\right) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\right)^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{X}_i\cdot\tilde{X}_j\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i^2+\sum_{i,j=1\,,\,i\neq j}^{n}\tilde{X}_i\tilde{X}_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}\left(\tilde{X}_i^2\right)}_{Var(\tilde{X}_i}+\mathbb{E}\left(\sum_{i=1\,,\,i\neq j}\tilde{X}_i\tilde{X}_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}Var(\tilde{X})+\sum_{i=1\,,\,i\neq j}\mathbb{E}\left(\tilde{X}_i\tilde{X}_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}Var(X_i)
\end{aligned}
$$

10 Reelle Zufallsvariablen

Bis jetzt wurden folgendes betrachtet:
Die diskreten Spezialfälle:

- Zufallsexperiment mit höchstens abzählbarer Ergebnismenge
- W-Räume der Gestalt $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, wobei Ω höchstens abzählbar
- Zufallsvariablen mit höchstens abzählbaren Wertebereich

10.1 Definition Sigma-Algebra

Sei Ω eine beliebige nicht-leere Menge. Ein System $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω heißt eine *σ-Algebra in* Ω und Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Ereignisraum, wenn $\mathcal{A}$ folgendes erfüllt:

S1 $\Omega \in \mathcal{A}$

S2 $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{A}$

S3 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$, wenn $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$

Jedes System $\mathcal{G}$ von Teilmengen von Ω kann zu einer σ-Algebra erweitert werden. (trivial $\mathcal{G} \to \mathcal{P}(\Omega)$)
$\hookrightarrow$ wichtig: Zu jedem $\mathcal{G}$ von Teilmengen von Ω existiert genau eine kleinste σ-Algebra, die von $\mathcal{G}$ erzeugt wird. Sie wird als die von $\mathcal{G}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet.
$\hookrightarrow$ Notation: $\sigma(\mathcal{G})$

Beispiele:

1. Sei $\mathcal{G} := \{\Omega\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) = \{\Omega, \varnothing\}$
2. Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{G} := \{[-1,1]\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) = \{[-1,1], \mathbb{R}\backslash[-1,1], \mathbb{R}, \varnothing\}$
3. Ω eine abzählbare Menge, $\mathcal{G} := \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{P}(\Omega)$

10.2 Definition Borelsche Sigma-Algebra

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{G} := \{[a,b] : a, b \in \mathbb{Q}$ und $a < b\}$. Dann heißt $\sigma(\mathcal{G})$ die *Borelsche* σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und wird mit $\mathcal{B}$ oder $B(\mathbb{R})$ bezeichnet.

Bemerkung:

- $B^1 \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$
- $\tilde{\mathcal{G}} := \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \sigma(\tilde{\mathcal{G}}) = \sigma(\mathcal{G}) = B^1$

10.3 Definition

Seien Ω eine beliebige nicht-leere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ heißt W-Maß auf $\mathcal{A}$, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

W1 $P(\Omega) = 1$ (Normierung)

W2 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ wenn:
- $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ und
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$

Wichtige Eigenschaften von W-Maßen (analog zum diskreten Fall):

i $P(\varnothing) = 0$

ii $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$

iii $P(A) \leq P(B)$ wenn $A \subseteq B$ $(\forall A, B \in \mathcal{A})$
(Monotonie)

$\hookrightarrow$ **Frage:** Gibt es Unterschiede zum diskreten Fall?

Diskussion: Verallgemeinerung des Konzeptes Zähldichte/Gewichtsfunktion?

Antwort: “ Existiert nicht immer ”

Betrachtung von W-Maßen auf $\mathcal{B}^1$:

- *Lebesgue*-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$\int f(x)dx = 1$$

  stellt eine Dichte von einem W-Maß dar:

$$P(E) := \int_E f(x)dx \quad , \quad \forall E \in \mathcal{B}^1$$

- Standardbeispiel eines W-Maßes auf $\mathcal{B}^1$, welches keine Dichte besitzt:

$$\delta_{x_o} : \mathcal{B}^1 \to [0,1] \quad \sigma_{x_o}(E) = \begin{cases} 1 & , x_o \in E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

10.4 Definition Reeller Wahrscheinlichkeitsraum

Seien Ω eine beliebige Menge ($\Omega \neq \varnothing$) , $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ ein W-Maß, dann heißt $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein *W-Raum.*
Eine reelle Zufallsvariable X nimmt Werte in $\Omega = \mathbb{R}$ beziehungsweise in einer Borelschen Menge $\Omega \in \mathcal{B}^1$ an. Man wird insbesondere Ereignisse wie

$$\{X \leq c\} \ , \ \{X \geq c\} \ , \ \{X \in J\}$$

eine Wahrscheinlichkeit zuordnen wollen, wobei $c \in \mathbb{R}$, J Intervall in $\mathbb{R}$.
$\hookrightarrow$ Solche Ereignisse bilden gerade das Mengensystem $\tilde{G}$, welches die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^1$ erzeugt.

10.5 Definition Reelle Zufallsvariable

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Eine Abbildung:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

heißt eine *reelle Zufallsvariable*, wenn gilt:

$$X^{-1}\left((-\infty, c]\right) \in \mathcal{A} \, , \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Die Verteilung P_X von X ist definiert durch

$$P_X(E) := P\left(X^{-1}(E)\right) \quad \forall E \in \mathcal{B}^-1$$

10.6 Definition Verteilungsfunktion

Sei P ein W-Maß auf $\mathcal{B}^1$. Die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad c \longmapsto P\left((-\infty, c]\right)$$

heißt *Verteilungsfunktion* von P. Für eine reelle Zufallsvariable X ist die Verteilungsfunktion F_X definiert durch:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad c \longmapsto F_X(c) := P(X \subseteq c)$$

10.7 Definition Stetige Gleichverteilung

Sei $M \in \mathcal{B}^1$ (eine borelsche Menge) mit $\lambda^1(M) = m$ und

$$\rho : M \to \mathbb{R}\,, \quad x \longmapsto \frac{1}{m}$$

eine konsistente Funktion. Ein W-Maß auf $(M, \mathcal{B}^1_M)$ mit der Dichtefunktion ρ heißt dann *stetige Gleichverteilung* auf M.

Notation: $\mathcal{U}_M$

10.8 Definition Normalverteilung

Ein W-Maß auf $\mathcal{B}^1$ mit der Dichtefunktion

$$\phi_{m,v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}$$

heißt *Normalverteilung* oder *Gauß-Verteilung* mit der Varianz v.

Notation: $\mathcal{N}_{m,v}$

Bemerkung: $\mathcal{N}_{m=0,v=1}$ heißt *Standardabweichung*.

Teil III
Addendum

Mengensysteme

Sein Ω eine beliebige Menge ($\Omega \neq \varnothing$): $G \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \sigma(G) = \cap_{G \subseteq \mathcal{A}} \mathcal{A}$

1. $G := \{\Omega\} \Rightarrow \sigma(G) = \{\Omega, \varnothing\}$
2. - 4. siehe Beispiele in 10.1

Beispiel (5): Sei $\Omega \neq \varnothing$ beliebig. Betrachte $G := \{M_1, ..., M_n\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in nicht-leere Teilmengen, d.h.

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = \Omega$$

Dann gilt: $|\sigma(G)| = 2^n$

Begründung:

$$f : G \to M \text{ , } M_i \longmapsto f(M_i) := m_i \text{ wobei } M := \{m_1, ..., m_n\}$$

$$\left\{ \underbrace{f(E)}_{\subseteq M} : \; E \in \sigma(G) \right\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

Umgekehrt gilt: $\left\{ f^{-1}(K) : \; K \in \mathcal{P}(M) \right\} \subseteq \sigma(G)$
$P(M)$ und $\sigma(G)$ können bijektiv aufeinander abgebildet werden.
$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(M)$ und $\sigma(G)$ gleichmächtig, d.h. $|\sigma(G)| = |\mathcal{P}(G)| = 2^{|M|} = 2^n$

Beispiel (6): Siehe Unterpunkt 10.2 .

Dichtefunktion

Die sogenannte Dichte/Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$ beziehungsweise $D \in \mathcal{B}^1$ stellt eine Analogie zur Zähldichte dar. Mit Dichtefunktionen lassen sich W-Maße auf $\mathcal{B}^1$ beziehungsweise $\mathcal{B}^1_D$ definieren

$$\mathcal{B}^1_D = \{E \cap D : E \in \mathcal{B}^1\}$$

$$f:\ D \to \mathbb{R} \text{ Dichtefunktion } \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1)\ \ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D \\ (2)\ \ f^1(E) \in \mathcal{B}_D^1 \quad \forall E \in \mathcal{B}^1 \\ (3)\ \ \displaystyle\int f dx = 1 \end{array}$$

$\to$ **Spezialfall:**

- $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}\ (\in \mathbb{B}^1)$ ein Intervall
- $f : D \to \mathbb{R}$ positiv und stetig!

$\hookrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ kann berechnet werden

falls $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 1$, liegt mit f eine Dichtefunktion vor

$\hookrightarrow$ Wir können ein W-Maß berechnen

$$P([c, d]) = \int_c^d f(x)dx\ , \quad c < d,\ \ c, d \in D = [a, b]$$

und allgemein $P(E) = \displaystyle\int_E f d(x), \forall E \in \mathcal{B}_D^1$ (wobei hier Lebesgue-Integral auftaucht)

Beispiel: $D = [0, 1]$, $f(x) = 2x \quad (x \in [0, 1])$

Zusammenhang zwischen Verteilungsfunktion und Dichtefunktion

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Die Verteilung $P_X = P \circ X^{-1}$ von X besitzt genau dann eine Dichtefunktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn

$$\int_{-\infty}^c \rho(x)dx = F_X(c), \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

gilt, wobei F_X die Verteilungsfunktion von X bezeichnet.

Bemerkung: Die Dichtefunktion f der Verteilung P_X ist genau dann eine stetige Funktion, wenn die Verteilungsfunktion F_X von X stetig differenzierbar ist. Dann gilt:

$$f = F_X^1$$

$\hookrightarrow$ **Beispiele für stetige Funktionen**

1. Siehe Definition Gleichverteilung (10.7)
2. Siehe Definition Normalverteilung (10.8)