计算方法 B 课程实验报告 5

姓名：章东泉　　**学号：**PB17121706

问题一　复化积分

Part1 计算结果

使用计算器，取精确结果为 1.145500033808614。取等距节点 $\{x_i, i=0,1,...,2^k\}$，分别使用复化梯形公式和复化 Simpson 公式求解积分 $\int_0^8 \sin x dx$ 的结果如下表：

表 1-1　复化梯形公式求解结果

k	近似解	误差	误差阶
0	3.9574329865E+000	2.8119329527E+000	——
1	-1.0484934880E+000	2.1939935218E+000	0.358003
2	7.3551711326E-001	4.0998292055E-001	2.419924
3	1.0484118736E+000	9.7088160255E-002	2.078197
4	1.1215354184E+000	2.3964615407E-002	2.018390
5	1.1395276638E+000	5.9723700074E-003	2.004530
6	1.1440081087E+000	1.4919250679E-003	2.001128
7	1.1451271254E+000	3.7290840416E-004	2.000282
8	1.1454068113E+000	9.3222548702E-005	2.000070
9	1.1454767285E+000	2.3305352681E-005	2.000018
10	1.1454942075E+000	5.8263203895E-006	2.000004

表 1-2　复化 Simpson 公式求解结果

k	近似解	误差	误差阶
0	2.6382886577E+000	1.492788623854E+000	——
1	-2.7171356461E+000	3.862635679953E+000	-1.371576
2	1.3301873137E+000	1.846872798678E-001	4.386429
3	1.1527101270E+000	7.210093176284E-003	4.678923
4	1.1459099334E+000	4.098995424697E-004	4.136676
5	1.1455250789E+000	2.504512568802E-005	4.032669
6	1.1455015904E+000	1.556578641981E-006	4.008079
7	1.1455001310E+000	9.715041571212E-008	4.002014
8	1.1455000399E+000	6.069782454432E-009	4.000503
9	1.1455000342E+000	3.793252378870E-010	4.000138
10	1.1455000338E+000	2.370770246785E-011	4.000008

同样取$k=10$,使用复化梯形公式计算结果为 1.1454942075E+000，而使用复化 Simpson 公式计算结果为 1.1455000338E+000。复化 Simpson 公式计算结果更接近实际值。

Part2 算法分析

复化梯形公式为：$T_n(f)=h(\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}f(b))$；

复化 Simpson 公式为：$S_m(f)=\frac{h}{3}(f(a)+4\sum_{i=0}^{m-1}f(x_{2i+1})+2\sum_{i=0}^{m-1}f(x_{2i})+f(b))$；

误差阶计算公式为：$d_i=-\frac{\ln(\frac{error_i}{error_{i-1}})}{\ln 2}$，$k$=0 时不计算误差阶。

使用复化梯形公式，计算上比较简单，但是求得的近似解精度不高，使用复化 Simpson 公式，虽然计算上较繁琐，但是可以达到很好的计算精度。

在误差传播可控的情况下，误差阶较大的算法可以取的更好的结果。

Part3 结果分析

使用复化梯形公式求得近似解 1.1454942075E+000、误差为 5.8263203895E-006、误差阶 2.000004，相比于使用复化 Simpson 公式得到的近似解 1.1455000338E+000、误差 2.370770246785E-011、误差阶 4.000008，使用复化梯形公式的结果都较差。随着步长的减小，获得近似解的精度也越来越高。

Part4 实验小结和代码展示

实验中看到了不同复化积分公式和不同步长选择对积分结果的影响。认识到了选择合适的积分公式和步长在数值积分中的重要性，好的公式和步长可以获得相当好的近似解。

图 4-1　复化梯形公式计算

```c
double Composite_trapezoid(int n)
{
    double h = (b-a)/n;
    double result = 0.0;
    result = (f_x(a) + f_x(b))/2;
    int i = 1;
    while(i < n){
        result += f_x(a + i*h);
        i++;
    }
    result *= h;
    return result;
}
```

图 4-2　复化 Simpson 公式计算

```c
double Composite_simpson(int n)
{
    double h = (b-a)/n;
    double result = 0.0;
    result = (f_x(a) + f_x(b));
    int i = 1;
    while(i < n){
        if(i % 2 == 0){
            result += 2*f_x(a + i*h);
        }
        else{
            result += 4*f_x(a + i*h);
        }
        i++;
    }
    result *= h;
    result /= 3;
    return result;
}
```

图 4-3　代码原始输出

```
0: 3.9574329865e+000 error: 2.8119329527e+000 order: -0.000000
1: -1.0484934880e+000 error: 2.1939935218e+000 order: 0.358003
2: 7.3551711326e-001 error: 4.0998292055e-001 order: 2.419924
3: 1.0484118736e+000 error: 9.7088160255e-002 order: 2.078197
4: 1.1215354184e+000 error: 2.3964615407e-002 order: 2.018390
5: 1.1395276638e+000 error: 5.9723700074e-003 order: 2.004530
6: 1.1440081087e+000 error: 1.4919250679e-003 order: 2.001128
7: 1.1451271254e+000 error: 3.7290840416e-004 order: 2.000282
8: 1.1454068113e+000 error: 9.3222548702e-005 order: 2.000070
9: 1.1454767285e+000 error: 2.3305352681e-005 order: 2.000018
10: 1.1454942075e+000 error: 5.8263203895e-006 order: 2.000004

0: 2.6382886577e+000 error: 1.492788623854e+000 order: -0.000000
1: -2.7171356461e+000 error: 3.862635679953e+000 order: -1.371576
2: 1.3301873137e+000 error: 1.846872798678e-001 order: 4.386429
3: 1.1527101270e+000 error: 7.210093176284e-003 order: 4.678923
4: 1.1459099334e+000 error: 4.098995424697e-004 order: 4.136676
5: 1.1455250789e+000 error: 2.504512568802e-005 order: 4.032669
6: 1.1455015904e+000 error: 1.556578641981e-006 order: 4.008079
7: 1.1455001310e+000 error: 9.715041571212e-008 order: 4.002014
8: 1.1455000399e+000 error: 6.069782454432e-009 order: 4.000503
9: 1.1455000342e+000 error: 3.793252378870e-010 order: 4.000138
10: 1.1455000338e+000 error: 2.370770246785e-011 order: 4.000008
```