

VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG VON NULLSTELLEN

Analysis

HBf Unterstufe, Mathe, MUE

Philip Müller
p.mueller@bbs-lahnstein.de

ÜBERSICHT / INHALTSVERZEICHNIS

1. Nullstellen linearer Funktionen
2. Nullstellen quadratischer Funktionen
3. Nullstellen von Funktionen höherer Ordnung

Kompetenz gemäß Lehrplan:

“Nullstellen ganzrationaler Funktionen höherer Ordnung bestimmen.”

NULLSTELLEN LINEARER FUNKTIONEN

Definition: Nullstellen

Unter den Nullstellen x_0 einer Funktion versteht man all diejenigen Stellen, an denen der Graph der Funktion die x -Achse entweder schneidet oder berührt.

Nullstellen sind also diejenigen x -Werte, für die eine Funktion den Funktionswert 0 hat.

→ Was bedeutet das graphisch?¹

Nullstellen ermitteln

Ein Bauer verfüttert täglich 1,5 kg Kraftfutter an seine Hühner. Er berechnet, wie viele Tage das Futter bei einem Vorrat von 90 kg reicht.

x: Zeit in Tagen

$$f(x) = 90 \text{ kg} - 1,5 \text{ kg} \cdot x$$

$$f(60) = 90 \text{ kg} - 1,5 \text{ kg} \cdot 60$$

$$f(60) = 0 \text{ kg}$$

Bei vielen Vorgängen interessiert es, wann ein linear verlaufender Prozess den Funktionswert Null annimmt.

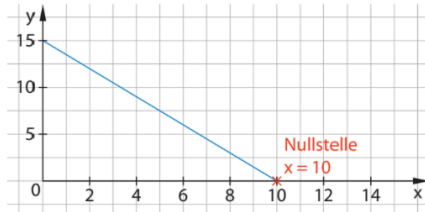
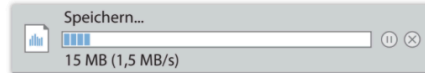
Beispiel:

Wie lange dauert der Download, wenn die Downloadgeschwindigkeit konstant bleibt?

Um diese Fragen zu beantworten, muss man die Stelle x bestimmen, an der

$f(x) = 15 - 1,5x$ den Wert 0 annimmt.

Dieses ist die x-Koordinate des Schnittpunkts des Graphen mit der x-Achse.



Wissen: Nullstelle

Eine Stelle x, an der eine Funktion f den Funktionswert 0 hat, heißt **Nullstelle**.

Es gilt: $f(x) = 0$.

¹Dr. Andreas Pallack, *Fundamente Der Mathematik 9. Rheinland-Pfalz*.

Um die Nullstelle einer linearen Funktion f zu ermitteln, kann man den Graphen der Funktion zeichnen und näherungsweise die Stelle x ablesen, an der der Graph die x -Achse schneidet. Man kann die Nullstelle auch berechnen, in dem man die Gleichung $f(x) = 0$ nach x auflöst.

Beispiel 2: Ermittle die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = -\frac{4}{5}x + 3$

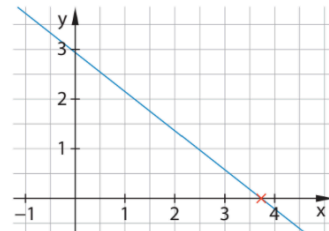
a) grafisch,

b) rechnerisch.

Lösung:

a) Zeichne den Graphen der Funktion.

Lies näherungsweise die x -Koordinate des Punktes ab, an dem die Gerade die x -Achse schneidet.



Die Nullstelle ist $x \approx 3,8$.

b) Die Nullstelle lässt sich exakt mit der Gleichung $f(x) = 0$ berechnen. Schreibe anstelle von $f(x)$ den Funktionsterm $-\frac{4}{5}x + 3$. Löse dann die Gleichung nach x .

$$\begin{aligned} -\frac{4}{5}x + 3 &= 0 & | -3 \\ -\frac{4}{5}x &= -3 & | : \left(-\frac{4}{5}\right) \\ x &= -3 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3,75 \end{aligned}$$

Die Nullstelle ist $x = 3,75$.

Setze zur Probe 3,75 ein.

$$\text{Probe: } f(3,75) = -\frac{4}{5} \cdot 3,75 + 3 = 0 \text{ (wahr)}$$

1.6 Nullstellen

■ Bei einem Onlinehändler kostet jedes T-Shirt 12 €. Hinzu kommen 2 € Versandkosten.

Kai und Lilli haben eine Gleichung für die Gesamtkosten beim Kauf von x T-Shirts aufgestellt. Zudem haben sie den Preis für 2, 3 und 4 T-Shirts berechnet. Beschreibe Vorteile und Nachteile der Darstellungen. ■

Kai: $y = 12 \cdot x + 2$

$y = 26, y = 38, y = 50$

Lilli: $f(x) = 12 \cdot x + 2$

$f(2) = 26, f(3) = 38, f(4) = 50$

Funktionen ordnen jedem x -Wert genau einen y -Wert zu. Sie funktionieren wie Maschinen: Gibt man einen x -Wert in eine Funktion hinein, so kommt genau ein y -Wert wieder heraus. In der $f(x)$ -Schreibweise von Funktionen sieht man immer den Namen der Funktion und die eingesetzten x -Werte.

Wissen: Darstellung einer Funktion in der $f(x)$ -Schreibweise

Eine Funktion wird durch ihren Namen und ihre Funktionsgleichung eindeutig beschrieben.

f	$f(x) = 2x + 1$	$P(x f(x))$
Name der Funktion	Funktionsgleichung	Punkt auf dem Graphen

Funktionswerte und Stellen bestimmen

Beispiel 1: Die Funktion g hat die Funktionsgleichung $g(x) = 4 \cdot x - 5$.

- Berechne den Funktionswert für $x = 2$.
- Berechne den x -Wert, an dem g den Funktionswert 7 hat.

Lösung:

- Setze in die Gleichung $g(x) = 4 \cdot x - 5$ für x den Wert 2 ein. Berechne dann den Funktionswert $g(2)$.
 $g(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$
- Der Funktionswert $g(x)$ soll 7 sein. Schreibe als Gleichung und löse nach x auf.
 $g(x) = 4 \cdot x - 5 = 7$
 $4 \cdot x - 5 = 7$
 $x = 3$

Basisaufgaben

7. Zeichne den Graphen der Funktion mit der gegebenen Gleichung in dein Heft. Ermittle (falls möglich) einen Näherungswert für die Nullstelle der Funktion durch Ablesen am Graphen. Bestimme anschließend rechnerisch einen exakten Wert. Führe eine Probe durch.
- a) $f(x) = 2x - 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ c) $f(x) = 0,4x + 2,4$
8. Prüfe, ob die angegebene Zahl die Nullstelle der Funktion mit der angegebenen Gleichung ist.
- a) $f(x) = 3x - 9; x = 3$ b) $f(x) = 2x + 7; x = 3,5$ c) $g(z) = -z + 1; z = -1$
9. Bestimme die Nullstelle der Funktion mit der gegebenen Gleichung sowohl grafisch als auch rechnerisch.
- a) $f(x) = -2x + 6$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x - 1,5$ c) $f(x) = \frac{5}{3}x + 2$
10. Berechne die Nullstelle der Funktion mit der gegebenen Gleichung. Überprüfe deine Lösung durch eine Probe.
- a) $f(x) = 5x - 15$ b) $f(x) = 0,6x + 3$ c) $f(x) = -0,15x + 2,7$
d) $g(x) = \frac{3}{5}x - 2,4$ e) $g(z) = -7\frac{1}{3}z + 10$ f) $x(t) = -5t$
11. Ein Feuerlöschwagen enthält 3500 Liter Wasser. Pro Minute werden 175 Liter Wasser verspritzt. Stelle eine Funktionsgleichung zur Beschreibung des Wasservorrats in Abhängigkeit von der Zeit auf. Ermittle damit, wie lange der Vorrat reicht.



Zu einem beliebigen y-Wert die Stelle x bestimmen**Beispiel 3:** An welcher Stelle hat die Funktion f mit $f(x) = -2x + 1$ den Wert 5? Ermittle die

Lösung

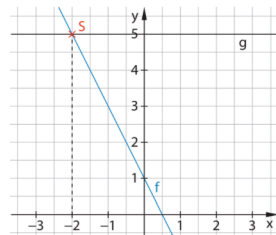
a) grafisch,

b) rechnerisch.

Lösung:a) Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -2x + 1$.

Zeichne den Graphen von g mit $g(x) = 5$, also eine Parallele zur x -Achse durch den Punkt $(0|5)$.

Im Schnittpunkt S der beiden Graphen nimmt f den Wert 5 an. Lies näherungsweise die zugehörige Stelle x ab.

Lösung: $x \approx -2$ b) Setze, um die Lösung zu berechnen, den Funktionsterm $-2x + 1$ gleich 5.

Löse dann die Gleichung, um die exakte Lösung zu erhalten.

Setze zur Probe -2 in den Funktionsterm ein.

$$\begin{array}{rcl} -2x + 1 & = & 5 \\ -2x & = & 4 \\ x & = & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} | -1 \\ | :(-2) \end{array}$$

Lösung: $x = -2$ **Probe:** $-2 \cdot (-2) + 1 = 4 + 1 = 5$ **Basisaufgaben**12. Ermittle grafisch und rechnerisch die Stelle x , an der die Funktion f

- a) mit der Gleichung $f(x) = 3x - 2$ den Funktionswert 3 hat;
b) mit der Gleichung $f(x) = -2 \cdot x + 7$ den Funktionswert 9 hat.

13. Eine Kerze ist 12 cm lang und brennt gleichmäßig ab. Nach 6 Minuten Brenndauer hat sie noch eine Länge von 9 cm. Nach welcher Brenndauer ist die Kerze noch 2 cm lang?

→ *Wie berechnet man die Nullstellen?*

Um die Nullstellen einer Funktion f zu berechnen, ermittelt man diejenigen x -Werte, für die $f(x) = 0$ wird.

Dafür setzt du die Funktion gleich 0 und löst die Gleichung nach x auf.

Bsp.:

Sei $f(x) = 2x - 4$. Hier formt man $2x - 4 = 0$ nach x um und erhält $x = 2$.

Merke:

Um die Nullstellen eines Funktionsgraphen zu bestimmen, musst du den Funktionsterm gleich Null stellen und die Gleichung nach x auflösen.

Bsp: Sei $f(x) = 2x - 4$. Hier formt man $2x - 4 = 0$ nach x um und erhält $x = 2$.

Video #1:



<https://youtu.be/dQw4w9WgXcQ>

Lass uns das mal testen. Schau dir dazu Video #2 an:



<https://youtu.be/ufZ-imwFstA>

Aufgabe 1 (Überschrift)

- a)** a
- b)** b
- c)** c

Aufgabe 2 (Überschrift)

- 1.** erstens
- 2.** zweitens
- 3.** drittens

NULLSTELLEN QUADRATISCHER FUNKTIONEN

NULLSTELLEN VON FUNKTIONEN HÖHERER ORDNUNG

REFERENZEN / QUELLEN

[1] Dr. Andreas Pallack, *Fundamente der Mathematik 9. Rheinland-Pfalz*. Berlin: Cornelsen Verlag, 2019.