Tutorium 3

Aufgabe

1) Bestimmen Sie die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der folgenden 2-reihigen Matrizen:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe

7) Bestimmen Sie die *Eigenvektoren* der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass die aus ihnen gebildete 3-reihige Matrix *orthogonal* ist.

Aufgabe

14) Wie lauten die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der folgenden 3-reihigen *symmetrischen* Matrizen?

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe

1. Gegeben ist die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie zu allen Eigenwerten die algebraische und geometrische Vielfachheit an.
   (b) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix V und eine Diagonalmatrix D an, für die $A = VDV^{-1}$ gilt.
   (c) Wie müssen die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $A^2 + \alpha A + \beta I = O$ gilt?
   Hinweis: *Denken Sie über die Eigenwerte und Eigenvektoren der Nullmatrix nach.*

Aufgabe

Aufgabe 1

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie zu allen Eigenwerten die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

(b) Sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1 + 2i$ Eigenwerte der Matrix

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 12 & -1 \\ -6 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}?$$

Begründen Sie Ihre Aussagen.

(c) Geben Sie alle Eigenwerte der Matrix $D = B^3 - B^2 + 12I$ an, wobei $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix sei.