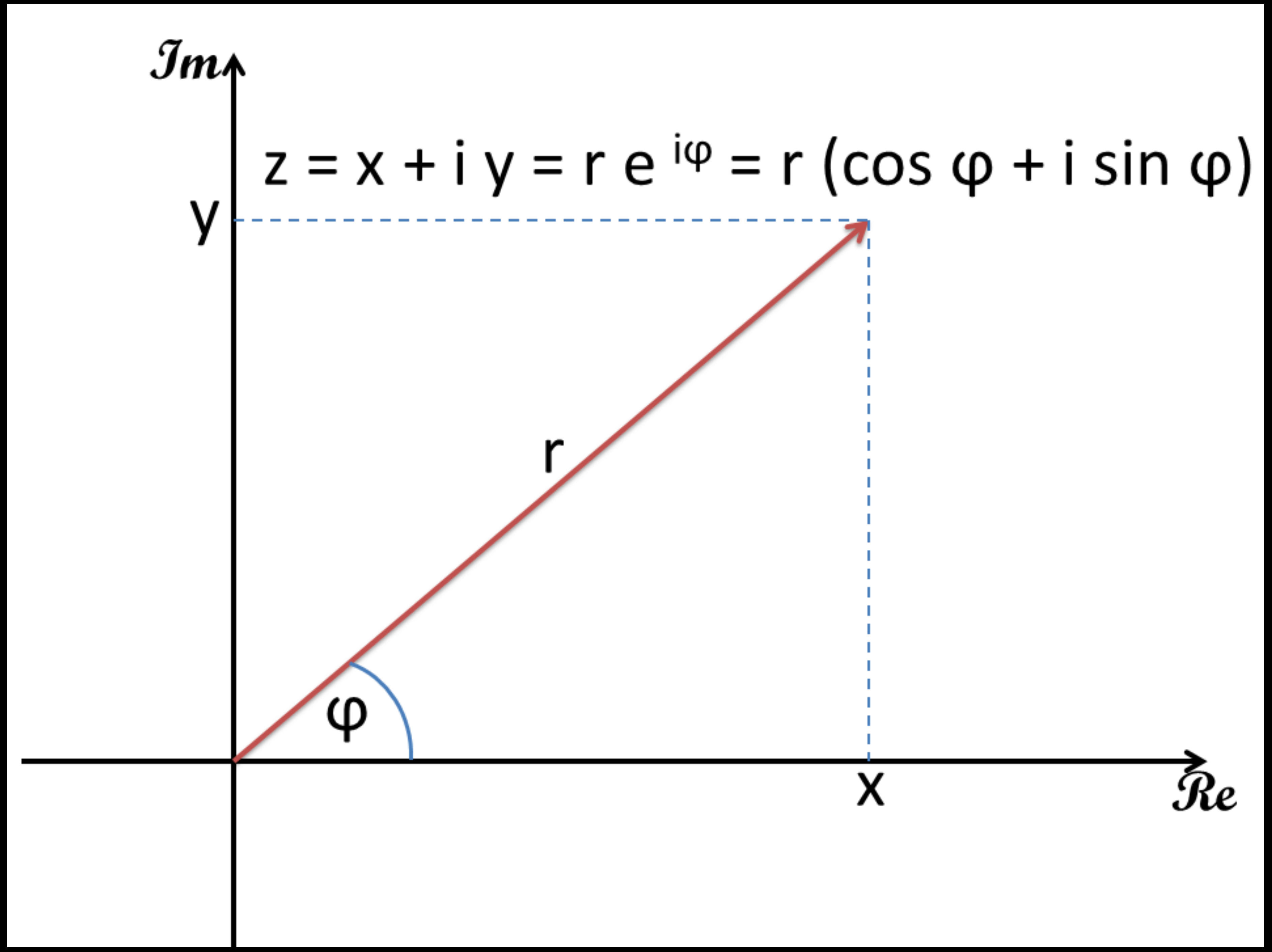
Tutorium 3

Alle Darstellungsformen

- $z = x + iy$
- $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
- $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$



Formel von Euler

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

Aufgabe

5. Man stelle folgende Zahlen in der trigonometrischen Form und in der Gestalt $x+iy$ dar.

a) $(2i-\sqrt{3})^8$ b) $\left(-\frac{3}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$ c) $\exp(2-i\,\frac{\pi}{3})$

Lösung

Aufgabe a)

$$z = 2017 - 752 \cdot \sqrt{3} \cdot i$$

bzw.

$$= 2017 - 1302.5 \cdot i$$

Aufgabe b)

$$z = 121.5 - 210.44 \cdot i$$

bzw.

$$= \frac{243}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

Aufgabe c)

$$z = 3.69 - 6.4 \cdot i$$

bzw.

$$= e^2 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i)$$

Aufgabe

1. (a) Für $z_1 = i-1$ und $z_2 = 3-2i$ berechne man $\frac{z_1}{z_2}$ und z_1^{10}. Die Ergebnisse sind in kartesischer Form anzugeben.

   (b) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z = x+iy$, die beide der folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\operatorname{Im} z - (\operatorname{Re} z)^2 \geq -1 \quad \text{und} \quad |i - z| > 1.$$

   Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

Rechnen

(a) Für $z_1 = i - 1$ und $z_2 = 3 - 2i$ berechne man $\frac{z_1}{z_2}$ und z_1^{10}. Die Ergebnisse sind in kartesischer Form anzugeben.

Lösung

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-5+i}{13}$$

$$z_1^{10} = 32 \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i} = -32 \cdot i$$

Aufgabe

1. (a) Bestimmen Sie die kartesische Form von

$$z = \frac{(1+2i)(1-2i)}{3+(1+i)^2}.$$

(b) Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung

$$(z-2i)(z+1+i)^3 = -8z+16i.$$

(c) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z = x+iy$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$|z-2| \geq 1, \quad |2\,\mathrm{Re}(z)-1| \geq 1 \quad \text{und} \quad (\mathrm{Im}(z))^2 \leq 1+\mathrm{Re}(z).$$

Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

Rechnen

(b) Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung

$$(z - 2i)(z + 1 + i)^3 = -8z + 16i.$$

Lösung

$$z_1 = 2 \cdot i$$

$$z_2 = (\sqrt{3} - 1) \cdot i$$

$$z_3 = -3 - i$$

$$z_4 = -(\sqrt{3} + 1) \cdot i$$

Frage

$$i^i = ?$$

Lösung

$$e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Frage

$$2^i = ?$$

Lösung

$$e^{i \cdot \ln(2)} = \cos(\ln(2)) + i \cdot \sin(\ln(2))$$

$$\approx 0.78 + 0.63 \cdot i$$

Aufgabe

1. (a) Für $z_1 = i-1$ und $z_2 = 3-2i$ berechne man $\frac{z_1}{z_2}$ und z_1^{10}. Die Ergebnisse sind in kartesischer Form anzugeben.

   (b) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z = x+iy$, die beide der folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\operatorname{Im} z - (\operatorname{Re} z)^2 \geq -1 \quad \text{und} \quad |i - z| > 1.$$

   Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

Zeichnen

(b) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z = x+iy$, die beide der folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\operatorname{Im} z - (\operatorname{Re} z)^2 \geq -1 \quad \text{und} \quad |i - z| > 1.$$

Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

Aufgabe

7. Skizzieren Sie die Teilmenge der komplexen Ebene, deren Elemente $z = x + iy$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) $0 < \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(z) < |z|$ b) $|z + 2 - i| \geq 2$ c) $\mathrm{Re}(z^2) = c$ (c reell) d) $|z| - \mathrm{Im}(z) = 1$

e) $1 \leq |z^2| < 4$ und $\mathrm{Re}(iz) - \mathrm{Im}(z) > 0$ f) $\bar{z}z \leq 1$ und $-\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z)$

Zeichnen

(c) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z = x+iy$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$|z-2| \geq 1, \quad |2\,\mathrm{Re}(z) - 1| \geq 1 \quad \text{und} \quad (\mathrm{Im}(z))^2 \leq 1 + \mathrm{Re}(z).$$

Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

Theorie: Euler Formel

Herleitung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

$$e^{x} = 1 + i \cdot x - \frac{x^2}{2} - i \cdot \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$e^x = 1 + i\,x + -\frac{x^2}{2} + -i\,\frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$\ldots + i\,x + \ldots - i\,\frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$1 + \;\ldots\; + \frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$i \cdot \sin(x) = i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= i\,x - i\,\frac{x^3}{6} + i\,\frac{x^5}{120} + \ldots$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + i \cdot x + -\frac{x^2}{2} + -i \cdot \frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \cos(x) + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Bamm

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$