Tutorium 7

Konvergenz?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (q)^n$$

Wert?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Wert?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} \right)^n$$

Wert?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

Playlist

Aufgabe (Klausur)

3. Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases}\alpha\cos(\alpha x), & \text{für } x\le 0;\\ \frac{1}{2}e^{\beta x}, & \text{für } x>0.\end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $\alpha = 2$ und $\beta = 1$ im Intervall $[-\pi, 1]$.

(b) Geben Sie sämtliche Werte der reellen Parameters α und β an, für die f stetig ist.

(c) Kann man die Parameter sogar so wählen, dass f differenzierbar ist?

Lösung

a) Tafel

b) $\alpha = \dfrac{1}{2}$ und β beliebig

c) $\alpha = \dfrac{1}{2}$ und $\beta = 0$

Aufgabe (Klausur)

3. Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 3\cos(2x), & \text{für } x < 0; \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & \text{für } 0 \leq x \leq 1; \\ 1 + \ln x, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Werte der Parameter a, b, c und d, für die f differenzierbar ist.

Lösung

$a = 5 \quad b = -7 \quad c = 0 \quad d = 3$

Aufgabe (Klausur)

3. Wir betrachten folgende abschnittsweise definierte Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \beta + \sin(2x), & \text{für } x \leq 0; \\ \gamma x, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Dabei sind β und γ reelle Parameter.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ über dem Intervall $[-2\pi, 1]$.

(b) Welche Bedingungen sind an die Parameter β und γ zu stellen, damit f stetig ist?

(c) Kann man die Parameter β und γ sogar so wählen, dass f differenzierbar ist? Wenn ja, geben Sie alle Möglichkeiten für eine solche Parameterwahl an.

Lösung

a) Tafel

b) $\beta = 0$ und γ beliebig

c) $\beta = 0$ und $\gamma = 2$

Aufgabe (Klausur)

4. Gegeben ist die Funktion

$$f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_t(x) = \left(1 - \frac{x}{t}\right) e^{-tx}$$

mit einem Parameter $t > 0$.

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen sowie Lage und Art der lokalen Extrema.

(b) Analysieren Sie das Verhalten der Funktion f_t im Unendlichen, d. h. für $x \to \pm\infty$.

(c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion f_t an.

(d) Für welche Werte von t besitzt f_t an der Stelle $x_0 = 0$ eine Tangente mit Anstieg -2? Geben Sie die Gleichung dieser Tangente an.

Lösung

a) Nullstellte $x_N = t$; Extremstellen $x_{min} = t + \frac{1}{t}$

b) $\lim_{x \to -\infty} (1 - \frac{x}{t}) \cdot e^{-tx} = \infty$; $\lim_{x \to \infty} (1 - \frac{x}{t}) \cdot e^{-tx} = 0$

c) $f_t(x_{min}) = (1 - \frac{1}{t}(t + \frac{1}{t})) \cdot e^{-t(t+1/t)} = -\frac{1}{t^2} e^{-t^2-1}$;
$W_{f_t} = [f_t(x_{min}), \infty)$

d) $f_t'(0) = -2 \Rightarrow t = 1$ und die Tangente ist dann $h(x) = -2x + 1$