Tutorium 6

Frage

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Frage

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Frage

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Frage

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Frage

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Frage

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Quotientenkriterium

2) Welchem allgemeinen *Bildungsgesetz* unterliegen die folgenden Reihen? Untersuchen Sie diese Reihen mit Hilfe des *Quotientenkriteriums* auf *Konvergenz* bzw. *Divergenz*:

a) $1 + \frac{10}{1!} + \frac{100}{2!} + \frac{1000}{3!} + \ldots$

b) $\frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots$

d) $\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \ldots$

Lösung

a) konvergiert

b) konvergiert

c) konvergiert

d) konvergiert

Wurzelkriterium

7) Untersuchen Sie mit Hilfe des *Wurzelkriteriums*, ob die folgenden Reihen *konvergieren* oder *divergieren*:

a) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^n} + \ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n \cdot n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

Lösung

a) konvergiert

b) divergiert

c) konvergiert

Leibnizkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n$$

$$a_n > a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Leibnizkriterium

10) Welche der folgenden *alternierenden* Reihen *konvergieren*, welche *divergieren*? Verwenden Sie bei der Untersuchung das Konvergenzkriterium von *Leibniz*.

a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots$

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot 5^{2n-1}}$

Lösung

a) konvergiert

b) konvergiert

c) konvergiert

d) konvergiert

Geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots$$

Wie muss die Zahl q aussehen, damit die Reihe konvergiert ?

Welchen Wert hat die Reihe ?

Geometrische Reihen

1) Berechnen Sie den *Summenwert* der folgenden geometrischen Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}3^{n-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Lösung

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n = \frac{8}{9}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}3^n = \frac{10}{7}$

c) $4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{12}{5}$

Klausuraufgabe

TU BERGAKADEMIE · FREIBERG ·

2. (a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2-2}} + \frac{2n-3}{8+n^2},$$

sofern er existiert.

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=\mathbf{2}}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k-2}}.$$

(c) Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k\pi)}{k}$$

auf Konvergenz.

Zum Üben

9) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der unendlichen Reihen unter Verwendung geeigneter Konvergenzkriterien:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$ $\quad \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n^2-1)}}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n}$

Lösung

a) konvergiert, divergiert, divergiert, konvergiert, konvergiert

b) konvergiert, konvergiert, divergiert

c) divergiert, konvergiert, divergiert, konvergiert

d) divergiert