Tutorium 1

1. Für die komplexen Zahlen $z_1 = i$ und $z_2 = -2-4i$ berechne man :

$$z_1 + z_2 \;, \quad z_1 - z_2 \;, \; z_1 \cdot z_2 \,, \; \frac{z_1}{z_2}, \quad \bar{z}_2 \cdot z_1 \;, \; \frac{z_2 \cdot \bar{z}_2}{z_1} \;.$$

$$z_1 + z_2 = -2 - 3i$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4 - 2i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-4 - 2i)}{20} = \frac{-(2 + i)}{10}$$

$$z_2^* \cdot z_1 = -4 - 2i$$

$$\frac{z_2 \cdot z_2^*}{z_1} = \frac{20}{i} = -20i$$

5) Zeigen Sie: Für *jede* komplexe Zahl $z = x + \mathrm{j}\,y$ gilt:

a) $z + z^* = 2 \cdot \mathrm{Re}\,(z)$ b) $z - z^* = 2\mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\,(z)$

6) Bestimmen Sie den *Betrag* der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = 4 - 3\,\mathrm{j}, \qquad z_2 = -2 - 6\,\mathrm{j}, \qquad z_3 = 3\,(\cos 60^\circ - \mathrm{j} \cdot \sin 60^\circ),$$

$$z_4 = -3 + 4\,\mathrm{j}, \qquad z_5 = -4\,\mathrm{j}, \qquad z_6 = -3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}$$

$$|z_1| = 5$$

$$|z_2| = \sqrt{40}$$

$$|z_3| = 3$$

$$|z_4| = 5$$

$$|z_5| = 4$$

$$|z_6| = 3$$

2. Welche der folgenden Ungleichungen sind richtig?

a) $-2i^2 < 5$

b) $(i+3)^2 > 0$

c) $i^2 + 3 > 0$

d) $\sin\varphi \leq \left|e^{i\varphi}\right|$

e) $(1-i)^4 > 0$

f) $\left|\sqrt{21}\,i - 5\right| < |7 - 3i|$

a) passt $2 < 5$

b) passt nicht, weil komplex $-1 + 6i + 9 > 0$

c) passt $2 > 0$

d) passt $\sin(\phi) \leq 1$

e) passt nicht $-4 > 0$

f) passt $\sqrt{46} < \sqrt{58}$

Geschichte: komplexe Zahlen

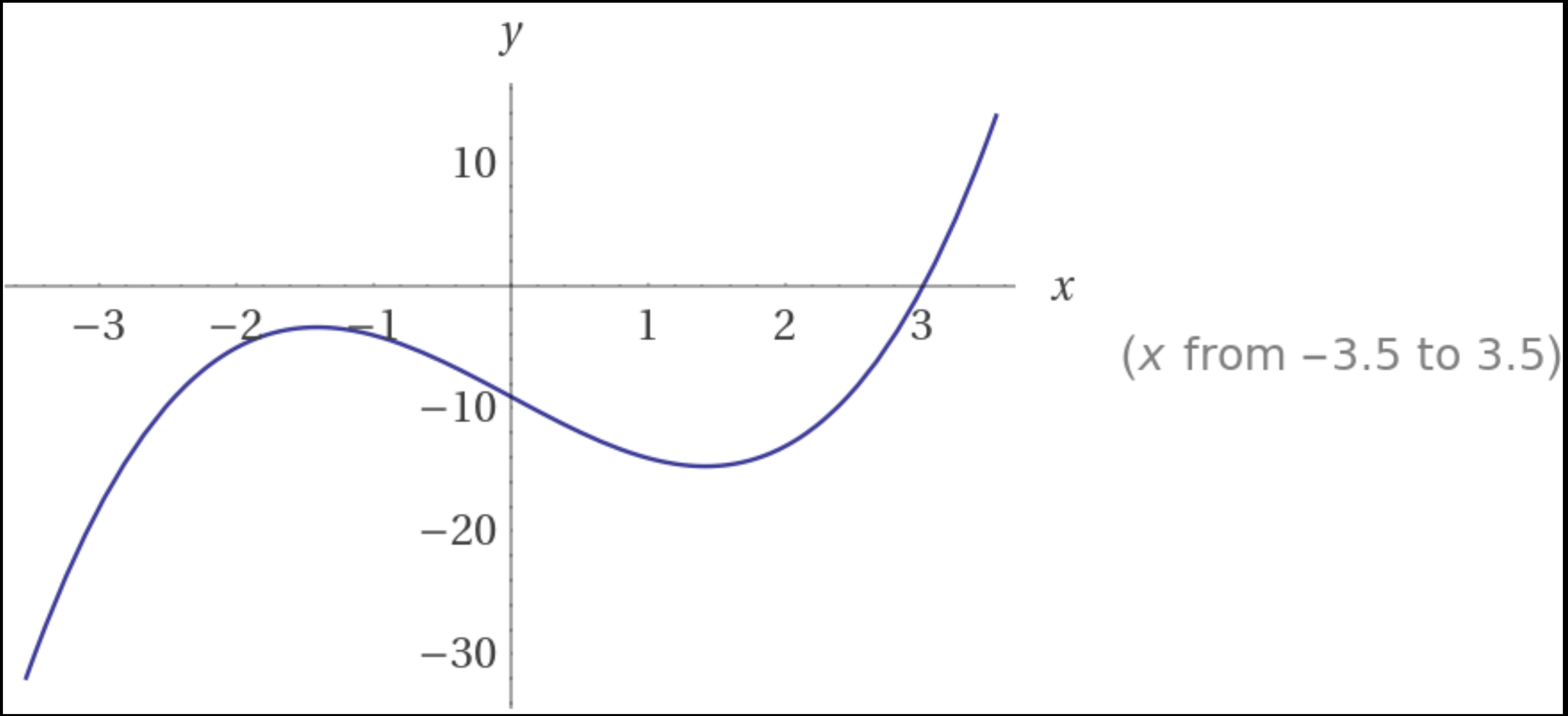
Cardano

$$x = p \cdot x + q$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Beispiel

$$x^3 = 6 \cdot x + 9$$



Beispiel

$$x^3 = 6 \cdot x + 9$$

$$x^3 = p \cdot x + q$$

$$p = 6 \qquad q = 9$$

Beispiel

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$p = 6$$

$$q = 9$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3}}$$

Rechnen

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-8}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{81}{4}-8}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{32}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{32}{4}}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}$$

Rechnen

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1$$

$$x = 3$$

Noch ein Beispiel

$$x^3 = 15 \cdot x + 4$$

Beispiel

$$x^3 = 15 \cdot x + 4$$

$$x^3 = p \cdot x + q$$

$$p = 15 \qquad q = 4$$

Beispiel

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$p = 15$

$q = 4$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}}$$

Rechnen

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - (\frac{15}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - (\frac{15}{3})^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2^2 - 5^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{2^2 - 5^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$$

Rechnen

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{121}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-1} \cdot 11} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-1} \cdot 11}$$

vielleicht ?

$$(2+\sqrt{-1})^3$$

vielleicht ?

$$(2-\sqrt{-1})^3$$

Rechnen

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-1} \cdot 11} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-1} \cdot 11}$$

$$x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3}$$

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$$

Ergebnis

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$$

$$x = 4$$

Was folgt daraus

- zu bekannten Rechenregeln einfach etwas ergänzen nämlich:
- $\sqrt{-1}$ ist möglich

$$i = \sqrt{-1}$$