Tutorium 4

TU BERGAKADEMIE FREIBERG

Wir haben eine orthogonale Matrix A, was gilt für diese?

a) $A^2 = A$

b) $A^T = A$

c) $A^2 = I$

d) $A^T = A^{-1}$

Wir haben eine symmetrische Matrix A ,
was gilt für die Eigenwerte λ ?

a) $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\lambda \in \mathbb{C}$

c) $\lambda > 0$

d) $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Wir haben eine symmetrische Matrix A, was gilt für diese?

a) $A^2 = A$

b) $A^T = A$

c) $A^2 = I$

d) $A^T = A^{-1}$

Aufgabe

14) Wie lauten die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der folgenden 3-reihigen *symmetrischen* Matrizen?

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe

Aufgabe 1

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie zu allen Eigenwerten die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

(b) Sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1 + 2i$ Eigenwerte der Matrix

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 12 & -1 \\ -6 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}?$$

Begründen Sie Ihre Aussagen.

(c) Geben Sie alle Eigenwerte der Matrix $D = B^3 - B^2 + 12I$ an, wobei $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix sei.

Sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1 + 2i$ Eigenwerte der Matrix ?

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 12 & -1 \\ -6 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ja

b) nur λ_2

c) nur λ_1

d) nein

Aufgabe

Aufgabe 1

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie zu allen Eigenwerten die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

(b) Sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1 + 2i$ Eigenwerte der Matrix

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 12 & -1 \\ -6 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}?$$

Begründen Sie Ihre Aussagen.

(c) Geben Sie alle Eigenwerte der Matrix $D = B^3 - B^2 + 12I$ an, wobei $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix sei.

Lösung

a) A: $v_1 = (-3,1)$ zu $\lambda_1 = -6$ und $v_2 = (1,3)$ zu
B: $v_{1,2} = (1,0)$ zu $\lambda_{1,2} = -2$

b) λ_1 ja, weil $\det(a) = 0$
λ_2 nein, weil $A = A^T$ also symmetrisch und somit nur reelle Eigenwerte

c) $\lambda = 0$

Aufgabe

1. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie zu allen Eigenwerten die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

(b) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix V und eine Diagonalmatrix D an, für die $A = VDV^{-1}$ gilt.

(c) Wie müssen die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $A^2 + \alpha A + \beta I = O$ gilt?
Hinweis: *Denken Sie über die Eigenwerte und Eigenvektoren der Nullmatrix nach.*

Lösung

a) $v_1 = (0, -1,1)$ zu $\lambda_1 = 2$
$v_2 = (1,0,1)$ zu $\lambda_2 = -1$
$v_3 = (0,1,0)$ zu $\lambda_3 = -1$

b) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $2^2 + \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1 = 0$ und $(-1)^2 + \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot 1 = 0$
$\rightarrow \alpha = -1$ und $\beta = -2$