Tutorium 2

Betrag

reeller Zahl: $|x| = \sqrt{x^2}$ $\qquad x = -2$

komplexe Zahl: $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$ $\qquad z = -4 + 3i$

Lösung

Aufgabe a)

$$|-2| = 2$$

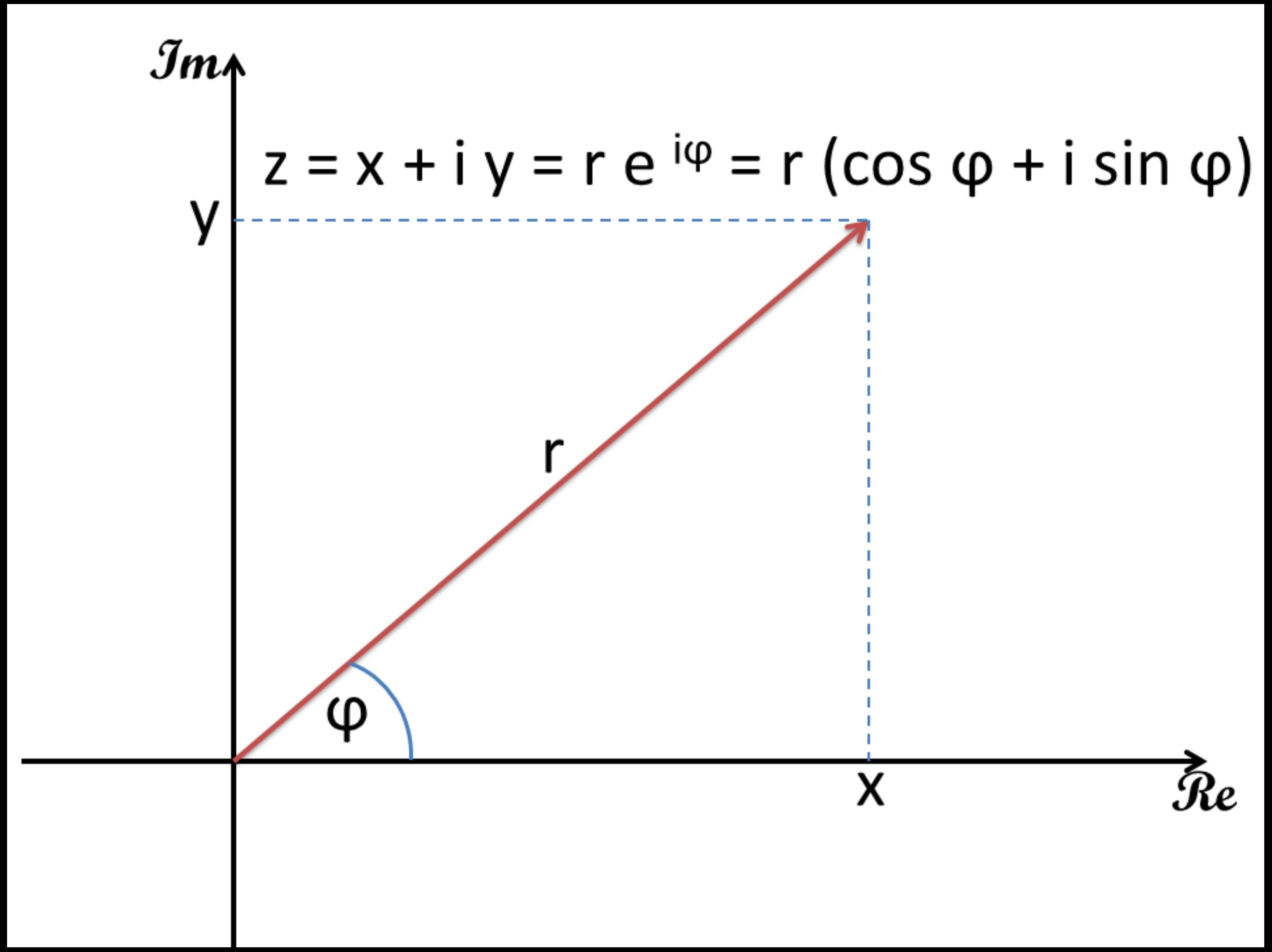
Aufgabe b)

$$|-4+3i| = 5$$

Darstellungsform von komplexen Zahlen

Alle Darstellungsformen

- $z = x + iy$
- $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
- $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$



Formel von Euler

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

Formel von De Moivre

$$(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$$

Rechnen

$$(i+1)^4 = ?$$

Lösung

$$4 \cdot e^{i\pi} = -4$$

Gleichung lösen

$$z^4 - 1 = 0$$

Lösung

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = -1$$

$$z_3 = i$$

$$z_4 = -i$$

Aufgabe

8. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen für die gilt:

a) $z^3 = -i$

b) $\cancel{z^5 = 5 + 8i}$

Lösung

Aufgabe a)

$$z_1 = e^{i\frac{1}{2}\pi}$$

$$z_2 = e^{i(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi)} = e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{1}{2}\pi + \frac{4}{3}\pi)} = e^{i\frac{11}{6}\pi}$$

Aufgabe

8) Wie lauten die *Lösungen* der folgenden Gleichungen?

a) $z^3 = \mathrm{j}$ b) $z^4 = 16 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,160^\circ}$ c) $z^5 = 3 - 4\mathrm{j}$

Skizzieren Sie die Lage der zugehörigen *Zeiger* in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung

Aufgabe a)

$$z_1 = e^{i\frac{1}{6}\pi}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi\right)} = e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

$$z_3 = e^{i\left(\frac{1}{6}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)} = e^{\frac{9}{6}\pi}$$

Aufgabe b)

$$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{2}{9}\pi}$$

$$z_2 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2}{4}\pi\right)} = 2 \cdot e^{i\frac{13}{18}\pi}$$

$$z_3 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{2}{9}\pi + \frac{4}{4}\pi\right)} = 2 \cdot e^{i\frac{11}{9}\pi}$$

Lösung

Aufgabe c)

$$z_1 = \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,5{,}35}$$

$$z_2 = \sqrt[5]{5} \cdot e^{i(5{,}35+\frac{2}{5}\pi)} \approx \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,6{,}6066} \approx \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,0{,}3235}$$

$$z_3 = \sqrt[5]{5} \cdot e^{i(5{,}35+\frac{4}{5}\pi)} \approx \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,7{,}8632} \approx \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,1{,}5801}$$

$$z_4 = \sqrt[5]{5} \cdot e^{i(5{,}35+\frac{6}{5}\pi)} \approx \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,9{,}1199} \approx \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,2{,}8367}$$

$$z_5 = \sqrt[5]{5} \cdot e^{i(5{,}35+\frac{8}{5}\pi)} \approx \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,10{,}3765} \approx \sqrt[5]{5} \cdot e^{i\,4{,}1236}$$

Aufgabe

1. (a) Bestimmen Sie die kartesische Form von

$$z = \frac{(1+2i)(1-2i)}{3+(1+i)^2}.$$

(b) Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung

$$(z-2i)(z+1+i)^3 = -8z+16i.$$

(c) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z = x+iy$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$|z-2| \geq 1, \quad |2\,\mathrm{Re}(z)-1| \geq 1 \quad \text{und} \quad (\mathrm{Im}(z))^2 \leq 1+\mathrm{Re}(z).$$

Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

Rechnen

1. (a) Bestimmen Sie die kartesische Form von

$$z = \frac{(1+2i)(1-2i)}{3+(1+i)^2}.$$

Lösung

$$z = \frac{15 - 10 \cdot i}{13}$$