Tutorium 5

Finde die Nullfolge

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

b) $b_n = \frac{n!}{n^3}$

c) $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Finde die Nullfolgen

a) $a_n = \dfrac{2n^2 + 3}{n + 7}$

b) $b_n = 0.5^n$

c) $c_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$

Finde die Nullfolge

a) $a_n = \dfrac{5^n}{n^5}$

b) $b_n = (-1)^n$

c) $c_n = 2^{-n}$

Finde die Nullfolgen

a) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

b) $b_n = (-0.7)^n \cdot \cos(n\pi)$

c) $c_n = \sqrt[n]{2} - 1$

Unbestimmte Ausdrücke

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \cdot \infty$$

Beispiele

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{e^x}\right)$$

Beispiele

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln x}{x - 1} \right)$$

Beispiele

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)$$

Aufgabe

2. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{n\sqrt{n+1}}{(4n)^{\frac{3}{2}}}, \qquad b_n = \frac{7\sin(n^8)}{n^2},$$

sofern diese existieren.

Lösung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{(4n)^{3/2}} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7 \cdot \sin(n^8)}{n^2} = 0$$

Aufgabe

2. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{(5n^2+4)^2}{n^4+n^2+1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{3(-2)^n + 2^n}{3^n}.$$

Lösung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(5\cdot n^2+4)^2}{n^4+n^2+1} = 25$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot(-2)^n+2^n}{3^n} = 0$$

Aufgabe

2. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{3n}{\sqrt{n+1}\sqrt{n-1}} \ (n \geq 2), \qquad b_n = \cos(n\pi) - \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1},$$

sofern diese existieren.

Lösung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot n}{\sqrt{n+1}\sqrt{n-1}} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi) - \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n^2+1} = 0$$

Rechenregeln

$$a_n \to a$$

$$b_n \to b$$

$$a_n \pm b_n \to a \pm b$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

$$a_n^k \to a^k \,, k \in \mathbb{R}$$

Reihen

$$\sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

Unendliche Reihen

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Können unendliche Reihen einen festen Wert besitzen ?

Was muss dafür erfüllt sein ?

a_n muss Nullfolge sein

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Quotientenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Wurzelkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Quotientenkriterium

2) Welchem allgemeinen *Bildungsgesetz* unterliegen die folgenden Reihen? Untersuchen Sie diese Reihen mit Hilfe des *Quotientenkriteriums* auf *Konvergenz* bzw. *Divergenz*:

a) $1 + \frac{10}{1!} + \frac{100}{2!} + \frac{1000}{3!} + \ldots$

b) $\frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots$

d) $\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \ldots$

Wurzelkriterium

7) Untersuchen Sie mit Hilfe des *Wurzelkriteriums*, ob die folgenden Reihen *konvergieren* oder *divergieren*:

a) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^n} + \ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n \cdot n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

Leibnizkriterium

$$a_n > a_{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Leibnizkriterium

10) Welche der folgenden *alternierenden* Reihen *konvergieren*, welche *divergieren*? Verwenden Sie bei der Untersuchung das Konvergenzkriterium von *Leibniz*.

a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots$

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot 5^{2n-1}}$

Geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots$$

Wie muss die Zahl q aussehen, damit die Reihe konvergiert ?

Welchen Wert hat die Reihe ?

Geometrische Reihen

1) Berechnen Sie den *Summenwert* der folgenden geometrischen Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}3^{n-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$