ODE

Lösen Sie die *inhomogene* Differentialgleichung 1. Ordnung $y' - 3y = x \cdot e^x$
a) durch *Variation der Konstanten,*
b) durch *Aufsuchen einer partikulären Lösung.*

(a) Lösen durch Variation der Konstanten

$$y' - 3y = x \cdot e^x$$

$$\rightarrow y' - 3y = 0$$

(1) homogene Lsg.
(2) inhomogene Lsg.
(3) Anfangs- (oder Rand-) werte einsetzen

Allgemeine Methode um Differentialgleichungen zu lösen

(1) $y' - 3y = 0$

$$y' = 3y \quad \| \quad \frac{dy}{dx} = 3y \quad | \cdot dx$$

$y(x)$

$$dy = 3y \cdot dx \quad | : y$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int 3\, dx$$

$$\ln|y| = 3x + c \quad | e^{\cdots}$$

$$y = e^{3x+c} = e^{3x} \cdot e^{c} = e^{3x} \cdot d$$

$$y = d \cdot e^{3x} \Rightarrow y' - 3y = 0$$

(2) $y' - 3y = x \cdot e^x \Rightarrow y_{in} = d(x) \cdot e^{3x}$

$$y = d(x) \cdot e^{3x}$$

$$y' = d'(x) \cdot e^{3x} + d(x) \cdot 3e^{3x}$$

$$\underbrace{d'(x) \cdot e^{3x} + d(x) \cdot 3e^{3x}}_{y'} - 3\underbrace{(d(x) \cdot e^{3x})}_{y} = x \cdot e^x$$

$= 0$

$$d'(x)\cdot e^{3x} = x\cdot e^{x} \quad \Big| \cdot e^{-3x}$$

$$d'(x) = x\cdot e^{x}\cdot e^{-3x}$$

$$d'(x) = x\cdot e^{-2x}$$

$$\int d'(x)\,dx = d(x) = \int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$d(x) = x\cdot \frac{-1}{2}e^{-2x} + 1/2\int e^{-2x}\,dx$$

$$d(x) = \frac{-x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

$$d(x) = e^{-2x}\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + c$$

$$d(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + c$$

$$y(x) = d(x)\cdot e^{3x}$$

$$y(x) = \left(-e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + c\right)\cdot e^{3x} \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$y(x) = -e^{x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + ce^{3x}$$

$\Rightarrow$ Überzeugt euch, dass $y(x)$ die ODE $y' - 3y = xe^{x}$ löst durch Einsetzen.

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch *Variation der Konstanten*:

a) $y' + xy = 4x$ b) $y' + \frac{y}{1+x} = e^{2x}$

c) $xy' + y = x \cdot \sin x$ d) $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x = 1$

e) $y' - (2 \cdot \cos x) \cdot y = \cos x$ f) $xy' - y = x^2 + 4$

$=$

$$y' + \frac{y}{1+x} = e^{2x}$$

(1) $$y' + \frac{y}{1+x} = 0$$

$$y' = \frac{-y}{1+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{1+x}$$

$$dy = \frac{-y}{1+x}\,dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{-1}{1+x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{-1}{1+x}\,dx$$

$$\ln|y| = -\int \frac{1}{1+x}\,dx = -\ln|1+x| + c \quad | e^{\cdots}$$

$$\left(y = e^{-\ln|1+x|} = \frac{1}{e^{\ln|1+x|}} = \frac{1}{1+x} \right)$$

$$\ln|y| = -\ln|1+x| = \ln|(1+x)^{-1}| + c \quad | e^{\cdots}$$

$$y = \frac{1}{1+x} \cdot e^{c} = \frac{1}{1+x} \cdot d$$

homogene Lösung $$\underline{y = \frac{d}{1+x}} \Rightarrow \underline{y' = d \cdot \frac{-1}{(1+x)^2}}$$

$$y' + \frac{y}{1+x} = 0 \qquad y' + \frac{y}{1+x} = 0$$

$$d \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{d}{1+x} = 0$$

$$\underbrace{\frac{-d}{(1+x)^2} + \frac{d}{(1+x)^2}}_{=0} = 0$$

$=$

② $$y' + \frac{y}{1+x} = e^{2x}$$

$$y = \frac{d(x)}{1+x} \Rightarrow y' = d'(x) \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{d(x)}{(1+x)^2}$$

$$\underbrace{y'} + \frac{y}{1+x} = e^{2x}$$

$$d'(x) \cdot \frac{1}{1+x} \underbrace{- \frac{d(x)}{(1+x)^2} + \frac{d(x)}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x}}_{=0} = e^{2x}$$

$$d'(x) \frac{1}{1+x} = e^{2x} \quad | \cdot (1+x)$$

$$d'(x) = e^{2x}(1+x)$$

$$d(x) = \int d'(x) = \int e^{2x}(1+x)\,dx$$

$$d(x) = \int e^{2x} dx + \int x e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} e^{2x} + c\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$d(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + c$$

$$d(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) + c$$

$$y(x) = d(x) \cdot \frac{1}{1+x}$$

inhomogene Lösung

$$y(x) = \left(e^{2x}\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) + c\right) \cdot \frac{1}{1+x}$$

=

überzeugt euch durch Einsetzen, dass $y(x)$ wirklich Lösung der DGL ist.