1. (a) Für $z = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}(-1-i)$ berechne man mit der Formel von Moivre z^6. Das Ergebnis ist dabei in kartesischer Form anzugeben und soweit wie möglich zu vereinfachen.

(b) Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung

$$\left(z + \frac{5i}{1-i}\right)^2 (z^2 - 3z + 4) = 0.$$

Die Ergebnisse sind in kartesischer Form anzugeben.

(c) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

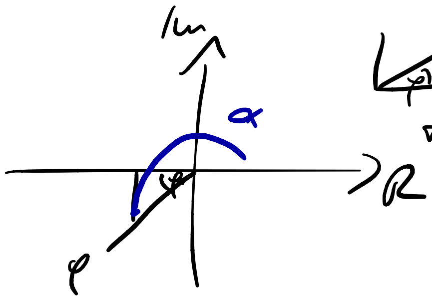
$$|\mathrm{Re}(z)| \leq -\mathrm{Im}(z) \quad \text{und} \quad |1 + 2i + z| \leq 1.$$

Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

$z^6 \Rightarrow$ $z^6 = |z|^6 \cdot (\cos(6\varphi) + i\sin(6\varphi)) = \left(|z| \cdot e^{i\varphi}\right)^6$

$z = -\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}} i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \sqrt{2\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}\right)^2}$



$\tan(\varphi) = \frac{Gc}{An}$

$= \sqrt{(\sqrt[3]{5})^2} = \sqrt[3]{5}$

$\tan(\varphi) = \frac{|\mathrm{Im}(z)|}{|\mathrm{Re}(z)|}$

$\pi + \varphi$ dann mit φ

$\varphi = \arctan\left(\frac{|\mathrm{Im}(z)|}{|\mathrm{Re}(z)|}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}}\right) = \arctan(1)$

$\underline{\varphi = \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

$z^6 = |z|^6 \cdot (\cos(6 \cdot \frac{5}{4}\pi) + i\sin(6 \cdot \frac{5}{4}\pi))$

$= |z|^6 \cdot (\cos(\frac{3 \cdot 5}{2}\pi) + i\sin(\frac{3 \cdot 5}{2}\pi))$ $\quad \frac{4}{2}$

$= |z|^6 \cdot (\cos(\frac{15}{2}\pi) + i\sin(\frac{15}{2}\pi))$ $\quad \frac{8}{2}$

$= |z|^6 \cdot (\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi))$ $\quad \frac{12}{2}$

$= |z|^6 (0 - i)$ $\quad \frac{16}{2}$

$= (\sqrt[3]{5})^6 (-i)$

$= 25(-i) = \underline{-25i}$

b)

$$\left(z+\left(\frac{5i}{1-i}\right)\right)^2 (z^2-3z+4) = 0$$

p-q-Formel

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad z_1 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2} \qquad z_2 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$$

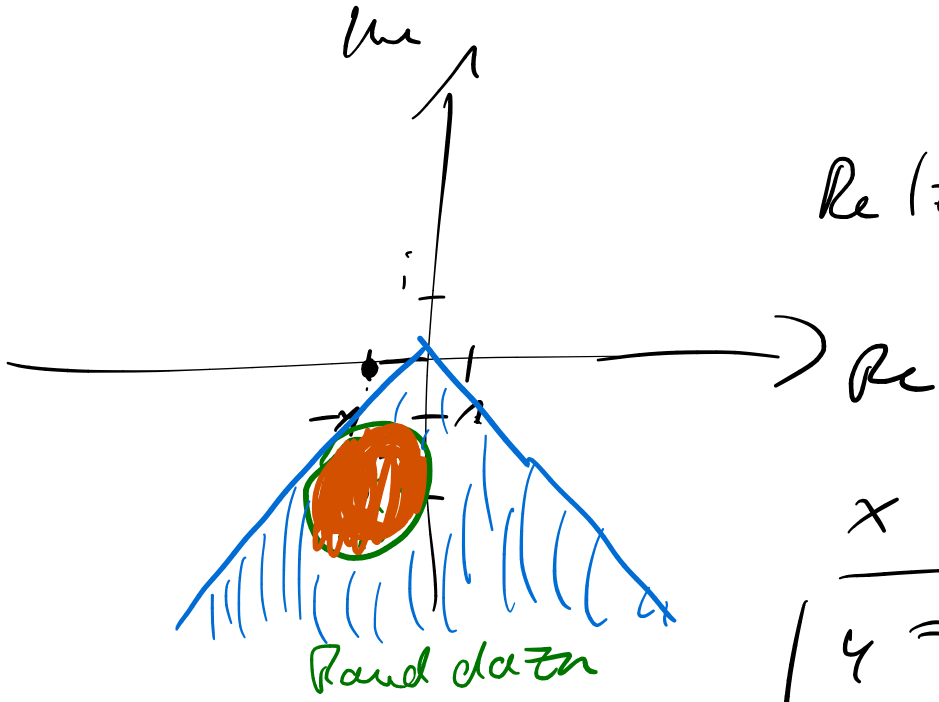
$$z + \frac{5i}{1-i} = 0 \Rightarrow -\frac{5i}{1-i} = z_3$$

$$z_3 = \frac{-5i}{1-i} = \frac{5i}{i-1}$$

$|\mathrm{Re}(z)| \leq -\mathrm{Im}(z)$

$|1+2i+z| \leq 1$

$|1+2i+z| = 1$



$\mathrm{Re}\,|z| = -\mathrm{Im}(z)$

$x = -y$

$\boxed{y = -|x|}$

2. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{(3n)^{\frac{3}{2}}}{n(n+2)} \quad \text{und} \quad b_n = (-1)^n \sin(n\pi/2),$$

sofern diese existieren.

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{k+1}}{4^{k-1}}.$$

(c) Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(k+\sqrt{k})^k}$$

auf Konvergenz.

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{(3n)^{\frac{3}{2}}}{n(n+2)} \quad \text{und} \quad b_n = (-1)^n \sin(n\pi/2),$$

sofern diese existieren.

a)
$$\frac{(3n)^{3/2}}{n(n+2)} = \frac{3^{3/2}(n)^{3/2}}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \frac{3^{3/2}\cancel{(n)^{3/2}}}{\cancel{(n)^{3/2}}\left(n^{1/2} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \frac{3^{3/2}}{\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3^{3/2}}{\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{3^{3/2}}{\infty + 0} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \underline{\underline{0}}$$

b) $(-1)^n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = b_n$

kein Grenzwert existiert

bzw. mehrere

für $b_n = (-1)^{4k} \cdot \sin\left(4 \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

für $k \in \mathbb{Z}$ wobei $n = 4k$

$$\lim_{n \to \infty} (b_n) = 0$$

für $b_n = (-1)^{4k+1} \cdot \sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$\lim_{n \to \infty} (b_n) = -1$; $k \in \mathbb{Z}$ wobei $n = 4k+1$

für $b_n = (-1)^{4k+2} \cdot \sin\left((4k+2)\frac{\pi}{2}\right)$

$\lim_{n \to \infty} (b_n) = 0$ $\quad n = 4k+2$; $k \in \mathbb{Z}$

für $b_n = (-1)^{4k+3} \cdot \sin\left((4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$

$\lim_{n \to \infty} (b_n) = 1$ $\quad n = 4k+3$; $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{k+1}}{4^{k-1}} = 6 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{4^{k-1}}$$

$$g = k-1 \Rightarrow k = g+1$$

$$\Rightarrow 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{4^{k-1}} = 6 \cdot \sum_{g=0}^{\infty} \frac{2^{g+1+1}}{4^{g+1-1}}$$

$$= 6 \cdot \sum_{g=0}^{\infty} \frac{2^{g+2}}{4^{g}}$$

$$= 6 \cdot \sum_{g=0}^{\infty} \frac{2^{g} \cdot 2^{2}}{4^{g}}$$

$$= 24 \sum_{g=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{g} \quad *$$

$$6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{4^{k-1}} = 24 \cdot 2 = \underline{\underline{48}}$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{g=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{g} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}} \quad *$$

2. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{(3n)^{\frac{3}{2}}}{n(n+2)} \quad \text{und} \quad b_n = (-1)^n \sin(n\pi/2),$$

sofern diese existieren.

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{k+1}}{4^{k-1}}.$$

(c) Untersuchen Sie die Reihen

$$1 \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(k+\sqrt{k})^k} \quad 2$$

auf Konvergenz.

(c) 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3k}$$

LK := Leibnizkriterium

fordert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_n$ wobei a_n monotone Nullfolge

aber !!

$\lim_{k \to \infty} \frac{2k+1}{3k} = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow$ gemäß LK ist die Reihe nicht konvergent

2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(k+\sqrt{k})^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^2)^k}{(k+\sqrt{k})^k}$$

WK := Wurzelkriterium

$$\lim_{k \to \infty} \left(\sqrt[k]{\frac{2^2}{(k+\sqrt{k})^k}} \right) = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{2^2}{k+\sqrt{k}} \right) = \underline{\underline{0 < 1}}$$

$$\overset{1}{=} \frac{2^2}{\infty}$$

Gemäß WK ist die Reihe konvergent.

3. Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & \text{für } x \leq 1, \\ xe^{x-1} + b(1-x) & \text{für } x > 1. \end{cases} \quad x = 1$$

(a) Geben Sie sämtliche Werte der reellen Parameter a und b an, für die f stetig ist.

(b) Kann man a und b so wählen, dass f sogar differenzierbar ist? Wenn ja, geben Sie diese Werte für a und b an.

(a)

$$x^2 + ax + 2 \Big|_{x=1} = xe^{x-1} + b(1-x) \Big|_{x=1}$$

$$1^2 + a \cdot 1 + 2 = 1 \cdot e^{1-1} + b(1-1)$$

$$1 + a + 2 = 1$$

$$a + 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = -2}$$

$$\Rightarrow \underline{b \in \mathbb{R}}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(x^2 + ax + 2) = \frac{d}{dx}\left(x \cdot e^{x-1} + b(1-x)\right) \Big|$$

$$2x + a = e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} - b$$

$\Rightarrow$ Stelle $x = 1$ für Differenzierbarkeit

$$2 \cdot 1 + a = e^{1-1} + 1 \cdot e^{1-1} - b$$

$$2 + a = 1 + 1 - b = 2 - b$$

$$\underline{a = -b}$$

mit $a = -2$ folgt $-2 = -b \Rightarrow \underline{b = 2}$

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2 - x - \frac{2}{x+2}.$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie alle Nullstellen und Polstellen. Bestimmen Sie die einseitigen uneigentlichen Grenzwerte bei Annäherung an die Polstellen.

(b) Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema von f.

(c) Die Funktion f besitzt für $x \to \pm\infty$ eine Asymptote. Wie lautet deren Gleichung?

(d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion. Geben Sie den Wertebereich von f an.

a) $D_{f(x)}: x \in \mathbb{R}$ wobei $x \neq -2$ Definitionsbereich

$$0 = 2 - x - \frac{2}{x+2} \quad | \cdot (x+2)$$

$$0 = (2-x)\cdot(x+2) - 2$$

$$= 4 - x^2 - 2 = 2 - x^2$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

Nullstellen

Polstellen bei $x = -2$

linksseitige Annäherung

$$\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$$

rechtsseitige Annäherung

$$\lim_{x \to -2} (f(x)) = -\infty$$

b)

$$f(x) = 2 - x - \frac{2}{x+2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{(x+2)^2}$$ Ableitung von $f(x)$

$$f'(0) = -1 + \frac{2}{(x+2)^2}$$ wenn $$-\frac{2}{(x+2)^2} = -1$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(x+2)^3}$$

$$\frac{2}{(x+2)^2} = 1$$

$$2 = (x+2)^2$$

$$\Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{2}$$

1. Fall

$$x+2 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \sqrt{2} - 2}}$$

2. Fall

$$x+2 = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -\sqrt{2} - 2}}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(x+2)^3}$$

Für Extremum bei $x_1 = \sqrt{2} - 2$
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

Für Extremum bei $x_2 = -\sqrt{2} - 2$
$f''(x) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

5. (a) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = |x|$ und $g(x) = 4 - 3x^2$ begrenzt wird. Skizzieren Sie die zu berechnende Fläche.

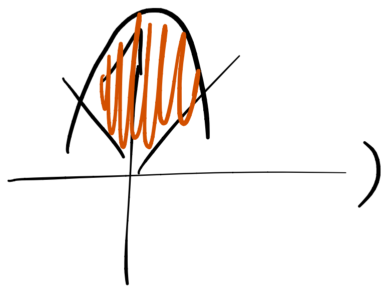
(b) Bestimmen Sie

$$\int \frac{x+1}{e^x}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{5x^2+2x-7}{(x-1)(x^2+6x+9)}\,dx$$

durch Rückführung auf Grundintegrale.

a) $f(x) = |x| \qquad g(x) = 4 - 3x^2$

Skizze:



Bestimme Integrationsgrenzen:

$$x = 4 - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + x - 4 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{3}}$$

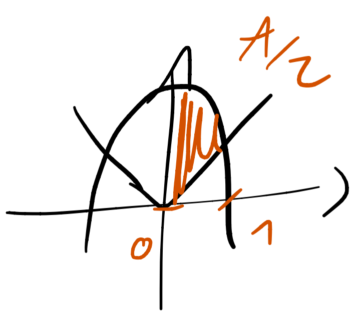
$$= -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{48}{36}}$$

$$= -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36}} = -\frac{1}{6} \pm \frac{7}{6}$$

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1$$

$$\left(x_2 = -\frac{8}{6}\right)$$

Nutze Symmetrie



$$\frac{A}{2} = \int_{x=0}^{1} (4 - 3x^2 - x)\, dx$$

$$= 4x - x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1$$

$$= 4 - 1 - \frac{1}{2} - 0$$

$$\frac{A}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ (FE)}$$

Symmetrie $\Rightarrow$ $A = 2 \cdot \frac{A}{2} = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5 \text{ (FE)}$

Aufgabe 5b

5. (a) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = |x|$ und $g(x) = 4 - 3x^2$ begrenzt wird. Skizzieren Sie die zu berechnende Fläche.

(b) Bestimmen Sie

$$① \int \frac{x+1}{e^x}\, dx \quad \text{und} \quad \int \frac{5x^2 + 2x - 7}{(x-1)(x^2+6x+9)}\, dx \quad ②$$

durch Rückführung auf Grundintegrale.

①

$$\int \frac{x+1}{e^x}\, dx = \int (x+1) \cdot e^{-x}\, dx$$

$$\int (x+1) \cdot e^{-x}\, dx = (x+1) \cdot -e^{-x} + \int e^{-x}\, dx$$

$$= (x+1) \cdot -e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x} \cdot (x+1+1) + c$$

$$= \underline{-e^{-x} \cdot (x+2)} + c$$

②

$$\int \frac{5x^2+2x-7}{(x-1)(x^2+6x+9)}\,dx = \int \frac{5x^2+2x-7}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$$

$$x^2+6x+9 = (x+3)^2$$

$$\frac{5x^2+2x-7}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \quad \Big| \cdot (x-1) \quad \Big| \cdot (x+3)^2$$

$$5x^2+2x-7 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C\cdot(x-1)$$

1. Fall $x=1$

$$5+2-7 = A(4)^2 + 0 + 0$$

$$0 = A\cdot 4^2 \Rightarrow \underline{A=0}$$

2. Fall $x=-3$

$$5\cdot(-3)^2 + 2(-3) - 7 = A(-3+3)^2 + B(-3-1)(-3+3) + C(-3-1)$$

$$5\cdot 9 - 6 - 7 = C(-3-1) = C\cdot(-4)$$

$$45-6-7 = C\cdot(-4)$$

$$32 = (-4)\cdot C \quad | : -4$$

$$\underline{C = -8}$$

3. Fall $x=0$

$$-7 = A(3)^2 + B(-1)\cdot 3 + C\cdot(-1)$$

$$-7 = A \cdot 5 - 3B - 1C$$

$$-7 = 0 - 3B + 8 \quad | -8$$

$$-15 = -3B \Rightarrow \underline{\underline{B = 5}}$$

$$\frac{5x^2 + 2x - 7}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{5}{x+3} + \frac{-8}{(x+3)^2}$$

$$\int \frac{5}{x+3} + \frac{(-8)}{(x+3)^2}\, dx = 5 \cdot \ln|x+3| + \frac{8}{x+3} + C$$

6. Gegeben seien eine Matrix A und ein Vektor $\vec{b}$ wie folgt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \gamma & 1 \\ \gamma & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $\gamma \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Wieviele Lösungen hat – in Abhängigkeit vom Parameter γ – das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$?

(c) Berechnen Sie für $\gamma = 2$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \gamma & 1 \\ \gamma & 0 & 4 \end{pmatrix} = -3\gamma^2 + 6\gamma$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & \gamma & 1 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & 4 & \gamma & 0 \end{matrix} \Rightarrow 4\gamma + 2\gamma + 0 - 3\gamma^2 - 0 - 0$$

$$= 4\gamma + 2\gamma - 3\gamma^2 = \underline{6\gamma - 3\gamma^2}$$

(b) $A\vec{x} = \vec{0}$

$\det(A) = 0 = -3\gamma^2 + 6\gamma$ erfüllt für

$\gamma = 0$ und $\gamma = 2$ $\Rightarrow \det(A) = 0$

unendlich viele Lösungen für $\det(A) = 0$;
triviale Lösung für $\det(A) \neq 0$

$$= -3\gamma^2 + 6\gamma = \gamma(-3\gamma + 6) \to \gamma_1 = 0, \quad \to \gamma = 2$$

(c)

$$\begin{array}{l|ccc|c} \mathrm{I} & 1 & 2 & 3 & 2 \\ \mathrm{II} & 0 & 2 & 1 & -1 \\ \mathrm{III} & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 3 & 2 & \\ 1 & 0 & 2 & 3 & \\ 2 & 0 & 4 & 6 & \mid :2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

Was haben wir hier entdeckt:

2 Gleichungen für 2 Unbekannte

Oder anders gesagt: aus $(\mathrm{I} - \mathrm{II})/2$ konnten wir 3 bauen

$\Rightarrow$ lineare Abhängigkeit

$\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow$ unendlich viele oder keine Lsg.

$\Rightarrow$ Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ hat keine Lösung.

Hätten wir das schon eher sehen können?

Ja denn aus (b) entnehmen wir

$\det(A) = 0$ für $\gamma = 2$

Zurück zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{c|ccc|c} \mathrm{I} & 1 & 2 & 3 & 2 \\ \mathrm{II} & 0 & 2 & 1 & -1 \\ \mathrm{III} & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}$$

Aus III folgt:

$$2x + 0 + 4z = 6$$

$$\Rightarrow \quad x = 6 - 2z$$

Aus II folgt:

$$x \cdot 0 + 2 \cdot y + 1 \cdot z = -1$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-1 - z}{2}$$

Für I folgt

$$6 - 2z + 2 \cdot \frac{(-1 - z)}{2} + 3z = 2$$

$$6 - 2z - 1 - z + 3z = 2$$

$$6 - 1 - 3z + 3z = 2$$

$$5 = 2 \quad \text{falsche Aussage}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung

Da nicht alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein können.

$$\begin{array}{l|ccc|c} \mathrm{I} & 1 & 2 & 3 & 2 \\ \mathrm{II} & 0 & 2 & 1 & -1 \\ \mathrm{III} & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}$$

$\mathrm{I} - \frac{\mathrm{III}}{2}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}$$

$2y + z = -1$

$\Rightarrow z = -1 - 2y$

$x + 2y - 3 \cdot (1 + 2y) = 2$

$\Rightarrow x + 2y - 3 - 6y = 2$

$x - 4y = 5$

$\boxed{x = 5 + 4y}$

$2 \cdot (5 + 4y) + 0 \cdot y + 4 \cdot (-1 - 2y) = 6$

$10 + 8y - 4 - 8y = 0$

$\boxed{6 = 0}$