Tutorium 12

TU BERGAKADEMIE · FREIBERG ·

Aufgabe

2) Welchen Wert besitzen die 3-reihigen Determinanten?

$$\mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{vmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{D}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -10 \\ -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

(Berechnung nach der *Regel von Sarrus*)

Lösung

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = 264$$

$$D_3 = 454$$

Aufgabe

7) Berechnen Sie mit möglichst geringem Rechenaufwand die Determinante der folgenden Matrizen:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung

a) $\det(A) = -10$

b) $\det(B) = 48$

Aufgabe

3) Für welche *reellen* Parameter λ verschwinden die Determinanten?

a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

Lösung

a) $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

b) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$

Gleichungssysteme

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\
2x_1 + 3x_2 \phantom{{}-2x_3} &= 0 \\
2x_1 + x_2 + 8x_3 &= -28
\end{aligned}
\quad \text{oder} \quad
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 13x_2 + 4x_3 &= 30 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -13 \\ 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 35 \\ 7x_1 - x_2 + 9x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Lösung

a) $x_1 = -3 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 0$

b) $x_1 = -\dfrac{18}{49} \quad x_2 = \dfrac{5}{49} \quad x_3 = -\dfrac{2}{49}$

c) $x_1 = \dfrac{29}{62} \quad x_2 = \dfrac{7}{31}$

d) $x_1 = 0 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 3$

Klausuraufgabe

6. Gegeben seien eine Matrix A und ein Vektor $\vec{b}$ wie folgt:

$$A = \begin{bmatrix} \beta & -\beta & 0 \\ 3 & -7 & 4 \\ 2 & -3 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Wieviele Lösungen hat – in Abhängigkeit vom Parameter β – das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$?

(c) Berechnen Sie für $\beta = 1$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

(d) Gibt es im Fall $\beta = 1$ einen Vektor $\vec{c}$, für den das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{c}$ *keine* Lösung besitzt? Kann dieser Vektor $\vec{c}$ der Nullvektor sein?

Lösung

a) $\det(A) = -4 \cdot \beta^2 - 4 \cdot \beta$

b) für alle $\beta \neq 0$ und $\beta \neq 1$

c) $x_3 = t \quad x_2 = 2 + t \quad x_1 = 9 + t$

d) ja, den gibt's

Klausuraufgabe

6. Gegeben seien eine Matrix A und ein Vektor $\vec{b}$ wie folgt:

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Für welche Werte von β besitzt das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ **genau** eine Lösung?

(c) Berechnen Sie für $\beta = 1$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe eines geeigneten Eliminationsverfahrens.

(d) Geben Sie für $\beta = 1$ den Nullraum von A an.

Lösung

a) $\det(A) = \beta^2 - 4 \cdot \beta + 3$

b) für alle $\beta \neq 1$ und $\beta \neq 3$

c) $x_3 = t \quad x_2 = 3 - t \quad x_1 = 2 - 3 \cdot t$

d) Nullraum Lösungsmenge des homogenen LGS $A\vec{x} = 0$