1. (a) Für $z = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}(-1-i)$ berechne man mit der Formel von Moivre z^6. Das Ergebnis ist dabei in kartesischer Form anzugeben und soweit wie möglich zu vereinfachen.

(b) Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung

$$\left(z + \frac{5i}{1-i}\right)^2 (z^2 - 3z + 4) = 0.$$

Die Ergebnisse sind in kartesischer Form anzugeben.

(c) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq -\mathrm{Im}(z) \quad \text{und} \quad |1 + 2i + z| \leq 1.$$

Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

2. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{(3n)^{\frac{3}{2}}}{n(n+2)} \quad \text{und} \quad b_n = (-1)^n \sin(n\pi/2)\,,$$

sofern diese existieren.

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{k+1}}{4^{k-1}}.$$

(c) Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(k+\sqrt{k})^k}$$

auf Konvergenz.

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{(3n)^{\frac{3}{2}}}{n(n+2)} \quad \text{und} \quad b_n = (-1)^n \sin(n\pi/2)\,,$$

sofern diese existieren.

3. Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & \text{für } x\leq 1,\\ xe^{x-1}+b(1-x) & \text{für } x>1.\end{cases}$$

(a) Geben Sie sämtliche Werte der reellen Parameter a und b an, für die f stetig ist.

(b) Kann man a und b so wählen, dass f sogar differenzierbar ist? Wenn ja, geben Sie diese Werte für a und b an.

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2 - x - \frac{2}{x+2}.$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie alle Nullstellen und Polstellen. Bestimmen Sie die einseitigen uneigentlichen Grenzwerte bei Annäherung an die Polstellen.

(b) Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema von f.

(c) Die Funktion f besitzt für $x \to \pm\infty$ eine Asymptote. Wie lautet deren Gleichung?

(d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion. Geben Sie den Wertebereich von f an.

5. (a) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = |x|$ und $g(x) = 4 - 3x^2$ begrenzt wird. Skizzieren Sie die zu berechnende Fläche.

   (b) Bestimmen Sie

$$\int \frac{x+1}{e^x}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{5x^2+2x-7}{(x-1)(x^2+6x+9)}\,dx$$

   durch Rückführung auf Grundintegrale.

6. Gegeben seien eine Matrix A und ein Vektor $\vec{b}$ wie folgt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \gamma & 1 \\ \gamma & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $\gamma \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Wieviele Lösungen hat – in Abhängigkeit vom Parameter γ – das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$?

(c) Berechnen Sie für $\gamma = 2$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.