Séance 3: Algorithmique

Philipp Ahrendt

November 28, 2025

Contents

1 Généralités d'algorithmique et de complexité

En algorithmique, on a deux objectifs principaux:

1. Trouver des procédures *efficaces* pour résoudre des problèmes
2. *Analyser* l'efficacité d'une solution

Pour faire cela, il y a deux questions importantes à se poser:

1. Comment peut-on *mesurer* l'efficacité d'un algorithme?
   - *Théorie de la complexité*
2. De quelles méthodes dispose-t-on pour trouver, décrire des algorithmes?
   - *Paradigmes algorithmiques*

1.1 Complexité

Mesure les ressources requises par un algorithme pour fournir son résultat.

En général, on considère deux types de complexité:

Complexité temporelle	durée du calcul/nombre d'opérations à effectuer
Complexité spatiale	espace (en kB) requis

Nous allons nous concentrer principalement sur la **complexité temporelle**.

On s'intéresse au nombre "d'opérations de base" effectuées par l'algorithme

- Affectations
- Comparaisons
- Opérations arithmétiques
- etc...

On veut estimer comment le nombre d'opérations évolue en fonction de la taille de la donnée d'entrée. C'est-à-dire on cherche la performance *asymptotique* de l'algorithme.

Exemple: Dans un algorithme de tri, combien de comparaisons entre éléments sont nécessaires en fonction de la longueur de la liste?

En général, le nombre d'opérations à faire dépend de l'entrée (par exemple, la liste d'entrée peut déjà être triée, presque triée, triée à l'envers etc).

Le plus souvent, les grandeurs intéressantes sont:

- La performance **worst case**
- La performance **en moyenne**

Les performances "worst case" sont généralement plus simples à analyser. On va se limiter à cela dans ce cours.

Exemple: Analysons le **tri par insertion** (voir feuille d'exercices 2).

- *Quel est le "worst case" pour cet algorithme*?
- *Asymptotiquement, combien de comparaisons entre éléments faut-il faire au pire des cas?*

Exemple: Recherche "naïve" vs. recherche dichotomique

- *Lequel des deux algorithmes est plus efficace?*
- *Quelles sont les complexités asymptotiques?*

1.2 Paradigmes algorithmiques

Un *paradigme algorithmique* est une méthodologie générique pour construire des algorithmes.

Un paradigme peut être appliquée à un grand nombre de problèmes, et fournir des algorithmes qui partagent des principes clés dans leur structure.

Lorsqu'on essaye de résoudre un problème algorithmique, il est souvent utile de raisonner en termes de paradigmes. Cela aide à *structurer* le problème, et trouver une solution efficace.

Un même problème peut être résolu en utilisant des paradigmes différents, mais souvent il y en a un qui est plus efficace que l'autre.

Dans ce cours, on va voir deux paradigmes importants:

- **Diviser pour régner**
- **Programmation dynamique**

2 Récursion

Le principe de **récursion** est un outil important pour analyser des problèmes algorithmiques. Il consiste à décrire la solution du problème dans un cas complexe en termes de ses solutions dans des cas simples.

Cas typique: un problème sur les entiers naturels peut se formuler sous forme d'une **récurrence** mathématique.

Exemple: calcul de factoriel

Le factoriel n! d'un entier n est le produit $1 \times 2 \times 3 \ldots \times$ (n-1) $\times$ n. On peut écrire la suite des n! comme une récurrence:

- $0! = 1$
- Pour $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$

On peut interpréter cela comme une instruction pour calculer n! de n'importe quel n. Le cas "simple" est 0!, pour lequel on a directement la réponse. Ensuite, calculer n! pour un n plus grand revient à multiplier par n le résultat (trouvé auparavant) pour n-1. Au final, tout se ramène au cas $n = 0$. On peut implémenter ce raisonnement dans un code python:

```
def factoriel(n):
    if n == 0:
        return 1 # Cas de base
    else:
        return n * factoriel(n-1) # Appel recursif
```

Exemple: Nombres de fibonacci
Les nombres de fibonacci sont les nombres de la suite

- $f_0 = 0$
- $f_1 = 1$
- Pour $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Voici les 10 premiers nombres de fibonacci: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34
Avec la définition ci-dessus, on a un algorithme récursif naturel pour calculer la suite de fibonacci

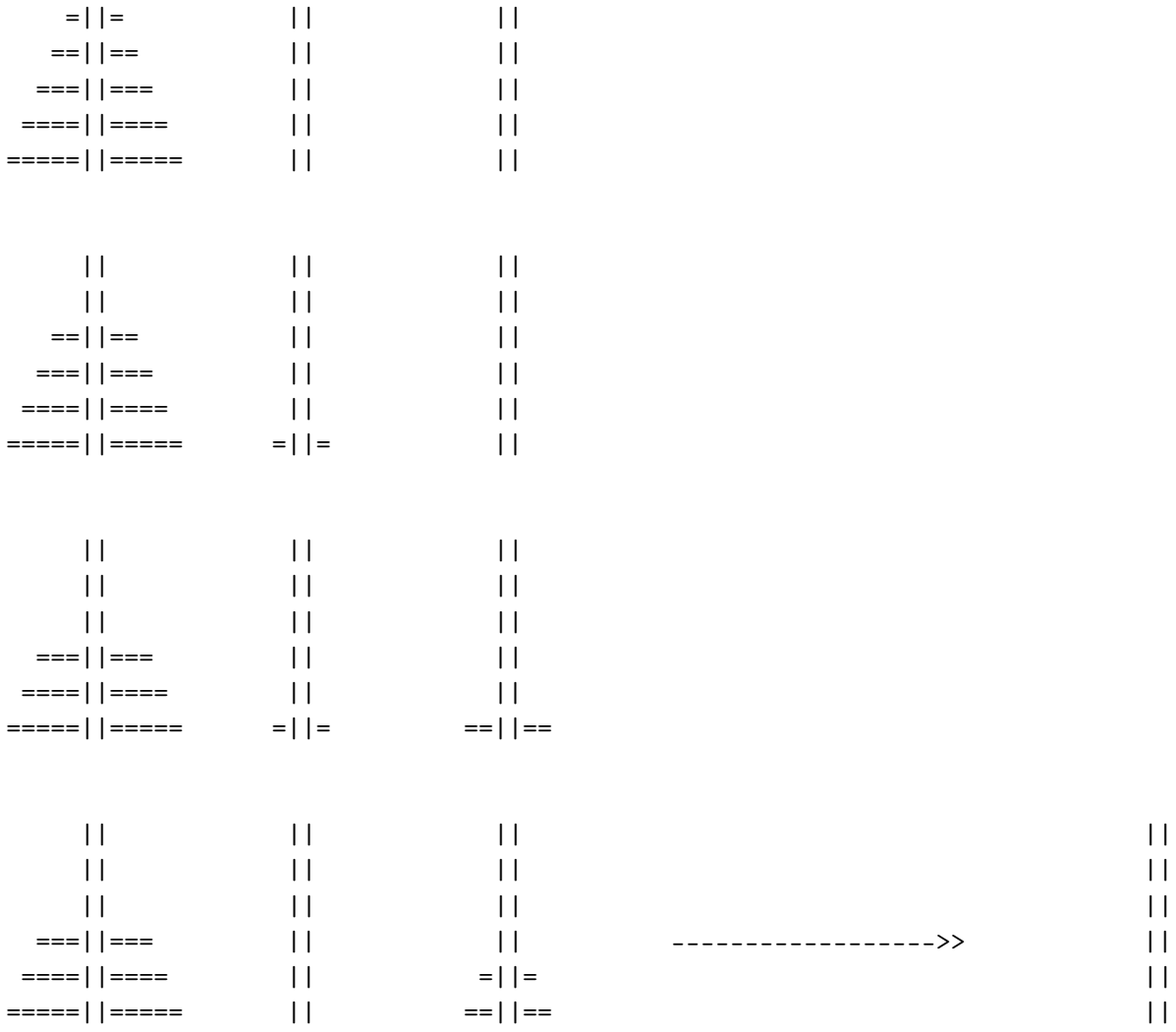
```
def fibonacci(n):
    if n == 0:
        return 0

    elif n == 1:
        return 1

    else:
        return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)
```

Exemple: Les tours de Hanoi
Dans le jeu des *tours de Hanoi*, on a 3 piliers, notés A,B et C, et n disques troués de différentes tailles, que l'on peut empiler sur les piliers. Au départ, tous les disques sont empilés, du plus grand au plus petit, sur l'un des piliers. Le but du jeu est de déplacer les disques, un par un, jusqu'à ce qu'ils soient empilé sur un autre pilier, du plus grand au plus petit. Cela en suivant les règles suivantes.

- On ne peut déplacer une pile que lorsqu'elle se trouve en haut d'une pile
- On ne peut pas placer un disque au-dessus d'un disque plus petit.

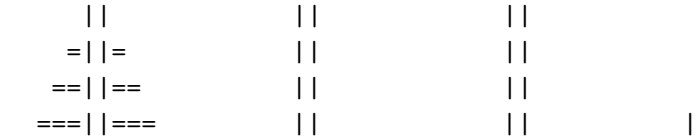
Voici une illustration d'une suite d'emplacement que l'on peut faire, dans le but de déplacer la pile du pilier A au pilier C.

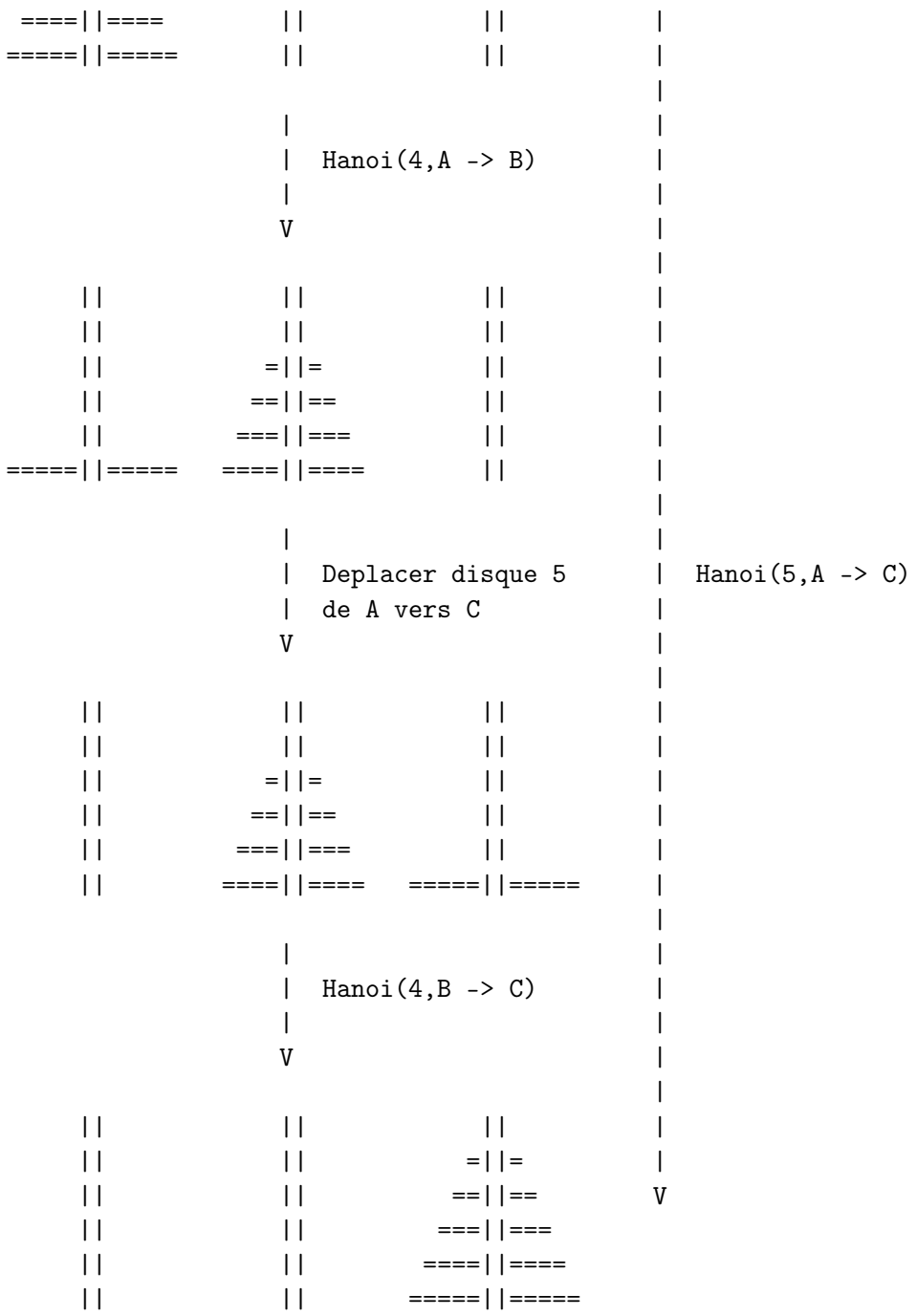
```
A             B             C

||            ||            ||
```



Problème: Trouver un algorithme pour déplacer les disques, de sorte que la pile se déplace d'un pilier vers un autre, par exemple de A vers C.

Idée: Il y a une manière de formuler la solution sur n disques en termes de la solution sur n-1 disques. En voici une illustration:





Cela donne un algorithme récursif pour les tours de Hanoi (voir dans les

exercices).

3 Diviser pour régner

L'idée du paradigme *diviser pour régner* est la suivante:

Étant donné un cas particulier d'un problème algorithmique à résoudre,

- On *décompose* le problème en des sous cas du même problème, que l'on peut résoudre indépendamment.
- On *combine* les solutions pour retrouver la solution du problème de départ.

Ce principe est appliqué **récursivement**:

- On fixe des cas de base, suffisamment simples pour être résolus directement.
- Les cas plus complexes sont décomposés successivement jusqu'à ce qu'on tombe sur un cas de base, et ensuite combinés en remontant.

Tous les algorithmes récursifs de la partie précédente sont des implémentations de ce paradigme.

Exemple: Recherche dichotomique (voir feuille d'exercices 1)

On a vu un cas particulier de la recherche dichotomique. Le problème général résolu par une recherche dichotomique est le suivant:

Étant donnée une liste *triée* `L` de taille `len(L)`, et un objet `x`, déterminer si `x` est dans `L`, et donner sa position s'il l'est.

On peut formuler la recherche dichotomique sur `L` de la manière suivante:

`def dicho(L):`

- **Cas de base:** `len(L) <= 1`
  - `L` contient zéro ou un élément. Si elle contient un élément, on regarde si c'est `x`. Dans ce cas, `x` est en position `0`
- **Cas "complexe":** `len(L) >= 2`
  - `med = L[len(L)/2]`, `L_inf = L[0:len(L)/2]`, `L_sup = L[len(L)/2+1:len(L)]`
    - Si `x == med`: `x` est dans `L`, en position `len(L)/2`
    - Sinon, si `x < med`: faire `dicho(L_inf)`, si `x` est dans `L_inf` en position `i`, il est dans `L` en position `i`

* Sinon, si `x > med`: faire `dicho(L_sup)`, si `x` est dans `L_sup` en position `i`, il est dans `L` en position `i+len(L)/2+1`

La complexité d'un algorithme de ce type s'exprime en termes de:

- Nombre de sous-problèmes à résoudre.
- Rapport de taille entre le problème initial et les sous-problèmes.
- Nombre d'opérations lors de la division et de la combinaison.

Regardons ce que cela donne pour la recherche dichotomique:

- Le problème est divisé en deux sous-problèmes, mais en réalité, on ne calcule jamais qu'un seul des sous-problème. On peut donc dire que le nombre de sous-problèmes est 1.
- Pour un problème de taille n (longueur de la liste), le sous-problème est de taille n/2.
- Le nombre d'opérations pour décomposer et recombiner est toujours le même:
  - Calculer `len(L)/2`
  - Évaluer `med = L[len(L)/2]`
  - Comparer `med` avec `x`
  - Pour combiner, décaler l'indice `i` trouvé si besoin

  Il suffit de dire que c'est une constante K.

Cela donne une formule récursive: si C(n) est le nombre d'opérations (au pire des cas) en taille n, cela donne
$C(n) \simeq 1 \times C(n/2) + K$
Cela permet d'estimer l'ordre de complexité à $C(n) = O(\log(n))$
Exemple: Tri fusion
Voir exercices

4 Programmation dynamique

Regardons de plus près l'algorithme récursif, de type "diviser pour régner", pour calculer la suite de fibonacci.

```
def fibonacci(n):
    if n == 0:
        return 0

    elif n == 1:
        return 1

    else:
        return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)
```

- *Quelle est la complexité de cet algorithme?*

Problème: On recalcule plusieurs fois les mêmes valeurs, ce n'est pas nécessaire!

On peut éviter cela en faisant des **sauvegardes** des solutions déjà trouvées. Au lieu de recalculer des solutions, on accède à des valeurs existants.

Voici une implémentation itérative des nombres de fibonacci qui suit ce principe

```
def fibonacci(n):
    a,b = 0,1

    if n == 0:
        return a

    else:
        for i in range(1,n):
            a,b = b,a+b

        return b
```

- *Quelle est la complexité de cet algorithme?*

Dans cet, exemple, on garde toujours une valeur précédente en mémoire, à savoir `a`. Lorsqu'on en a besoin, il suffit d'accéder à la valeur sauvegardée.

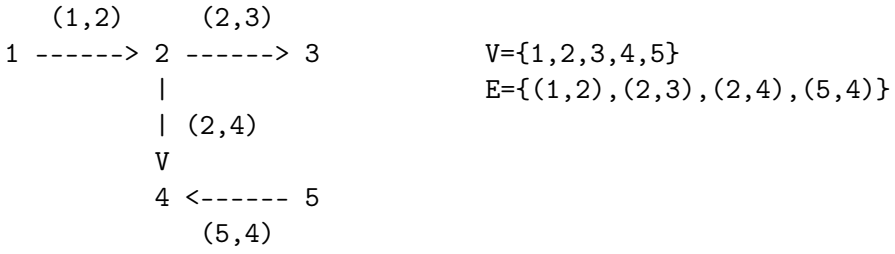
C'est le principe de la *programmation dynamique*. Dans ce paradigme, le principe est toujours de diviser un problème en sous-parties, mais par rapport à "diviser pour régner", on change l'ordre des opérations:

- On commence par les cas les plus "petits", et on monte jusqu'à la solution finale.

- Entretemps, on garde en mémoire des solutions déjà obtenues, que l'on utilise après dans les cas plus complexes.

Exemple: Chemin le plus court dans un graphe
Un *graphe* G(V,E) est donné par:

- Des nœuds V={1,...,n}
- Des arêtes E $\subset$ V $\times$ V. Une arête e = (i,j) relie les nœuds i et j



Un *chemin de longueur* k dans un graphe est une suite d'arêtes $(i_0,i_1),(i_1,i_2)\ldots(i_{k-2},i_{k-1}),(i_{k-1},i_k)$ reliant deux nœuds i_0 et i_k. Les i_j, $0 < j < k$, sont les *nœuds intermédiaires* du chemin.

Problème: Pour un graphe G(V,E), trouver, pour toute paire de nœuds i,j le chemin le plus court reliant ces nœuds (contenant le nombre minimal d'arêtes).

Explicitement, on veut une fonction `chemins(n,E)`, où `n` est le nombre de nœuds, et `E` est une liste de tuples `(i,j)` de nœuds entre `0` et `n`, qui donne comme résultat une matrice (liste de listes) `C` telle que `C[i][j]` soit la longueur du chemin le plus court de `i` vers `j`, et `C[i][j] == "infini"` sinon.

On peut associer à ce problème les sous-problèmes suivants:

Sous-problèmes: Pour $0 \leq k \leq n$, trouver, pour tout i,j, le chemin le plus court *en n'utilisant que les nœuds 1,...,k comme nœuds intermédiaires.* On va noter la solution `chemins_aux(n,E,k)`

C'est-à-dire:

- k = 0: aucun nœud intermédiaire, `chemins_aux(n,E,0)[i][j] == 1` si `(i,j)` est dans `E`, et `"infini"` sinon.
- k = 1: seulement le nœud 1 peut être intermédiaire. Les valeurs possibles dans `chemins_aux(n,E,1)` sont `"infini"`, `1` et `2`.

- k = 2: le nœud 1, le nœud 1, le nœud 2, ou les deux, peuvent être intermédiaires. Les valeurs possibles dans `chemins_aux(n,E,2)` sont `"infini"`, 1, 2 et 3.
- ...
- k = n: C'est le problème initial. `chemins_aux(n,E,n) == chemins(n,E)`.

Le cas k = 0 est simple, il suffit de tester si `(i,j)` est dans `E` pour calculer `chemins(n,E)[i][j]`.

A partir d'un cas k ≥ 0, on peut construire le résultat pour k+1:
Pour deux nœuds i,j

- Si le chemin le plus court de i vers j, *en utilisant les nœuds intermédiaires* 0,...,k+1, contient le nœud k+1
  - `chemins_aux(n,E,k+1)[i][j] == chemins_aux(n,E,k)[i][k+1] + chemins_aux(n,E,k)[k+1][j]`.
- Sinon
  - `chemins_aux(n,E,k+1)[i][j] == chemins_aux(n,E,k)[i][j]`

Pour tester si le chemin le plus court contient `k+1`, il suffit de comparer ces deux valeurs.

On a donc `chemins_aux(n,E,k+1)[i][j] == min(chemins_aux(n,E,k)[i][j], chemins_aux(n,E,k)[i][k+1] + chemins_aux(n,E,k)[k+1][j])`.

On trouve encore une forme récursive du problème. Mais c'est encore pire que pour les nombres de fibonacci: un algorithme "diviser pour régner" nécessiterait 3 sous-problèmes de taille k-1. La complexité serait de l'ordre de 3^n!

On fait de la programmation dynamique: on commence par la matrice `chemins_aux(n,E,0)`, et on calcule successivement les matrices `chemins_aux(n,E,k)` jusqu'au résultat final `chemins(n,E)`. A chaque étape, le calcul de ~$\text{chemins}_{\text{aux}}$(n,E,k+1)[i][j] consiste à chercher des valeurs sauvegardées de l'étape précédente.

L'algorithme que l'on obtient est:
`def chemins(n,E):`

- Construire `C = chemins(n,E,0)`
- Pour 0 ≤ k ≤ n
  - Nouvelle matrice intermédiaire `C_tmp`, avec `C_tmp[i][j] = "infini"` partout

  - Pour $0 \leq i \leq n$
    - Pour $0 \leq j \leq n$
      - `C_tmp[i][j] = min(C[i][j], C[i][k+1] + C[k+1][j])`
  - Mise à jour de `C`: `C = C_tmp`

- Rendre `C` en résultat

On peut "lire" directement la complexité de cet algorithme: On a 3 boucles imbriquées de n étapes, avec un nombre constant d'opérations dans chacune. La complexité est donc de l'ordre de n^3: bien meilleure que pour l'approche "diviser pour régner"!