

# Teil 1: Nichtlineare Optimierung

## Aufgabe 1: Optimale Dimensionierung eines Kühlkreislaufs in einem Kernkraftwerk

2 Kühlflüssigkeiten  $\rightarrow$  unterschiedl. Viskosität 2 getrennte Kreisläufe

Umw proportional zu Querschnitts- u. Viskosität

$r_1 / r_2 \rightarrow$  optimal

$$2r_1 + 2r_2 \geq 30 \text{ cm}$$

$$2r_1 + 2r_2 \leq 60 \text{ cm}$$

$$\max -\frac{1}{r_1^2 \pi} v_1 + \frac{1}{r_2^2 \pi} v_2$$

$$\Rightarrow \min r_1^2 \pi v_1 + r_2^2 \pi v_2$$

$$\text{NB: } 2r_1 + 2r_2 \geq 30 \quad -2r_1 - 2r_2 + 30 \leq 0 = g_1(r_1, r_2)$$

$$2r_1 + 2r_2 \leq 60 \quad 2r_1 + 2r_2 - 60 \leq 0 = g_2(r_1, r_2)$$

$$r_1, r_2 \geq 0$$

### Lagrange Funktion

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2) = v_1 \cdot r_1^2 + v_2 \cdot r_2^2 + \lambda_1 (-2r_1 - 2r_2 + 30) + \lambda_2 (2r_1 + 2r_2 - 60)$$

### Reguläritätsbedingung

$$\frac{\partial g_1(r_1, r_2)}{\partial r_1} = -2 \neq 0 \quad \frac{\partial g_2(r_1, r_2)}{\partial r_1} = 2 \neq 0$$

$$\frac{\partial g_1(r_1, r_2)}{\partial r_2} = -2 \neq 0 \quad \frac{\partial g_2(r_1, r_2)}{\partial r_2} = 2 \neq 0$$

## KKT Bedingung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} = 2r_1 v_1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = 2r_2 \cdot v_2 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \stackrel{!}{=} 0$$

## Komplementaritätsbedingung

$$\lambda_1 (-2r_1 - 2r_2 + 30) \stackrel{!}{=} 0 \quad g_1(r_1, r_2)$$

$$\lambda_2 (2r_1 + 2r_2 - 60) \stackrel{!}{=} 0 \quad g_2(r_1, r_2)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

### 1. Fall

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$2r_1 v_1 = 0 \quad r_1 = 0$$

$$2r_2 \cdot v_2 = 0 \quad r_2 = 0$$

$$g_1(r_1, r_2) : -2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 30 \leq \mathbb{Z}$$

### 2. Fall

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

$$-2r_1 - 2r_2 + 30 = 0 \Leftrightarrow 2r_1 + 2r_2 = 30$$

$$2r_1 + 2r_2 - 60 = 0 \Leftrightarrow 2r_1 + 2r_2 = 60$$

### 3. Fall

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$$

$$-2r_1 - 2r_2 + 30 = 0$$

$$2r_1 + 2r_2 = 30 \Leftrightarrow r_2 = 15 - r_1, r_1 = 15 - r_2$$

$$\begin{aligned} 2v_1r_1 - 2\lambda_1 &= 0 \\ 2v_2r_2 - 2\lambda_1 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Symmetrie}$$

$$2v_1r_1 = 2v_2r_2$$

$$2v_1r_1 = 2v_2(15 - r_1)$$

$$2v_1r_1 = 30v_2 - 2v_2r_1$$

$$r_1 \cdot (2v_1 + 2v_2) = 30v_2$$

$$r_1 = \frac{30v_2}{2v_1 + 2v_2}, \quad r_1 = \frac{15v_2}{v_1 + v_2}, \quad r_2 = \frac{15v_1}{v_1 + v_2}$$

$$2v_1r_1 - 2\lambda_1 = 0$$

$$2v_1 \left( \frac{15v_2}{v_1 + v_2} \right) - 2\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 = v_1 \cdot \left( \frac{15v_1}{v_1 + v_2} \right) > 0 \quad \text{Passt}$$

### 4. Fall

$$R_1 = 0, R_2 > 0$$

$$2r_1 + 2r_2 - 60 = 0 \Leftrightarrow r_2 = 30 - r_1$$

$$\begin{aligned} 2v_1r_1 + 2R_2 &= 0 \\ 2v_2r_2 + 2R_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{symmetrisch}$$

$$\Rightarrow 2v_1r_1 = 2v_2r_2$$

$$\Rightarrow v_1r_1 = v_2(30 - r_1)$$

$$v_1r_1 = 30v_2 - v_2r_1$$

$$r_1(v_1 + v_2) = 30v_2$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{30v_2}{v_1 + v_2}, \quad r_2 = \frac{30v_1}{v_1 + v_2}$$

$$2v_2r_2 + 2R_2 = 0 \rightarrow$$

$$2v_2 \frac{30v_1}{v_1 + v_2} + 2R_2 = 0 \Rightarrow$$

$$R_2 = \frac{-30v_1v_2}{v_1 + v_2} < 0 \quad \checkmark$$

### Hinreichende Bedingung

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r_1^2} = 2v_1 > 0 \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial r_2^2} = 2v_2 > 0$$

→ optimale Radien  $\frac{15v_2}{v_1 + v_2} = r_1 \quad \frac{15v_1}{v_1 + v_2} = r_2$

Minimum  $\left( \frac{15v_1}{v_1 + v_2} \right)^2 \pi v_2 + \left( \frac{15v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 \pi v_1$

## Übung 4 Teil 1, Aufgabe 2

- Zielfunktion:  $\max(f(x)) = (20 - 4q_1)q_1 + (180 - 15q_2)q_2 - (100 + 11(q_1 + q_2))$   
 $\max(f(x)) = \min(-f(x))$

- Nebenbedingung:  $q_1 + q_2 - 20 \leq 0$

- Lagrang-Funktion:

$$L(q_1, q_2, d) = -85q_1 - 165q_2 + 4q_1^2 + 15q_2^2 + d(q_1 + q_2 - 20)$$

- KKT-Bedingung:

$$\nabla L(q_1, q_2, d) = 0$$

$$\text{I}) -85 + 8q_1 + d = 0$$

$$\text{II}) -165 + 30q_2 + d = 0$$

$$\text{III}) d(q_1 + q_2 - 20) = 0$$

Regularitätsbed.:  $\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

Annahme:  $d=0 \quad g=0$

$$g(q_1, q_2) = 0 \rightarrow q_1 = 20 - q_2$$

$$-85 + 8(20 - q_2) + d = 0$$

$$-865 + 30q_2 + d = 0$$

$$\rightarrow q_2 = \frac{260}{38} = 6,316$$

$$q_1 = 13,684$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 8 > 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 30 > 0 \quad \checkmark$$

Antwort: Prozessormodell liefert den Europäer 13,684 km und Zentralasien 6,316 km Gas

Der Gewinn im Maximum beträgt 157,891 €

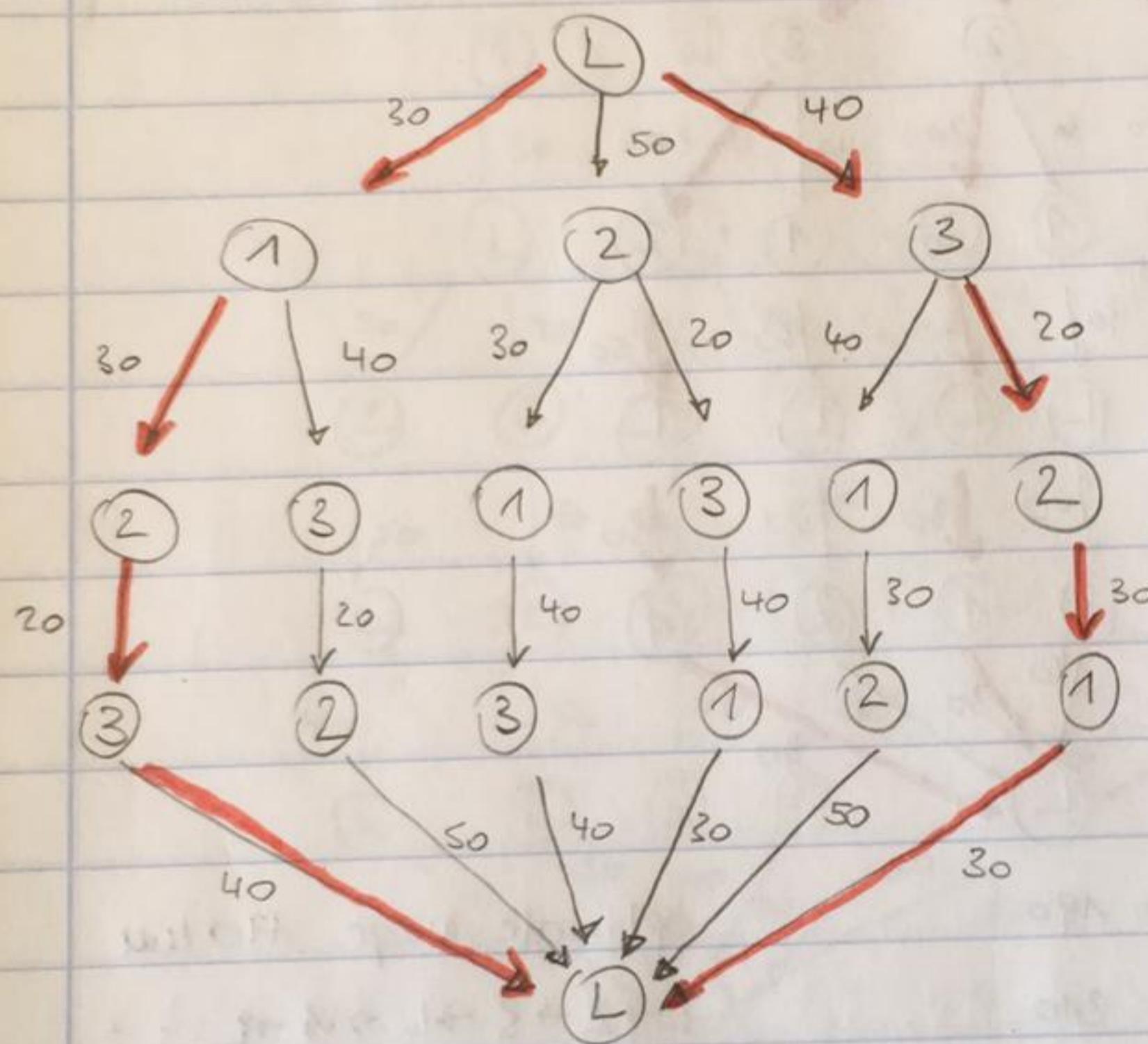
## TEIL 2 Dynamische Optimierung

AUFGABE 1

Bsp. Heizöl lieferungen

	①	②	③
von/nach (km)	Ort 1	Ort 2	Ort 3
L	30	50	40
Ort 1		30	40
Ort 2			20

① alle Kunden mit 1 Tankfüllung



mögliche  
WEGE

Optimal 120 km

$$L \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow L$$

ODER

$$L \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow L$$

$$1) 30 + 30 + 20 + 40 = 120$$

$$2) 30 + 40 + 20 + 50 = 140$$

$$3) 50 + 30 + 40 + 40 = 160$$

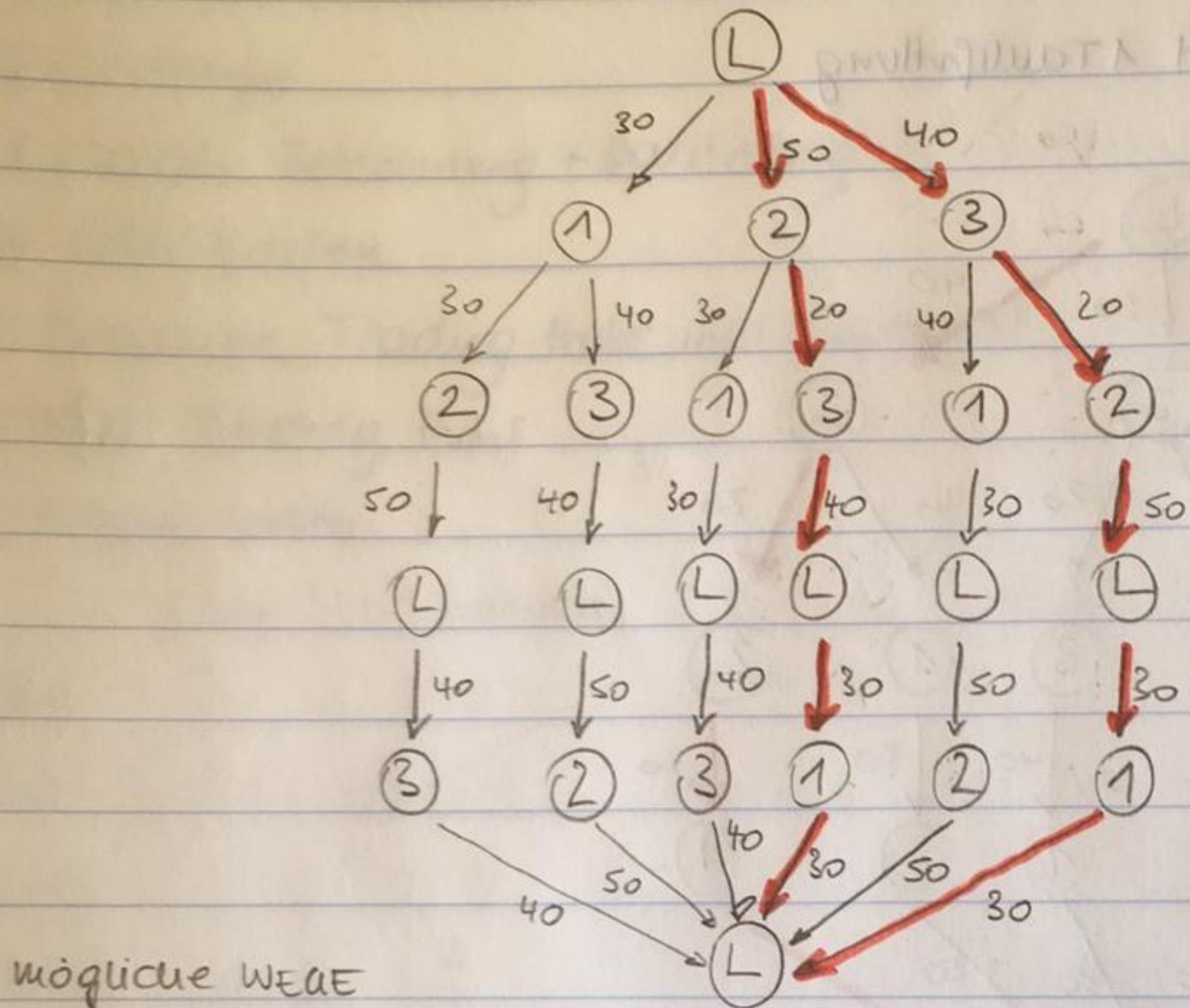
$$4) 50 + 20 + 40 + 30 = 140$$

$$5) 40 + 40 + 30 + 50 = 160$$

$$6) 40 + 20 + 30 + 30 = 120$$

2.) Mit 1 Tankfüllung können nur 2 Kunden beliefert werden

	1	2	3
L	30	50	40
1	30	40	
2		20	



mögliche WEGE

$$1.) 30 + 30 + 50 + 40 + 40 = 190$$

optimale Wege 170 km

$$2.) 30 + 40 + 40 + 50 + 50 = 210$$

$L \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow L \rightarrow 1 \rightarrow L$

$$3.) 50 + 30 + 30 + 40 + 40 = 190$$

ODER

$$4.) 50 + 20 + 40 + 30 + 30 = 170$$

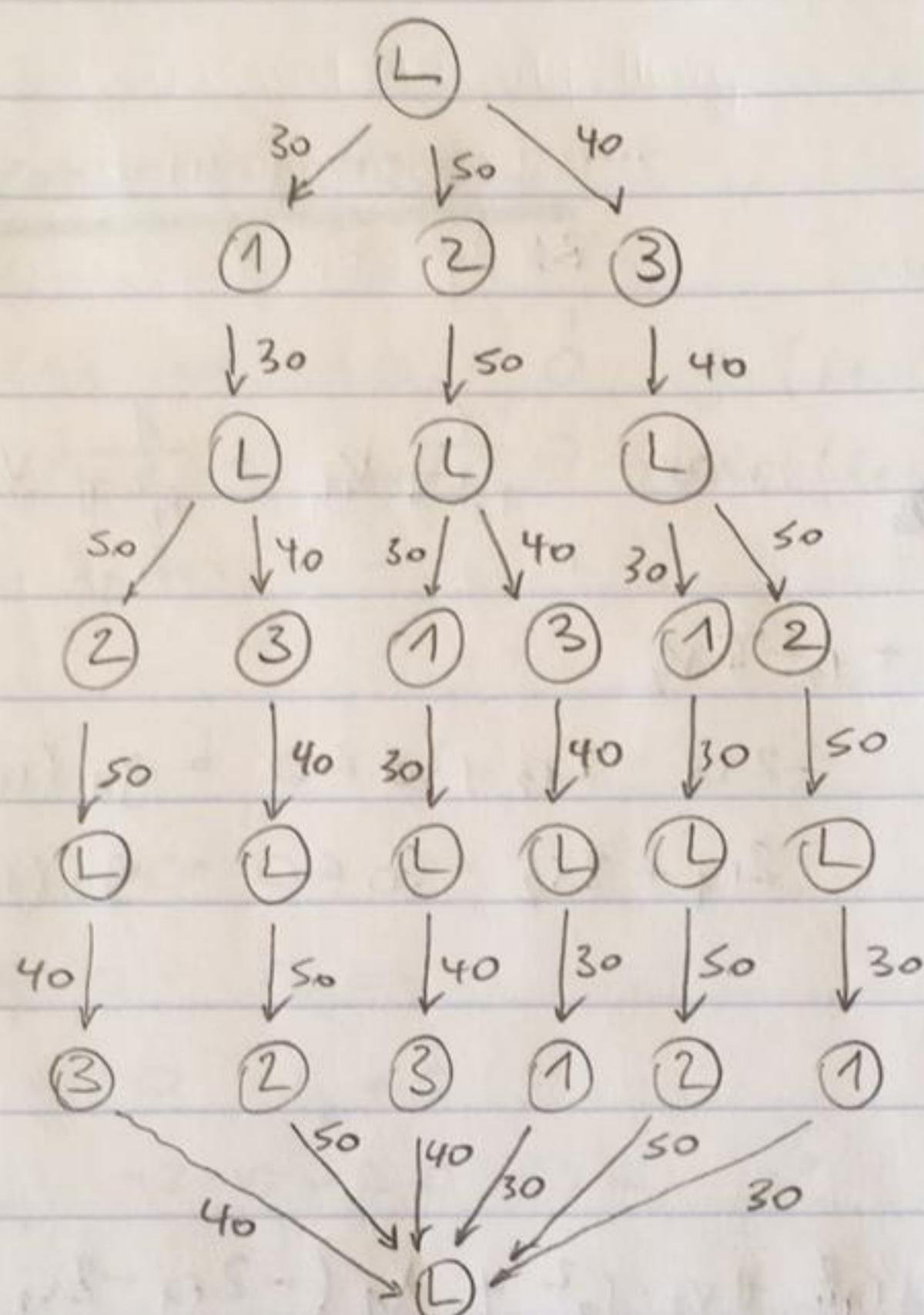
$L \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow L \rightarrow 1 \rightarrow 1$

$$5.) 40 + 40 + 30 + 50 + 50 = 210$$

$\Rightarrow$  von Lager zu 1 kürzester Weg

3) 1 Tankfüllung kann nur jeweils 1 Kunden beliefern

	1	2	3
L	30	50	40
1	30	40	
2		20	



mögliche Wege

$$1.) 30 + 30 + 50 + 50 + 40 + 40 = 240$$

alle Wege sind gleich 240

$$2.) 30 + 30 + 40 + 40 + 50 + 50 = 240$$

$\Rightarrow$  muss nach jeder

$$3.) 50 + 50 + 30 + 30 + 40 + 40 = 240$$

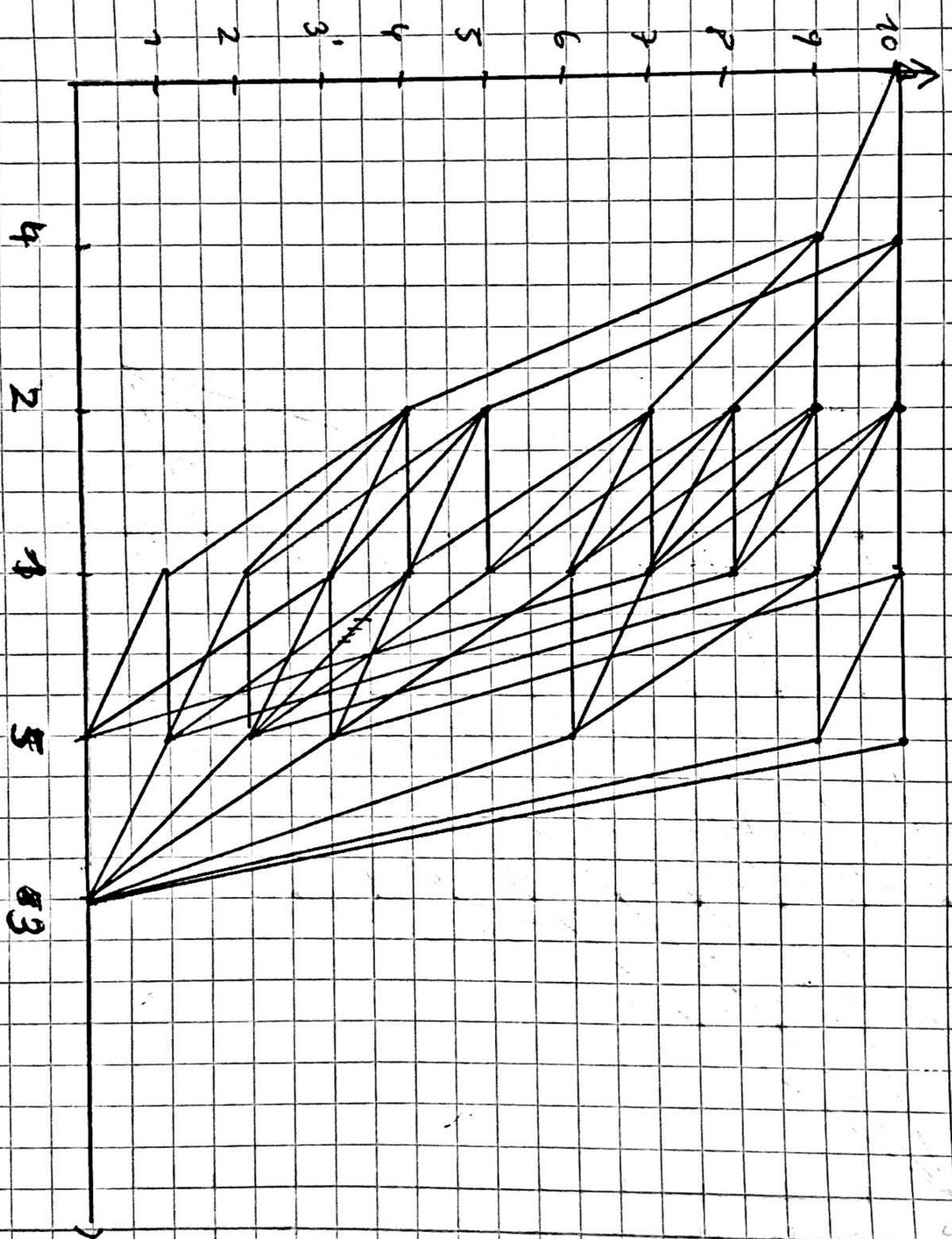
Lieferung zurück ins

$$4.) 50 + 50 + 40 + 40 + 30 + 30 = 240$$

Lager

$$5.) 40 + 40 + 30 + 30 + 50 + 50 = 240$$

$$6.) 40 + 40 + 50 + 50 + 30 + 30 = 240$$



<u>AF</u>	<u>FK</u>	<u>KG</u>	<u>kg_gpt</u>	<u>kg CPT</u>
7,1	5,0	3	0	3
7,1	5,1	0	3	(3)
7,2	5,1	3	3	(6)
7,2	5,2	0	5	5
7,3	5,0	5	0	5
7,3	5,2	3	5	(8)
7,3	5,3	0	7	7
7,4	5,3	3	7	(10)
7,4	5,7	3	3	8
7,5	5,2	5	5	(10)
7,6	5,6	0	9	(9)
7,7	5,6	3	9	(12)
7,7	5,0	7	0	7
7,8	5,1	7	3	(10)
7,9	5,9	0	72	72
7,9	5,0	5	9	(14)
7,9	5,3	7	7	14
7,10	5,20	0	13	13
7,10	5,7	3	12	(15)
7,10	5,3	7	7	14

AF	FK	KG	KG opt	KGOPT
24	24	0	10	10
24	23	4	8	12
24	22	6	6	12
24	21	8	3	11
25	25	0	10	10
25	24	4	10	14
25	23	6	8	14
25	22	8	6	14
27	27	0	12	12
27	26	4	9	13
27	25	6	10	16
27	24	8	10	18
28	28	0	10	10
28	27	4	12	16
28	26	6	9	15
28	25	8	10	18
29	24	0	14	14
29	23	4	10	14
29	22	6	12	18
29	21	8	9	17
210	210	0	15	15
210	29	4	14	18
210	28	6	10	16
210	27	8	12	20

AF	FK	KG	KG <sub>opt</sub>	KG CPT
4 <sub>10</sub>	2 <sub>10</sub>	0	20	20
4 <sub>10</sub>	2 <sub>8</sub>	5	18	23
4 <sub>20</sub>	2 <sub>5</sub>	10	14	24
4 <sub>9</sub>	2 <sub>9</sub>	0	18	18
4 <sub>9</sub>	2 <sub>7</sub>	5	18	23
4 <sub>9</sub>	2 <sub>4</sub>	10	12	22

AF	FK	KG	KG <sub>opt</sub>	KG CPT
10	4 <sub>10</sub>	0	24	24
10	4 <sub>9</sub>	5	23	28

Es werden 28 GWh im Optimum zusätzlich errengt!

Die Investitionssummen sind:

Kraftwerk 1 : 3 Mio €

Kraftwerk 2 : 2 Mio €

Kraftwerk 3 : 3 Mio €

Kraftwerk 4 : 1 Mio €

Kraftwerk 5 : 1 Mio €

