Integration über eine beliebige Dreiecksfläche

Jonas Guler, Philipp Moor

September 16, 2019

1 Ausgangslage

Aufgrund der anhaltenden Klimaerwärmung kann man seit mehreren Jahren einen Rückgang der Gletscher beobachten. Um diese Problematik wissenschaftlich zu analysieren und den Schwund genau zu beschreiben. Ausgangslage des Integrationsproblems ist ein Dreieck im $\mathbb{R}^3$, und eine Funktion f:

$$\tau(i,j,k) = \left\{ \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Um die zweidimensionale Gauss-Quadratur anzuwenden, muss das Dreieck affin auf das Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden.

2 Transformation des Dreiecks ins Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$

Sei $\tau \subset \mathbb{R}^3$ ein beliebiges Dreieck (A,B,C)

$$\tau = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\tau_r \subset \mathbb{R}^2$ ein Referenzdreieck mit

$$\tau_r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gesucht wird eine affine Funktion χ_I von τ nach τ_r so dass: $\chi(\tau) = \tau_r$
Die Funktion ist gegeben durch:

$$\chi_I(x) = I + M \cdot x, \quad M := \big[\big(B - A\big) \,|\, \big(B - C\big) \big] \in Mat(3 \times 2, \mathbb{R})$$

wobei I der Eckpunkt von τ ist, der auf 0 abgebildet wird.
Ausgehend von diesem Referenzdreieck wird die Transformation ins Einheitsquadrat sehr einfach. Sie ist durch folgende Funktion gegeben:

$$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(\mu, \nu\right) \mapsto \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \cdot \nu \end{pmatrix}$$

3 Behandelte Funktionen und ihre Problemstellen

Umformungen mit Transformationssatz

4 Qauss-Quadratur

4.1 Berechnung der Stützstellen und Gewichte

5 Resultate