

Integration über eine beliebige Dreiecksfläche

Jonas Guler, Philipp Moor

September 19, 2019

1 Ausgangslage

Aufgrund der anhaltenden Klimaerwärmung kann man seit mehreren Jahren einen Rückgang der Gletscher beobachten. Um diese Problematik wissenschaftlich zu analysieren und den Schwund genau zu beschreiben. Ausgangslage des Integrationsproblems ist ein Dreieck im \mathbb{R}^3 , und eine Funktion f :

$$\tau(i, j, k) = \left\{ \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Um die zweidimensionale Gauss-Quadratur anzuwenden, muss das Dreieck affin auf das Einheitsquadrat in \mathbb{R}^2 abgebildet werden.

2 Transformation des Dreiecks ins Einheitsquadrat in \mathbb{R}^2

Sei $\tau \subset \mathbb{R}^3$ ein beliebiges Dreieck (A,B,C)

$$\tau = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\tau_r \subset \mathbb{R}^2$ ein Referenzdreieck mit

$$\tau_r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gesucht wird eine affine Funktion χ_I von τ nach τ_r so dass: $\chi_{(i,j,k)}(\tau) = \tau_r$ nktion ist gegeben durch:

$$\chi_I(x) = I + M \cdot x, \quad M := [(B - A) \mid (B - C)] \in \text{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$$

wobei I der Eckpunkt von τ ist, der auf 0 abgebildet wird.

Ausgehend von diesem Referenzdreieck wird die Transformation ins Einheitsquadrat sehr einfach. Sie ist durch folgende Funktion gegeben:

$$\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (\mu, \nu) \mapsto \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \cdot \nu \end{pmatrix}$$

19.9.2019

Philipp Moor, Jonas Guler

3 Behandelte Funktionen und ihre Problemstellen

Umformungen mit Transformationssatz

4 Gauss-Quadratur

4.1 Berechnung der Stützstellen und Gewichte

5 Tests

Für das Testen unserer Methoden spielen verschiedene Parameter eine entscheidende Rolle, daher bauten wir eine Test-Umgebung in Matlab, die es uns ermöglichte diese Parameter zu verändern und Plots zu erstellen um Auswertungen vorzunehmen.

Zu den Parametern die Einfluss auf das Resultat haben können gehören :

- Form des Referenzdreiecks & Positionierung im \mathbb{R}^3
- Gutartigkeit der Funktion bezgl. Singularitäten
- Abhängigkeit von der Wahl des Referenzvertexes
- Anzahl der Gausspunkte

Unser Auftrag war es konkret unsere Methode an folgenden Funktionen unter beliebiger Wahl des Referenzdreiecks zu Testen:

- Polynome beliebigen grades
- $f(y) = \frac{1}{\|y - A_t\|}$ mit A_t ein fixierter Vertex des Dreiecks
- $g(y) = \log(\|x - y\|)$, mit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ fixiert
- $h(y) = x \log(x)$

Die Wahl der Test-Funktionen wurde so getroffen, um die Methode gezielt auf kritische Resultate oder eine allfällige Run-Time-Inefficiency zu untersuchen.

Bei den Polynomen liegt der Fokus darauf, die Präzision der Methode unter wachsendem Grad des Polynoms zu untersuchen.

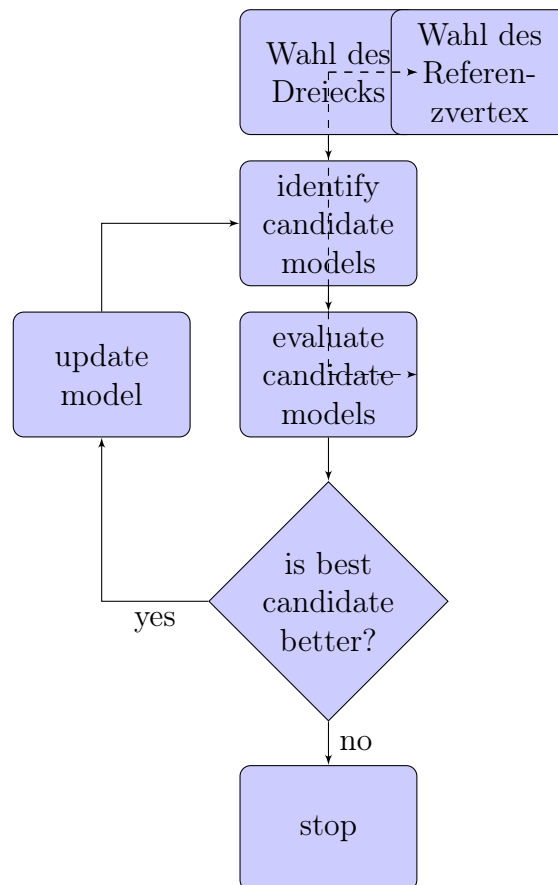
Bei $f(y)$ liegt die Problematik innerhalb des Betrags im Nenner des Bruchs. wenn sich der wert y dem Vertex des Dreiecks nähert kann abhängig der Wahl des Referenzvertexes eine Singularität auftreten.

Die funktion $g(y)$ bewegt sich sehr schnell gegen $-\infty$ wenn x und y sich einander annähern, was insbesondere zu einer starken verfälschung des Resultats führen kann.

— $h(y)$ something blabla

5.1 Testverfahren

Das Testen dieser Funktionen verläuft nach folgendem Schema:



19.9.2019

Philipp Moor, Jonas Guler

6 Resultate