

MAT820 Numerisches Praktikum

Luca Festini und Kilian Werder

18. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
1.1	Laplace Gleichung	2
2	Konkretisierung	2
3	Lösungsprozess	4
3.1	Konstante Basiselemente ($k=0$)	4
3.2	lineare Basiselemente ($k=1$)	7
4	Auswertung	13
4.1	konstante Basiselemente ($k=0$)	13
4.2	lineare Basiselemente ($k=1$)	18

1 Aufgabenstellung

1.1 Laplace Gleichung

In diesem Dokument befassen wir uns mit der Lösung einer gegebenen Laplace-Gleichung mithilfe des Dirichlet Ansatzes und der Greenschen Formel.

$$\begin{aligned} u : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ -\Delta u &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ziel ist es, die Funktion u zu approximieren. Dazu ist eine Parametrisierung von einem Intervall \mathbb{I} auf eine Fläche Ω gegeben. u ist dann auf der Fläche definiert und Γ ist der Rand.

2 Konkretisierung

In unserem konkreten Beispiel benutzen wir folgende Notationen:

Intervall $\mathbb{I}=[-1,1]$, auf dem Intervall liegen die Punkte $-1=\hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_{N-1} < \hat{x}_N=1$
 N ist somit die Anzahl der Teilintervalle

$$h = 2/N \quad \hat{x}_i = -1 + i * h, \quad i \in \{0, \dots, N\} \quad \hat{\tau}_j = (\hat{x}_{j-1}, \hat{x}_j), \quad j \in \{1, \dots, N\}$$

$$G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\|x - y\|)$$

$$\text{Parametrisierung } \chi : \mathbb{I} \longrightarrow \Gamma, \quad \chi(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cos \pi \hat{x} \\ \frac{1}{4} \sin \pi \hat{x} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ableitung Parametrisierung } \chi'(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \pi \sin \pi \hat{x} \\ \frac{1}{4} \pi \cos \pi \hat{x} \end{pmatrix}$$

$$g_D : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_D(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\|x - (1, 1)\|)$$

Für g_D ist es wichtig, dass der Punkt $(1,1)$ nicht in Ω liegt. Dies ist gewährleistet, da χ einen Ball mit Radius $1/4$ um $(0,0)$ bildet. Ebenso muss gelten, dass $\chi(-1) = \chi(1)$ ist.

Gesucht ist u auf ganz Ω . Mithilfe der Greenschen Formel erhält man:

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x - y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dy - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} G(x - y) \right) u(y) dy \quad x \in \Omega \tag{2}$$

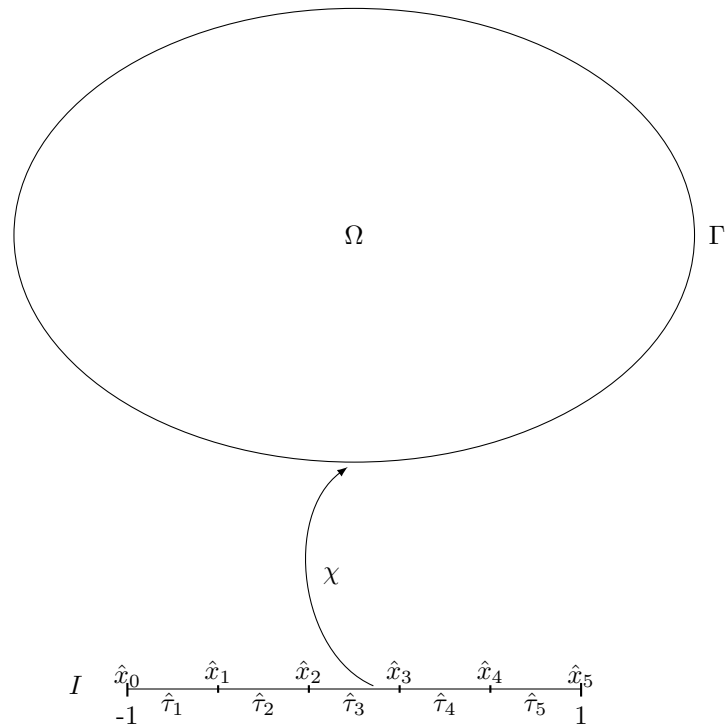


Abbildung 1: Graphische Darstellung der gegebenen Grössen

Nun benutzt man Dirichlet, welcher die Laplace-Gleichung anhand dem Rand approximiert und erhalten folgende Formel für u falls $x \in \Gamma$:

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dy + \frac{1}{2}u(x) - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} G(x-y) \right) u(y) dy \quad x \in \Gamma$$

Der hinzugefügte Teil $(1/2u(x))$ ergibt sich daraus, dass alles auf dem Rand betrachtet wird. Es gilt $u(x) = g_D(x) \forall x \in \Gamma$. Es gilt $\text{diam } \Omega < 1$ und man erhält:

$$\int_{\Gamma} G(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dy = \frac{1}{2}g_D(x) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} G(x-y) \right) g_D(y) dy \quad x \in \Gamma \quad (3)$$

3 Lösungsprozess

3.1 Konstante Basiselemente (k=0)

Bei diesem Lösungsansatz approximiert man mithilfe von konstanten Basiselementen, die wie folgt definiert sind:

$$\hat{b}_j^0(\hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \hat{x} \in \hat{\tau}_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{wobei } 1 \leq j \leq N$$

$$b_j^0 := \hat{b}_j^0 \circ \chi^{-1}$$

Der Lösungsansatz berechnet die Funktion $\varphi = \partial u$

$\varphi = \sum_{k=1}^N \alpha_k b_k^0$ wobei α_k die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems sind:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\alpha} = \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{B}} \right) \underline{\beta}$$

Mithilfe von einfachen Termumformungen berechnet man $\underline{\beta}$:

$$\tilde{g}_D = \sum_{k=1}^N g_D(m_k) b_k \quad m_k \text{ ist der Mittelpunkt auf } \tau_k$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_D(\underline{y}) = \sum_{k=1}^N g_D \left(\chi \left(\frac{\hat{x}_k + \hat{x}_{k-1}}{2} \right) \right) b_k(\underline{y})$$

$$\underline{\beta} = (\tilde{g}_D(m_j))_{j=1}^N = \left(\sum_{k=1}^N g_D \left(\chi \left(\frac{\hat{x}_k + \hat{x}_{k-1}}{2} \right) \right) b_k \left(\chi \left(\frac{\hat{x}_j + \hat{x}_{j-1}}{2} \right) \right) \right)_{j=1}^N = \left(g_D \left(\chi \left(\frac{\hat{x}_j + \hat{x}_{j-1}}{2} \right) \right) \right)_{j=1}^N$$

Da folgendes gilt:

$$b_k^0 \left(\chi \left(\frac{\hat{x}_j + \hat{x}_{j-1}}{2} \right) \right) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun befasst man sich mit $\underline{\underline{K}}_{l,m}^0$, wobei $1 \leq l, m \leq N$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{l,m}^0 &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(\underline{x} - \underline{y}) b_l(\underline{x}) b_m(\underline{y}) d\underline{y} d\underline{x} \\ &= \int_{\tau_l} \int_{\tau_m} G(\underline{x} - \underline{y}) d\underline{y} d\underline{x} \\ &\stackrel{\text{TS}}{=} \int_{\hat{\tau}_l} \int_{\hat{\tau}_m} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x} \\ &\stackrel{\text{TS}}{=} h^2 \int_0^1 \int_0^1 G(\chi(\hat{x}_{l-1} + sh - (\hat{x}_{m-1} + th))) \\ &\quad \cdot \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}_{l-1} + sh), \chi'(\hat{x}_{l-1} + sh) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}_{m-1} + th), \chi'(\hat{x}_{m-1} + th) \rangle} ds dt \end{aligned}$$

Um dieses Integral zu lösen, benutzt man Gauss Quadratur mit den Legendre Gewichten $\{1, \dots, N_q\}$.

Somit folgt folgende Approximation:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{l,m}^0 &\approx h^2 \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{j=1}^{N_q} \omega_{i,N_q} \omega_{j,N_q} G(\chi(\hat{x}_{l-1} + \xi_{i,N_q} * h - \hat{x}_{m-1} - \xi_{j,N_q} * h)) \\ &\quad \cdot \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}_{l-1} + \xi_{i,N_q} * h), \chi'(\hat{x}_{l-1} + \xi_{i,N_q} * h) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}_{m-1} + \xi_{j,N_q} * h), \chi'(\hat{x}_{m-1} + \xi_{j,N_q} * h) \rangle} \end{aligned}$$

Nun befasst man sich mit der Matrix $\underline{\underline{B}}$. Hierfür muss man die Funktion $k(x, y)$ definieren:

$$\begin{aligned} k(x, y) &= \langle n(y), \nabla_y G(x - y) \rangle \\ &= \langle n(y), -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\|x - y\|} \frac{y - x}{\|x - y\|} \rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\langle n(y), y - x \rangle}{\|y - x\|^2} \end{aligned}$$

$n(y)$ ist der normierte nach aussen zeigende Normalvektor auf der Parametrisierung χ .

$$\Rightarrow \bar{n}(\hat{y}) = \frac{\begin{pmatrix} 0.25\pi \cos \pi \hat{y} \\ 0.25\pi \sin \pi \hat{y} \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0.25\pi \cos \pi \hat{y} \\ 0.25\pi \sin \pi \hat{y} \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\pi \cdot \chi(\hat{y})}{\|\pi \cdot \chi(\hat{y})\|}$$

$$n(y) = \bar{n}(\chi^{-1}(y)) = \frac{\pi \cdot \chi(\chi^{-1}(y))}{\|\pi \cdot \chi(\chi^{-1}(y))\|} = \frac{\pi \cdot y}{\|\pi \cdot y\|}$$

Man definiert nun $\underline{\underline{B}}_{l,m}^0$, wobei $1 \leq l, m \leq N$:

$$\underline{\underline{B}}_{l,m}^0 = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(\underline{x}, \underline{y}) b_l(\underline{y}) b_m(\underline{x}) d\underline{y} d\underline{x}$$

Die numerische Approximation von $\underline{\underline{B}}_{l,m}^0$ funktioniert genau gleich wie bei der Matrix $\underline{\underline{K}}_{l,m}^0$. Einzig ist $G(\underline{x} - \underline{y})$ mit $k(\underline{x}, \underline{y})$ zu vertauschen.

Mithilfe des Transformationssatzes konnte die Matrix $\underline{\underline{M}}^0$ für den Fall $k=0$ wie folgt berechnet werden.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{l,m}^0 &= \int_{\Gamma} b_l(\underline{x}) b_m(\underline{x}) d\underline{x} \stackrel{\text{TS}}{=} \int_{-1}^1 \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} \hat{b}_l(\hat{x}) \hat{b}_m(\hat{x}) d\hat{x} \\ &= \begin{cases} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} \int_{\hat{\tau}_l} 1 d\hat{x} = \frac{\pi}{4} h & \text{wenn } l = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus diesen Berechnungen ergibt sich die Diagonalmatrix $\underline{\underline{M}}^0$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}}^0 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4}h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\pi}{4}h \end{pmatrix}$$

3.2 lineare Basiselemente (k=1)

Bei diesem Lösungsansatz approximiert man mithilfe linearer Basiselementen, der sogenannten Hut-Basis, die wie folgt definiert ist:

$$\hat{b}_i^1(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{i-1}}{h} & \text{wenn } \hat{x} \in \hat{\tau}_i \\ \frac{\hat{x}_{i+1} - \hat{x}}{h} & \text{wenn } \hat{x} \in \hat{\tau}_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{wobei } 1 \leq i < N$$

$$\hat{b}_0^1(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}}{h} & \text{wenn } \hat{x} \in \hat{\tau}_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{b}_N^1(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{N-1}}{h} & \text{wenn } \hat{x} \in \hat{\tau}_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_i^1 := \hat{b}_i^1 \circ \chi^{-1}$$

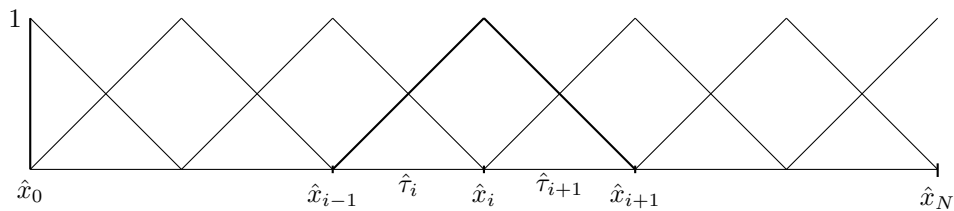


Abbildung 2: Graphische Darstellung der Hut-Basis

Der Lösungsansatz berechnet die Funktion $\varphi = \partial u$.

Die Lösungsformel gleicht derjenigen im Fall $k=0$, wegen den unterschiedlichen Basiselementen ändert sich aber die Anzahl der a_k , hier von 0 bis N .

$$\varphi = \sum_{k=0}^N \alpha_k b_k^1 \quad \text{wobei } \alpha_k \text{ die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems sind: } \underline{K} \underline{\alpha} = \left(\frac{1}{2} \underline{M} + \underline{B} \right) \underline{\beta}$$

Die Berechnung des $\underline{\beta}^1$ sei nun für den Fall $k=1$ hier gezeigt.

$$\tilde{g}_D = \sum_{k=0}^N g_D(x_k) b_k \quad \text{wobei } x_k \text{ ein Gitterpunkt auf } \Gamma \text{ ist}$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_D(\underline{y}) = \sum_{k=0}^N g_D(\chi(\hat{x}_k)) b_k(\underline{y})$$

$$\underline{\beta}^1 = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = (\tilde{g}_D(x_j))_{j=0}^N = \left(\sum_{k=0}^N g_D(\chi(\hat{x}_k)) b_k(\chi(\hat{x}_j)) \right)_{j=0}^N$$

Es gilt folgendes:

$$b_k^1(\chi(\hat{x}_j)) = \hat{b}_k^1(\hat{x}_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies gilt, da für \hat{b}_k^1 der Gitterpunkt $\hat{x}_k \in \hat{\tau}_k \cap \hat{\tau}_{k+1}$.

$$\Rightarrow \frac{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ auf } \hat{\tau}_k \quad \text{oder} \quad \frac{\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ auf } \hat{\tau}_{k+1}$$

Falls man \hat{x}_j für $j \neq k$ betrachtet, ist $b_k^1(\hat{x}_j) = 0$, da die Gitterpunkte auf den Enden oder gar nicht in den Dreiecken liegen.

Die Berechnungen und Überlegungen gelten auch für $\sum_{k=0}^N g_D(\chi(\hat{x}_k))b_k(\chi(\hat{x}_0))$ und $\sum_{k=0}^N g_D(\chi(\hat{x}_k))b_k(\chi(\hat{x}_N))$

Die obigen Überlegungen sind anhand folgender Abbildung klar ersichtlich.

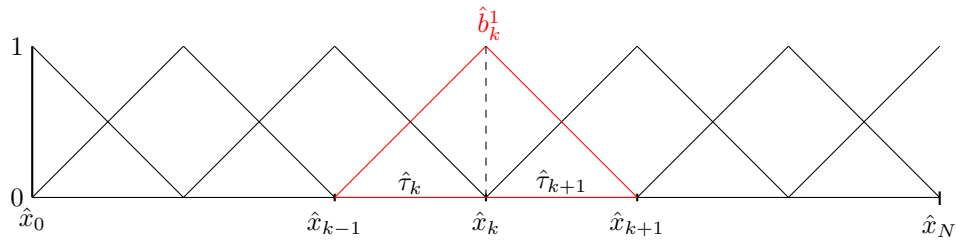


Abbildung 3: Veranschaulichung der Gitterpunkte bei der Hut-Basis

Es gilt, dass $\underline{\beta}^1$ somit wie folgt definiert werden kann:

$$\underline{\beta}^1 = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = (g_D(\chi(\hat{x}_j)))_{j=0}^N$$

Nun befasst man sich mit $\underline{\underline{K}}_{l,m}^1$, wobei $0 \leq l, m \leq N$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{K}}_{l,m}^1 &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(\underline{x} - \underline{y}) b_l(\underline{x}) b_m(\underline{y}) d\underline{y} d\underline{x} \\ &= \int_{\Gamma} b_l(\underline{x}) \int_{\Gamma} G(\underline{x} - \underline{y}) b_m(\underline{y}) d\underline{y} d\underline{x} \\ &\stackrel{\text{TS}}{=} \int_{-1}^1 \hat{b}_l(\hat{x}) \int_{-1}^1 \hat{b}_m(\hat{y}) G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}\end{aligned}$$

$1 \leq l, m \leq N - 1$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{K}}_{l,m}^1 &= \int_{\hat{\tau}_l} \int_{\hat{\tau}_m} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{l-1}}{h} \frac{\hat{y} - \hat{x}_{m-1}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x} \\ &+ \int_{\hat{\tau}_l} \int_{\hat{\tau}_{m+1}} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{l-1}}{h} \frac{\hat{x}_{m+1} - \hat{y}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x} \\ &+ \int_{\hat{\tau}_{l+1}} \int_{\hat{\tau}_m} \frac{\hat{x}_{l+1} - \hat{x}}{h} \frac{\hat{y} - \hat{x}_{m-1}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x} \\ &+ \int_{\hat{\tau}_{l+1}} \int_{\hat{\tau}_{m+1}} \frac{\hat{x}_{l+1} - \hat{x}}{h} \frac{\hat{x}_{m+1} - \hat{y}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}\end{aligned}$$

$l = 0, \quad 1 \leq m \leq N - 1$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{K}}_{0,m}^1 &= \int_{\hat{\tau}_1} \int_{\hat{\tau}_m} \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}}{h} \frac{\hat{y} - \hat{x}_{m-1}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x} \\ &+ \int_{\hat{\tau}_1} \int_{\hat{\tau}_{m+1}} \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}}{h} \frac{\hat{x}_{m+1} - \hat{y}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}\end{aligned}$$

$1 \leq l \leq N - 1, \quad m = 0$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{K}}_{l,0}^1 &= \int_{\hat{\tau}_l} \int_{\hat{\tau}_1} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{l-1}}{h} \frac{\hat{x}_1 - \hat{y}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x} \\ &+ \int_{\hat{\tau}_{l+1}} \int_{\hat{\tau}_1} \frac{\hat{x}_{l+1} - \hat{x}}{h} \frac{\hat{x}_1 - \hat{y}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}\end{aligned}$$

$1 \leq l \leq N - 1, \quad m = N$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{K}}_{l,N}^1 &= \int_{\hat{\tau}_l} \int_{\hat{\tau}_N} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{l-1}}{h} \frac{\hat{y} - \hat{x}_{N-1}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x} \\ &+ \int_{\hat{\tau}_{l+1}} \int_{\hat{\tau}_N} \frac{\hat{x}_{l+1} - \hat{x}}{h} \frac{\hat{y} - \hat{x}_{N-1}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}\end{aligned}$$

$l = N, \quad 1 \leq m \leq N - 1$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{K}}_{N,m}^1 &= \int_{\hat{\tau}_N} \int_{\hat{\tau}_m} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{N-1}}{h} \frac{\hat{y} - \hat{x}_{m-1}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x} \\ &+ \int_{\hat{\tau}_N} \int_{\hat{\tau}_{m+1}} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{N-1}}{h} \frac{\hat{x}_{m+1} - \hat{y}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}\end{aligned}$$

$l = 0, \quad m = N:$

$$\underline{\underline{K}}_{0,N}^1 = \int_{\hat{\tau}_1} \int_{\hat{\tau}_N} \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}}{h} \frac{\hat{y} - \hat{x}_{N-1}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}$$

$l = N, \quad m = 0:$

$$\underline{\underline{K}}_{N,0}^1 = \int_{\hat{\tau}_N} \int_{\hat{\tau}_1} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{N-1}}{h} \frac{\hat{x}_1 - \hat{y}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}$$

$l, m = 0:$

$$\underline{\underline{K}}_{0,0}^1 = \int_{\hat{\tau}_1} \int_{\hat{\tau}_1} \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}}{h} \frac{\hat{x}_1 - \hat{y}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}$$

$l, m = N:$

$$\underline{\underline{K}}_{N,N}^1 = \int_{\hat{\tau}_N} \int_{\hat{\tau}_N} \frac{\hat{x} - \hat{x}_{N-1}}{h} \frac{\hat{y} - \hat{x}_{N-1}}{h} G(\chi(\hat{x} - \hat{y})) \sqrt{\langle \chi'(\hat{y}), \chi'(\hat{y}) \rangle} \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} d\hat{y} d\hat{x}$$

Wie bereits schon im Fall $k=0$ gemacht, kann man diese Integrale zuerst auf Integrale von 0 bis 1 transformieren. Dann kann man mithilfe der Gaussquadratur und den Legendre-Stützstellen die Integrale approximieren und erhält die ganze Matrix $\underline{\underline{K}}^1$.

Nun befasst man sich wieder mit der Matrix $\underline{\underline{B}}_{l,m}^1$. Hierfür braucht man wieder die gleiche Funktion $k(x, y)$ wie im Fall $k=0$:

Man definiert nun $\underline{\underline{B}}_{l,m}^1$, wobei $0 \leq l, m \leq N$:

$$\underline{\underline{B}}_{l,m}^1 = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(\underline{x}, \underline{y}) b_l(\underline{y}) b_m(\underline{x}) d\underline{y} d\underline{x}$$

Die numerische Approximation von $\underline{\underline{B}}_{l,m}^1$ funktioniert genau gleich wie bei der Matrix $\underline{\underline{K}}_{l,m}^1$. Einzig ist $G(\underline{x} - \underline{y})$ mit $k(\underline{x}, \underline{y})$ zu vertauschen.

Mithilfe des Transformationssatzes konnte die Matrix $\underline{\underline{M}}^1$ für den Fall $k=1$ wie folgt berechnet werden.

$$\underline{\underline{M}}_{l,m}^1 = \int_{\Gamma} b_l(\underline{x}) b_m(\underline{x}) d\underline{x} \stackrel{\text{TS}}{=} \int_{-1}^1 \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} \hat{b}_l(\hat{x}) \hat{b}_m(\hat{x}) d\hat{x}$$

Man unterscheidet nun einige Fälle. Es gilt für $|l - m| \geq 2$, dass $\underline{\underline{M}}_{l,m}^1 = 0$.

An dieser Stelle sei der Fall $l = m$ für $1 \leq l, m < N$ gezeigt.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{M}}_{l,m}^1 &= \int_{-1}^1 \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} \hat{b}_l(\hat{x}) \hat{b}_m(\hat{x}) d\hat{x} \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\int_{\hat{\tau}_l} \hat{b}_l(\hat{x}) \hat{b}_l(\hat{x}) d\hat{x} + \int_{\hat{\tau}_{l+1}} \hat{b}_l(\hat{x}) \hat{b}_l(\hat{x}) d\hat{x} \right) \\
&= \frac{\pi}{4h^2} \left(\int_{\hat{\tau}_l} (\hat{x} - \hat{x}_{l-1})(\hat{x} - \hat{x}_{l-1}) d\hat{x} + \int_{\hat{\tau}_{l+1}} (\hat{x}_{l+1} - \hat{x})(\hat{x}_{l+1} - \hat{x}) d\hat{x} \right) \\
&= \frac{\pi}{4h^2} \left(\int_{\hat{\tau}_l} \hat{x}^2 - 2\hat{x}\hat{x}_{l-1} + \hat{x}_{l-1}^2 d\hat{x} + \int_{\hat{\tau}_{l+1}} \hat{x}^2 - 2\hat{x}\hat{x}_{l+1} + \hat{x}_{l+1}^2 d\hat{x} \right) \\
&= \frac{\pi}{4h^2} \left(\frac{1}{3} \hat{x}^3 - \hat{x}^2 \hat{x}_{l-1} + \hat{x} \hat{x}_{l-1}^2 \Big|_{\hat{x}_{l-1}}^{\hat{x}_{l-1}+h} + \frac{1}{3} \hat{x}^3 - \hat{x}^2 \hat{x}_{l+1} + \hat{x} \hat{x}_{l+1}^2 \Big|_{\hat{x}_l}^{\hat{x}_l+h} \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{2h^3}{3h^2} = \frac{\pi}{4} \frac{2h}{3}
\end{aligned}$$

Die anderen Berechnungen erfolgen ähnlich wie die gezeigten Berechnungen. Für den Fall $l, m = 0$ und $l, m = N$ erfolgt die Integration lediglich über ein halbes Dreieck. Somit ergibt sich für $l, m = 0$ und $l, m = N$:

$$\underline{\underline{M}}_{l,m}^1 = \frac{\pi}{4} \frac{h}{3}$$

Für den Fall $l \neq m$ und $|l - m| < 2$ folgt, dass $m = l + 1$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{M}}_{l,m}^1 &= \int_{-1}^1 \sqrt{\langle \chi'(\hat{x}), \chi'(\hat{x}) \rangle} \hat{b}_l(\hat{x}) \hat{b}_{l+1}(\hat{x}) d\hat{x} \\
&= \frac{\pi}{4} \int_{\hat{\tau}_{l+1}} \hat{b}_l(\hat{x}) \hat{b}_{l+1}(\hat{x}) d\hat{x} \\
&= \frac{\pi}{4h^2} \int_{\hat{\tau}_{l+1}} (\hat{x}_{l+1} - \hat{x})(\hat{x} - \hat{x}_l) d\hat{x} \\
&= \frac{\pi}{4h^2} \int_{\hat{\tau}_{l+1}} \hat{x} \hat{x}_{l+1} + \hat{x} \hat{x}_l - \hat{x}_l \hat{x}_{l+1} - \hat{x}^2 d\hat{x} \\
&= \frac{\pi}{4h^2} \left(\frac{1}{2} \hat{x}^2 \hat{x}_{l+1} + \frac{1}{2} \hat{x}^2 \hat{x}_l - \hat{x} \hat{x}_l \hat{x}_{l+1} - \frac{1}{3} \hat{x}^3 \Big|_{\hat{x}_l}^{\hat{x}_l+h} \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{1}{6h^2} (3(\hat{x}_l + h)^2(\hat{x}_l + h) + 3(\hat{x}_l + h)^2 \hat{x}_l - 6(\hat{x}_l + h) \hat{x}_l (\hat{x}_l + h) - 2(\hat{x}_l + h)^3 \\
&\quad - 3\hat{x}_l^2(\hat{x}_l + h) - 3\hat{x}_l^3 + 6\hat{x}_l^2(\hat{x}_l + h) - 2\hat{x}_l^3) \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{1}{6h^2} ((\hat{x}_l + h)^3 - 3(\hat{x}_l + h)^2 \hat{x}_l + 3(\hat{x}_l + h) \hat{x}_l^2 - \hat{x}_l^3) \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{h^3}{6h^2} = \frac{\pi}{4} \frac{h}{6}
\end{aligned}$$

Aus diesen Berechnungen ergibt sich die Tridiagonalmatrix $\underline{\underline{M}}^1$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}}^1 = \frac{\pi}{4} h \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & & & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & & & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4 Auswertung

4.1 konstante Basiselemente (k=0)

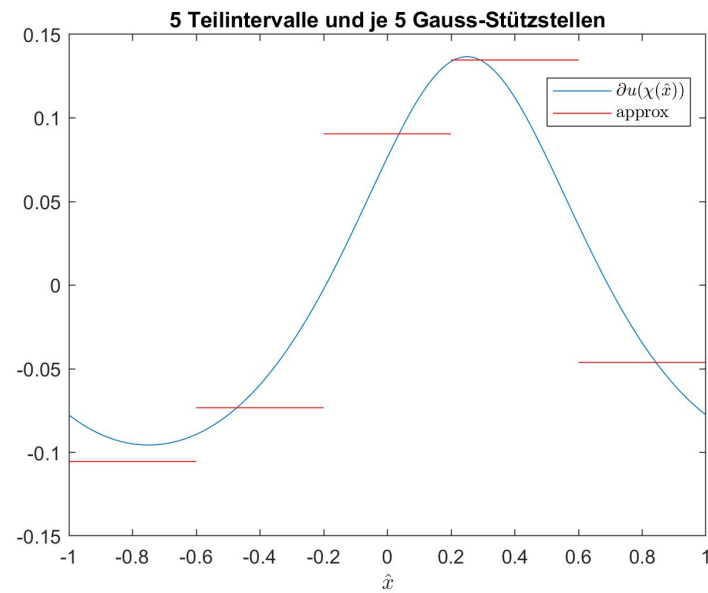


Abbildung 4: Approximation mit 5 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 5 Stützstellen (Fall 1)

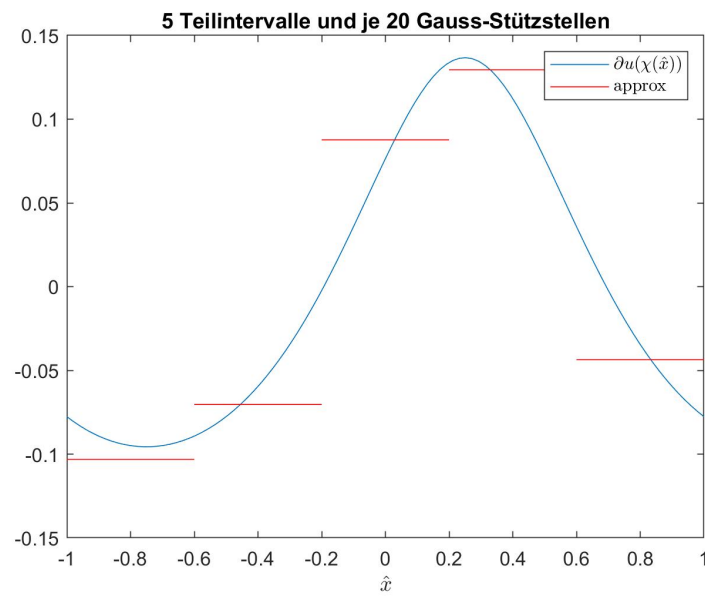


Abbildung 5: Approximation mit 5 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 20 Stützstellen (Fall 2)

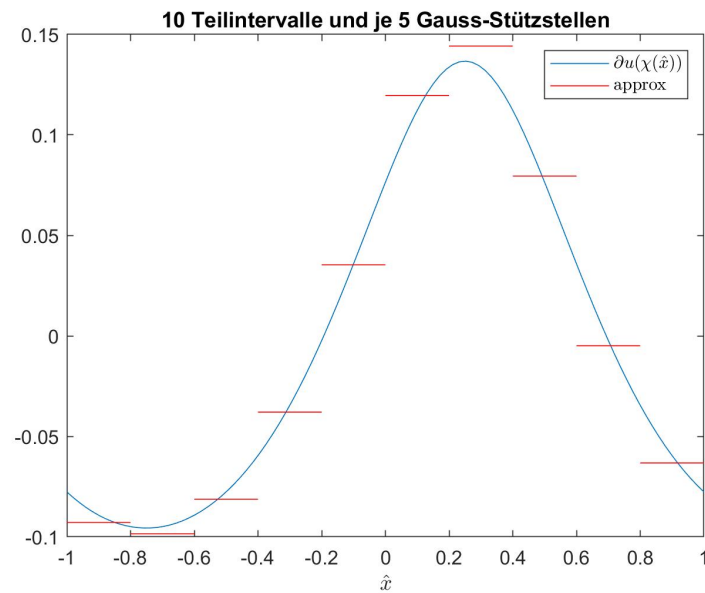


Abbildung 6: Approximation mit 10 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 5 Stützstellen (Fall 3)

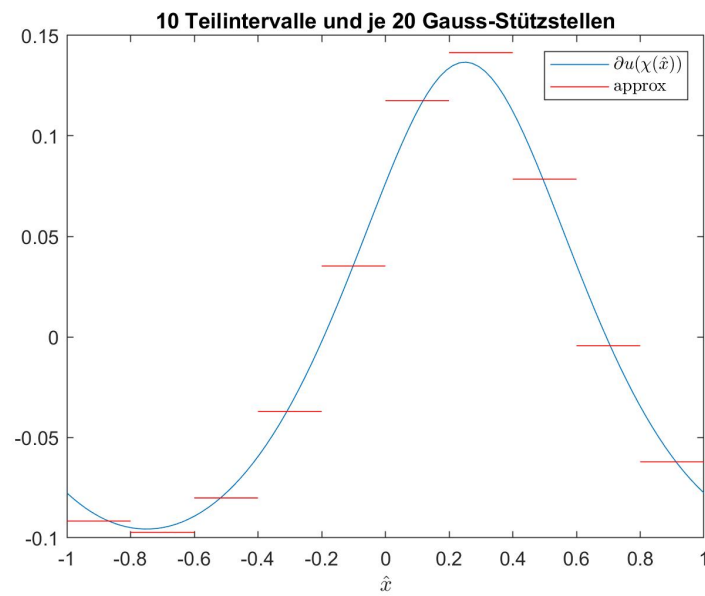


Abbildung 7: Approximation mit 10 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 20 Stützstellen (Fall 4)

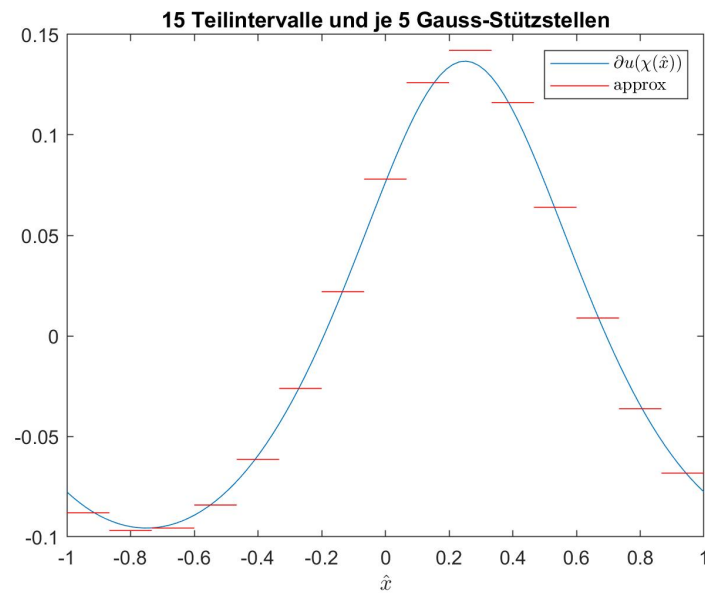


Abbildung 8: Approximation mit 15 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 5 Stützstellen (Fall 5)

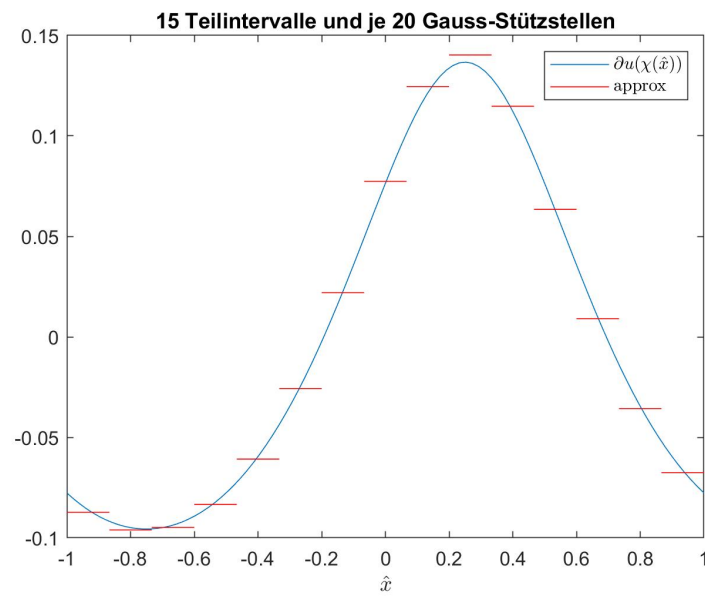


Abbildung 9: Approximation mit 15 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 20 Stützstellen (Fall 6)

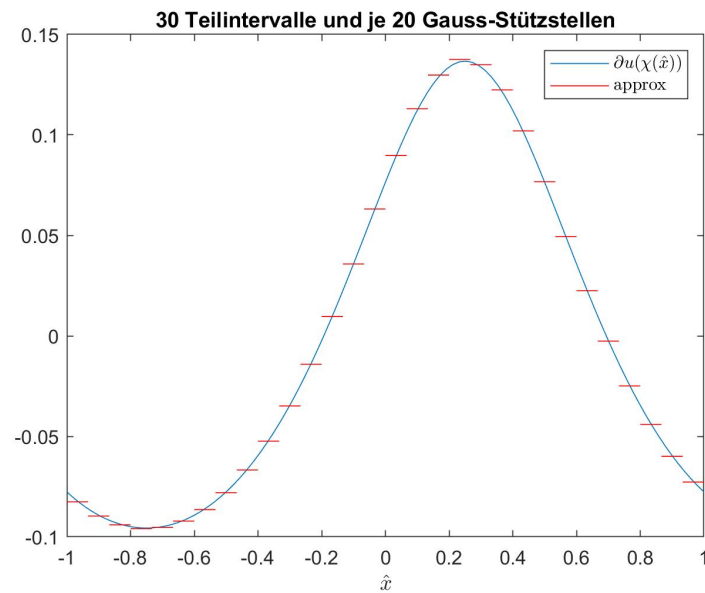


Abbildung 10: Approximation mit 30 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 20 Stützstellen (Fall 7)

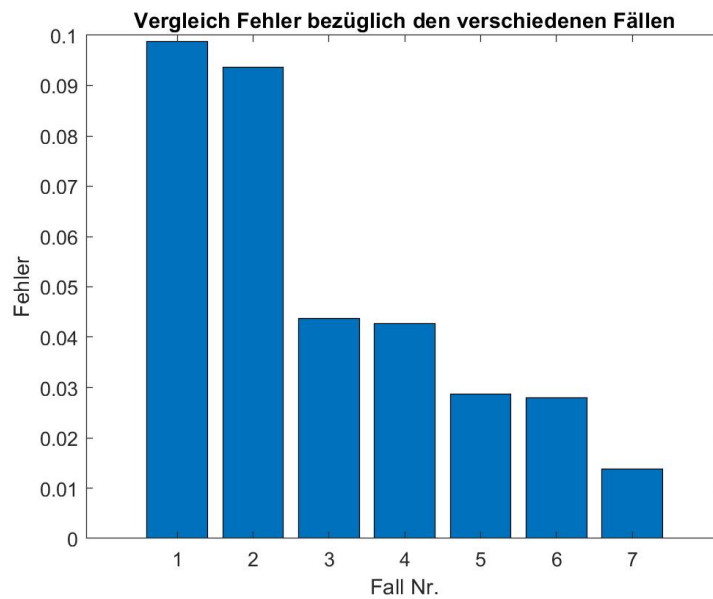


Abbildung 11: Übersicht des Fehlers bezüglich den verschiedenen Fällen

Man betrachte die Abbildungen 4-11. Sofort fällt auf, dass sich die Approximationen bei der Erhöhung der Intervallanzahl stärker verbessert als bei der Verfeinerung der Gaussquadratur. Dies ist auf die starke Steigung von ∂u zurückzuführen, wobei konstante Approximationen hierbei einen grösseren Fehler erzeugen. Also ist die Erhöhung der Intervalle in erster Linie die bessere Strategie, um eine gewünschte Genauigkeit zu erreichen. In der Abbildung 10 sieht man nochmals schön, dass sich die Genauigkeit bei erneutem Erhöhen der Intervallanzahl stark verbessert. Die Abbildung 11 zeigt, dass der Maximale Fehler kontinuierlich kleiner wird.

Im Allgemeinen ist die Approximation bereits mit konstanten Basiselementen sehr nahe am exakten Resultat.

4.2 lineare Basiselemente (k=1)

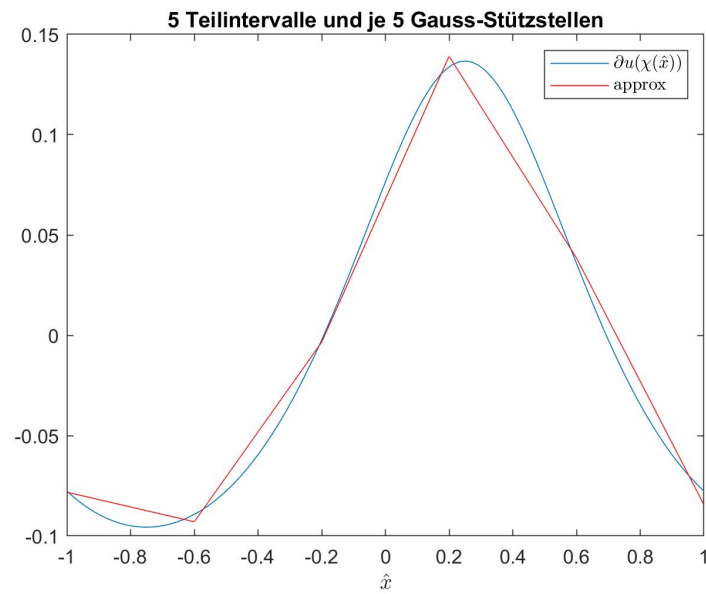


Abbildung 12: Approximation mit 5 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 5 Stützstellen (Fall A)

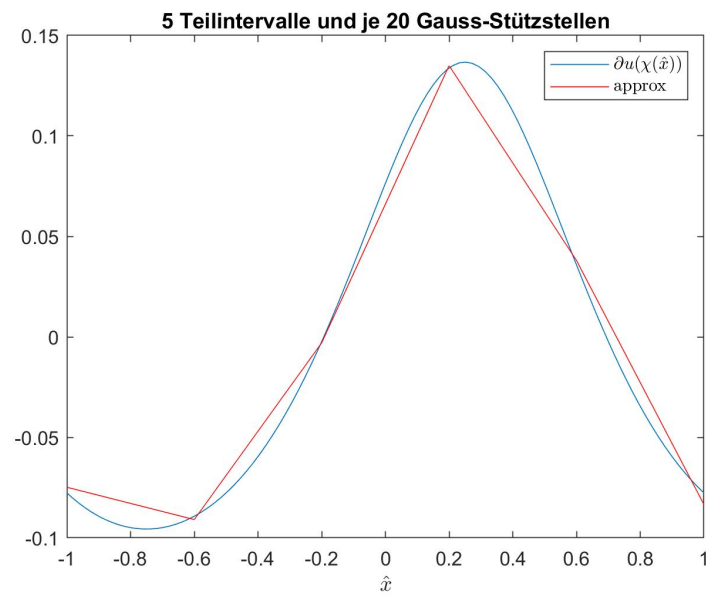


Abbildung 13: Approximation mit 5 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 20 Stützstellen (Fall B)

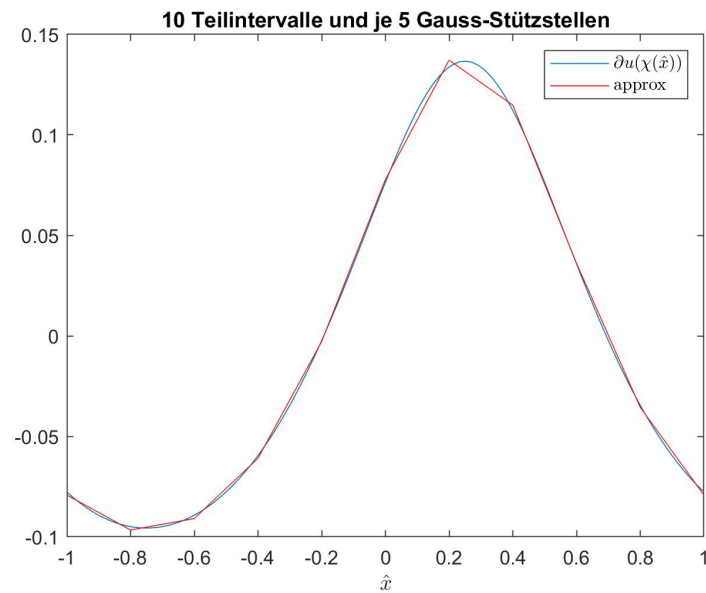


Abbildung 14: Approximation mit 10 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 5 Stützstellen (Fall C)

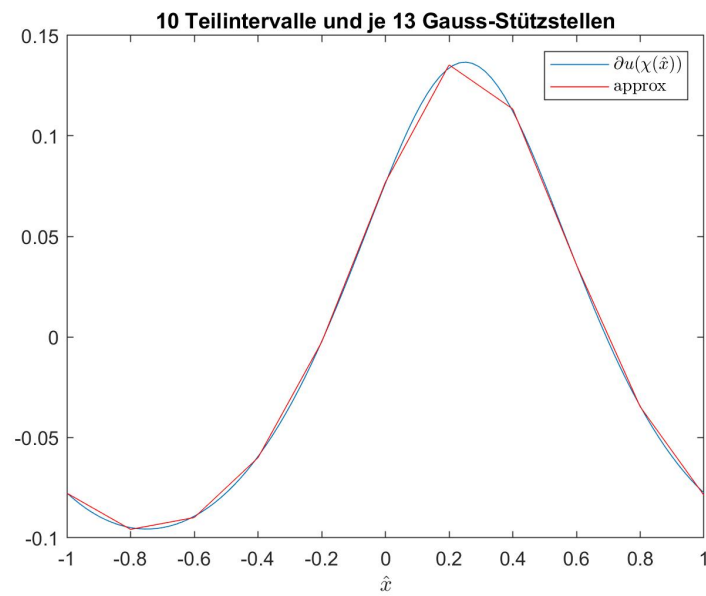


Abbildung 15: Approximation mit 10 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 13 Stützstellen (Fall D)

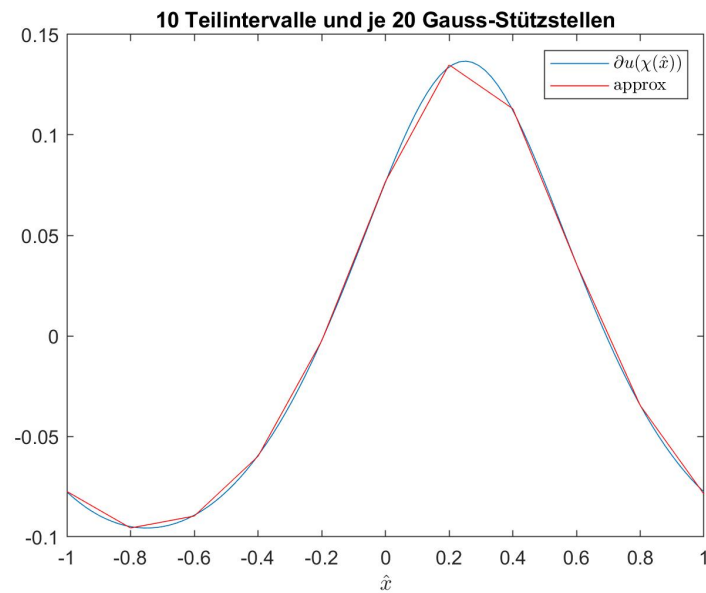


Abbildung 16: Approximation mit 10 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 20 Stützstellen (Fall E)

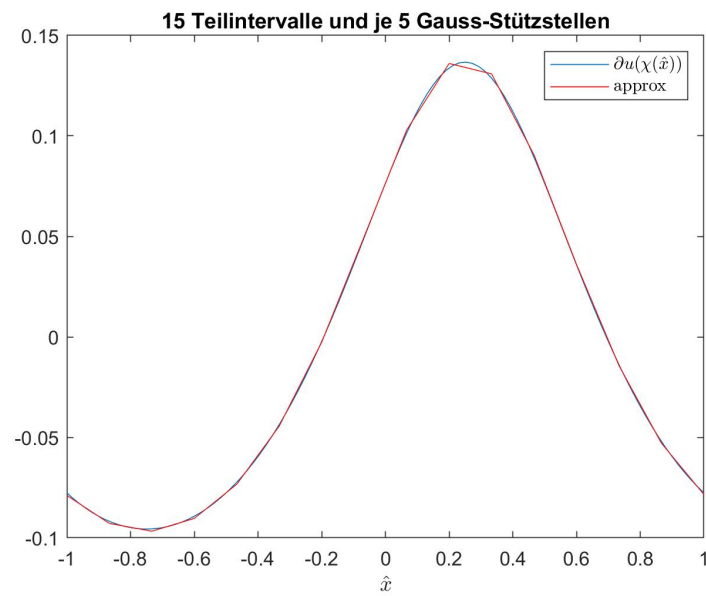


Abbildung 17: Approximation mit 15 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 5 Stützstellen (Fall F)

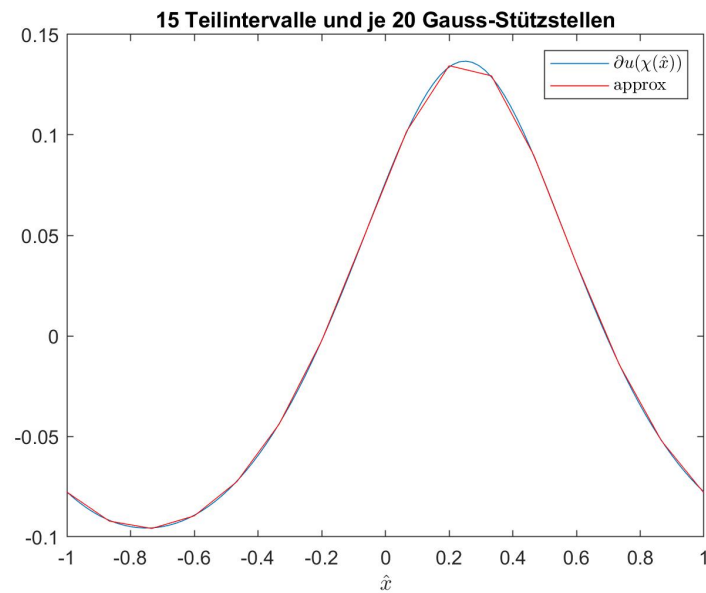


Abbildung 18: Approximation mit 15 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 20 Stützstellen (Fall G)

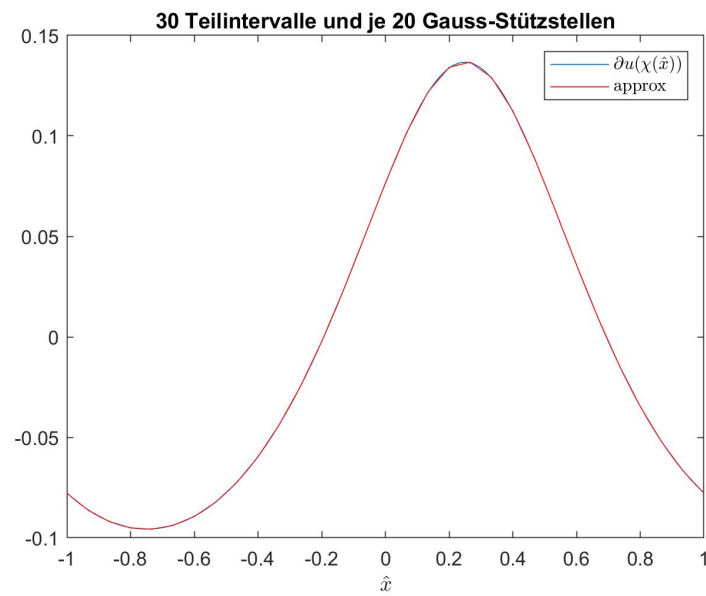


Abbildung 19: Approximation mit 30 Teilintervallen, Gaussquadratur mit je 20 Stützstellen (Fall H)

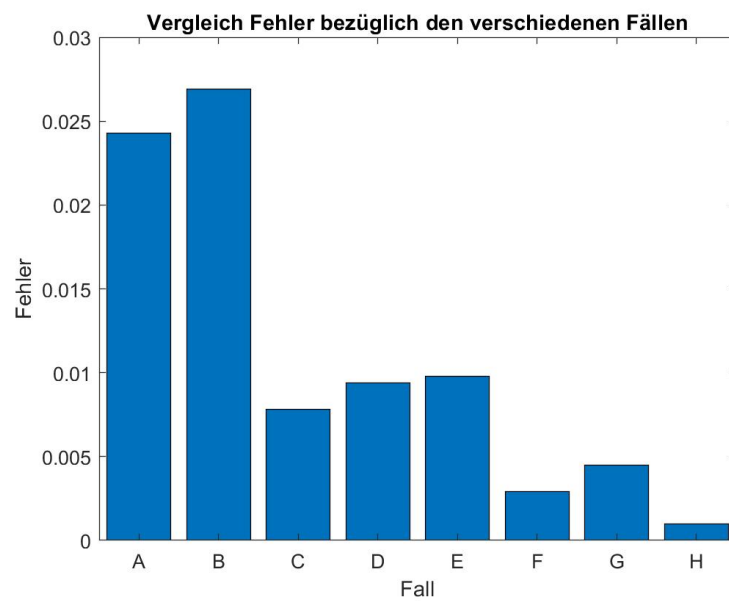


Abbildung 20: Übersicht des Fehlers bezüglich den verschiedenen Fällen

Im Unterschied zu den konstanten Basiselementen fallen in erster Linie 2 konkrete Unterschiede auf:

- Der Fehler ist bei gleicher Intervallanzahl bei linearen Basiselementen um einiges kleiner als bei Konstanten.
- Der Fehler verbessert sich durch die Verfeinerung der Gaussquadratur nicht zwangsläufig.

Wobei der erste Punkt direkt klar ist, lässt der zweite einige Unklarheiten offen. Man bemerkt aber, dass diese Unterschiede nicht signifikant sind. Die Differenzen entstehen durch die Beschaffenheit von u und φ . Ein exakteres Integral führt zu einer besseren allgemeineren Approximation. Dies muss sich aber nicht unbedingt auf den maximalen Fehler beziehen, beziehungsweise kann diesen sogar negativ beeinflussen. In der Abbildung 20 ist dieses Phänomen ersichtlich. Der Maximale Fehler erhöht sich sogar ein wenig bei feinerer Integralapproximation. Was aber bleibt, ist die klare Verbesserung bei der Vergrößerung der Intervallanzahl. Hierbei wird der Fehler um ein gutes Stück kleiner. Wie auf den Graphiken sowie in der Fehlerstatistik ersichtlich, ist der Fehler bei linearen Basiselementen besser als bei konstanten Basiselementen. Dies unterstreicht somit die Aussage, dass ein höherer Basisgrad die Funktion besser approximiert.