Integration über eine beliebige Dreiecksfläche

Jonas Guler, Philipp Moor

September 12, 2019

1 Ausgangslage

Ausgangslage des Integrationsproblems ist ein Dreieck im $\mathbb{R}^3$, und eine Funktion f:

$$\tau(i,j,k) = \left\{ \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Um die zweidimensionale Gauss-Quadratur anzuwenden, muss das Dreieck affin auf das Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden.

2 Transformation des Dreiecks ins Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$

Sei $\tau \subset \mathbb{R}^3$ ein beliebiges Dreieck (A,B,C)

$$\tau = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\tau_r \subset \mathbb{R}^2$ ein Referenzdreieck mit

$$\tau_r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gesucht wird eine affine Funktion χ_i von τ nach τ_r so dass: $\chi(\tau) = \tau_r$
Die Funktion ist gegeben durch:

$$\chi_I(x) = I + M \cdot x, \quad M := \big[\big(B - A\big) \,|\, \big(B - C\big) \big] \in Mat(3 \times 2, \mathbb{R})$$

wobei I der Eckpunkt von τ ist, der auf 0 abgebildet wird.

Ausgehend von diesem Referenzdreieck wird die Transformation ins Einheitsquadrat sehr einfach. Sie ist durch folgende Funktion gegeben:

$$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \big(\mu, \nu\big) \mapsto \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \cdot \nu \end{pmatrix}$$

3 Behandelte Funktionen und ihre Problemstellen

4 Qauss-Quadratur

4.1 Berechnung der Stützstellen und Gewichte

5 Resultate