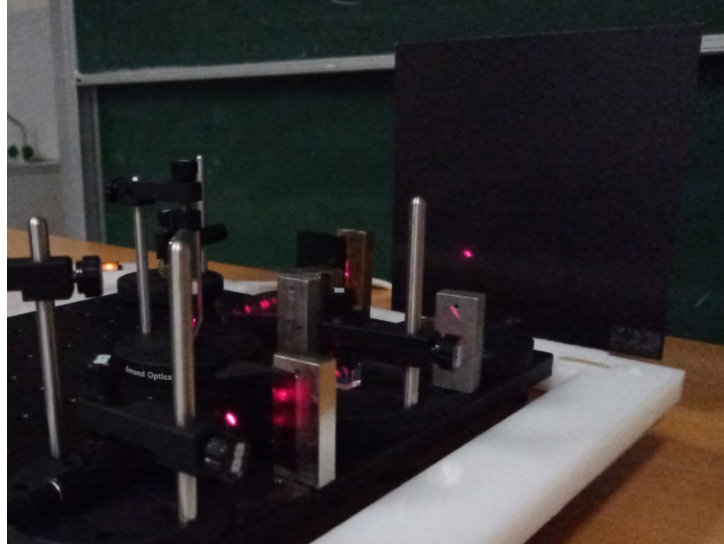


PROJEKTTITEL: EXPERIMENTELLE UND THEORETISCHE ANALYSEN VON QUANTENCOMPUTERN



Teilnehmende (mit Alter):	Philipp Schöneberg (19), Phil Gustke (19), Jannes Ruder (14)
Erarbeitungsort:	Gymnasium Athenaeum Stade
Projektbetreuende:	Dr. Hans-Otto Carmesin
Fachgebiet:	Physik
Wettbewerbssparte:	Jugend forscht
Bundesland:	Niedersachsen
Wettbewerbsjahr:	2024

Inhaltsverzeichnis

1 Fachliche Kurzfassung	1
2 Motivation und Fragestellung	1
3 Hintergrund und theoretische Grundlagen	2
3.1 Theorie des universellen Sets	2
3.2 Controlled-NOT-Abbildung	2
3.3 P-, Z-, S- und T-Abbildung	3
3.4 Hadamard-Abbildung	3
4 Vorgehensweise, Materialien und Methoden	4
4.1 Grundlagen der experimentellen Umsetzung	4
4.2 Experimentelle Umsetzung der Einzelqubitgatter	5
4.3 Farbmultiplexing	7
4.4 Grover-Algorithmus	7
4.5 Deutsch-Jozsa-Algorithmus	11
4.6 Simulation	13
5 Ergebnisse	14
6 Ergebnisdiskussion	15
7 Fazit und Ausblick	15
Quellen- und Literaturverzeichnis	16
Unterstützungsleistungen	18
Danksagung	18

1 Fachliche Kurzfassung

In unserer Arbeit konnten wir das Z-, Hadamard-, S- und X-Gatter, für das Qubit der Polarisation vollständig experimentell umsetzen. Zusätzlich haben wir ein Arbeitsheft erstellt, um die Ausbildungsmöglichkeiten in der Branche Quantum Computing zu verbessern. Zusammen mit unseren Ergebnissen unseres letzten Jugend-forscht-Projekts erklären wir darüber hinaus eine vollständige, physikalische Realisierung eines Quantencomputers mit dem Set CNOT, H, T. Außerdem konnten wir durch unsere innovative Idee vom Farbmultiplexing die Geschwindigkeit von optischen Computern, wie dem unseren, weiter optimieren und die Funktion experimentell bestätigen. Des Weiteren haben wir mithilfe fortgeschrittener linearer Algebra den Grover- sowie den Deutsch-Jozsa-Algorithmus, unter Nutzung unseres universellen Sets, an zwei Qubits berechnet und unsere Ergebnisse durch eine selbstgeschriebene Simulation bestätigt und veranschaulicht.

2 Motivation und Fragestellung

Der Bau des ersten Transistors im Jahr 1948¹, leitete ein neues Zeitalter der Elektro- und Informationstechnik ein und ermöglichte den Bau des ersten elektronischen Computers². Heute arbeiten weltweit verschiedenste Industrien und Wissenschaftler an der Optimierung von Schlüsseltechnologien und -komponenten der Computertechnologie. Der Anspruch an die Hersteller, die Rechengeschwindigkeiten der Computer immer weiter zu optimieren, konnte hierbei in den vergangenen Jahrzehnten über eine Miniaturisierung einzelner Komponenten erfüllt werden. Diese Verkleinerung einzelner Strukturen ist jedoch an physikalische Grenzen, wie die Größe von Atomen, gebunden. Aufgrund der daraus resultierenden Suche nach Alternativen sowie neuen Erkenntnissen der Quantenphysik, wurde in den vergangenen Jahrzehnten die Idee von Quantencomputern immer populärer^{3,4}. Durch Forschung auf diesem Gebiet konnten Anwendungen und Algorithmen identifiziert werden, die theoretisch eine Überlegenheit von Quantencomputern gegenüber klassischen Computern, bezogen auf ihre Rechenleistung bewiesen^{5,6,7}. Für den praktischen Nachweis dauerte es jedoch noch einige weitere Jahre, bis Meilensteine wie die erste praktische Realisierung eines Qubits¹ erreicht wurden⁸. Anschließend konnten, die ersten Algorithmen, welche verschiedene Eigenschaften der neu erlangten Technologie nutzten, praktisch umgesetzt werden. So wurde beispielsweise der Shor-Algorithmus, ein Algorithmus, der durch die Ausnutzung verschiedener Quanteneigenschaften in der Lage ist, die derzeit in der Internetkommunikation verwendete RSA-Verschlüsselung zu entschlüsseln, im Jahr 2001 erstmals mithilfe von 7 Qubits praktisch realisiert⁹. In der Folge stiegen weitere Firmen in die neu erschlossene und nun theoretisch sowie praktisch abgesicherte Branche ein und forschten an weiteren Optimierungen, wie beispielsweise der Erhöhung der in einem Quantencomputer realisierten Qubits. Aufgrund dieser Entwicklung kam es in der jüngsten Vergangenheit zu einer enormen Steigerung der Rechenleistung. So erreichte 2019 der Quantencomputer von Google, welcher supraleitende Schaltkreise als Realisierung von Qubits nutzt, eine um den Faktor 1,5 Milliarden verbesserte Rechenleistung im Vergleich zu klassischen Computern¹⁰. Im Jahr 2020 folgte daraufhin ein neuer Rekord des auf Photonen basierenden Quantencomputers der Organisation „Chinese Academy of Sciences“, welche eine um den Faktor 100 Billionen effizientere Verarbeitung erreichte¹¹. Seit dem Jahr 2022 bis heute wurde die höchste

¹[Bardeen, 1948], *The Transistor, A Semi-Conductor Triode*

²[Williams, 1997], *A History of Computing Technology*

³[Barenco, 1995], *Elementary Gates for Quantum Computation*

⁴[Deutsch, 1985], *Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer*

⁵[Deutsch, 1992], *Rapid solution of problems by quantum computation*

⁶[Shor, 1997], *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*

⁷[Grover, 1996], *A fast quantum mechanical algorithm for database search*

⁸[Cirac, 1995], *Quantum Computing with Trapped Ions*

⁹[Chuang, 2001], *Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*

¹⁰[Arute, 2019], *Quantum supremacy using a programmable superconducting processor*

¹¹[Zhong, 2020], *Quantum computational advantage using photons*

Geschwindigkeitssteigerung, allerdings durch den ebenfalls auf Licht basierenden Quantencomputer Borealis aus Kanada mit einem Faktor von 7,8 Milliarden, erreicht¹. In unserer Arbeit untersuchen wir die bisher erfolgreichste Technologie eines auf Licht beziehungsweise Photonen basierenden Quantencomputers genauer. Da für eine zukünftige Massenproduktion an Quantencomputerchips eine geschickte und möglichst minimalistische Kombination verschiedener Gatter essenziell ist, haben wir uns entschlossen eine solche im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit hin zu untersuchen. Dieser Ansatz stellt ein später noch erklärtes universelles Set an Quantengattern dar, das wir zuerst theoretisch sowie mathematisch verstehen, anschließend praktisch sowie demonstrativ realisieren und zum Schluss in bestimmten Algorithmen zur Anwendung bringen wollen. Des Weiteren haben wir bei der Arbeit an unserem Projekt entdeckt, dass der geschickte Mechanismus des wellenlängenbasierten Multiplexings, bisher üblich in der Datenübertragung, die Rechenleistung von Quantencomputern in bestimmten Anwendungsfällen enorm erhöhen kann. Daher ist auch eine Überprüfung dieses Mechanismus ein Ziel des Projektes. Unsere Analysen und Experimente ermöglichen einen Einblick in die verschiedenen Teilbereiche eines Quantencomputers, sowohl auf Hardware, als auch Softwareseite. Genau aus diesem Grund versuchen wir die Experimente besonders demonstrativ zu gestalten und sie zur Ausbildung von neuen Fachkräften in dieser aufsteigenden Branche nutzbar zu machen. Für die Umsetzung arbeiten wir im theoretischen Bereich sowohl mit linearer Algebra als auch mit Computersimulationen. Im Bereich der praktischen Realisierung arbeiten wir mit hochpräzisen Optikmaterialien, welche die Firma „Edmund Optics“ weltweit von renomierten Herstellern beschafft und vermarktet.

3 Hintergrund und theoretische Grundlagen

3.1 Theorie des universellen Sets

Zur vollständigen Analyse und Realisierung eines Quantencomputers untersuchen wir ein universelles Set an Gattern. Analog zu klassischen Computern lassen sich nämlich alle unitären Abbildungen, also prinzipiell alle Rechenoperationen, die in einem Quantencomputer physikalisch möglich sind, durch Kombination von nur wenigen grundlegenden Abbildungen vollständig darstellen. Dass eine solche Generalisierung durch ein universelles Set für beliebig viele Qubits mit dem Set {CNOT, Einzel-Qubit Gatter} sehr genau möglich ist, wurde mathematisch bewiesen². Ein universelles, unendlich präzises Einzel-Qubit Gatter, welches den Zustand eines Qubits im Rahmen der unitären Abbildungen beliebig verändern kann, ist jedoch praktisch nicht realisierbar⁴. Denn es bleibt naturgesetzlich eine minimale Unbestimmtheit, die durch das Set gegen 0 konvergiert. Dies führt zu minimalen Fehlerwahrscheinlichkeiten, welche auch bei klassischen Computern zu finden sind. Wir haben also das Set {CNOT, H, T} ausgewählt, welches näherungsweise jede beliebige unitäre Abbildung realisieren kann².

3.2 Controlled-NOT-Abbildung

Die Controlled-NOT-Abbildung oder kurz C-NOT- beziehungsweise CX-Abbildung führt eine NOT-beziehungsweise X-Operation am Zielqubit durch, welche durch den Zustand des Kontrollqubits kontrolliert wird. Dementsprechend werden zwei Qubits benötigt, welche durch die Abbildung miteinander verschränkt werden. Die mathematische Umsetzung als Matrix ist entsprechend vierdimensional und hängt davon ab, ob Qubit $|q_0\rangle$ oder Qubit $|q_1\rangle$ als kontrollierendes Qubit verwendet wird^{3, 4}:

¹[Madsen, 2022], *Quantum computational advantage with a programmable photonic processor*

²[De Ro, 2021], *Universal Sets of Gates in Quantum Computing*

³[Development Team, 2021], *Qiskit-Circuit-Library*, CXGate

⁴siehe Gleichung 1 & 2

$$CX_{q_0, q_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$CX_{q_1, q_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

3.3 P-, Z-, S- und T-Abbildung

Bei der P-Abbildung handelt es sich um eine Einzel-Qubit-Abbildung, welche den Einheitsvektor der Einheitskugel um einen beliebigen Winkel Φ um die Z-Achse rotiert. Eine Einheitskugel ist prinzipiell ein Hilbertraum für ein einzelnes Qubit, wobei eine dritte Dimension für den imaginären Zahlenraum hinzugefügt wurde. Zur Vereinfachung und Spezifizierung dieser Abbildung gibt es die T-, S- und Z-Abbildungen, die den Einheitsvektor um einen bestimmten Winkel rotieren. Die T-Abbildung rotiert um einen Winkel $\frac{\pi}{4}$ und die S-Abbildung um einen Winkel $\frac{\pi}{2}$. Die größte, häufig verwendete Rotation um π wird durch die Z-Abbildung umgesetzt, weshalb die S-Abbildung auch unter \sqrt{Z} und die T-Abbildung unter $\sqrt[4]{Z}$ bekannt ist. Entsprechend kann die Z-Abbildung nicht nur als $P(\pi)$, sondern auch als SS oder $TTTT$ dargestellt werden^{1,2}:

$$\begin{aligned} P(\pi) = Z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = SS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{bmatrix} = \\ &= TTTT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Will man die Abbildungen auf ein System mit mehreren Qubits anwenden, verwendet man das Tensor-Produkt, um Abbildungen miteinander zu verknüpfen^{5,3}. Deshalb zeigen wir hier bereits unsere Verknüpfung zweier Z-Abbildungen für ein System aus zwei Qubits, wodurch die Abbildungen auf beide Qubits angewendet wird⁴:

$$Z_{q_0, q_1} = Z \otimes Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Die Z-Abbildung ist, wie auch die folgende Hadamard-Abbildung, eine selbstinverse Matrix⁵.

3.4 Hadamard-Abbildung

Die Hadamard-Abbildung ist eine Einzel-Qubit-Abbildung, welche es ermöglicht, ein Qubit von einem Basiszustand in eine uniforme Superposition und wieder zurück zu versetzen. Prinzipiell lässt sich die Abbildung anhand der Einheitskugel durch eine Rotation um die $X + Z$ Achse⁶ erklären und resultiert deshalb beispielsweise, ausgehend vom Startzustand $|0\rangle$, im Zustand $|+\rangle$. Da die Hadamard-Abbildung in den späteren Berechnungen mit zwei Qubits nicht nur mit sich selbst verknüpft wird, sondern teilweise auch auf einzelne Qubits angewendet wird, zeigen wir hier unsere drei verschiedenen Verknüpfungen. Die

¹[Development Team, 2021], *Qiskit-Circuit-Library*, ZGate

²siehe Gleichung 3

³[Abbas, 2020], *Qiskit-Textbook*, 2.2.2

⁴siehe Gleichung 4

⁵[Abbas, 2020], *Qiskit-Textbook*, 2.5.2.2

⁶[Roy, 2020], *Quantum Logic Gates*

erste ist die Verknüpfung zweier Hadamard-Abbildungen, welche eine Anwendung der Abbildung auf beide Qubits ermöglicht¹:

$$\begin{aligned} H_{q_0, q_1} &= H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Die zweite ist die Verknüpfung einer Hadamard-Abbildung und einer Einheitsmatrix. Diese ermöglicht eine Anwendung der Hadamard-Abbildung nur auf das erste Qubit, hier $|q_0\rangle$, wobei das zweite Qubit $|q_1\rangle$ keine Rolle spielt²:

$$H_{q_0} = \mathbb{1} \otimes H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Die dritte Möglichkeit ist die ausschließliche Anwendung der Hadamard-Abbildung auf das zweite Qubit des Systems, wofür die Einheitsmatrix und die Hadamard-Abbildung in einer anderen Reihenfolge verknüpft werden³:

$$H_{q_1} = H \otimes \mathbb{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

4 Vorgehensweise, Materialien und Methoden

4.1 Grundlagen der experimentellen Umsetzung

Da wir das C-NOT-Gatter unseres universellen Sets schon in unserer letzten Arbeit umgesetzt hatten, fokussieren wir uns in dieser Arbeit, zumindest bei der experimentellen Betrachtung, auf die Umsetzung eines universellen Einzel-Qubit-Gatters mit dem Set $\{H, T\}$ für das Qubit der Polarisation von Licht. Die Polarisation ist eine häufig angewandte Variante, ein Qubit in einem auf Licht basierenden Quantencomputer darzustellen^{4,5}. Für die Vollständigkeit unserer Beweisführung, recherchierten wir dennoch eine bereits bestehende Umsetzung eines C-NOT-Gatters basierend auf Orbital Angular Momentum (OAM) und Polarisation⁴, die unserer eigenen Implementation stark ähnelt. Um ein solches C-NOT-Gatter auch vollständig in einen Compiler integrieren zu können ist es nötig, die gespeicherten Daten zwischen Polarisation und OAM konvertieren zu können, da beide Eigenschaften im Versuchsaufbau benutzt werden, um ein Qubit darzustellen. Das wurde glücklicherweise ebenfalls bereits umgesetzt⁶. Eine noch praktischere Methode zur Umwandlung wäre jedoch das Erstellen eines Swap-Gatters durch das Hintereinanderschalten

¹siehe Gleichung 5

²siehe Gleichung 6

³siehe Gleichung 7

⁴[Lopez, 2018], *Experimental realization of quantum CNOT gate*

⁵[Hey, 1999], *Quantum computing: an introduction*

⁶[Shihao Ru, 2021], *Quantum state transfer between two photons with polarization and orbital angular momentum*

von drei C-NOT-Gattern, z. B. CX_{q_0,q_1} , CX_{q_1,q_0} , CX_{q_0,q_1} , was auch schon experimentell umgesetzt wurde¹. Dafür würde uns aber noch ein OAM-Controlled-Not-Gatter CX_{q_1,q_0} fehlen, was man wiederum durch die Gatterfolge H_{q_0,q_1} , CX_{q_0,q_1} , H_{q_0,q_1} herstellen kann², wozu uns nur ein OAM-Hadamard-Gatter fehlen würde, was ebenfalls umsetzbar ist³. In unseren Experimenten haben wir die vertikal lineare Polarisation als Basiszustand $|0\rangle$ und die horizontal lineare Polarisation als Basiszustand $|1\rangle$ des Qubits bezeichnet. Für unsere experimentelle Umsetzung haben wir $\frac{\lambda}{2}$ -, $\frac{\lambda}{4}$ -Phasenverschiebungsfolie sowie Polarisationsfolie bestellt und Bauteile entworfen, bei welchen die Folie in der passenden Rotation an ein Metallstück geklebt wurde, sodass man es einfach und problemlos in einen Laserstrahl stellen kann.

4.2 Experimentelle Umsetzung der Einzelqubitgatter

Über den bereits erwähnten Artikel⁴ vom CNOT-Gatter Aufbau waren wir bereits vertraut mit dem Begriff der "Half-Wave-Plate" oder auf deutsch $\frac{\lambda}{2}$ -Phasenverschiebungsplättchen, wussten aber noch sehr wenig über dessen Funktionsweise. Grundsätzlich verschiebt ein solches Phasenverschiebungsplättchen nämlich die Phase einer der beiden linearen Polarisationsrichtungen relativ zur anderen und erzeugt damit eine Spiegelung der zirkularen Polarisation. Die zirkuläre Polarisation kann im Hilbertraum nämlich auch äquivalent als Superposition der linearen Polarisationsrichtungen dargestellt werden. Die Verschiebung entsteht durch die Eigenschaften der genutzten Materialien, welche einen Unterschied in der Geschwindigkeit verursachen, mit der sich das Licht der einzelnen Polarisationsrichtungen durch das Plättchen bewegen kann. Das führt in diesem Fall dazu, dass eine der linearen Polarisationsrichtungen relativ zur anderen um eine halbe Wellenlänge verzögert wird und sich der Gesamtzustand spiegelt. Welche Polarisationsrichtung genau verzögert wird, ist abhängig von der Rotation des Plättchens zur optischen Achse. Nachdem wir uns durch Recherche genauer damit auseinander gesetzt hatten, ist uns schnell klar geworden, dass ein solches Plättchen die Funktion eines Z-Gatters besitzt. Bei Anwendung eines Z-Gatters auf Basiszustände, in unserer Umsetzung also die linearen Polarisationen, bleiben diese nämlich unverändert. Bei der Anwendung auf eine uniforme Superposition, wie bei uns die zirkuläre Polarisation, wird dieser Zustand invertiert. Weil die Operation mit linearen Polarisatoren nicht einfach überprüft werden kann, planten wir zuerst die Funktionsweise der Phasenverschiebungsfolie anderweitig zu überprüfen. Wir erkannten nämlich, dass sich durch Drehen des Plättchens um 45° um die optische Achse, statt der linearen, die zirkulären Polarisationsrichtungen relativ zueinander verschieben, wodurch wir eine Inversion des Basiszustandes beobachten konnten. Dieses Gatter konnten wir später als NOT- oder X-Gatter identifizieren. Wir stellten also ein passendes Bauteil aus der gleichen Folie her, um die Funktion des NOT- und damit des Phasenverschiebungsplättchens zu bestätigen. Anschaulich gestalten wir dies durch Verwendung eines vor das Verzögerungsplättchen gestellten Polarisators und eines gleich ausgerichteten Polarisators dahinter. Sollte das Phasenverschiebungsplättchen nun keine Rotation der linearen Polarisation hervorrufen und somit nicht funktionsfähig sein, dann würde nur eine der linearen Polarisationsrichtungen gefiltert und der Strahl würde auf dem Schirm sichtbar werden. Nach demselben Prinzip würde der gesamte Strahl auch bei zwei gleich ausgerichteten Polarisatoren ohne zwischengeschaltetes Element erkennbar sein. Bei funktionsfähigem Verzögerungsplättchen würde sich im Gegenteil dazu die Eingangspolarisation für den zweiten Polarisator rotieren, das Licht würde nicht durch den nachfolgenden Polarisator propagieren können und auf dem Schirm würde kein Laserlicht erkennbar sein. Beim Durchführen des Tests konnten wir keinen Lichtstrahl am Detektor wahrnehmen und somit unser Plättchen erfolgreich testen und als funktionsfähig identifizieren.

Schließlich konnten wir nach weiteren Überlegungen auch darauf schließen, dass man durch kleine-

¹[Wang Haibo, 2007], *Quantum CNOT gates with orbital angular momentum and polarization of single-photon quantum logic*

²[Abbas, 2020], *Qiskit-Textbook*, 2.3

³[Xinbing Song, 2015], *Bell's measure and implementing quantum Fourier transform with orbital angular momentum of classical light*

⁴[Lopez, 2018], *Experimental realization of quantum CNOT gate*

re Verzögerungslängen andere Gatter erstellen könnte, wie zum Beispiel ein S-Gatter durch ein $\frac{\lambda}{4}$ -Phasenverschiebungsplättchen. Leider lässt sich das T-Gatter für die Polarisierung nur mit einem $\frac{\lambda}{8}$ -Verzögerungsplättchen umsetzen, was kommerziell nicht verfügbar ist und ähnlich wie bei den Hologrammen, nur durch eine Spezialanfertigung erhalten werden kann. Für unsere Beispiyalgorithmen für Zweiqubitsysteme reicht glücklicherweise auch eine Annäherung über das Set $\{\text{CNOT}, H, Z\}$ aus, weshalb wir uns auch bei der experimentellen Umsetzung auf dieses Set beziehen konnten. Wir konnten mit unseren Materialien jedoch zusätzlich ein X- und ein S-Gatter realisieren, sowie das bereits erwähnte Z-Gatter.

Das Hadamard-Gatter stellte sich jedoch als eine größere Herausforderung heraus, aufgrund der unintuitiven Rotationsachse des Gatters. Wir setzten uns hierzu zunächst mit einer Umsetzungsmöglichkeit auseinander, die beinhaltet, die vertikal lineare Polarisierung um 225° und die horizontal lineare Polarisierung um 45° zu rotieren, was wir zuvor mit unserem Lehrer errechnet hatten. Dazu planten wir in dem Grundaufbau eines Mach-Zehnder-Interferometers die Aufteilung des Eingangszustandes in die Basiszustände mit einem polarisierenden Strahlteiler durchzuführen. Anschließend wollten wir die Rotation der einzelnen Bestandteile durch entsprechende Phasenverschiebungsplättchen erreichen, um die Rekombination dann durch einen nicht polarisierenden Strahlteiler zu erhalten. Für diese Umsetzung fehlte uns vor allem der nicht polarisierende Strahlteiler, jedoch war uns auch hier klar, dass wir bei der Rekombination die Hälfte der Intensität des Lasers verlieren würden und das Ganze auch schlecht auf Einzelphotonen zu übertragen wäre. Wir setzten uns schließlich mit dem genauen Zusammenhang der Phasenverschiebungsplättchen mit der Einheitskugel auseinander, um die anderen Gatter besser erklären zu können. Hierbei fiel uns auf, dass wir die Funktion der Hadamard-Abbildung mit einem um $22,5^\circ$ zur optischen Achse gedrehten $\frac{\lambda}{2}$ -Phasenverschiebungsplättchen umsetzen könnten. Des Weiteren fanden wir durch genaue Untersuchungen heraus, dass man durch die Gatterfolge $H_{q_0}, Z_{q_0}, H_{q_0}$ das Gatter X_{q_0} beschreibt, also eine Inversion der Basiszustände erhält. Dieses Konzept machten wir uns zu Nutze, da man diese Inversion, wie bereits im vorherigen Experiment, leicht mit Polarisatoren bestätigen kann. Außerdem konnten wir so beide essentiellen Gatter zusammen nutzen und auf die Funktionsweise unseres Z-Gatters bestätigen. Nach Durchführungen dieses Experiments konnten wir nur einen sehr schwachen Lichtpunkt erkennen, welcher auf die summierte Ungenauigkeit der Phasenverschiebungsplättchen zurückzuführen ist. Diese kann zum Beispiel dadurch entstehen, dass wir beim Aufkleben der Phasenverschiebungsfolie für ein Hadamard Gatter den $22,5^\circ$ -Winkel nicht immer hundertprozentig genau einhalten konnten, aber auch durch kleine Mängel der Materialien selbst.

Nachdem wir die Experimente nun erfolgreich durchgeführt hatten, machten wir uns daran, ein achtseitiges Arbeitsheft zu erstellen, um Leuten, die sonst nichts mit dem Thema zu tun haben, die Funktionsweise von Polarisatoren, Phasenverschiebungsplättchen und den Zusammenhang mit Qubits und Gattern näherzubringen. Dazu entwickelten wir ein neues Modell zur Darstellung von Gatterfunktionen als Alternative zur Einheitskugel, um den Zusammenhang zur Polarisierung zu verdeutlichen und erstellten Abbildungen und Aufgaben mit Lösungen, in denen wir den Lernenden dazu bringen eigenständig Hypothesen aufzustellen und anschließend selber experimentell mit unseren Materialien zu bestätigen, die wir zu diesem Zeitpunkt möglichst günstig, handlich und einfach gestaltet hatten. Dieses Arbeitsheft wurde bereits mit jüngeren Mitgliedern unserer Jugend-forscht-AG, sowie in Teilen mit einigen interessierten Eltern und Schülern in schulinternen Präsentationen, erfolgreich angewendet.

Des Weiteren haben wir eine experimentelle Umsetzung des später noch erklärten Deutsch-Josza-Algorithmus geplant. Hierbei wollen wir die Polarisierung P als Qubit $|q_0\rangle$ im Zustand $|0\rangle$ und das OAM als Qubit $|q_1\rangle$ im Zustand $|1\rangle$ initialisieren. Daher würden wir das vom Laserstrahl ausgehende Licht zu Beginn durch ein $\frac{\lambda}{2}$ -Phasenverschiebungsplättchen als P-Hadamard-Gatter und danach durch das recherchierte OAM-Hadamard-Gatter propagieren lassen. Anschließend wollen wir ein durch die Polarisierung gesteuertes CX-Gatter einsetzen, welches in einem der beiden Arme das OAM durch die Verwendung eines Hologramms invertiert. Zum Schluss planen wir erneut ein $\frac{\lambda}{2}$ -Phasenverschiebungsplättchen als P-Hadamard-Gatter zu verwenden und das Qubit der Polarisierung via Polarisator auszulesen.

4.3 Farbmultiplexing

Eine brillante Idee, die uns während des Baus unserer Gatter gekommen ist, die wir aber für lange Zeit nicht experimentell bestätigen konnten, ist das Konzept des Multiplexings. Damit wollen wir die Parallelität eines lichtbasierten Computers erhöhen, indem man Lasern oder Photonen verschiedener Wellenlängen, also Farben, überlagert. So kann die Bandbreite von Daten, die ein solcher Computer gleichzeitig verarbeiten kann, drastisch vervielfacht werden. Inspiriert von Glasfasernetzen wollten wir diese Idee auf unseren Quantencomputer anwenden, was theoretisch natürlich funktioniert, weil wir in unserem Computer keine wellenlängenabhängigen oder wellenlängenverändernden Operationen durchführen. Dennoch mussten wir natürlich die leicht begrenzte optische Bandbreite unserer Materialien, wie Beamsplitter und Phasenverschiebungsplättchen, beachten. Gleichzeitig wissen wir, dass Licht verschiedener Wellenlängen sich nicht durch Überlagerung beeinflusst. Selbstverständlich wollten wir das ganze auch experimentell bestätigen. Dazu haben wir zwei verschiedenfarbige Laser in unserem CNOT-Gatter-Aufbau überlagert und die Ergebnisse von verschiedenen Zuständen überprüft und bestätigt. Zunächst haben wir versucht die Laser mit Hilfe einiger Linsen dauerhaft zu überlagern, was jedoch einen kaum praktikablen Justageaufwand erforderte. Deshalb entschlossen wir uns schließlich dazu, die Laser durch Kreuzen der Strahlen an verschiedenen, bestimmten Stellen im Versuchsaufbau zu überlagern. Wir haben damit insgesamt 16 verschiedene klar auslesbare Operationen getestet. Damit haben wir alle möglichen Kombinationen an Basiszuständen, die parallel durch unseren Versuchsaufbau verändert werden können, ausprobiert und die vollen Möglichkeiten unseres damaligen CNOT-Aufbaus ausgeschöpft. Die Ergebnisse haben wir anschließend photographiert und dokumentiert, konnten sie jedoch aus Platzgründen nicht in die Arbeit integrieren. Wir haben außerdem auch phasenbasiertes Multiplexing in Betracht gezogen. Jedoch haben wir uns vor allem auf Farbmultiplexing fokussiert, weil wir dies mit unseren Materialien einfacher und anschaulicher umsetzen und testen konnten. Wir ziehen zurzeit außerdem in Betracht, die Nutzung von wellenlängenbasiertem Multiplexing in optischen Computern zu patentieren und somit einen Vorteil im Wettbewerb beim Bau von Quantencomputern zu erhalten.

4.4 Grover-Algorithmus

Bei der Recherche über die Grundlagen, wie man durch das Zusammenschalten verschiedener Gatter Algorithmen und Rechenoperationen durchführen kann, sind wir im mittlerweile veralteten "Qiskit-Textbook" auf eine mögliche Gatterfolge zur Umsetzung des Grover-Algorithmus mit zwei Qubits gestoßen. Der Grover-Algorithmus ist ein Quanten-Suchalgorithmus, der beispielsweise aus einer Liste an möglichen Lösungen die richtige Lösung bzw. richtigen Lösungen für eine gegebene Funktion findet. Die genannte Umsetzung enthielt jedoch einige Gatter, die in unserem ersten universellen Set nicht enthalten waren, wie zum Beispiel das Z- und vor allem das Controlled-Z-Gatter (CZ-Gatter). Das Z-Gatter kann einfach als Folge von vier T-Gattern dargestellt werden, was uns schnell klar war, weil beide zur übergeordneten Kategorie der P-Gatter gehören. Da wir aber nur das Z-Gatter praktisch umsetzen konnten und unser universelles Set schließlich angepasst haben, sind wir zu der Entscheidung gekommen auch in der mathematischen und programmtechnischen Umsetzung das Z-Gatter anstatt des T-Gatters zu verwenden. Somit hatten wir mit dem Ersetzen des Z-Gatters keine großen Probleme. Das CZ-Gatter auf der anderen Seite mussten wir durch Gatter aus unserem universellen Set ersetzen. Dies stellte sich als etwas komplizierter heraus, da wir, obwohl wir einen Beweis für unser universelles Set gefunden hatten, noch nicht wussten, wie man es nun anwendet, um andere Gatter zu ersetzen. Wir haben uns dafür die Einheitskugel genauer angeschaut und sind schon früh auf die Idee gekommen, dass man die Rotation eines X-Gatters von $|0\rangle$ nach $|1\rangle$ auch durch eine Kombination vom Hadamard- und Z-Gattern in der Form H, Z, H durchführen kann. Dass diese Form des Ersetzens nicht nur für diese eine Operation gilt, konnten wir zunächst durch Ausprobieren in Experimenten und Simulationen, und später auch durch eine mathematische Berechnung, bestätigen¹.

¹siehe Gleichung 26

Über diese Erkenntnis sind wir darauf gekommen, dass wir auch ein Z-Gatter mit der Gatterfolge H, X, H darstellen können und dementsprechend ein CZ-Gatter der Form CZ_{q_0, q_1} als Gatterfolge $H_{q_1}, CX_{q_0, q_1}, H_{q_1}$. Somit machten wir uns daran die Grundprinzipien der Matrix- und Vektorrechnung zu lernen, da wir zu diesem Zeitpunkt das Thema lineare Algebra, also Vektorrechnung, noch nicht in der Schule gelernt hatten. Wir beschäftigten uns mit dem Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Matrix-Vektor-Produkt, Matrix-Matrix-Produkt, Tensor-Produkt und Kronecker-Produkt, um die folgende Beispielrechnung für den Grover-Algorithmus mit zwei Qubits aufstellen zu können. Dabei nutzen wir die Darstellung der Qubits in Zustandsvektoren, da die Berechnungen so mithilfe der bereits erklärten Abbildungen einfach nachvollziehbar und überprüfbar werden. Außerdem schien eine Vektorschreibweise anschaulicher, als eine Schreibweise in Linearkombinationen. Aus ähnlichen Gründen haben wir uns für eine Variante mit einem System aus zwei Qubits entschieden. Denn die Rechnung wird so übersichtlicher und nachvollziehbarer, ohne ihren Veranschaulichungscharakter zu verlieren. Wir haben also eine vier Elemente lange Liste mit den möglichen Lösungen $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ und $|11\rangle$. Da wir Qiskit als Simulationsprogramm zum Überprüfen der Berechnungen nutzen, gehen wir auch von dessen Konventionen aus, was die Initialisierung der Qubits im Zustand $|0\rangle$ betrifft, sowie auch die Nummerierung der Qubits von 0 aufwärts¹. Zur Initialisierung fassen wir also zwei Qubits im Zustand $|0\rangle$ mithilfe des Kronecker-Produktes zu einem vierdimensionalen Vektor zusammen². Anschließend wenden wir eine Hadamard-Abbildung auf jedes Qubit an, indem wir den Zustand mit der, bereits durch das Tensor-Produkt berechneten, Abbildung für die Anwedung von einem Hadamard Gatter auf beide Qubits multiplizieren³:

$$|q_0\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8) \quad |q_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$|q_0 q_1\rangle = |q_0\rangle \otimes |q_1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$H_{q_0, q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Jetzt befindet sich der Gesamtzustand, also die gesamte Liste, in einer uniformen Superposition. Im nächsten Schritt des Grover-Algorithmus brauchen wir ein Oracle, was den Zustand markiert, der vom Algorithmus gesucht werden soll. Für ein Oracle, welches aus einer klassischen Lösungsüberprüfung hergeleitet wurde, würden wir für eine Lösungsliste aus zwei Qubits zwei zusätzliche Arbeitsqubits und ein Kontrollqubit benötigen⁴. Daher nutzen wir ein simplifiziertes Oracle, bei welchem wir die Lösung bereits kennen. Für unser Beispiel haben wir uns für die Lösung $|11\rangle$ entschieden. Dementsprechend brauchen wir eine Abbildung, welche den Koeffizienten des vierten Basiszustandes $|11\rangle$ invertiert, was durch die eben

¹[Abbas, 2020], *Qiskit-Textbook*, 1.2.3

²siehe Gleichung 9-10

³siehe Gleichung 11

⁴[Abbas, 2020], *Qiskit-Textbook*, 3.8.5

genannte CZ-Abbildung realisiert werden kann¹:

$$CZ_{q_0, q_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Wie bereits erklärt, müssen wir, um unserem universellen Set treu zu bleiben, die CZ-Abbildung durch die Gatterfolge $H_{q_1} CX_{q_0, q_1} H_{q_1}$ ersetzen, deren Äquivalenz wir mit folgender Rechnung belegen konnten²:

$$\begin{aligned} H_{q_1} CX_{q_0, q_1} H_{q_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = CZ_{q_0, q_1} \end{aligned} \quad (13)$$

Wenden wir diese Abbildungen also in der besagten Reihenfolge auf unsere uniforme Superposition an, erhalten wir, wie erwartet, die Superposition mit dem invertierten Koeffizienten beim vierten Basiszustand, welcher unsere markierte Lösung repräsentiert³:

$$H_{q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$CX_{q_0, q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$H_{q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Bereits nach einer einmaligen Anwendung des Oracles sehen wir, dass die Lösung in unserem Quantenzustand bereits sichtbar ist, weil nur die Lösung $|11\rangle$ durch ein $-$ markiert ist. Diese unglaubliche Geschwindigkeit wird dadurch möglich, dass alle möglichen Lösungen als Superposition praktisch gleichzeitig getestet werden. Sie werden so nämlich in nur einem Durchlauf alle gleichzeitig einer Lösungsüberprüfung bzw. dem Oracle unterzogen. Das Problem ist nun, dass die Messwahrscheinlichkeit durch eine Inversion der Koeffizienten von den entsprechenden Basiszuständen, nicht geändert wurde. Diese wird durch das

¹siehe Gleichung 12

²siehe Gleichung 13

³siehe Gleichung 14-16

Betragsquadrat berechnet¹, sodass das Vorzeichen keinen Einfluss auf das Messergebnis hat. Deshalb vergrößern wir im letzten Schritt, dem Diffusion Operator, die Messwahrscheinlichkeit der markierten Lösung. Die für diesen Schritt benötigte Folge an Abbildungen, von der wir anfangs ausgegangen sind, ist die Gatterfolge $H_{q_0,q_1}, Z_{q_0,q_1} CZ_{q_0,q_1}, H_{q_0,q_1}$. Später haben wir jedoch versucht diese Gatterfolge aus der Theorie des Grover-Algorithmuses herzuleiten. Theoretisch lässt sich diese Abbildungsfolge nämlich über eine nötige Spiegelung am Mittelwert herleiten, welche in unserem Fall auch als Spiegelung des Zustandsvektors an der Achse $|++\rangle$ betrachtet werden kann². Um eine derartige Spiegelung zu erhalten, müssen wir eine Inversion aller Zustände durchführen, die zu $|++\rangle$ orthogonal sind. Um das Erstellen einer solchen Abbildung zu vereinfachen, können wir zunächst den Zustand durch die Anwendung einer Hadamard-Abbildung auf beide Qubits von $|++\rangle$ auf $|00\rangle$ rotieren, da eine Spiegelung der Koeffizienten aller Basiszustände orthogonal zu $|00\rangle$ einfacher zu realisieren ist. Wir nehmen eine vierdimensionale Einheitsmatrix und invertieren die Einsen, die dafür zuständig sind, die Koeffizienten der jeweiligen Basiszustände, die nicht $|00\rangle$ sind zu verändern und erhalten somit folgende Abbildung³:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Diese können wir dann dementsprechend auch aus einer Kombination von Z-Abbildungen auf beide Qubits und der CZ-Abbildung darstellen. Wie bereits gezeigt, können wir diese auch durch Abbildungen aus unserem Set ersetzen⁴:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} &= Z_{q_0,q_1} CZ_{q_0,q_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = Z_{q_0,q_1} H_{q_1} CX_{q_0,q_1} H_{q_1} \quad (18) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wenn wir dann erneut eine Hadamard-Abbildung anwenden, rotieren wir prinzipiell den Zustand $|00\rangle$ wieder auf $|++\rangle$, was praktisch darin resultiert, dass wir die Spiegelung an der $|++\rangle$ -Achse und nicht an der $|00\rangle$ -Achse durchgeführt haben. Wir können jetzt also mit der Abfolge $H_{q_0,q_1} Z_{q_0,q_1} H_{q_1} CX_{q_0,q_1} H_{q_1} H_{q_0,q_1}$ den Diffusion Operator über unser universelles Set beschreiben. Dabei ist auffällig, dass bei den letzten beiden Operationen eine Hadamard-Abbildung auf Qubit $|q_1\rangle$ zweimal hintereinander angewendet wird. Uns ist jedoch aufgefallen, dass eine doppelte Anwendung einer Hadamard-Abbildung keinen Einfluss auf den Zustand hat. Wie wir später gelernt haben, gehört die Hadamard-Abbildung zur Sorte der selbstinversen Matrizen. Deshalb konnten wir den Diffusion Operator auf $H_{q_0,q_1} Z_{q_0,q_1} H_{q_1} CX_{q_0,q_1} H_{q_0,q_1}$ kürzen. Zusätzlich fällt bei Anwendung dieses Diffusion Operators bei diesen Beispielqubits auf, dass die Anwendung der Hadamard-Abbildungen am Anfang keinen Einfluss auf den Zustand haben. Diese Operationen sind jedoch für andere Oracles wichtig, weshalb wir sie nicht kürzen, um den Diffusion Operator universell zu halten. Dieser ist nämlich nicht problemabhängig, sondern hängt einzig und allein

¹[Ackermann, 2017], *Fokus Physik SII*

²[Abbas, 2020], *Qiskit-Textbook*, 3.8.2

³siehe Gleichung 17

⁴siehe Gleichung 18

von der Anzahl der Qubits im System ab. Wenden wir diese Abfolge an Gattern auf unsere Beispielqubits an, erhalten wir bereits nach einem Durchlauf des Algorithmus die richtige Lösung $|11\rangle$ als Zustandsvektor¹:

$$H_{q_0, q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$Z_{q_0, q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$H_{q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$CX_{q_0, q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$H_{q_0} \cdot |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |11\rangle \quad (23)$$

Bei größeren Qubitsystemen erhöht sich auch beim Grover-Algorithmus die Anzahl der nötigen Durchläufe, da der zweite und dritte Schritt einige Wiederholungen benötigen, um die Lösung sicher auslesen zu können². Dabei arbeitet der Algorithmus allerdings weiterhin wesentlich schneller, als ein klassischer Computer, da er statt $\frac{N}{2}$ nur ungefähr \sqrt{N} Durchläufe benötigt, wobei N die Länge der Liste darstellt. Dies ist bekannt als quadratische Verschnellerung und spielt vor allem bei größeren Listen eine Rolle.

4.5 Deutsch-Jozsa-Algorithmus

Als wir auf der Recherche nach neuen Erkenntnissen und zur Präsentation unserer bisherigen Ergebnisse 2023 auf der SAMOP Frühjahrstagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (DPG) waren, hatten wir die Möglichkeit mit vielen Experten über die große Wissenschaft der Quantencomputer zu sprechen. Hierbei wurde vielfach vom Deutsch-Jozsa-Algorithmus als erster Beweis und somit Startpunkt der sogenannten "Quantum Supremacy" berichtet. Bei weiterer Recherche konnten wir dies belegen³. Daher entschieden wir uns auch diesen auf dieselbe Art und Weise wie den Grover-Algorithmus zu analysieren. Grundlegend dient der Deutsch-Jozsa-Algorithmus dazu, den Typ einer booleschen Funktion zu überprüfen und auszugeben, ob diese konstant oder ausgeglichen ist. Die Bezeichnung konstant beschreibt eine Funktion $f(x)$, welche für jeden Wert x denselben Funktionswert hat. Im Gegensatz hierzu weist eine ausgeglichene Funktion für die eine Hälfte aller x -Werte den Funktionswert 0 oder 1 und für die andere Hälfte den Anderen auf. Ein klassischer Computer muss zur Lösung dieses Problems jeden möglichen

¹siehe Gleichung 19-23

²[Abbas, 2020], *Qiskit-Textbook*, 3.8.1

³[Deutsch, 1992], *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*

Funktionswert berechnen, bis er entweder zwei unterschiedliche Werte oder mehr als die Hälfte aller möglichen Fälle mit demselben Ergebnis berechnet hat. Der Vorteil, welcher bei der Berechnung des Deutsch-Josza-Algorithmus über einen Quantencomputer entsteht, ist, dass ein Quantencomputer durch die Verwendung der Superposition alle Funktionswerte gleichzeitig auf ihren Wert überprüfen kann und somit deutlich weniger Rechenoperationen durchführen muss. Zum Schluss gibt dieser dann eine 0 für eine konstante und eine 1 für eine ausgeglichene Funktion aus. Um nun mit der Berechnung beginnen zu können, haben wir die Zusammensetzung der Gatter, welche den Algorithmus bilden, auf der DPG Tagung vom Optikunternehmen "ThorLabs" in Erfahrung gebracht. Die Berechnung des kleinstmöglichen Beispiels des Deutsch-Josza-Algorithmus bezeichnet man als den Deutsch-Algorithmus. Dieser basiert auf einem System, bestehend aus zwei Qubits. Hierfür kann man kein System mit ausschließlich einem Qubit verwenden, da ein Qubit als Eingabewert fungiert und das zweite die Berechnung katalysiert. Nach den Konventionen Quiskits, dem Simulationsprogramm unserer Berechnungen, starten wir mit der Initialisierung beider Qubits im Zustand $|0\rangle$ ¹.

$$|q_0\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$|q_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Als Nächstes wenden wir ein X-Gatter auf das Qubit $|q_1\rangle$ an, um es in den vom Deutsch-Algorithmus vorausgesetzten Zustand $|1\rangle$ zu versetzen: Aufgrund dessen, dass das X-Gatter nicht in unserem universellen Set enthalten ist, ersetzen wir es durch die bereits im experimentellen Teil bestätigte äquivalente Kombination H, Z, H unseres Sets²:

$$X_{q_1} \cdot |q_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = H_{q_1} Z_{q_1} H_{q_1} \cdot |q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Nun beginnen wir, wie zuvor bei der mathematischen Umsetzung des Grover-Algorithmus, wieder mit dem Zusammenführen der Qubits über das Kronecker-Produkt³:

$$|q_1 q_0\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Anschließend versetzen wir jedes der Qubits durch Anwendung eines Hadamard-Gatters in eine Superposition⁴:

$$H_{q_0, q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Anschließend wird im Deutsch-Josza-Algorithmus ein Oracle auf beide Qubits angewendet. Dieses nutzt dann die Zustände der Qubits $|q_0\rangle$, $|q_1\rangle$ als Eingabewerte $|x\rangle$ und $|y\rangle$. Anschließend führt es immer entweder zu einer Inversion oder dem Erhalt des Ausgangswertes vom Qubit $|q_1\rangle$. Dieses Prinzip kennen wir bereits aus der Funktion des CX-Gatters und entschieden uns aus diesem Grund auch für die Verwendung dieses

¹siehe Gleichung 24 & 25

²siehe Gleichung 26

³siehe Gleichung 27

⁴siehe Gleichung 28

als Implementation unserer Oracle-Funktion. Hierbei verwenden wir das erste Qubit $|q_0\rangle$ als Kontrollqubit bei der Anwendung eines C-NOT-Gatters, sodass sich dessen Wert während des Durchlaufens nicht verändert. Des Weiteren wissen wir schon aus unseren theoretischen und experimentellen Ergebnissen, dass bei der Durchführung des CX-Gatters das kontrollierte Qubit in zwei der vier und somit Hälfte aller möglichen Eingaben an Basiszuständen invertiert wird. Somit haben wir auch schon eine Erwartung an die finale Ausgabe des Algorithmus. Zuerst wenden wir nun aber unser gewähltes Oracle an¹:

$$CX_{q_0, q_1} \cdot |q_0 q_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Zum Schluss wenden wir nun noch ein Hadamard-Gatter auf das auszulesende Qubit $|q_0\rangle$ an²:

$$H_{q_0} \cdot |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |1-\rangle \quad (30)$$

Obwohl unser Oracle, bestehend aus einem CX-Gatter, eigentlich nur den Zustand des zweiten Qubits verändert haben sollte, wird auch der des ersten Qubits basierend auf dem Konzept des "phase kickbacks" angepasst. Dies macht sich der Algorithmus zunutze, weshalb das Ergebnis an diesem Qubit abzulesen ist. Das Auslesen des Qubits $|q_0\rangle$ führen wir durch die Umkehrung des Kronecker-Produkts durch und erhalten $|1\rangle$, was uns eine ausgeglichene identifizieren lässt. Dies bestätigt ebenfalls unsere Erwartungshaltung an unser gewähltes Oracle.

4.6 Simulation

Zur Überprüfung der mathematischen Ergebnisse und vor allem zur weiteren Veranschaulichung werden die zuvor berechneten Beispiele des Grover- und Deutsch-Josza-Algorithmus nun mithilfe von Qiskit simuliert. Um die für die Programmierung benötigten Befehle zu lernen, nutzen wir Qiskits Textbook und Dokumentation. In dem geschriebenen Programmen geben wir dann nach jedem der Simulationsschritte den Aufbau der Schaltung, den Zustandsvektor, sowie eine Visualisierung der einzelnen Qubits auf einer Einheitskugel aus. Zunächst wird eine Quantenschaltung über den Befehl `'QuantumCircuit'`, bestehend aus zwei Qubits, welche von Qiskit automatisch im Zustand $|0\rangle$ initialisiert werden, erstellt. Im Fall des Grover-Algorithmus werden anschließend alle Qubits durch die universelle `'initialize'` Funktion initialisiert, indem ein Hadamard-Gatter auf beide angewendet wird¹. Auch Oracle² und Diffusion Operator³ werden exakt, wie in der Berechnung, umgesetzt. Um zu zeigen, dass unser Diffusion Operator auch für andere Zwei-Qubit-Oracles funktioniert, haben wir uns ein weiteres Oracle $H_{q_1} Z_{q_1} CX_{q_0, q_1} Z_{q_1} H_{q_1}$ selber überlegt, welches den Zustand $|01\rangle$ markiert. Hierzu haben wir den Eingabe- als auch Zielzustand, welchen das Oracle ausgeben muss betrachtet und uns mathematisch überlegt, welche Abbildung eine solche Transformation vollziehen kann, um diese dann mit Abbildungen unseres universellen Sets zu ersetzen. Dann haben wir den Algorithmus mit diesem Oracle ausgeführt, ohne den Diffusion Operator zu verändern und haben dennoch in jedem Fall das richtige Ergebnis erhalten. Dies zeigt auch, warum wir in den Berechnungen zu Beginn des Diffusion Operators eine Hadamard-Abbildung angewendet haben, die keine Auswirkung auf den Vektor hatte und diese nicht einfach gekürzt haben. Im Fall des Deutsch-Josza-Algorithmus

¹siehe Gleichung 29

²siehe Gleichung 30

folgt auf die Erstellung die Anwendung der X-Operation auf das erste Qubit. Diese wird, wie in den vorhergegangenen Rechnungen, durch die aus unserem universellen Set stammende Gatterfolge $H_{q_1} Z_{q_1} H_{q_1}$ ersetzt. Wie im Grover Algorithmus werden nun alle Qubits durch die Anwendung eines Hadamard-Gatters mit der 'initialize' Funktion in eine uniforme Superposition versetzt. Hierbei ist relevant, dass das Kontrollqubit aufgrund der vorherigen Initialisierung im Zustand $|1\rangle$ nun in den Zustand $|-\rangle$ versetzt wird. Daraufhin wird das C-NOT-Gatter angewendet, in welchem das Qubit $|q_0\rangle$ das Kontrollqubit darstellt. Bevor anschließend das Qubit $|q_0\rangle$ gemessen wird, folgt eine weitere Anwendung eines Hadamard Gatters auf dieses. Zum Schluss wird in beiden Algorithmen das Ergebnis ausgelesen und sowohl als Diagramm 'plot_histogram', als auch als Zahl ausgegeben, wobei der Algorithmus mit dem 'ibmq_qasm_simulator' 1024 Mal simuliert wurde. Dann wird der Algorithmus, zumindest beim Laufen online im IBM Quantum Lab, auf einem von IBMs Quantencomputern ausgeführt und die Ergebnisse werden wieder als Diagramm 'plot_histogram' ausgegeben. Die Zustandsvektoren stimmen mit unseren Berechnungen überein und auch das Ergebnis wird in der Simulation immer korrekt ausgelesen, wobei es bei der Ausführung auf einem echten Quantencomputer natürlich Ungenauigkeiten und Fehler gibt⁷. Da wir unsere Programmierung über das IBM Quantum Lab vorgenommen haben, worüber Ihnen jedoch kein Zugriff auf funktionsfähige Programme gegeben werden kann, haben wir unsere Programme für Python angepasst und Ihnen über ein GitHub Repository zugänglich gemacht. Sie können es über den untenstehenden Link öffnen und betrachten oder in Python nach dem Herunterladen der entsprechenden Bibliotheken selber laufen lassen. <https://github.com/Feehl/Qiskit-QuantumComputingHZCX>

5 Ergebnisse

Wir haben durch die Analyse eines minimalistischen, aber dennoch universellen Sets den Grundstein für Berechnungen von Quantencomputern erklärt und anschaulich dargelegt. Nach einer theoretischen Erläuterung der Grundlagen haben wir auch eine praxisbezogene, physikalische Umsetzung unseres universellen Sets aus dem CNOT-, Hadamard- und T-Gatter im Rahmen unserer Möglichkeiten experimentell nachgewiesen und analysiert. Zusätzlich war es uns möglich, das X- sowie S-Gate experimentell zu realisieren. Besonders hervorzuheben ist hierbei nicht nur der geringe Materialverbrauch aufgrund der Wiederverwendbarkeit der $\frac{\lambda}{2}$ -Phasenverschiebungsplättchen, sondern zusätzlich die enorme Umweltfreundlichkeit der Gatter durch ihre ausschließliche Verwendung passiver Bauelemente. Dazu haben wir bereits eine experimentelle Umsetzung des Deutsch-Jozsa-Algorithmus geplant und arbeiten derzeit an dessen Umsetzung. Des Weiteren haben wir in unserer Arbeit ein Arbeitsheft entwickelt, welches sowohl die theoretischen als auch experimentellen Grundlagen eines Quantencomputers, sowie unsere demonstrativen Experimente und Erklärungen umfassend vermittelt. Auch beinhaltet es eine Reihe an Aufgaben, welche das Verständnis fördern und die Motivation steigern. In einer weiteren Vertiefung unseres Projektes haben wir uns sogar mit der beispielhaften Umsetzung komplizierter Algorithmen beschäftigt, ohne dabei die Beschränkung unseres universellen Sets aus den Augen zu verlieren. So haben wir den Grover-Algorithmus, sowie den Deutsch-Jozsa-Algorithmus nicht nur prinzipiell verstanden, sondern auch mathematisch auf zwei Qubits angewendet und berechnet. Außerdem konnten wir den Grover-Algorithmus für mehrere Beispiel-Oracles simulieren und auch mit unserer Simulation des Deutsch-Jozsa-Algorithmus unsere mathematischen Ergebnisse bestätigen. Hierfür wanden wir mehrfach unser universelles Set zur Substitution nicht enthaltener Gatter an. Es war uns außerdem möglich, die bislang aus anderen Bereichen bekannte Theorie des wellenlängenbasierten Multiplexings auf die im Quantencomputer stattfindende Datenverarbeitung zu übertragen und experimentell zu bestätigen. Insgesamt haben wir somit einen Quantencomputer sowohl auf Hardware- und Softwareebene detailliert und zusammenhängend analysiert und vollständig durchleuchtet als auch innovative Optimierungsmöglichkeiten erkannt und angewendet. An dieser Stelle wollen wir auch noch einmal betonen, dass uns leider nicht genug Seiten zur Verfügung stehen, unsere Experimente über Fotos und Skizzen innerhalb der schriftlichen Arbeit zu belegen. Daher freuen

wir uns umso mehr, Ihnen diese beim Jugend forscht Wettbewerb live und per Ausdrucke genauestens zeigen zu können.

6 Ergebnisdiskussion

Vor allem bei der praktischen Umsetzung der Gatter wurde deutlich, dass die geringe Anzahl an benötigten Materialien eine große Stärke, des gewählten Sets und der gewählten Qubits darstellt, da sie eine Mehrfachnutzung einiger Materialien ermöglicht. Zusätzlich bietet uns diese Technologie besonders im Kontext der weltweiten Klimakrise sowie der zunehmenden Digitalisierung durch Ihre ausschließliche Verwendung passiver Bauelemente eine energiesparende und somit umweltfreundlichere Alternative zu herkömmlichen Rechensystemen. Dies ist im Hinblick auf eine zukünftige Massenproduktion von Quantencomputerchips mit der Nutzung dieser Gatter ein vielversprechendes Ergebnis. Auch eine mögliche und zur kommerziellen Nutzung notwendige Umwandlung der durch Polarisation sowie OAM realisierten Qubits ist möglich und macht eine mögliche Industrialisierung wahrscheinlicher. Der einfache Umbau unserer Versuche auf Einzelphotonen durch das Einsetzen eines Graufilters unterstützt diese Entwicklung. Die hierfür vorausgesetzte Verwendung des OAM als Realisierung eines Qubit ist für uns jedoch bisher aufgrund der benötigten Sonderanfertigung schwierig umzusetzen. Diese Problematik würde einer zukünftigen Massenproduktion dennoch nicht entgegenwirken, da die Hologramme computergeneriert sind und nach dem einmaligen Entwerfen und Hochladen auf die entsprechende Maschine problemlos tausendfach gedruckt werden können. Auch die Anwendung des Multiplexings auf die Datenverarbeitung ist eine große Entdeckung, welche die zukünftige Entwicklung von Quantencomputern fördern und die Entwicklung voranbringen kann. Unsere Berechnungen und Simulationen zeigten zudem, dass auch komplexere Gatter, wie beispielsweise das Controlled-Z-Gatter durch Nutzung einer Kombination an Gattern unseres Sets ersetzbar sind und das Ergebnis in keiner Weise gestört wird. Auch unsere bisherige testweise Verwendung unseres Arbeitsblattes lässt eine zukünftige Anwendung zu Aus- und Fortbildungszwecken neuer Fachkräfte in der aufkommenden Branche des Quantencomputing vielversprechend wirken.

7 Fazit und Ausblick

Zusammenfassend sind wir der Ansicht, dass wir nach über eineinhalb Jahren Forschung unsere finanziellen Möglichkeiten bisher bestmöglich genutzt und so eine fundierte Grundlage für weitere Forschungsaspekte geschaffen haben. So wäre es in weiterführenden Analysen möglich, weitere universelle Sets auf ihre Anwendbarkeit zu überprüfen und Unterschiede in Gatter-Anzahl, Gatter-Komplexität, aber auch daraus resultierenden Materialkosten und Materialmengen zu untersuchen. Des Weiteren könnten weitere Optimierungsansätze gesucht und umgesetzt sowie Pläne für den Aufbau eines Quantencomputerchips entwickelt werden. Auch die Analyse weiterer Quanteneigenschaften des Lichtes auf Anwendung als Qubits würde eine interessante Fortführung der Arbeit darstellen. Hierbei wären, ähnlich wie bei der Überprüfung weiterer Sets beziehungsweise Gatter, Kosten zur Umsetzung, aber auch die Anwendbarkeit der verschiedenen Gatter, relevant zu überprüfen und eine geeignete Fortführung des Projektes. Aktuell arbeiten wir jedoch an der experimentellen Realisierung eines vollständigen Quantenalgorithmus mittels der Polarisation und dem OAM. Auch beschäftigen in diesem Kontext mit einer genaueren Untersuchung der Verwendbarkeit eines Laserstrahls an Stelle der üblichen Einzelphotonen.

Literatur

- [Abbas, 2020] Abbas, Amira, e. a. (2020). *Learn Quantum Computation Using Qiskit*.
- [Ackermann, 2017] Ackermann, Peter, e. a. (2017). *Fokus Physik SII Gesamtband*. Cornelsen Verlag GmbH, Berlin.
- [Arute, 2019] Arute, Frank, e. a. (2019). *Quantum supremacy using a programmable superconducting processor*. *Nature*, Seiten 195–200.
- [Bardeen, 1948] Bardeen, John und Brattain, W. (1948). *The Transistor, A Semi-Conductor Triode*. *Bell System Technical Journal*, 27:230–231.
- [Barenco, 1995] Barenco, Adriano, e. a. (1995). *Elementary Gates for Quantum Computation*. *Physical Review A*, 27:3457–3467.
- [Chuang, 2001] Chuang, I. L. e. a. (2001). *Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*. *Nature*, Seiten 883–887.
- [Cirac, 1995] Cirac, Ignacio und Zoller, P. (1995). *Quantum Computing with Trapped Ions*. *Physical Review Letters*, Seiten 4091–4094.
- [De Ro, 2021] De Ro, N. (2021). *Universal Sets of Gates in Quantum Computing*. ResearchGate.
- [Deutsch, 1985] Deutsch, D. (1985). *Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer*. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Seiten 97–117.
- [Deutsch, 1992] Deutsch, David und Jozsa, R. (1992). *Rapid solution of problems by quantum computation*. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Seiten 553–558.
- [Development Team, 2021] Development Team, Q. (2021). *Circuit Library*.
- [Grover, 1996] Grover, L. (1996). *A fast quantum mechanical algorithm for database search*. *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, Seiten 212–219.
- [Hey, 1999] Hey, T. (1999). *Quantum computing: an introduction*. *Optical and Quantum Electronics*, 31:1–12.
- [Lopez, 2018] Lopez, J. H., e. a. (2018). *Experimental realization of quantum CNOT gate for orbital angular momentum and polarization with linear optical spanners and the rotational frequency shift*. arXiv:1807.06065.
- [Madsen, 2022] Madsen, Lars S., e. a. (2022). *Quantum computational advantage with a programmable photonic processor*. *Nature*, Seiten 210–214.
- [Roy, 2020] Roy, P. K. (2020). *Quantum Logic Gates*. ResearchGate.
- [Shihao Ru, 2021] Shihao Ru, e. a. (2021). *Quantum CNOT gates with orbital angular momentum and polarization of single-photon quantum logic*. *Phys. Rev. A*, 103.
- [Shor, 1997] Shor, P. (1997). *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. *SIAM Journal on Computing*, Seiten 1484–1509.
- [Wang Haibo, 2007] Wang Haibo, K. W. (2007). *Quantum state transfer between two photons with polarization and orbital angular momentum via quantum teleportation technology*. *Journal of the Optical Society of America B*.

- [Williams, 1997] Williams, Michael R. und Campbell-Kelly, M. (1997). *A History of Computing Technology*. Academic Press.
- [Xinbing Song, 2015] Xinbing Song, e. a. (2015). *Bell's measure and implementing quantum Fourier transform with orbital angular momentum of classical light*. *Nature - Scientific Reports*, 5.
- [Zhong, 2020] Zhong, H., e. a. (2020). *Quantum computational advantage using photons*. *Nature Photonics*, Seiten 351–356.

Unterstützungsleistungen

Die Anna und Claus Heinrich Siemsen-Stiftung, hat uns durch ihre großzügige finanzielle Unterstützung den Kauf der benötigten Materialien und so den Großteil unserer Experimente ermöglicht. Der niedersächsische Sponsorenpool, hat uns durch ihre großzügige finanzielle Unterstützung den Kauf der benötigten Materialien und so den Großteil unserer Experimente ermöglicht.

Danksagung

An dieser Stelle möchten wir uns herzlich bei dem niedersächsischen Sponsorenpool sowie der Anna und Claus Heinrich Siemsen-Stiftung bedanken, welche durch ihre großzügige finanzielle Unterstützung dieses Projekt überhaupt erst möglich gemacht hat. Auch danken wir der Sparkasse für ihre Vermittlung zwischen uns und der Stiftung. Des Weiteren wollen wir uns bei unserem Lehrer Herr Dr. Hans-Otto Carmesin für seinen aufschlussreichen Unterricht, sowie seine Unterstützung und seinen hilfreichen Rat bedanken. Wir danken auch Inga von Barga für Ihre Unterstützung bei der zeitlichen Planung sowie für das Korrekturlesen unserer schriftlichen Arbeit.