Hausaufgaben zum 14. Mai 2015

Mathematik für Studierende der Informatik II
(Analysis und Lineare Algebra)

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann
6706472
fwuy089@studium.uni-hamburg.de

21. Mai 2015

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix zu invertieren, ist ebenjene Matrix B gesucht, mit der die gegebene Matrix multipliziert werden muss, um die Einheitsmatrix zu erhalten.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Daraus ergeben sich folgende neun Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
I & 1 = 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + (-1) \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{31} + 1 = a_{11} + a_{21} \\
II & 0 = 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{32} & \Rightarrow a_{32} = a_{12} + a_{22} \\
III & 0 = 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + (-1) \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{33} = a_{13} + a_{23} \\
 & & \\
IV & 0 = 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{21} = -a_{31} \\
V & 1 = 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\
VI & 0 = 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{23} = -a_{33} \\
 & & \\
VII & 0 = 2 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \\
VIII & 0 = 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\
IX & 1 = 2 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} &
\end{array}$$

Durch die offensichtlichen Umformungen und das Einsetzen von Gleichungen ineinander ermitteln wir nun die Werte $(a_{ij})_{i,j \in [1,2,3]}$ als Lösungen dieses Gleichungssystems.

Wir beginnen mit der ersten Spalte :

Einsetzen von IV in I :

$$a_{31} + 1 = a_{11} + (-a_{31})$$

$$\Rightarrow \quad a_{11} = a_{31} + a_{31} + 1 = 2 \cdot a_{31} + 1$$

Einsetzen von a_{11} *und* a_{21} *in VII :*

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot (2 \cdot a_{31} + 1) + 2 \cdot (-a_{31}) + 1 \cdot a_{31} = 4 \cdot a_{31} + 2 - 2 \cdot a_{31} + a_{31} \\ &= 2 + 3 \cdot a_{31} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_{31} = -\frac{2}{3}$$

Einsetzen von a_{31} *in* a_{11} *und* a_{21} *:*

$$a_{21} = -a_{31} = \frac{2}{3}$$

$$a_{11} = 2 \cdot a_{31} + 1 = -\frac{1}{3}$$

Fortfahren mit der zweiten Spalte :

Einsetzen von II in VIII :

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot (a_{12} + a_{22}) \\ &= 3 \cdot a_{12} + 3 \cdot a_{22} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_{12} = -a_{22}$$

Einsetzen von a_{32} *in V :*

$$1 = 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot (a_{22} - a_{22})$$

$$\Rightarrow \quad a_{22} = 1$$

Einsetzen von a_{22} *in* a_{12} *und* a_{32} *:*

$$a_{12} = -a_{22} = -1$$

$$a_{32} = a_{22} - a_{22} = 1 - 1 = 0$$

Fortfahren mit der dritten Spalten :

Einsetzen von VI in III :

$$0 = 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot (-a_{33} + (-1) \cdot a_{33}$$

$$\Rightarrow \quad a_{13} = 2 \cdot a_{33}$$

Einsetzen von a_{13} *und* a_{23} *in IX :*

$$1 = 2 \cdot (2 \cdot a_{33}) + 2 \cdot (-a_{33}) + 1 \cdot a_{33} = 4 \cdot a_{33} - 2 \cdot a_{33} + 1 \cdot a_{33} = 3 \cdot a_{33}$$

$$\Rightarrow \quad a_{33} = \frac{1}{3}$$

Einsetzen von a_{33} *in* a_{13} *und* a_{23} *:*

$$a_{13} = 2 \cdot a_{33} = \frac{2}{3}$$

$$a_{23} = -a_{33} = -\frac{1}{3}$$

Anhand dieser Werte für $(a_{ij})_{i,j\in[1,2,3]}$ stellen wir nun die Matrix B auf:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Matrix handelt es sich um das Inverse der Matrix A aus der Aufgabe.

Probe:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
I & a_{11} = & -\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 1 & = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} & = & 1 \\
II & a_{11} = & -1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & = 1 - 1 & = & 0 \\
III & a_{11} = & \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot(-1) & = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} & = & 0 \\
 & & & & & \\
IV & a_{11} = & -\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 1 & = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & = & 0 \\
V & a_{11} = & -1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & = 0 + 1 & = & 1 \\
VI & a_{11} = & -\frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 & = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} & = & 0 \\
 & & & & & \\
VII & a_{11} = & -\frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 1 & = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} & = & 0 \\
VIII & a_{11} = & -1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0 & = -2\cdot 2 & = & 0 \\
IX & a_{11} = & \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 1 & = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & = & 1
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Probe gemacht.

Aufgabe 2

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei A die Matrix aus Aufgabe 1 ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llllll} I & 1 & 1 & -1 & 1 & \\ II & 0 & 1 & 1 & 2 & \\ III & 2 & 2 & 1 & 3 & (III - 2 \cdot I) \\ & & & & & \\ I & 1 & 1 & -1 & 1 & \\ II & 0 & 1 & 1 & 2 & \\ III & 0 & 0 & 3 & 1 & (:3) \\ & & & & & \\ I & 1 & 1 & -1 & 1 & (I - II) \\ II & 0 & 1 & 1 & 2 & \\ III & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} I & 1 & 0 & -2 & -1 & (I + 2 \cdot II) \\ II & 0 & 1 & 1 & 2 & (II - III) \\ III & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \\ & & & & & \\ I & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \\ II & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & \\ III & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für zwei (2×2)-Matrizen A und B tatsächlich die Formel

$$Det(A)Det(B) = Det(AB)$$

gilt.

Zunächst werden die Determinanten von A und B und dann deren Produkt bestimmt.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ Det(B) &= b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Det(AB) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\ &- a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \end{aligned}$$

Nun wird zunächst das Produkt der Matrizen A und B bestimmt, anschließend die Determinante des Produktes:

$$AB = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Det(AB) = &\ (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \cdot (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ - &\ (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \cdot (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ = &\ a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} \\ + &\ a_{12}b_{21}a_{12}b_{11} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\ - &\ a_{11}b_{12}a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} \\ - &\ a_{12}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{21}b_{22}a_{22}b_{21} \\ = &\ a_{11}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} \\ + &\ a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\ - &\ a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} \\ - &\ a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\ = &\ a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\ - &\ a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $Det(A)Det(B) = Det(AB)$.

Aufgabe 4

Die Folge $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Damit existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}| < \frac{1}{3}$ gilt. Bestimmen Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, das das leistet.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n^2} \ = \ \tfrac{n+1}{n^2} \ = \ \tfrac{1}{3} \\
&n^2 \ = \ 3n + 3 \\
&n^2 - 3n - \tfrac{3}{2}^2 \ = \ 3 + \tfrac{9}{4} \\
&\left(n - \tfrac{3}{2}\right)^2 \ = \ \tfrac{21}{4} \\
&n - \tfrac{3}{2} \ = \ + - \ \tfrac{\sqrt{21}}{2} \\
&n \ = \ \tfrac{3+\sqrt{21}}{2} \\
&n \ \approx \ 3.79
\end{aligned}$$

Da die kleinstmögliche ganze Zahl n gesucht wird, und $3 < 3.79$ und somit herausfällt, sowie alle Zahlen kleiner 3, ergibt sich für n der Minimalwert $n_0 = 4$.
Probe:

$$\begin{aligned}
n = 3: \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \ &= \ \frac{4}{9} > \frac{1}{3} \\
n = 4: \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \ &= \ \frac{5}{16} < \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Es sei $a \in \mathbb{R}$ irgendeine Zahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Man zeige nur unter Benutzung der Definition von Konvergenz, dass die Folge $(a + a_n)_{n\in\mathbb{N}7}$ gegen a konvergiert. (a_n) konvergiert gegen 0, wenn n gegen ∞ geht.

$$a \in \mathbb{R} \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \underset{n\to\infty}{lim} \qquad a_n = 0^+ \vee 0^-$$

$\Rightarrow$ rechnen wir zu jedem Wert a_n eine Zahl a hinzu, konvergiert diese neue Folge $a_n + a$ gegen a, da a_n gegen 0 geht und $0 + a = a$.

$$\underset{n\to\infty}{lim}\, a = a \wedge \underset{n\to\infty}{lim}\, a_n = 0 \Rightarrow \underset{n\to\infty}{lim}\, a + a_n = a$$