Übungsaufgaben zum 23. April 2015

Analysis und Lineare Algebra: Mathematik für Informatiker II

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

22.04.2015

Aufgabe 1

Sei V der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Dabei sind die Summen zweier Funktionen und skalare Vielfache von Funktionen wie in Beispiel 2.4 im Skript definiert. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U = \{f \in V : \forall x \in \mathbb{R}(f(x) = f(-x))\}$$

ein Unterraum von V ist.

$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$Seienf(x), f(-x) \in V.$

Beweis.

$$f(x) = f(-x)$$
$$f(y) = f(-y)$$
$$f(x) + f(y) = f(x + y) = f(-x - y) = f - x) + f(-y)$$
$$f(x) \in V \land \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\lambda f(x) = f(\lambda \cdot x)$$

Wir wissen:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \lambda f(x) = \lambda f(-x)$$
$$\Rightarrow \lambda f(x) \in \mathbb{R}$$

□

Aufgabe 2

Man untersuche, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_c := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = c\}$$

ein Unterraum von$\mathbb{R}^3$ ist.

Für alle, denn für jedes $c \in \mathbb{R}|x_1 = c - 1; x_2 = 0.4; x_3 = 0.6$ und somit auch eine Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = c$, also

$$(c - 1) + 0.4 + 0.6 = c$$

$$c - 1 + 1 = c$$

$$c = c$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = c|c \in \mathbb{R} \wedge x_1' + x_2' + x_3' = c'|c' \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, da\ c_1 + x_2 + x_3 + x_1' + x_2' + x_3' = c + c' \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \wedge \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(x_1 + x_2 + x_3 = \lambda c \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda c$$

Aufgabe 3

Seien U und W Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass

$$U + W = \{u + w : u \in Uw \in W\}$$

ein Unterraum von V ist.

Seien $U, V \in \wedge w, x \in W$.
Sei außerdem $u + w \in U + W$, $u + v \in U$, $w + x \in W$.

$$(u + w) \in U + W \wedge (v + z) \in U + W$$

$$(u + w) + (v + x) = u + w \ + \ v + x = u + v + w + x = (u + v) + (w + x)$$

$$(u + v) \in U \wedge (w + x) \in W$$

$$\lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w$$

$$\lambda u \in U \wedge \lambda w \in W \Rightarrow (\lambda u + \lambda w) \in U + W$$

Aufgabe 4

Sei $K = \mathbb{Z}_3$. Wir betrachten die Vektoren v_1 =(1,1,0,0) und v_2 =(1,0,1,0) in K^4. Bestimmen Sie Lin(v_1, v_2).
Hinweis: Da K^4 in diesem Fall endlich ist, kann der von v_1 und v_2 erzeugte Unterraum explizit angegeben werden.

Lin$(v_1, v_2) := \forall v \in \mathbb{Z}^3 : \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^3$ mit $v = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$
Die Ziffern über den Vektoren mögen für λ_1 und λ_2 stehen, respektive.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccccccccc} \scriptstyle 00 & \scriptstyle 10 & \scriptstyle 01 & \scriptstyle 11 & \scriptstyle 21 & \scriptstyle 12 & \scriptstyle 22 & \scriptstyle 20 & \scriptstyle 02 \\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}; & \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; & \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}; & \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}; & \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}; & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}; & \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}; & \begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}; & \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} \end{array}\right]$$

Lin(v_1, v_2) =

$$\{(0,0,0,0),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(2,1,1,0),(0,2,1,0),$$
$$(0,1,2,0),(1,2,2,0),(2,2,0,0),(2,0,2,0)\}$$

Aufgabe 5

Sei $K = \mathbb{R}$. Wir betrachten die Vektoren $v_1 =$ (2,0,2), $v_2 =$(1,-2,3), $v_3 =$ (0,1,-2) und $v_4 =$ (2,1,1). Sind die Vektoren v_1,...,v_4 linear unabhängig? Erzeugen die Vektoren v_1,...,v_4 den Vektorraum $\mathbb{R}^3$? Sind die Vektoren v_1, v_2 linear unabhängig? Erzeugen die Vektoren v_1, v_2 den Vektorraum $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 0 \\ -\frac{7}{2}2x_3 - \frac{7}{2}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Sind die Vektoren v_1,...,v_4 linear unabhängig?

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0 \qquad \Rightarrow x_1 = x_3 = -x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Sie sind nicht linear unabhängig, da $\lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 0 \lambda_3 = 1 \wedge \lambda_4 = 1$.

Erzeugen die Vektoren v_1...,v_4 den Vektorraum $\mathbb{R}^3$?

Nein, da sie nicht linear unabhängig sind.

Sind die Vektoren v_1, v_2 linear unabhängig?

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ -2x_2 &= 0 \qquad \overset{II.}{\Rightarrow} x_2 = 0 \qquad \overset{I.}{\Rightarrow} x_1 = 0 \qquad \Rightarrow \text{ Ja, sind sie.} \\ 3x_1 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Erzeugen die Vektoren v_1, v_2 den Vektorraum $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= a_1 \\ -2x_2 &= a_2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= a_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \frac{a_1}{2} \\ x_2 &= -\frac{a_2}{2} \\ x_1 + x_2 &= \frac{a_3}{3} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad \text{nein}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ -2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned} \quad \overset{II.}{\Rightarrow} \quad x_2 = -1 \quad \overset{I.}{\Rightarrow} \quad x_1 = 1 \quad \overset{III.}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) &= 3 \\ 3 - 3 &= 3 \\ 0 &= 3 \lightning \end{aligned}$$

Nein, sie erzeugen **nicht** den Vektorraum $\mathbb{R}^3$.