Hausaufgaben zum 1. Juni 2015

Mathematik für Studierende der Informatik II
(Analysis und Lineare Algebra)

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann
6706472
fwuy089@studium.uni-hamburg.de

1. Juni 2015

Aufgabe 1

(a)

Untersuchen Sie die Menge

$$M = \left\{ \frac{n+1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

auf Beschränktheit nach oben und unten und bestimmen Sie gegebenenfalls Supremum und Infimum.

1. Fall: $n = m = 1$

$$\frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

2. Fall: $n \to +\infty; m = 1$

$$\frac{n+1}{1} \to \frac{\infty}{1} \to +\infty$$

3. Fall: $n = 1, m \to +\infty$

$$\frac{1+1}{m} = \frac{2}{m} \to 0$$

4. Fall: $n = m \to +\infty$

$$\frac{n+1}{m} \to \infty$$

Somit ergibt sich, dass die Folge nach unten durch 0 beschränkt ist, wohingegen sie nach oben unbeschränkt ist.
Supremum: $+\infty$
Infimum: 0

(b)

Untersuchen Sie die Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n}$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Da $\frac{1}{3}$ konstant ist, ist die Folge allein von $\frac{1}{2n}$ abhängig.

$$\begin{cases} n = 1 : \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2} \\ n \to +\infty : \dfrac{1}{2n} \to 0 \end{cases}$$

Somit sind die Beschränkungen der Folge

$$\begin{cases} n = 1 : \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6} \\ n \to +\infty : \dfrac{1}{2n} \to \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

und der Grenzwert ist dementsprechend $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge (a_n) mit

$$a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Es ist offensichtlich, dass $\frac{1}{n}$ gegen 0 geht, je größer *n* wird. Somit nähert sich der Ausdruck in der Klammer 2^+ an. Da $2^+ > 2$ gilt $a_n > 2^n$. 2^n ist nach oben nicht beschränkt, somit geht auch a_n gegen $+\infty^-$ als Grenzwert. Als Infimum wird 3 festgestellt, da $n \geq 1 \Rightarrow (2 + \frac{1}{n})^n = (2 + \frac{1}{1})^1 = (2 + 1)^1 = 3^1 = 3$. Die Folge ist streng monoton steigend, begründet ebenfalls durch $2^+ > 2 \Rightarrow \forall n | a_n > 2^n$ und dadurch, dass 2^n streng monoton steigend ist.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folgen (a_n) und (b_n) mit

$$a_n = \frac{3n^2 - 3n}{2n^2 - 1} \text{ und } b_n = \frac{3n^2 - 3n}{2n^3 - 1}$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Folge a_n:

Begrenzung: Nach Satz 4.27.(4) im Skript ist der Grenzwert einer Folge, die in Form eines Quotienten vorliegt, eben der Quotient der Grenzwert der einzelnen Folgen im Zähler und im Nenner.

$$\lim_{n \to +\infty} (3n^2 - 3n) = n(3n - 3)$$
$$\lim_{n \to +\infty} (2n^2 - 1) = n\left(2n - \frac{1}{n}\right)$$

Hier kürzt sich n direkt raus, sodass sich als Folgen $(3n - 3)$ und $\left(2n - \frac{1}{n}\right)$ ergeben.
Da für $n \to +\infty$ der Ausdruck $\frac{1}{n}$ gegen 0 geht, ergibt sich für den Grenzwert von a_n folgende vereinfachte Form:

$$\frac{3n - 3}{2n}$$

Diese Form lässt sich weiter vereinfachen:

$$\frac{3n - 3}{2n} = \frac{3 - \frac{3}{n}}{2}$$

Auch hier wissen wir, dass $\frac{3}{n}$ gegen 0 geht.
Folglich können wir schreiben:

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 3n}{2n^2 - 1} = \frac{3}{2}$$

Dies war der Fall $n \to +\infty$. Es gilt noch den Fall $n = 1$ zu beachten. Hier können wir einfach einsetzen:

$$\frac{3n^2 - 3n}{2n^2 - 1}|n = 1 \Rightarrow \frac{3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1}{2 \cdot 1^2 - 1} = \frac{3-3}{2-1} = \frac{0}{1} = 0$$

Konvergenz:

Nach Begrenzung geht a_n gegen 1.5^+

Monotonie:

a_n ist monoton steigend.

Folge b_n:

Begrenzung:

Verfahren wie bei a_n nach Satz 4.27.(4) im Skript.

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 3n}{2n^3 - 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(3n-3)}{n\left(2n^2 - \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3n-3}{2n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n\left(3 - \frac{3}{n}\right)}{n(2n)}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3 - \frac{3}{n}}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{2n} - \frac{\frac{3}{n}}{2n} = \lim_{n \to +\infty} 0 - \frac{n}{3 \cdot 2n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}$$

Für $n = 1$ ergibt sich wiederum 0.

Konvergenz:

Nach Begrenzung konvergiert b_n gegen $\frac{1}{6}$.

Monotonie:

b_n ist monoton steigend.

Aufgabe 4

Es sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n \to \infty} a_n = 2$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (b_n) mit

$$b_n = (a_n^2 - 2)^2 - 3.$$

Da $a_n \to 2$, können wir diesen Wert einfach in b_n einsetzen und erhalten dann folgende Gleichung für den Grenzwert b der Folge b_n:

$$b = (2^2 - 2)^2 - 3 = (4-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

Aufgabe 5

(a)

Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $b_n = \sup\{a_m : m \geq n\}$. Zeigen Sie, dass (b_n) konvergiert.

Hinweis: Ist die Folge (b_n) monoton? Ist sie beschränkt?

(b)

Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert.
Hinweis: Benutzen Sie (a), um einen Kandidaten für den Grenzwert der Cauchy-Folge zu finden.