Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsgruppe 14

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

Rene Ogniwek
reneogniwek@gmx.net
6428103

Steffi Kaussow
s.kaussow@gmail.com
6414862

7. Dezember 2015

Punkte für den Hausaufgabenteil:

5.1	5.2	5.3	5.4	Σ

Inhaltsverzeichnis

1 Zettel vom 14.-16. Oktober – Abgabe: N/A

1.1 Präsenzaufgabe 1.1

Wiederholen Sie die O-Notation und die verwandten Notationen. Wie sind die einzelnen Mengen definiert? Was bedeutet es, wenn $f \in O(g)$ gilt, was wenn $f \in \Theta(g)$ gilt und so weiter?

$$
\begin{array}{lll}
O(g(n)): & f(n) \in O(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0 : \quad \|f(n)\| <= c \cdot \|g(n)\| \\
o(g(n)): & f(n) \in o(g(n)) & \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0 : \quad \|f(n)\| <= c \cdot \|g(n)\| \\
\Omega(g(n)): & f(n) \in \Omega(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0 : \quad \|f(n)\| >= c \cdot \|g(n)\| \\
\omega(g(n)): & f(n) \in \omega(g(n)) & \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0 : \quad \|f(n)\| >= c \cdot \|g(n)\| \\
\Theta(g(n)): & f(n) \in \Theta(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0 : \quad c_1 \cdot \|g(n)\| <= \|f(n)\| <= c_2 \cdot \|g(n)\|
\end{array}
$$

1.2 Präsenzaufgabe 1.2

Beweisen Sie:

- $n^2 + 3n - 5 \in O(n^2)$
- $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$
- $n! \in O((n+1)!)$

Gilt im letzten Fall auch $n! \in o((n+1)!)$?

$$
\begin{array}{rl}
f(n) \in O(g(n)) & \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \\
f(n) & = n^2 + 3n - 5 \\
g(n) & = n^2 \\
\frac{f(n)}{g(n)} & = \frac{n^2+3n-5}{n^2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{n^2} & = lim_{n\to\infty} 1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} \\
& = 1 + \frac{3}{\infty} - \frac{5}{\infty^2} \\
& = 1 + 0 + 0 \\
& = 1 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))
\end{array}
$$

□

$$
\begin{array}{rl}
c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0 : & c_1 \cdot n^2 <= n^2 - 2n <= c_2 \cdot n^2 \\
\Leftrightarrow & c_1 <= 1 - \frac{1}{n} <= c_2
\end{array}
$$

Dies ist erfüllbar ab $n_0 >= 2$, da für $n = 1$ im mittleren Ausdruck 0 herauskommt und c_1 größer als 0, aber kleiner als der mittlere Ausdruck sein muss. Ist $n >= 2$, so kommt im mittleren Ausdruck $0,5$ heraus, für c_1 lässt sich ein beliebiger Wert aus $]0; 0.5[$ wählen, sei es an dieser Stelle $\frac{1}{4}$. Als Obergrenze für c_2 lässt sich jeder Wert größer oder gleich 1 wählen, da der mittlere Ausdruck nicht größer als 1 werden kann und somit die Bedingung des "kleiner gleichßofort erfüllt ist.
Somit wird als Ergebnis für die Belegung gewählt: $c_1 = \frac{1}{4}; c_2 = 1; n_0 = 2$. Mit dieser Belegung gilt $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$

□

$$
\begin{aligned}
f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \tfrac{f(n)}{g(n)} < \infty \\
f(n) &= n! \\
g(n) &= (n+1)! = (n+1) \cdot n!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} \tfrac{n!}{(n+1)\cdot n!} &= lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n+1} \\
&= \tfrac{1}{\infty} \\
&= 0 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))
\end{aligned}
$$

Da die Bedingung für $o(g(n))$ ist, dass der Quotient nicht nur kleiner unendlich, sondern gleich null ist, was hier wie oben gezeigt gegeben ist, gilt auch $n! \in o((n+1)!)$.

□

1.3 Präsenzaufgabe 1.3

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(h(n))$
2. $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O(h(n))$

$$
\begin{gathered}
\exists c_1 \in \mathbb{R}^+ \exists n_{0_1} \in \mathbb{N} \forall n >= n_{0_1} : \|f(n)\| <= c_1 \cdot \|h(n)\| \\
\exists c21 \in \mathbb{R}^+ \exists n_{0_2} \in \mathbb{N} \forall n >= n_{0_2} : \|g(n)\| <= c_2 \cdot \|h(n)\| \\
n_0 = max(n_{0_1}, n_{0_2}) \\
\|f(n) + g(n)\| <= c_1 \cdot \|h(n)\| + c_2 \cdot \|h(n)\| <= (c_1 + c_2) \cdot \|h(n)\|
\end{gathered}
$$

Seien $f(n)$ und $g(n)$ Polynome zweiten Grades sowie $h(n)$ ein Polynom dritten Grades. Dann sind sowohl $f(n)$ als auch $g(n)$ durch die *limes*-Bedingung in $O(h(n))$. Das Produkt zweier Polynome zweiten Grades ist allerdings ein Polynom vierten Grades, sodass gilt:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^3} = \lim_{n\to\infty} n = \infty
$$

Damit ist das Produkt der Polynome nicht mehr in $O(h(n))$, da die *limes*-Bedingung, nach der der Quotient der Polynome für n gegen Unendlich kleiner als Unendlich sein zu hat, nicht erfüllt ist. Damit ist (2) widerlegt.

□

2 Zettel vom 15.10. – Abgabe: 26.10.

2.1 Übungsaufgabe 2.1

[| 2]

Begründen Sie formal, warum folgende Größenabschätzungen gelten bzw. nicht gelten:

1. $3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3)$
2. $n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2)$

2.1.1

$$3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3) \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 6n + 20}{n^3} < \infty$$

$$lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 6n + 20}{n^3} = lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3} - \frac{6n}{n^3} + \frac{20}{n^3} = lim_{n\to\infty} 3 - \frac{6}{n^2} + \frac{20}{n^3} = 3 - 0 + 0 < \infty$$

$$\Rightarrow 3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3) \qquad \square$$

2.1.2

$$n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2) \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^3} < \infty \wedge lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^2} > 0$$

$$\frac{n^2 \cdot \log n}{n^2} = \frac{1 \cdot \log n}{1} = \log n > 0 \ \forall n > 1 \Rightarrow n^2 \cdot \log n \in \Omega(n^2)$$

$$lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^3} = lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \overset{\text{l'H}}{=} lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1} = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow n^2 \cdot \log n \in O(n^3)$$

$$\Rightarrow n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2) \qquad \square$$

2.2 Übungsaufgabe 2.2

[| 4]

Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem Wachstumsgrad in aufsteigender Reihenfolge, d.h. folgt eine Funktion $g(n)$ einer Funktion $f(n)$, so soll $f(n) \in O(g(n))$ gelten.

$$n, \log n, n^2, n^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n}^3, 2^n, \ln n, 1000$$

Mit log ist hier der Logarithmus zur Basis 2, mit ln der natürliche Logarithmus (Basis e) gemeint. Begründen Sie stets Ihre Aussage. Zwei Funktionen $f(n)$ und $g(n)$ befinden sich ferner in der selben Äquivalenzklasse, wenn $f(n) \in \Theta(g(n))$ gilt. Geben Sie an, welche Funktionen sich in derselben Äquivalenzklasse befinden und begründen Sie auch hier ihre Aussage.

Die bearbeitete Menge wird i.F. als M_F bezeichnet. Die Menge, die gerade alle Elemente von M_F in aufsteigend sortierter Reihenfolge enthält, wird als M'_F bezeichnet.
M_F wird mit InsertionSort in M'_F hineinsortiert.
Sei $e \in M_F$. Für e wird das Element 1000 gewählt. Da $|M'_F|$ leer ist, muss 1000 nicht weiter geprüft werden.

$$M'_F = \{1000\}$$

e wird nun über M_F iteriert, bis $M'_F = Sorted(M_F)$.

$e = n$

$f(n) = n$
$g(n) = 1000 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1000} = \infty \quad \Rightarrow n \notin O(1000)$

$f(n) = 1000$
$g(n) = n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n} = 0 \quad \Rightarrow 1000 \in O(n) \quad \Rightarrow n$ folgt 1000

$$M'_F = \{1000, n\}$$

$e = \log n$

$f(n) = log(n)$
$g(n) = n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{log(n)}{n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{ln(2)\cdot n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(2)\cdot n} = 0 \quad \Rightarrow log(n) \in O(n) \quad \Rightarrow n$ folgt $log(n)$

$f(n) = log(n)$
$g(n) = 1000 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{log(n)}{1000} = \infty \quad \Rightarrow log(n) \notin O(1000)$

$$M'_F = \{1000, \log n, n\}$$

$e = 4$

$f(n) = 4$
$g(n) = n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 \quad \Rightarrow 4 \in O(n) \quad \Rightarrow n$ folgt 4

$f(n) = 4$
$g(n) = log(n) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4}{log(n)} = 0 \quad \Rightarrow 4 \in O(log(n)) \quad \Rightarrow log(n)$ folgt 4

$f(n) = 4$
$g(n) = 1000 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1000} = 0,004 \quad \Rightarrow 4 \in \Theta(1000) \quad \Rightarrow 4$ und 1000 befinden sich in der selben Ä.-klasse

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n\}$$

$e = n^2$

$f(n) = n^2$
$g(n) = n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \infty \quad \Rightarrow n^2 \notin O(n)$

$f(n) = n$
$g(n) = n^2 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0 \quad \Rightarrow n \in O(n^2) \quad \Rightarrow n^2$ folgt n

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n, n^2\}$$

$e = n^{\frac{1}{2}}$

$f(n) = n^{\frac{1}{2}}$
$g(n) = n^2$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow n^{\frac{1}{2}} \in O(n^2) \quad \Rightarrow n^2$ folgt $n^{\frac{1}{2}}$

$f(n) = n^{\frac{1}{2}}$
$g(n) = n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow n^{\frac{1}{2}} \in O(n) \quad \Rightarrow n$ folgt $n^{\frac{1}{2}}$

$f(n) = n^{\frac{1}{2}}$
$g(n) = log(n)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{log(n)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot n^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{ln(2)\cdot n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(2)\cdot n^{\frac{1}{2}}}{2} = \infty \quad \Rightarrow n^{\frac{1}{2}} \notin O(log(n))$

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n^{\frac{1}{2}}, n, n^2\}$$

$e = \sqrt{n}^3$

$f(n) = \sqrt{n}^3$
$g(n) = n^2$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{n}^3 \in O(n^2) \quad \Rightarrow n^2$ folgt $\sqrt{n}^3$

$f(n) = \sqrt{n}^3$
$g(n) = n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}^3}{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} = \infty \quad \Rightarrow \sqrt{n}^3 \notin O(n)$

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n^{\frac{1}{2}}, n, \sqrt{n}^3, n^2\}$$

$e = 2^n$

$f(n) = 2^n$
$g(n) = n^2$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{ln(2)\cdot 2^n}{2\cdot n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{ln^2(2)\cdot 2^n}{2} = \infty \quad \Rightarrow 2^n \notin O(n^2)$

$f(n) = n^2$
$g(n) = 2^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot n}{ln(2)\cdot 2^n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{ln^2(2)\cdot 2^n} = 0 \quad \Rightarrow n^2 \in O(2^n) \quad \Rightarrow n^2$ folgt 2^n

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n^{\frac{1}{2}}, n, \sqrt{n}^3, n^2, 2^n\}$$

$e = \ln n$

$f(n) = ln(n)$
$g(n) = 2^n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{2^n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{ln(2)\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot ln(n)\cdot 2^n} = 0$ $\Rightarrow ln(n) \in O(2^n)$ $\Rightarrow 2^n$ folgt $ln(n)$

$f(n) = ln(n)$
$g(n) = n^2$ $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n^2} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\cdot n^2} = 0$ $\Rightarrow ln(n) \in O(n^2)$ $\Rightarrow n^2$ folgt $ln(n)$

$f(n) = ln(n)$
$g(n) = \sqrt{n}^3$ $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{\sqrt{n}^3} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{2\cdot n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6\cdot n^{\frac{2}{3}}} = 0$ $\Rightarrow ln(n) \in O(\sqrt{n}^3)$ $\Rightarrow \sqrt{n}^3$ folgt $ln(n)$

$f(n) = ln(n)$
$g(n) = n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\Rightarrow ln(n) \in O(n)$ $\Rightarrow n$ folgt $ln(n)$

$f(n) = ln(n)$
$g(n) = n^{\frac{1}{2}}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\cdot n^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$ $\Rightarrow ln(n) \in O(n^{\frac{1}{2}})$ $\Rightarrow n^{\frac{1}{2}}$ folgt $ln(n)$

$f(n) = ln(n)$
$g(n) = log(n)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{log(n)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{ln(2)\cdot n}} = ln(2)$ $\Rightarrow ln(n) \in \Theta(log(n))$ befinden sich in der $\Rightarrow ln(n)$ und $log(n)$ selben Ä.-klasse

$$M'_F = \{4, 1000, \ln n, \log n, n^{\frac{1}{2}}, n, \sqrt{n}^3, n^2, 2^n\}$$

In der selben Äquivalenzklasse befinden sich zum einen 4 und 1000 und zum anderen $log(n)$ und $ln(n)$. Die restlichen Werte sind jeweils alleine in ihrer Äquivalenzklasse.

2.3 Übungsaufgabe 2.3

[| 2]

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O((h(n))^2)$$

Für diesen Beweis wird der Beweis des dritten Satzes der Summen- und Produkteigenschaften der O-Notation[1] zu Hilfe genommen:

Beweis. Sei $f \in O(h_1)$ und $g \in O(h_2)$, dann gibt es ein c, n_0, so dass $f(n) \leq c \cdot h_1(n) \forall n \geq n_0$ und ebenso c', n'_0, so dass $g(n') \leq c' \cdot h_2(n') \forall n' \geq n'_0$. Daraus folgt $f(n'') \cdot g(n'') \leq c \cdot c' \cdot h_1(n'') \cdot h_2(n'') \forall n'' \geq max(n_0, n'_0)$, also $f \cdot g \in O(h_1 \cdot h_2)$. □

Setzt man nun $h_1, h_2 = h$ folgt daraus für den letzten Ausdruck des Beweises $f(n) \cdot g(n) \in O(h(n) \cdot h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O((h(n))^2)$.

[1] vgl. Vorlesung, Foliensatz 1 (14.10.), S.33

2.4 Übungsaufgabe 2.4

[| 8]

Seien

1.
$$T(n) := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ 3 \cdot T(n-1) + 2, & \text{sonst} \end{cases}$$

2.
$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{für } n = 1 \\ 16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekurrenzgleichungen (c ist dabei eine Konstante).

Bestimmen Sie wie in der Vorlesung jeweils die Größenordnung der Funktion $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ einmals mittels der (a) Substitutionsmethode und einmal mittes des (b) Mastertheorems. Ihre Ergebnisse sollten zumindest hinsichtlich der O-Notation gleich sein, so dass Sie etwaige Rechenfehler entdecken können! Führen Sie bei (a) auch den Induktionsbeweis, der in der Vorlesung übersprungen wurde!

2.4.1 2.4.1

a)

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(n-1) + 2 \\ &= 3 * (3 * T(n-2) + 2) + 2 &&= 3^2 * T(n-2) + 3^2 - 1 \\ &= 3^2 * (3 * T(n-3) + 2) + 8 &&= 3^3 * T(n-3) + 3^3 - 1 \\ &= ... \\ &= 3^k * T(n-k) + 3^k - 1 \end{aligned}$$

Wir kommen auf eine sinnvolle Verallgemeinerung der Formel.
Beweis der Formel durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $T(0)$ gilt nach Definiton.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ (s. Aufgabenstellung). Wir nehmen an, dass $T(n)$ gilt (Induktionsannahme) und zeigen $T(n+1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 * T(n-1) + 2 \\ T(n+1) &= 3 * T(n+1-1) + 2 \\ &= 3 * T(n) + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 3^k * T(n-k) + 3^k - 1 \\ T(n+1) &= 3^k * T(n+1-k) + 3^k - 1 \end{aligned}$$

Das zeigt $T(n+1)$.
Damit sind der Induktionsanfang und der Induktionsschritt bewiesen. Es folgt, dass $T(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Da die Rekursion bei $T(0) = 0$, also $n - k = 0$ abbricht, wird mit $k = n$ weiter gerechnet.

$$\begin{aligned} T(n) &= 3^k * T(n-k) + 3^k - 1 \\ &= 3^n * T(n-n) + 3^n - 1 \\ &= 3^n * T(0) + 3^n - 1 \\ &= 3^n * 0 + 3^n - 1 \\ &= 3^n - 1 \in \Theta(3^n) \end{aligned}$$

b) Das Mastertheorem ist auf Aufgabe 1. nicht anwendbar, da die Form

$$T(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

bei

$$T(n) := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ 3 \cdot T(n-1) + 2, & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht eingehalten wurde.

2.4.2 2.4.2

a)

$$\begin{aligned} S(n) &= 16 \cdot S(\tfrac{n}{4}) + n^2 \\ &= 16 \cdot S(\tfrac{16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2}{4}) + n^2 \\ &= 16 \cdot S(\tfrac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2 \\ &= 16 \cdot S(\tfrac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2 \\ &= 16 \cdot S(\tfrac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2 \end{aligned}$$

Keine sinnvolle Vereinfachung erkennbar. => Substitutionsmethode nicht anwendbar.

b) Die Form

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

ist bei

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{für } n = 1 \\ 16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

eingehalten. Das Mastertheorem ist daher anwendbar.

I. $S(n) \in \Theta(n^{log_b(a)})$, falls $f(n) \in O(n^{log_b(a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{log_b(a)-\epsilon}) \\ n^2 &\in O(n^{log_4(16)-\epsilon}) \\ n^2 &\in O(n^{2-\epsilon}) \end{aligned}$$

Hierfür kann kein ϵ gefunden werden. Daher gilt diese Aussage nicht

II. $S(n) \in \Theta(n^{log_b(a)} \cdot log_2(n))$, falls $f(n) \in \Theta(n^{log_b(a)})$.

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{log_b(a)}) \\ n^2 &\in O(n^{log_4(16)}) \\ n^2 &\in O(n^2) \end{aligned}$$

Dies stimmt, daher gilt diese Aussage.

III. $S(n) \in \Theta(f(n))$, falls $f(n) \in \Omega(n^{log_b(a)+\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ **und** $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n)$ für ein $\delta < 1$ und große n.

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in \Omega(n^{log_b(a)+\epsilon}) \\ n^2 & \in \Omega(n^{log_4(16)+\epsilon}) \\ n^2 & \in \Omega(n^{2+\epsilon}) \end{array}$$

Dies stimmt für alle $\epsilon \geq 0$, also auch für mindestens ein $\epsilon > 0$.

$$\begin{array}{ll} a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n) & \backslash\text{einsetzen} \\ 16 \cdot (\frac{n}{4})^2 \leq \delta \cdot n^2 & \backslash\sqrt{()} \\ 4 \cdot \frac{n}{4} \leq \sqrt{\delta} \cdot n & \\ n \leq \sqrt{\delta} \cdot n & \backslash\text{:n (n ist immer positiv, da } n \in \mathbb{N}\text{, s. Aufgabenstellung)} \\ 1 \leq \sqrt{\delta} & \backslash()^2 \\ 1 \leq \delta & \end{array}$$

Damit ist $\delta \geq 1$ und nicht, wie benötigt, $\delta < 1$. Daher gilt diese Aussage nicht.

Da nur II. gilt, gilt $S(n) \in \Theta(n^{log_b(a)} \cdot log_2(n))$, also $S(n) \in \Theta(n^2 \cdot log_2(n))$.

3 Zettel vom 29. 10. – Abgabe: 09. 11.

3.1 Übungsaufgabe 3.1

[| 3]

Gegeben seien die folgenden Code-Fragmente. Geben Sie eine möglichst dichte asymptotische obere Schranke für die Laufzeit der einzelnen Code-Fragmente jeweils in Abhängigkeit von n an. Begründen Sie Ihre Behauptung. (Es geht hier nicht um die Bedeutung des Codes, nur um die Laufzeit. An der Stelle von $sum = sum + j$ könnte sinnvoller(er) Code stehen. Die Einrückung gibt den Skopus der Schleifenkonstrukte an.)

```
ALGO1()
1  for i = 0 to n
2      for j = n downto 1
3          sum = sum + j
4      for j = 1 to n
5          sum = sum + j
```

```
ALGO2()
1  i = 1
2  while i < 2 · n
3      for j = 1 to i
4          sum = sum + j
5      i = i + 2
```

```
ALGO3()
1  i = 1
2  while i · i < n
3      i = i + 1
4      j = n
5      while j > 1
6          sum = sum + j
7          j = j/2
```

3.1.1 Aufgabe 3.1.1

Der Algorithmus läuft in $O(n^2)$.
Bei beiden inneren **for**-Blöcke laufen jeweils $n-1$ mal durch, sodass der innere Block insgesamt $2 \cdot (n-1) = 2n-2$ mal ausgeführt wird. Die äußere **for**-Schleife läuft gerade n mal; also wird der Block der Länge $2n-2$ n mal ausgeführt. Dies führt zu einer Laufzeit von $n \cdot (2n-2) = 2n^2 - 2n \in \mathcal{O}(n^2)$.

3.1.2 Aufgabe 3.1.2

Die äußere Schleife läuft zwar bis $2 \cdot n$, da die Zählvariable allerdings in Zweierschritten inkrementiert wird, wird die Schleife n mal durchlaufen. Die innere Schleife wird $n \cdot (n-1)$ mal durchlaufen $(1+3+5+7+\cdots+2 \cdot n-3+2 \cdot n-1 = n \cdot (n-1)$. Dies ergibt insgesamt eine Laufzeit von $n \cdot n \cdot (n-1) = n^3 - n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$

3.1.3 Aufgabe 3.1.3

Die äußere Schleife wird $\sqrt{n}$ mal durchlaufen, da $i^2 = n \Rightarrow i = \sqrt{n}$. Zeilen 5-7 laufen in $\log n$. Das ergibt eine Gesamtlaufzeit in $\mathcal{O}(\sqrt{n} \cdot \log n)$

3.2 Übungsaufgabe 3.2

[| 2]

Gegeben sei folgender Algorithmus, der ein Array A als Eingabe erwartet (dessen genaue Funktionsweise nachfolgend aber nicht wichtig ist):

Algorithm 1 FUNC(A)

```
1:  if A.lnge < 4 then
2:     return 4
3:  else
4:     sum = 0
5:     for i = 1 to A.laenge do
6:        sum = sum + A[i]
7:     end for
8:     x = A.laenge/4
9:     y =FUNC(A[x + 1..2 · x)
10:    z =FUNC(A[3 · x + 1..A.laenge])
11:    r = y
12:    for i = 1 to A.laenge do
13:       r = r + z · A[i]
14:    end for
15:    return sum + r
16: end if
```

Leiten Sie eine Rekurrenzgleichung für die Laufzeit der Methode FUNC in Abhängigkeit von der Arraygröße n von A ab. Begründen Sie ihre Gleichung.

$$A(n) := \begin{cases} 5, & \text{falls } n < 4 \\ A(\frac{n}{2}) + A(\frac{n}{4}) + 2n + 4, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die 5 im ersten Teil der Rekurrenzgleichung erklärt sich durch die ersten beiden Zeilen im Pseudocode.

Der Aufruf in Zeile 8 dauert $\frac{n}{2}$, der in Zeile 9 dauert $\frac{n}{4}$. Dadurch erklärt sich das $A(\frac{n}{2}) + A(\frac{n}{4})$ im zweiten Teil der Rekurrenzgleichung.

Zeile 5 und 6 laufen in n ab.
Zeile 11 und 12 laufen auch in n ab.
Zeile 4, 7, 10 und 13 laufen jeweils mit konstantem Zeitaufwand.
Deshalb ist das, was hinter den $A(x)$-Aufrufen steht, $n + n + c$, wobei c in diesem Fall den Wert 4 hat, da wir vier Zeilen mit konstantem Zeitaufwand im Pseudocode haben.

3.3 Übungsaufgabe 3.3

[| 3]

Gegeben seien die Folgenden Rekurrenzgleichungen T_1, T_2 und T_3, wobei die c_i und d_i Konstanten seien.

$$T_1(n) := \begin{cases} c_1 & \text{für } n = 1 \\ 8 \cdot T_1(\frac{n}{2}) + d_1 \cdot n^3, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_2(n) := \begin{cases} c_2 & \text{für } n = 1 \\ 5 \cdot T_2(\frac{n}{4}) + d_2 \cdot n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_3(n) := \begin{cases} c_3 & \text{für } n = 1 \\ 6 \cdot T_3(\frac{n}{3}) + d_3 \cdot n \cdot \log n, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Größenordnungen der Funktionen $T_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mittels des Mastertheorems. Ist dies nicht möglich, geben Sie an warum. Geben Sie Ihre Ergebnisse nachvollziehbar an.

3.3.1 Aufgabe 3.3.1

Die Form

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

ist bei

$$T_1(n) := \begin{cases} c_1, & \text{für } n = 1 \\ 8 \cdot T_1(\frac{n}{2}) + d_1 \cdot n^3, & \text{sonst} \end{cases}$$

eingehalten. Das Mastertheorem ist daher anwendbar.

I. $T_1(n) \in \Theta(n^{log_b(a)})$, falls $f(n) \in O(n^{log_b(a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$.

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in O(n^{log_b(a)-\epsilon}) \\ d_1 \cdot n^3 & \in O(n^{log_2(8)-\epsilon}) \\ d_1 \cdot n^3 & \in O(n^{3-\epsilon}) \end{array}$$

Hierfür kann kein ϵ gefunden werden. Daher gilt diese Aussage nicht.

II. $T_1(n) \in \Theta(n^{log_b(a)} \cdot log_2(n))$, falls $f(n) \in \Theta(n^{log_b(a)})$.

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in O(n^{log_b(a)}) \\ d_1 \cdot n^3 & \in O(n^{log_2(8)}) \\ d_1 \cdot n^3 & \in O(n^3) \end{array}$$

Dies stimmt, daher gilt diese Aussage.

III. $T_1(n) \in \Theta(f(n))$, falls $f(n) \in \Omega(n^{log_b(a)+\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ **und** $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n)$ für ein $\delta < 1$ und große n.

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in \Omega(n^{log_b(a)+\epsilon}) \\ d_1 \cdot n^3 & \in \Omega(n^{log_2(8)+\epsilon}) \\ d_1 \cdot n^3 & \in \Omega(n^{3+\epsilon}) \end{array}$$

Dies stimmt für alle $\epsilon \geq 0$, also auch für mindestens ein $\epsilon > 0$.

$$\begin{array}{ll} a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n) & \backslash\text{einsetzen} \\ 8 \cdot d_1 \cdot (\frac{n}{2})^3 \leq \delta \cdot d_1 \cdot n^3 & \backslash \sqrt[3]{()} \\ \sqrt[3]{d_1} \cdot 2 \cdot \frac{n}{2} \leq \sqrt[3]{\delta} \cdot \sqrt[3]{d_1} \cdot n & \backslash: \sqrt[3]{d_1} \\ n \leq \sqrt[3]{\delta} \cdot n & \backslash\text{:n (n ist immer positiv, da } n \in \mathbb{N}\text{, s. Aufgabenstellung)} \\ 1 \leq \sqrt[3]{\delta} & \backslash()^3 \\ 1 \leq \delta & \end{array}$$

Damit ist $\delta \geq 1$ und nicht, wie benötigt, $\delta < 1$. Daher gilt diese Aussage nicht.

Da nur II. gilt, gilt $T_1(n) \in \Theta(n^{log_b(a)} \cdot log_2(n))$, also $T_1(n) \in \Theta(n^3 \cdot log_2(n))$.

3.3.2 Aufgabe 3.3.2

Die Form

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

ist bei

$$T_2(n) := \begin{cases} c_2, & \text{für } n = 1 \\ 5 \cdot T_2(\frac{n}{4}) + d_2 \cdot n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

eingehalten. Das Mastertheorem ist daher anwendbar.

I. $T_2(n) \in \Theta(n^{log_b(a)})$, falls $f(n) \in O(n^{log_b(a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$.

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in O(n^{log_b(a)-\epsilon}) \\ d_2 \cdot n^2 & \in O(n^{log_4(5)-\epsilon}) \\ d_2 \cdot n^2 & \in O(n^{1.160964047443681-\epsilon}) \end{array}$$

Hierfür kann kein ϵ gefunden werden. Daher gilt diese Aussage nicht.

II. $T_2(n) \in \Theta(n^{log_b(a)} \cdot log_2(n))$, falls $f(n) \in \Theta(n^{log_b(a)})$.

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in O(n^{log_b(a)}) \\ d_2 \cdot n^2 & \in O(n^{log_4(5)}) \\ d_2 \cdot n^2 & \in O(n^{1.160964047443681}) \end{array}$$

Dies stimmt nicht, daher gilt diese Aussage nicht.

III. $T_2(n) \in \Theta(f(n))$, falls $f(n) \in \Omega(n^{log_b(a)+\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ **und** $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n)$ für ein $\delta < 1$ und große n.

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in \Omega(n^{log_b(a)+\epsilon}) \\ d_2 \cdot n^2 & \in \Omega(n^{log_4(5)+\epsilon}) \\ d_2 \cdot n^2 & \in \Omega(n^{1.160964047443681+\epsilon}) \end{array}$$

Dies stimmt für alle $\epsilon \geq 2 - log_4(5) \approx 0.839035952556319$, also auch für mindestens ein $\epsilon > 0$.

$$\begin{array}{ll} a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n) & \backslash\text{einsetzen} \\ 4 \cdot d_2 \cdot (\frac{n}{5})^2 \leq \delta \cdot d_2 \cdot n^2 & \backslash\sqrt{()} \\ \sqrt{d_2} \cdot 2 \cdot \frac{n}{5} \leq \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{d_2} \cdot n & \backslash: \sqrt{d_2} \\ \frac{2}{5} \cdot n \leq \sqrt{\delta} \cdot n & \backslash: n \text{ (n ist immer positiv, da } n \in \mathbb{N}, \text{ s. Aufgabenstellung)} \\ \frac{2}{5} \leq \sqrt{\delta} & \backslash()^2 \\ \frac{4}{25} \leq \delta & \\ 0.16 \leq \delta & \end{array}$$

Damit gilt $\delta \geq 0.16$. Somit wurde, wie benötigt, mindestens ein $\delta < 1$ gefunden ($0.16 \leq \delta < 1$). Daher gilt diese Aussage.

Da nur III. gilt, gilt $T_2(n) \in \Theta(f(n))$, also $T_2(n) \in \Theta(d_2 \cdot n^2)$, also $T_2 \in \Theta(n^2)$.

3.3.3 Aufgabe 3.3.3

Die Form

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

ist bei

$$T_3(n) := \begin{cases} c_3, & \text{für } n = 1 \\ 6 \cdot T_3(\frac{n}{3}) + d_3 \cdot n \cdot log(n), & \text{sonst} \end{cases}$$

eingehalten. Das Mastertheorem ist daher anwendbar.

I. $T_3(n) \in \Theta(n^{log_b(a)})$, falls $f(n) \in O(n^{log_b(a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$.

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in O(n^{log_b(a)-\epsilon}) \\ d_3 \cdot n \cdot log(n) & \in O(n^{log_3(6)-\epsilon}) \\ d_3 \cdot n \cdot log(n) & \in O(n^{1.6309297535714573-\epsilon}) \end{array}$$

Es gilt: $d_3 \cdot n \cdot log(n) < n^{log_3(6)}$ für alle $n > 0$, für $d_3 = 1$.
Da aber nur $d_3 \cdot n \cdot log(n) \leq n^{log_3(6)}$ für alle $n > 1$ (s. Definition T_3) gefordert ist, kann hierfür mindestens ein ϵ gefunden werden.
Für größere d_3 gilt allerdings, dass die n nicht mehr beliebig größer 1 sein dürfen, sondern eine obere Schranke bekommen.
Somit hängt die Lösung stark von d_3 ab und das Mastertheorem ist ungeeignet für die Lösung dieser Aufgabe.

3.4 Übungsaufgabe 3.4

[| 8]

1. Geben Sie für die Funktion *merge* in *mergesort* (siehe Folie 9, Kapitel 3) sinnvollen Pseudocode an. Orientieren Sie sich dabei an der natürlichsprachlichen Formulierung auf Folie 10, Kapitel 3. Ihr Pseudocode sollte diese Formulierung möglichst nah umsetzen. Weisen Sie dann Ihren Pseudocode von *merge* als korrekt nach, indem Sie eine sinnvolle Schleifeninvariante formulieren und nutzen. Nutzen Sie dies dann, um auch *mergesort* selbst als korrekt nachzuweisen. (Siehe auch Folie 11, Kapitel 3.)

2. Gegeben sei eine Sequenz $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ von Zahlen (als Array). Ein Paar (i, j) mit $i < j$, aber $a_i > a_j$ nennen wir einen *Konflikt* (in A). Gesucht ist nun, gegebendas Array A, die Anzahl der Konflikte in A. Ihre Aufgabe ist es, einen Divide&Conquer Algorithmus zu entwerfen, der das Problem in $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ löst. Beschreiben Sie zunächst Ihre Idee. Geben Sie dann den Algorithmus konkreter an und begründen Sie dann überzeugend, warum Ihr Algorithmus das Problem korrekt löst (sie müssen dazu nicht unbedingt auf die Schleifeninvarianten zurückgreifen). Zuletzt begründen Sie auch, warum die Laufzeit ihres Algorithmus tatsächlich in $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ liegt.

3.4.1 Aufgabe 3.4.1

```
MERGE(A, B)
 1  cur_A = 0
 2  cur_B = 0
 3  C = newlist
 4  while cur_A < A.length & cur_B < B.length
 5        if cur_A < A.length
 6              a_i = A[cur_A]
 7        if cur_B < B.length
 8              b_j = B[cur_B]
 9        if a_i < b_j
10              C.append a_i
11              cur_A = cur_A + 1
12        else
13              C.append b_j
14              cur_B = cur_B + 1
15  if cur_B = B.length
16        for i = cur_A to A.length
17              C.append A[i]
18  else
19        for j = cur_B to B.length
20              C.append B[j]
21  return C
```

Korrektheit von MERGE(A, B):
Schleifeninvariante:
Zu Beginn jeder Iteration sind die Listen A, B und C in sich sortiert.

Initialisierung:
Vor der ersten Iteration der **while**-Schleife sind die Listen A und B geordnet, weil sie geordnet „angeliefert“ werden. Die Liste C ist geordnet, weil sie zu diesem Zeitpunkt noch leer ist.

Fortsetzung:
Bei jeder Iteration wird jeweils das kleinste Element aus beiden Listen der Liste C hinzugefügt. Die Listen A und B verlieren kein Element, also sind sie immer noch sortiert. Die Liste C bekommt immer ein neues Element, welches größer oder gleich dem letzten ist. Somit bleibt C auch bei jeder Iteration sortiert.

Terminierung:
Die **while**-Schleife terminiert stets, da bei jeder Iteration mindestens einer der beiden Zeiger um eine Stelle in Richtung Listenende verrückt wird. Damit kommt ein Zeiger - sofern die Listen endlich sind - irgendwann am Ende an.

Neue Initialisierung:
Die **for**-Schleife in Zeile 16 oder 19 verletzt auch nicht die Invariante. Zu Beginn sind alle drei Listen sortiert, aber B - oder A - wurde schon vollständig an C angefügt. Somit sind alle Elemente der verbleibenden Liste A - oder B - größer oder gleich dem letzten - und größten - Element in C.

Neue Fortsetzung:
Da alle Elemente der verbleibenden Liste A - oder B - größer oder gleich jedem Element in C sind, können wir einfach das nächste - und damit kleinste - verbleibende Element aus A - oder B - an C anfügen. Bei

diesem Schritt bleibt A - oder B - sortiert, weil sie nicht verändert wird, und C auch, da sie nur ein weiteres größeres Element angesetzt bekommt.

Neue Terminierung:
Die **for**-Schleife terminiert auch, da der Zähler bei jeder Iteration um 1 erhöht wird. Solange die Liste A - oder B - also nicht unendlich ist, erreicht der Zähler irgendwann ihr Ende.

Wenn die Schleifen abgebrochen sind, gilt, dass die Listen A, B und C sortiert sind. Die Ausgabeliste C also auch. Dies wollten wir zeigen, damit ist dieser Algorithmus korrekt.

Korrektheit von MERGESORT(A, L, R):
Induktion:
Induktion über die Größe der Eingabeliste:

Induktionsanfang:
Hat die Liste die Länge 1, so ist $l = r$. Die Ursprungsliste wird nicht verändert, womit MERGESORT korrekt ist. Denn einelementige Listen sind immer sortiert.

Induktionsannahme:
Ist MERGESORT für die Länge $n \in \mathbb{N}$ wahr, so ist es auch für die Länge $n + 1$ wahr.

Induktionsschritt:
Durch den rekursiven Aufruf, wird MERGESORT(n) für jedes $n > 1$ zu zwei Aufrufen von MERGESORT($\frac{n}{2}$). Somit wird es bei jedem Rekursionsschritt halb so groß und kommt damit irgendwann bei x Aufrufen von MERGESORT(1) an. Dieses gilt nach Induktionsanfang.

3.4.2 Aufgabe 3.4.2

Idee:
Wir nehmen MERGESORT und jedes mal, wenn wir 2 Elemente tauschen müssen, inkrementieren wir den Zähler um 1. Wenn Die Liste sortiert wurde, dann sollte der Zähler die Anzahl der Konflikte anzeigen.

Pseudocode:

```
MERGECOUNT(A, L, R)
1  Zahler = 0
2  if l < r
3        q = (l * r)/2
4        MERGECOUNT(A, L, Q)
5        MERGECOUNT(A, Q +1, R)
6        B = newArray (A[l] to A[q])
7        C = newArray (A[q + 1] to A[r])
8        MERGECOUNT-COUNTER(B, C, ZAEHLER)
9  return Zaehler
```

MERGECOUNT-COUNTER(A, B, ZAEHLER)

```
1  C = newArray
2  while A.length > 0  &  B.length > 0
3      if A[0] > B[0]
4          C.append(B[0])
5          B = cdr(B)
6          Zaehler = Zaehler + A.length
7      else
8          C.append(A[0])
9          A = cdr(A)
10 while A.length > 0
11     C.append(A[0])
12     A = cdr(A)
13 while B.length > 0
14     C.append(B[0])
15     B = cdr(B)
16 return C, Zaehler
```

Korrektheit:

Da die Schleifeninvariante nicht unbedingt nötig ist (s. Aufgabenstellung) folgt hier die rein logische Begründung:
Wir teilen die Liste in der Mitte in 2 gleiche Teile, ohne die Reihenfolge der Elemente zu verändern. Dies tun wir so lange, bis nur noch einelementige Listen da sind. Einelementige Listen sind immer sortiert. Diese Listen werden nun wie folgt zusammengefügt:
Sollte das kleinste - also erste - Element in der rechten Liste (B) kleiner sein, als das kleinste - also erste - Element in der linken Liste (A), dann steht das Element aus B mit allen Elementen aus A in Konflikt. Wir erhöhen also den Konfliktzähler um die Anzahl der Elemente in Liste A.
Wenn allerdings das erste Element von A kleiner ist, als das erste Element von B, existiert kein Konflikt und der Zähler bleibt unangetastet.
Ist eine Liste leer, so sind die restlichen Elemente der anderen Liste nach Vorgehensweise des Verfahrens allesamt größer als das letzte Element der, nun leeren, Liste und sortiert, weswegen sie keine Konflikte mehr vorweisen und direkt an das Ergebnis angehängt werden können. Somit bleibt auch hier der Zähler unangetastet.
Oben beschriebenes passiert bei jeder Rekursion aufs Neue, weshalb der Zähler kontinuierlich weiterwächst - sofern Konflikte vorhanden.
Der Algorithmus terminiert zudem immer, da MERGESORT ebenfalls immer terminiert und sich MERGECOUNT nur im Erhöhen des Zählers von MERGESORT unterscheidet.

Zeitaufwand:

MERGECOUNT und MERGECOUNT-COUNTER verhalten sich genau, wie MERGESORT und MERGE, bis auf eine Erhöhung eines Zählers, was allerdings mit konstantem Zeitaufwand zu bewältigen ist und daher bei der O-Notation nicht ins Gewicht fällt. Somit liegt MERGECOUNT - genauso wie MERGESORT - ebenfalls in $\mathcal{O}(n \cdot log(n))$.

4 Zettel vom 09. 10. – Abgabe: 23. 11.

4.1 Übungsaufgabe 4.1

[| 3]

4.1.1 Aufgabe 4.1.1

Eingabe: Eine endliche Menge U und eine Größe $s(u) \in \mathbb{N}$, eine Kapazität $K \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Partitionierung von U in paarweise disjunkten Teilmengen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ (d.h. die U_i enthalten zusammen alle Elemente aus U und jedes Element aus U ist in genau einem der U_i) derart, dass $\Sigma_{u \in U_i} s(u) \leq K$ für jedes i gilt?

Es kann eine Variante des Binary Sort Algorithmus angewandt werden:

```
PARTITION(SET s, INT c)
1  if sum(s) < c
2       return true
3  elseif max(s) > c
4       return false
5  else
6       Partition(s[0; (s.size/2)], c)
7       Partition(s[(s.size/2); s.size], c)
```

Ist die gesamte Größe von s bereits kleiner gleich K, kann der Algorithmus sofort terminieren und `true` zurückgeben. Andernfalls wird U halbiert und für die Teilmengen wird erneut geprüft. Dies wird rekursiv fortgeführt, bis eine Ebene erreicht wurde, auf der die Größe aller Teilmengen kleiner gleich K ist.
Da bereits zu Beginn geprüft wird, ob ein einzelnes Element größer als die Kapazität ist, ist gewährleistet, dass bei rekursiven Aufruf der Algorithmus spätestens dann terminiert, wenn jede Teilmenge genau die Mächtigkeit 1 hat. Ist ein einzelnes Element von U bereits größer als K, so ist das Problem nicht lösbar und der Algorithmus terminiert, `false` zurückgebend.
Durch die jeweilige Halbierung wird die Funktion höchstens $\log n$ mal rekursiv aufgerufen. $sum(s)$ und $max(s)$ haben jeweils eine lineare Laufzeit aus $\mathcal{O}(n)$. Damit werden insgesamt $a \cdot b \cdot n \cdot \log n + f(n) + g(n)$[1] Schritte zur vollständigen Berechnung benötigt, die obere Schranke liegt also in $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$. Dies ist nicht polynomiell und liegt somit in *NP*.

4.1.2 Aufgabe 4.1.2

Eingabe: Ein endliches Alphabet Σ, eine endliche Menge $S \subset \Sigma*$ von Worten und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es ei Wort $w \in \Sigma*$ mit $|w| \geq n$ derart, dass w ein Teilwort von jedem $x \in S$ ist?

Es wird das kürzeste Wort $x \in S$ gewählt (Laufzeit $\mathcal{O}(S.length)$). Nun wird ein Teilwort mit der Länge n aus x gewählt und geprüft, ob es in allen anderen Wörtern aus S auch existiert (Laufzeit $\mathcal{O}(S.length)$). Ist dies der Fall, wird `true` ausgegeben, sonst wird das nächste Teilwort aus x mit der Länge n gewählt (Laufzeit $\mathcal{O}(k); k \in \mathbb{N}$). Wurde erfolglos über x iteriert, bricht der Algorithmus ab und gibt `false` zurück. Die Laufzeit ist konstant in $\mathcal{O}(a); a \in \mathbb{N}$.
Die Gesamtlaufzeit liegt damit bei $\mathcal{O}(a + k + (2 \cdot S.length))$.

4.2 Übungsaufgabe 4.2

[| 7]

[1] $a, b, f(n), g(n)$ sind Faktoren bzw. Konstanten, die in $sum(s)$ und $max(s)$ entstehen können, allerdings vernachlässigbar sind

4.2.1 Aufgabe 4.2.1

Zegen Sie, dass P und NP jeweils gegenüber Konkatenation abgeschlossen sind (d.h. mit $L_1, L_2, \in P$ ist auch $L_1 \cdot L_2 \in P$ und entsprechend für NP).

Für *P*: Seien $L_1, L_2 \in P, w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, w_3 = w_1 \cdot w_2$. Sei außerdem $w_3 = b_1 b_2 b_3 b_4 ... b_n; w_3 \in L_3; L_3 = L_1 \cdot L_2$.

Wähle $w_1 = b_1 b_2 b_3 \dots b_i$ und $w_2 = b_{i+1} b_{i+2} ... b_n$

Solange $w_1 \notin L_1 \wedge w_2 \notin L_2$ gilt, erhöhe i um 1 (als Startwert für i gilt 0.) Dies teilt das Wort in zwei Teilworte und wir wissen nun, wo wir w_3 teilen müssen, um w_1 und w_2 zu erhalten. Bei $i = 0$ gilt $w_1 = \lambda$, bei $i = n$ gilt $w_2 = \lambda$. Nun wird w_1 wie vorher in L_1 in Polynomialzeit gelöst. Ebenso w_2 in L_2.
Die Zerlegung benötigt im schlimmsten Fall $n + 1$ Ausführungen, da es $n + 1$ mögliche Zerteilungen von w_3 gibt. Somit beträgt die Gesamtlaufzeit die Zeit, die w_1 in L_1 benötigt (ein Polynom) plus die Zeit, die w_2 in L_2 benötigt (auch ein Polynom) mal die Zeit, die das Zerschneiden benötigt $(n + 1)$, also: $(Polynom(L_1) + Polynom(L_2)) * (n + 1)$. Dies ist allerdings wieder ein Polynom.

Für *NP*: Seien $L_1, L_w \in NP, w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 und w_3 = w_1 \cdot w_2 und w_3 = b_1 b_2 b_3 b_4 ... b_n und w_3 \in L_3 und L_3 = L_1 \cdot L_2$.

Wähle $w_1 = b_1 b_2 b_3 \dots b_i$ und $w_2 = b_{i+1} b_{i+2} \dots b_n$.

Solange $w_1 \notin L_1$ und $w_2 \notin L_2$ gilt, erhöhe i um 1 (als Startwert für i gilt 0.)
Dies teilt das Wort in zwei Teilworte und wir wissen nun, wo wir w_3 teilen müssen, um w_1 und w_2 zu erhalten. Bei $i = 0$ gilt $w_1 = \lambda$, bei $i = n$ gilt $w_2 = \lambda$. Nun wird w_1 wie vorher in L_1 in Nichtpolynomialzeit gelöst. Ebenso w_2 in L_2.
Die Zerlegung benötigt im schlimmsten Fall $n + 1$ Ausführungen, da es $n + 1$ mögliche Zerteilungen von w_3 gibt. Somit beträgt die Gesamtlaufzeit die Zeit, die w_1 in L_1 benötigt (ein Nichtpolynom) + die Zeit, die w_2 in L_2 benötigt (auch ein Nichtpolynom) $*$ die Zeit, die das Zerschneiden benötigt $(n + 1)$, also: $(Nichtpolynom(L_1) + Nichtpolynom(L_2)) * (n + 1)$ Dies ist allerdings wieder ein Nichtpolynom.

4.2.2 Aufgabe 4.2.2

Geben Sie unter der Annahme $P = NP$ einen Algorithmus an, der in polynomieller Zeit zu einer aussagenlogischen Formel eine erfüllende Belegung bestimmt, sofern eine existiert. Begründen Sie kurz, warum Ihr Algorithmus das Gewünschtete leistet.

Brute Force:
Wir setzen für jedes Literal 1 ein und testen.
Erfüllt die Belegung nicht, ersetzen wir eine 1 durch eine 0 und prüfen dann alle Belegungen, die aus $(n - 1)$ 1 und einer 0 bestehen. Wenn die Belegung wieder nicht erfüllt, wird eine weitere 1 durch eine 0 ersetzt, solange, bis die Belegung aus 0^n besteht oder eine erfüllende Belegung gefunden wurde. Handelt es sich bei 0^n auch nicht um eine erfüllende Belegung, so existiert keine.

Dieser Algorithmus benötigt im schlimmsten Fall $\Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ viele Schritte. Dies liegt in NP und damit unter der Annahme $P = NP$ auch in P. Damit ist es in polynomieller Zeit lösbar.

4.2.3 Aufgabe 4.2.3

Zeigen Sie, dass unter der Annahme $P = NP$ jedes $J \in P$ außer $L = \emptyset$ und $L = \Sigma^*$ NP-vollständig ist. Warum gilt diese Aussage nicht für die beiden ausgeschlossenen Fälle?

Sei $P = NP$. Damit sind alle Probleme aus NP auch in Polynomialzeit lösbar. Zudem ist jedes Problem aus P in Polynomialzeit auf jedes andere Problem aus P reduzierbar (, da es sich bei allen Problemen in P um Polynome handelt,) was genau der Definition von NP entspricht. Allerdings sind in P nur endliche Teilmengen von Σ^+, denn $\emptyset$ ist nicht entscheidbar, ebenso wie unendliche Sprachen (Σ^*). Somit sind sie auch nicht in P. Da jedoch $P = NP$ gilt, liegt der Rest aus P ebenfalls in NPC. Somit ist, wenn $P = NP$ gilt, jedes L aus P auch in NP, außer der Leeren Menge und dem unendlichen Σ^*.

4.3 Übungsaufgabe 4.3

[| 6]

4.3.1 Aufgabe 4.3.1

Sei `2-SAT` die Menge aller (sinnvoll codierten) aussagenlogischen Formeln, die mindestens zwei erfüllende Belegungen haben. Zeigen Sie, dass `2-SAT` NP-vollständig ist.

Ein Algorithmus für `2-SAT`:
Als Algorithmus für `2-SAT` kann eine modifizierte Version des Brute Force Algorithmus' aus 4.2.2 dienen:
Es wird jede mögliche Belegung für eine aussagenlogische Formel durchprobiert und geschaut, ob sie erfüllend ist. Wenn sie erfüllend ist, wird ein Zähler um 1 inkrementiert. Sollte dieser Zähler die Zahl 2 erreichen, wird `"true"` ausgegeben, sonst wird die nächste Belegung probiert. Hat der Zähler, nachdem alle Belegungen durchprobiert wurden, noch nicht die 2 erreicht, wird `"false"` ausgegeben.
Dieser Algorithmus läuft im schlimmsten Fall in $\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ vielen Schritten.
Dies liegt in NP und zeigt daher `2-SAT` $\in NP$.

Wir wissen aus der Vorlesung: `SAT` $\in NPC$
Reduktion von `SAT` auf `2-SAT`:
Angenommen Automat A löst `2-SAT`, dann hat A einen Unterautomaten B, der ausgibt, ob eine beliebige aussagenlogische Formel erfüllbar ist. A gibt nun `"true"` aus, wenn B für eine Formel mindestens 2 mal `"true"` ausgegeben hat.
Dieser Automat B wäre allerdings genau die Lösung zu unserem `SAT`-Problem, welches laut der Vorlesung ja sogar NPC ist. Daher kann dieser Automat B nicht existieren, woraus folgt, dass A auch nicht existieren kann.
Dies zeigt `2-SAT` $\in NPH$.
Somit muss `2-SAT` in der Schnittmenge von NP und NPH sein, also gilt `2-SAT` $\in NPC$.

4.3.2 Aufgabe 4.3.2

Die folgende Beschreibung verallgemeinert das Spiel *Minesweeper* auf einen ungerichteten Graphen: Sei G ein ungerichteter Graph. Jeder Knoten von G enthält entweder eine einzelne *Mine* oder ist leer. Der Spieler kann einen Knoten wählen. Ist es eine Mine, hat er verloren. Ist der Knoten leer, dann wird dieser mit der Anzahl der direkt benachbarten Knoten beschriftet, die eine Mine enthalten. Der Spieler gewinnt, wenn alle leeren Knoten gewählt wurden. Das Problem ist nun folgendes: Gegeben ein Graph zuzüglich einiger beschrifteter Knoten, ist es möglich Minen so auf die verbleibenden Knoten abzulegen, dass jeder Knoten v, der mit k beschriftet ist, genau k direkt benachbarte Knoten besitzt, die eine Mine enthalten? Formulieren Sie dieses Problem sinnvoll als formale Sprache (und füllen Sie dadurch die Lücken in obiger Beschreibung) und zeigen

Sie dann, dass dieses Problem *NP*-vollständig ist.

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Funktion f, die jedem Knoten v aus V einen Wert $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ zuweist. Dieser Wert kann sich von Knoten zu Knoten unterscheiden.
Frage: Gibt es eine Verteilung von Minen U, sodass jeder Knoten v aus V genau k Nachbarknoten hat, die eine Mine besitzen?

Algorithmus: Wir gehen jeden Knoten durch und belegen - sofern die Zahl auf dem Knoten noch nicht der Anzahl an Nachbarknoten mit einer Mine entspricht - einen beliebigen Nachbarknoten mit einer Mine, bis die Zahl stimmt. Sobald wir an einem Knoten ankommen, der bereits mehr Nachbarknoten mit Minen besitzt, als seine Zahl groß ist, gehen wir einen Knoten zurück und merken uns die bisher gewählte Konfiguration als *falsch* und wählen eine andere. Sollten alle möglichen Konfigurationen - an der Anzahl $\binom{8}{k}$, wobei k der Wert des Knotens ist - als *falsch* markiert worden sein, wird einen Knoten zurück gegangen, die dortige aktuelle Konfiguration als *falsch* markiert und mit dieser neuen Kombination fortgefahren. Wobei jetzt sämtliche Konfigurationen der Folgeknoten wieder möglich sind.

Wird auf diese Weise bis zum ersten Knoten zurückgekehrt und werden dort sämtliche Konfigurationen als *falsch* markiert, gibt der Algorithmus `"false"` aus. Sollte allerdings jede Mine verteilt sein, ohne dass es zu einem Konflikt mit der Zahl auf einem der Knoten kommt, wird `"true"` ausgegeben.
Dies hat eine maximale Laufzeit von $\prod_{i=1}^{n} \binom{8}{k_i} \approx \binom{8}{k}^n \leq \binom{8}{4}^n = 70^n$, wenn für jeden Knoten alle Kombinationen durchlaufen werden müssen, wobei $\binom{8}{k}$ konstant und höchstens $70 = \binom{8}{4}$ ist.
Dies liegt in *NP*.

Reduktion: Wir können es nicht sinnvoll auf ein anderes Problem überführen, damit ist es offensichtlich schwerer als alle Probleme in NP und somit in NPH. Damit ist es auch in *NPC*.

Zettel vom 26. 10. – Abgabe: 07. 12.

Übungsaufgabe 5.1

[| 4]

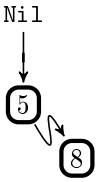
Aufgabe 5.1.1

Führen Sie die in der Vorlesung behandelte Einfügeoperation `TreeInsert` für binäre Suchbäume nacheinander mit den Elementen 5, 8, 9, 6, 7 aus. Zu Anfang sei der Baum leer. Geben Sie den nach jeder Einfügeoperation erhaltenen Suchbaum an. (1 Pkt.)

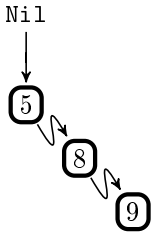
Im Folgenden wurden die `nil`-Blätter der Übersicht halber nicht mitgeführt.

Füge 5 ein:

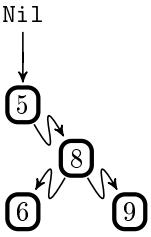
Füge 8 ein:



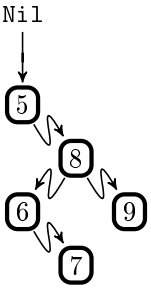
Füge 9 ein:



Füge 6 ein:

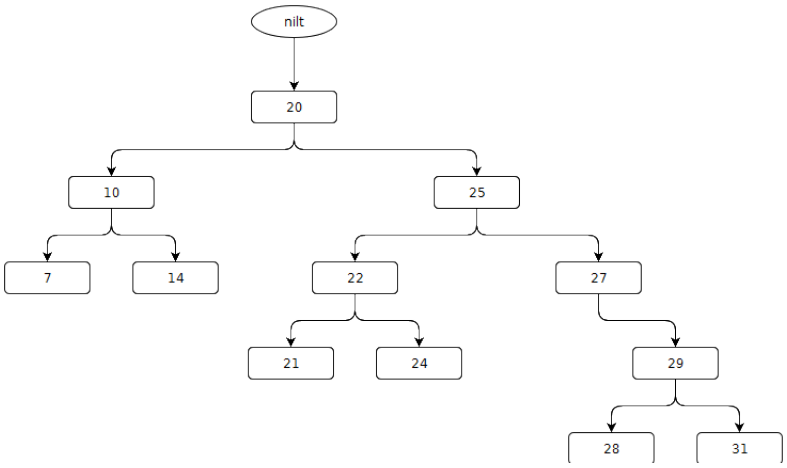


Füge 7 ein:



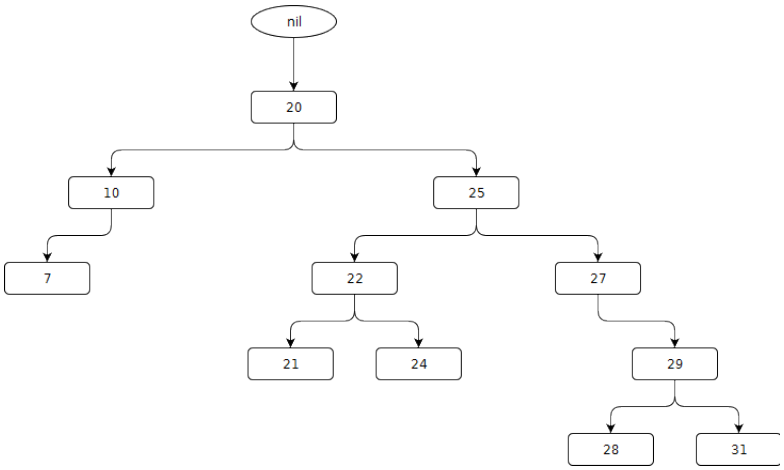
Aufgabe 5.1.2

Gegeben sei folgender binärer Suchbaum:

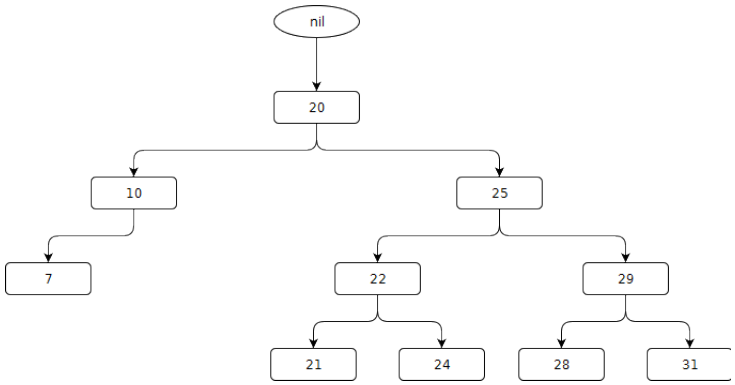


Führen Sie nacheinander die in der Vorlesung behandelte Löschoperation für binäre Suchbäume mit den Elementen 14, 27, 25 aus. Geben Sie den nach jeder Löschoperation erhaltenen Suchbaum an. (3 Pkt.)

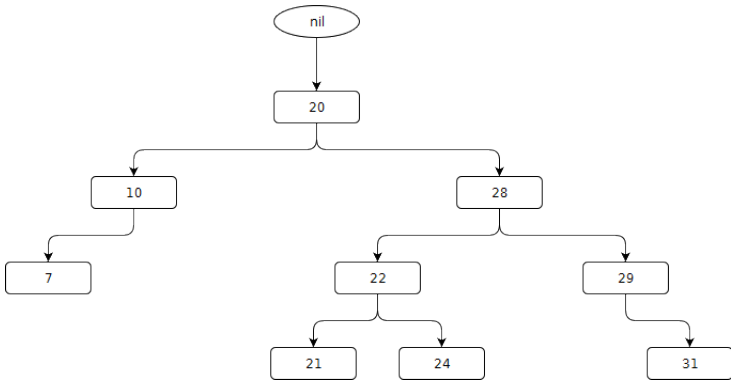
Nach Entfernen der 14:



Nach Entfernen der 27:



Nach Entfernen der 25:



Übungsaufgabe 5.2

[| 4]

Geben Sie für die Routine `InorderTreeWalk` einen nichtrekursiven Algorithmus (3 Pkt.) und für die Routine `TreeMinimum` einen rekursiven Algorithmus (1 Pkt.) an. Erläutern Sie in beiden Fällen unbedingt die Arbeitsweise ihres Algorithmus.

(Hinweis: Beide Routinen wurden in der Vorlesung behandelt. `InorderTreeWalk` *allerdings in rekursiver,* `TreeMinimum` *in nichtrekursiver Darstellung. Für die erste Teilaufgabe hilft ein Vergleich mit der Breiten-*

und Tiefensuche bei Graphen. Für die zweite Teilaufgabe betrachte man die Routine `TreeSearch` *in ihren beiden Varianten.)*

```
inorderTreeWalk_nichtRekursiv(x)
1  AusgabeArray = null
2  TreeMinimum(x)                    ; s. Vorlesung 7 Folie 37
3  AusgabeArray.add(x)
4  while TreeSucessor(x) ≠ nil       ; s. Vorlesung 7 Folie 47
5        x = TreeSucessor(x)
6        AusgabeArray.add(x)
7        return AusgabeArray
```

Dieser Algorithmus sucht sich das Minimum eines Baumes und packt es in ein Array. Danach wird sein Nachfolger gesucht und in das Array gepackt. Sollte ein Knoten irgendwann keinen Nachfolger mehr haben, terminiert der Algorithmus und wir geben das Array aus.

```
TreeMinimum_rekursiv(x)
1  if links[x] ≠ nil :
2  TreeMinimum_rekursiv(links[x])
3  else return x
```

Dieser Algorithmus prüft, ob der aktuelle Knoten ein linkes Kind hat. Ist dies der Fall, wird die Methode rekursiv am linken Kind aufgerufen (das linke Kind wird von seinem Vater gefragt, was denn sein Minimum sei). Sollte dies allerdings nicht so sein und der aktuelle Knoten besitzt kein linkes Kind, dann ist er selbst sein eigenes Minimum und damit auch das Minimum aller Knoten über ihm und wird ausgegeben.

Übungsaufgabe 5.3

[| 4]

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ auf n Knoten. Ferner seien $s, t \in V$ Knoten, deren Distanz (ihr kürzester Abstand) echt größer als $\frac{n}{2}$ sei, d.h. $d(s, t) > n/2$. Zeigen Sie zunächst, dass dann ein von s und t verschiedener Knoten v existieren muss, dessen Löschung alle s-t-Pfade zerstört. (Der Graph G', der aus G entsteht, wenn man v löscht, enthält also keine Pfade von s zu t mehr.)

Geben Sie dann einen Algorithmus an, der den Knoten v findet. Können Sie einen Algorithmus angeben, der in Zeit $O(n + m)$ arbeitet? Erläutern Sie die Arbeitsweise Ihres Algorithmus und begründen Sie seine Korrektheit sowie seine Laufzeit.

(Anmerkung: Die obige Fragestellung tritt bei der Untersuchung von Netzwerken auf. Sie besagt, dass, wenn zwei Knoten zu weit auseinander sind (nur durch viele Zwischenknoten verbunden sind), diese eine anfälligere Verbindung haben als Knoten die dichter beieinander sind. Obiges Resultat zeigt nämlich gerade, dass der Ausfall eines Knotens v genügt, um s und t zu trennen. Allerdings ist die Aussage nicht, dass irgendein Knoten v ausfallen kann und dann sofort s und t getrennt wären, sondern nur, dass (mindestens) ein solcher Knoten existiert.)

Sei G = (V, E) ein Graph. Dieser Graph besitzt die Knoten s, t und v und die Bedingung, dass d(s, t) > |V|/2 gilt. Damit enthält der kürzeste Pfad von s nach t mindestens die Hälfte aller Knoten (Genauer |V|/2 + 2 Knoten, wobei |V|/2 abgerundet wird und die + 2 durch s und t zustandekommen). Um nun einen weiteren Pfad dieser Länge zu kreieren, muss ein Teil des bisherigen Pfades wiederverwertet werden, da sonst nicht

mehr genügend freie Knoten zur Verfügung stünden. Und für jeden weiteren Pfad werden jeweils Teile der alten Pfade wieder verwertet. Irgendwann gehen die nicht benutzten Knoten aus und auch die Möglichkeiten übrige Knoten zu verbinden sind ausgeschöpft dann können weitere Pfade nicht generiert werden. Alle Knoten, die nun in der Schnittmenge aller Pfade liegen, sind potentielle v Kandidaten, da jeder mögliche Pfad sie enthält - sie sozusagen die Schnittstellen aller möglichen kürzesten Pfade sind und so in jedem Pfad vorkommen müssen, damit er ein Pfad von t nach s ist.

Wir setzen an jeden Knoten eine hochlaufende Zahl an, so dass jeder Knoten eine eigene individuelle Zahl erhält ($(O(n)$).
Wir führen eine Breitensuche aus, um den kleinsten Pfad zu bestimmen ($O(n+m)$).
Wir führen eine Tiefensuche aus, um irgendeinen anderen Pfad zu bestimmen ($O(n+m)$).
Da ein Pfad von s nach t existiert, werden beide Varianten dieser Suchen einen Pfad finden.
Wir drehen die die Reihenfolge der Adjazenzlisten um (Für jeden Knoten n müssen alle seine Nachbarn bearbeitet werden. Da eine Kante durch 2 "Nachbarpaareïn der Adjazenzlsite dargestellt wird, ergibt sich eine Laufzeit von $O(n+2*m) = O(n+m)$).
Wir führen eine zweite Tiefensuche durch, um einen Pfad maximal verschieden zum Zweiten zu erhalten ($O(n+m)$).

Nun werden die 3 Listen der Suchen jeweils nach der hochlaufenden Zahl sortiert ($O(Stelligkeit*(Listenlnge+AnzahlverschiedenerStellen))$).[1]

Die Stelligkeit dieser Zahlen ist maximal die Stelligkeit von n. Das Herausfinden dieser Stelligkeit geht mit konstantem Zeitaufwand.

Jede Stelle hat von Natur aus 10 mögliche Werte (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

Die Listenlänge ist im worst-case für jede Liste n.

$\Rightarrow$ Laufzeit: $3*c*(n+10)$. Das liegt in $O(n)$

Nun wird durch die 3 Listen gelaufen und jeweils verglichen, ob die Elemente in jeder dieser Liste drin sind. Da es sich bei diesen Elementen um sortierte Zahlen handelt, die sich innerhalb einer Liste nicht wiederholen, muss sich der Algorithmus jedes Element jeder Liste im worst-case genau einmal anschauen (Laufzeit: $3*n$. Dies liegt in $O(n)$).
Das erste gefundene Element/jedes gefundene Element (im Fall "jedes Element"muss der obige Vergleichsalgorithmus sich immer jedes Element jeder Liste anschauen, verändert aber nicht seine Laufzeit) wird in einen Knoten umgewandelt und ausgegeben (Laufzeit: $c+c$. Dies liegt in $O(c)$).

Gesamtlaufzeit: $O(n)+O(n+m)+O(n+m)+O(n+m)+O(n+m)+O(n)+O(n)+O(c) = O(n+m)$
Idee vollständig?: Ja, da durch die 2 Tiefensuchen mit Umkehrung der Adjazenzliste 2 maximal voneinander unabhängige Pfade gefunden werden. Die Schnittmenge von diesen wird in beiden Pfaden benötigt, um von s nach t zu kommen. Durch die Breitensuche wird dann auch noch garantiert, dass es sich um einen kürzesten Pfad handelt und somit um die minimale Anzahl der Knoten. Dies führt dazu, dass die Schnittmenge von diesem Pfad und den obigen beiden minimal ist. Und in dieser minimalen Schnittmenge ist nun jeder Knoten ein v-Kandidat.

Pseudocode:

```
ein_v_knoten(Graph G, Knoten s, Knoten t)
    //gibt einen möglichen v-Knoten aus
1   List Vs = v_knoten(G,s,t)
2   index = random(Vs.length)
3   return Vs[index]
```

[1] Quelle: s. Vorlesung 5 Folie 46 http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/WS1516/AuD/Folien/aud_v5.pdf

```
v_knoten(Graph G, Knoten s, Knoten t)
    //gibt eine Liste mit allen v-Knoten aus
 1  inti = 0
 2  for KnotenninG
 3       n.zahlenwert = i
 4       i = i + 1
 5  List A = sucheKleinstenPfad(G, s, t)
 6  List B = sucheAnderenPfad(G, s, t)
 7  GraphG' = G
 8  G'.Adjazenzliste = reverse(G.Adjazenzliste)
 9  List C = sucheAnderenPfad(G', s, t)
10  List A' = RadixSort(A nach Knoten.zahlenwert)
    // s. Vorlesung 5 Folie 46; Link: http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/
    // WS1516/AuD/Folien/aud_v5.pdf
11  List B' = RadixSort(B nach Knoten.zahlenwert)
12  List C' = RadixSort(C nach Knoten.zahlenwert)
13  List ErgebnisListe = new List
14  aktuellerKnoten = new Knoten
15  indexA = 0
16  indexB = 0
17  indexC = 0
18  while A'.length > indexA and B'.length > indexB and C'.length > indexC :
    //echt größer, da der Index ab 0 beginnt
19       aktuellerKnoten = A'[indexA]
20       if aktuellerKnoten < B'[indexB]
21            indexA = indexA + 1
22       else if aktuellerKnoten > B'[indexB]
23            indexB = indexB + 1
24       else
              //falls aktuellerKnoten == B'[indexB] ist
25            if aktuellerKnoten < C'[indexC]
26                 indexA = indexA + 1
27            else if aktuellerKnoten > C'[indexC]
28                 indexC = indexC + 1
29            else
                   //falls aktuellerKnoten == C'[indexC] ist
30                 ErgebnisListe.add(aktuellerKnoten)
31                 indexA = indexA + 1
32  return ErgebnisListe

sucheAnderenPfad(Graph G, Knoten s, Knoten t)
    //gibt einen Pfad von s nach t aus aus
1   Tiefensuche(G, s)
2   return bauePfad(G, s, t)
```

```
bauePfad(Graph G, Knoten s, Knoten t)
    //baut gegeben einen durchsuchten Graphen einen Pfad von s nach t
    //(s und t sind nicht in dem Pfad enthalten um später nicht in der Schnittmenge zu landen)
1   Knoten n = t.parent
2   List A = newList
3   while !(n == s)
4   A.add(n)
5   n = n.parent
6
7   Return A
```

```
sucheKleinstenPfad(Graph G, Knoten s, Knoten t)
    // gibt einen kürzesten Pfad von s nach t aus
1   Breitensuche(G, s)
2   return bauePfad(G, s, t)
```

```
Tiefensuche(Graph G, Knoten wurzel)
    // führt eine Tiefensuche auf dem Graphen durch
 1  for Knoten n in G
 2      n.entdeckt = false
 3      n.parent = NIL
 4  StackS = newStack
 5  S.push(wurzel)
 6  Knoten aktuellerKnoten = NULL
 7  while !(Sisempty)
 8      aktuellerKnoten = S.pop()
 9      if aktuellerKnoten.entdeckt == false
10          aktuellerKnoten.entdeckt = true
11      for Knoten m in aktuellerKnoten.AdjazenzListe
12          S.push(m)
13      m.parent = aktuellerKnoten
```

```
Breitensuche(Graph G, Knoten wurzel)
    // führt eine Breitensuche auf dem Graphen durch
 1  for Knoten n in G
 2      n.distanz = INFINITY
 3      n.parent = NIL
 4  Queue Q = new Queue
 5  wurzel.distanz = 0
 6  q.enqueque(wurzel)
 7  Knoten aktuellerKnoten = NULL
 8  while !(Qisempty)
 9      aktuellerKnoten = Q.dequeue()
10      for Knoten m in aktuellerKnoten.Adjazenzliste
11          if m.distanz == INFINITY
12              m.distanz = aktuellerKnoten.distanz + 1
13              m.parent = aktuellerKnoten
14              q.enqueue(m)
```

Übungsaufgabe 5.4

[| 4]

Aufgabe 5.4.1

Im Problem `Big-Clique` ist ein ungerichteter Graph G gegeben. Die Frage ist, ob G eine Clique enthält, die aus mindestens $\frac{n}{2}$ Knoten besteht (wobei n die Anzahl der Knoten von G ist). Zeigen Sie, dass `Big-Clique` NP-vollständig ist. (2 Pkt.)

Big-Clique liegt in NP.
Verifikationsalgorithmus, der die Richtigkeit eines gegebenen Zertifikates in polynomialzeit überprüft:
Unser Zertifikat: Eine Menge an Knoten - unsere Clique - und der Graph
Wir schauen in der Adjazenzliste nach, ob zu jedem gegebenen Knoten, zu allen anderen gegebenen Knoten eine Kante existiert. Ist dies der Fall, ist das Zertifikat richtig, sonst nicht.
Big-Clique liegt in NPH.
Reduktion eines Algorithmusses aus NPH auf Big-Clique:
Wir nehmen Clique(G, k): G = (V, K) Graph, k = Größe der Clique
Wenn unser k größer oder gleich |V|/2 ist, geben wir das Problem einfach in Big-Clique.
Ist es allerdings kleiner, fügen wir für jeden Knoten, der uns auf |V|/2 fehlt, 2 Knoten an den Graphen an, die wir jeweils mit Kanten zu allen anderen Knoten versehen.
Diesen neuen Graphen fügen wir in den Automaten ein, der Big-Clique löst und geben die Lösung als unsere Lösung für unser Clique-Problem aus.
Da wir beides obere haben, folgt daraus: Big-Clique liegt in NPC

Aufgabe 5.4.2

Geben Sie unter der Annahme $P = NP$ einen deterministischen Algorithmus an, der in polynomieller Zeit zu einem ungerichteten Graphen G eine maximal große Clique bestimmt. (2 Pkt.)

Verifikationsalgorithmus, der die Richtigkeit eines gegebenen Zertifikates in polynomialzeit überprüft:
Unser Zertifikat: Eine Menge an Knoten - unsere größte mögliche Clique - und der Graph
Wir geben unseren Graph und die Zahl k = |Menge an Knoten| + 1 in Clique.
Wenn Clique wahr ausgibt, ist das Zertifikat falsch, da eine größere Clique existiert.
Dies läuft in polynomialzeit, da P = NP angenommen wird.
Durch diesen Verifikationsalgorithmus ist unser Problem in NP.
Unter der Annahme P = NP existiert allerdings auch ein P-Algorithmus und dieser ist deterministisch.