Hausaufgaben zum 07. Mai 2015

Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

06.05.2015

Aufgabe 1

Bestätigen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

die Gültigkeit des Assoziativgesetzes $A(BC) = (AB)C$.

$$Berechnung\ von\ BC:$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$Multiplikation\ mit\ A:$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 76 \\ -54 & -108 \\ -22 & -44 \end{pmatrix}$$

$$Berechnung\ von\ AB:$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 4 \\ 6 & -20 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

$$Multiplikation\ mit\ C:$$

$$\begin{pmatrix} 26 & 4 \\ 6 & -20 \\ 14 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 76 \\ -54 & -108 \\ -22 & -44 \end{pmatrix}$$

Wie man hier sehen kann, kommt bei beiden Rechnungen die gleiche Matrix heraus. Ergo ist $A(BC) = (AB)C$, und somit gilt hier das Assoziativgesetz.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestätigen Sie für diese Matrizen die Gültigkeit des Distributivgesetzes

$$C(A + B) = CA + CB$$

$$\textit{Berechnen von } A+B:$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\6 & 7\end{pmatrix}$$

$$\textit{Multiplizieren mit } C:$$
$$\begin{pmatrix}2 & 1\\6 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5 & 7\\7 & -1\\8 & 2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}52 & 54\\8 & 0\\28 & 22\end{pmatrix}$$

$$\textit{Berechnen von } CA:$$
$$\begin{pmatrix}5 & 7\\7 & -1\\8 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}26 & 45\\4 & 9\\14 & 26\end{pmatrix}$$

$$\textit{Berechnen von } CB:$$
$$\begin{pmatrix}5 & 7\\7 & -1\\8 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}26 & 9\\4 & -9\\14 & -4\end{pmatrix}$$

$$\textit{Addieren von } CA \textit{ und } CB:$$
$$\begin{pmatrix}26 & 45\\4 & 9\\14 & 26\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}26 & 9\\4 & -9\\14 & -4\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}52 & 54\\8 & 0\\28 & 22\end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass in beiden Fällen die gleiche Matrix herauskommt. Folglich gilt das Distributivgesetz.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Zeilenrang und den Spaltenrang der folgenden Matrix, indem Sie eine maximale Menge von linear unabhängigen Zeilen und eine maximale Menge von linear unabhängigen Spalten auswählen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v_1(3,4,5,6)$$

$$v_2(2,3,4,5)$$

$$v_3(1,2,3,4)$$

$$v_4(4,7,6,4)$$

$$v_1 \quad \Rightarrow \quad lin.\ unabh.$$

$$v_1,\ v_2:$$

$$\begin{array}{llllll} I & 3 & 2 & 0 & & (I:3) \\ II & 4 & 3 & 0 & & \\ III & 5 & 4 & 0 & & \\ IV & 6 & 5 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} I & 1 & \frac{2}{3} & 0 & & \\ II & 4 & 3 & 0 & & (II - 4 \cdot I) \\ III & 5 & 4 & 0 & & (III - 5 \cdot I) \\ IV & 6 & 5 & 0 & & (IV - 6 \cdot I) \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} I & 1 & \frac{2}{3} & 0 & & \\ II & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & (II \cdot 3) \\ III & 0 & \frac{2}{3} & 0 & & \\ IV & 0 & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} I & 1 & \frac{2}{3} & 0 & & \\ II & 0 & 1 & 0 & & \\ III & 0 & \frac{2}{3} & 0 & & (III - \frac{2}{3} II) \\ IV & 0 & 1 & 0 & & (IV - II) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} I & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ II & 0 & 1 & 0 \\ III & 0 & 0 & 0 \\ IV & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Einzige Lösung: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1,\ v_2\ lin.\ unabh.$

$$v_1,\ v_2,\ v_3:$$

$$\begin{array}{lccccl}
I & 3 & 2 & 1 & 0 & (I:3) \\
II & 4 & 3 & 2 & 0 & \\
III & 5 & 4 & 3 & 0 & \\
IV & 6 & 5 & 4 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl}
I & 1 & \frac{2}{3} & 0 & & \\
II & 4 & 3 & 2 & 0 & (II-4\cdot I) \\
III & 5 & 4 & 3 & 0 & (III-5\cdot I) \\
IV & 6 & 5 & 4 & 0 & (IV-6\cdot I)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl}
I & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\
II & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & (II\cdot 3) \\
III & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \\
IV & 0 & 1 & 2 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl}
I & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\
II & 0 & 1 & 2 & 0 & \\
III & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & (III-\frac{2}{3}\cdot II) \\
IV & 0 & 1 & 2 & 0 & (IV-II)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl}
I & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & (I-\frac{2}{3}\cdot II) \\
II & 0 & 1 & 2 & 0 & \\
III & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
IV & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc}
I & 1 & 0 & -1 & 0 \\
II & 0 & 1 & 2 & 0 \\
III & 0 & 0 & 0 & 0 \\
IV & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Es gibt nicht-triviale Lösungen ($x-z=0,\ y+2z=0$): $\Rightarrow\quad v_1,\ v_2,\ v_3\ \ lin.abh.$