Hausaufgaben zum 14. Mai 2015

Mathematik für Studierende der Informatik II
(Analysis und Lineare Algebra)

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann
6706472
fwuy089@studium.uni-hamburg.de

11. Mai 2015

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix zu invertieren, ist ebenjene Matrix B gesucht, mit der die gegebene Matrix multipliziert werden muss, um die Einheitsmatrix zu erhalten.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Daraus ergeben sich folgende neun Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
I & 1 = 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + (-1) \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{31} + 1 = a_{11} + a_{21} \\
II & 0 = 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{32} & \Rightarrow a_{32} = a_{12} + a_{22} \\
III & 0 = 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + (-1) \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{33} = a_{13} + a_{23} \\
 & & \\
IV & 0 = 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{21} = -a_{31} \\
V & 1 = 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\
VI & 0 = 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{23} = -a_{33} \\
 & & \\
VII & 0 = 2 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \\
VIII & 0 = 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\
IX & 1 = 2 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} &
\end{array}$$

Durch die offensichtlichen Umformungen und das Einsetzen von Gleichungen ineinander ermitteln wir nun die Werte $(a_{ij})_{i,j \in [1,2,3]}$ als Lösungen dieses Gleichungssystems.

$Wir\ beginnen\ mit\ der\ ersten\ Spalte:$

$Einsetzen\ von\ IV\ in\ I:$

$$a_{31} + 1 = a_{11} + (-a_{31})$$
$$\Rightarrow \quad a_{11} = a_{31} + a_{31} + 1 = 2 \cdot a_{31} + 1$$

$Einsetzen\ von\ a_{11}\ und\ a_{21}\ in\ VII:$

$$0 = 2 \cdot (2 \cdot a_{31} + 1) + 2 \cdot (-a_{31}) + 1 \cdot a_{31} = 4 \cdot a_{31} + 2 - 2 \cdot a_{31} + a_{31}$$
$$= 2 + 3 \cdot a_{31}$$
$$\Rightarrow \quad a_{31} = -\frac{2}{3}$$

$Einsetzen\ von\ a_{31}\ in\ a_{11}\ und\ a_{21}:$

$$a_{21} = -a_{31} = \frac{2}{3}$$
$$a_{11} = 2 \cdot a_{31} + 1 = -\frac{1}{3}$$

$Fortfahren\ mit\ der\ zweiten\ Spalte:$

$Einsetzen\ von\ II\ in\ VIII:$

$$0 = 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot (a_{12} + a_{22})$$
$$= 3 \cdot a_{12} + 3 \cdot a_{22}$$
$$\Rightarrow \quad a_{12} = -a_{22}$$

$Einsetzen\ von\ a_{32}\ in\ V:$

$$1 = 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot (a_{22} - a_{22})$$
$$\Rightarrow \quad a_{22} = 1$$

$Einsetzen\ von\ a_{22}\ in\ a_{12}\ und\ a_{32}:$

$$a_{12} = -a_{22} = -1$$
$$a_{32} = a_{22} - a_{22} = 1 - 1 = 0$$

$Fortfahren\ mit\ der\ dritten\ Spalten:$

$Einsetzen\ von\ VI\ in\ III:$

$$0 = 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot (-a_{33} + (-1) \cdot a_{33}$$
$$\Rightarrow \quad a_{13} = 2 \cdot a_{33}$$

$Einsetzen\ von\ a_{13}\ und\ a_{23}\ in\ IX:$

$$1 = 2 \cdot (2 \cdot a_{33}) + 2 \cdot (-a_{33}) + 1 \cdot a_{33} = 4 \cdot a_{33} - 2 \cdot a_{33} + 1 \cdot a_{33} = 3 \cdot a_{33}$$
$$\Rightarrow \quad a_{33} = \frac{1}{3}$$

$Einsetzen\ von\ a_{33}\ in\ a_{13}\ und\ a_{23}:$

$$a_{13} = 2 \cdot a_{33} = \frac{2}{3}$$
$$a_{23} = -a_{33} = -\frac{1}{3}$$

Anhand dieser Werte für a_{ij} stellen wir nun die Matrix B auf:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Matrix handelt es sich um das Inverse der Matrix A aus der Aufgabe.

Probe:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Damit ist die Probe gemacht.

$$\begin{array}{l} I \\ II \\ III \\ \\ IV \\ V \\ VI \\ \\ VII \\ VIII \\ IX \end{array}$$

Aufgabe 2

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei A die Matrix aus Aufgabe 1 ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für zwei (2×2)-Matrizen A und B tatsächlich die Formel

$$Det(A)Det(B) = Det(AB)$$

gilt.

Aufgabe 4

Die Folge $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Damit existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}| < \frac{1}{3}$ gilt. Bestimmen Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, das das leistet.

Aufgabe 5

Es sei $a \in \mathbb{R}$ irgendeine Zahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Man zeige nur unter Benutzung der Definition von Konvergenz, dass die Folge $(a + a_n)_{n\in\mathbb{N}7}$ gegen a konvergiert.