Mathematik für Studierende der Informatik II
Analysis und Lineare Algebra

Abgabe der Hausaufgaben zum 9. Juli 2015

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

9. Juli 2015

Aufgabe 1

[/4]

Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$(a) \quad \int_{-1}^{1}(x^2 - x + 2)dx \qquad\qquad (b) \quad \int_{0}^{2\pi}(x + \cos x)dx$$

(a)

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(x^2 - x + 2)dx \\
&= \left[-\frac{1}{6}x^3 \;-\; \frac{1}{2}x^2 \;+\; \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{6}\cdot 1^3 \;-\; \frac{1}{2}\cdot 1^2 \;+\; \frac{3}{2}\cdot 1\right) \;-\; \left(-\frac{1}{6}\cdot(-1)^3 \;-\; \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 \;+\; \frac{3}{2}\cdot(-1)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \;-\; \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{6} + 1\right) \;-\; \left(\frac{1}{6} - 2\right) \\
&= \frac{5}{6} \;-\; \left(-\frac{7}{6}\right) \\
&= \frac{5}{6} \;+\; \frac{7}{6} \\
&= \frac{12}{6} \\
&= 2
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{2}(x^3+x^2)dx\\
&=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}\\
&=\left(\frac{1}{4}\cdot(2)^4+\frac{1}{3}\cdot(2)^3\right)\ -\ \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4+\frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right)\\
&=\left(\frac{16}{4}+\frac{8}{3}\right)\ -\ \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\\
&=\left(\frac{48}{12}+\frac{32}{12}\right)\ -\ \left(\frac{3}{12}-\frac{4}{12}\right)\\
&=\left(\frac{80}{12}\right)\ -\ \left(-\frac{1}{12}\right)\\
&=\frac{81}{12}\\
&=\frac{27}{4}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

[/4]

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $-x^2+1$ eingeschlossen ist.

$f(x) = -x^2 + 1$
Nullstellen:

$$0 = -x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx\\
&=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}\\
&=\left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3\ +\ 1\right)\ -\ \left(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3\ +\ (-1)\right)\\
&=\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\right)\ -\ \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{3}\right)\\
&=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\\
&=\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

[/4]

Bestimmen Sie x so, dass das bestimmte Integral genau den Wert 2 hat.

$$\int_1^x \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt$$

$$\begin{aligned}
\int_1^x \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt \;&=\; 2 \\
= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t\right]_1^x & \\
= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x\right) \;-\; \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 1\right) & \\
= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x\right) \;-\; \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) & \\
= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x\right) \;-\; 0 & \\
= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x\right) \quad &= \; 2 \\
\Leftrightarrow \quad 1x^3 - 1x = 6 \quad & \Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad x(x^2-1) = 6 & \\
\Leftrightarrow \quad x_1 = 2 &
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\big(x^3 \qquad\quad - x - 6\big) : \big(x-2\big) = x^2 + 2x + 3 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad 2x^2 - x \\
\qquad \underline{-2x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad 3x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{-3x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_{2/3} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2}^2 - 3} \\
&= -1 \pm \sqrt{-2} \\
&= -1 \pm \sqrt{2}i
\end{aligned}$$

$i \notin \mathbb{R} \Rightarrow x = 2$ ist einzige Nullstelle

Aufgabe 4

[/4]

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

$$(a) \quad \int x^2 e^x dx \qquad\qquad (b) \quad \int x \ln x dx$$

Hinweis: Unter Umständen muss die partielle Integration mehrmals angewendet werden.

(a)

$$\int (x^2 e^x) dx \begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 e^x \ - \ \int (2xe^x) dx \begin{cases} u(x) = 2x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \\
&= x^2 e^x \ - \ (2xe^x - \int (2e^x) dx) && \text{(Integrieren ist linear)} \\
&= x^2 e^x - (2xe^x - 2 \int (e^x) dx) \\
&= x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) \\
&= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \\
&= e^x (x^2 - 2x + 2)
\end{aligned}$$

(b)

$$\int (x \ln x) dx \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= x \ln x - \int \left(\frac{1}{x} \frac{1}{2} x 2 \right) dx && \text{(Differenzieren ist linear)} \\
&= x \ln x - \int \left(\frac{1}{2} x \right) dx \\
&= x \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\
&= x \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 \\
&= x \left(\ln x \ - \ \frac{1}{4} \right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

[/4]

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale mit der Substitutionsmethode:

$$(a) \quad \int 4xe^{x^2-4}dx \qquad\qquad (b) \quad \int \frac{\ln x}{x}dx$$

(a)

$$\int (4xe^{x^2-4})dx \qquad\qquad u = g(x) := x^2 - 4$$

$$g'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \int (4xe^u)\frac{du}{(x^2-4)'} \\
&= \int (4xe^u)\frac{du}{2x} \\
&= \int 2e^u du \\
&= 2e^u + c \qquad\qquad u \text{ resubstituieren} \\
&= 2e^{x^2-4} + c
\end{aligned}$$

(b)

$$\int \frac{\ln x}{x}dx \qquad\qquad u = g(x) := \ln x$$

$$g'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{u}{x}\frac{du}{(\ln x)'} \\
&= \int \frac{u}{x}\frac{du}{\frac{1}{x}} \\
&= \int \frac{u}{x}xdu \\
&= \int udu \\
&= u + c \qquad\qquad u \text{ resubstituieren} \\
&= \ln x + c
\end{aligned}$$