

Formale Grundlagen der Informatik I

Abgabe der Hausaufgaben in Übungsgruppe 24

Louis Kobras

6658699

4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann

6663579

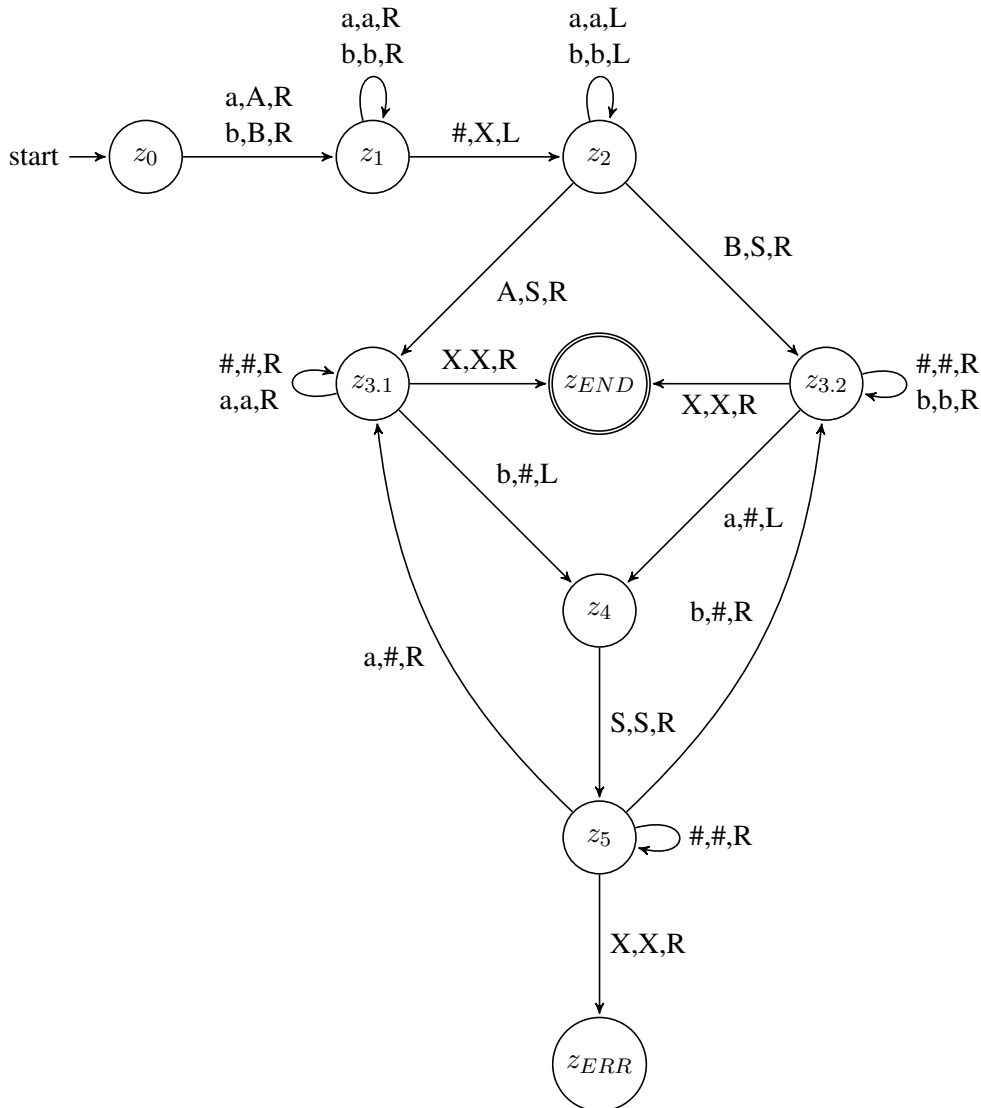
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Philipp Quach

6706421

4quach@informatik.uni-hamburg.de

Aufgabe 5.4



$L \subseteq L(A)$:

Unser Wort fängt entweder mit a oder mit b an. Wir zeigen OBDA, dass es für a eine Erfolgsrechnung gibt (der Beweis für b ist analog hierzu): Wir ersetzen den Startbuchstaben durch den entsprechenden Großbuchstaben, um ihn später wiederzufinden. Dann gehen wir das Wort bis zum Ende durch und setzen uns einen Marker X . Danach gehen wir wieder an den Anfang zurück. Dort ersetzen wir das A durch ein S , um es als Wortanfang wiederzufinden.

F: Danach suchen wir uns das erste b und ersetzen es durch eine $\#$. Anschließend gehen zurück zu dem S zurück und suchen uns das nächste Zeichen $\neq \#$. Sei es OBDA ein a (analog b). Verfahre nach F .

Wenn man innerhalb von F an das X gelangt, hat das Wort mindestens ein a (analog b) mehr als bs und akzeptiert, andernfalls nicht.

$L(A) \subseteq L$:

Wir markieren den ersten Buchstaben, schreiben an das Ende des Wortes ein X und gehen zurück an den Anfang. **G:** Dort ersetzen wir jetzt das A (analog B), welches sich dort befindet, durch ein S und löscht das nächste b (analog a). Danach geht man wieder zurück zu S und wiederholt G .

Sollte man während der Ausführung von G auf X treffen, hat man mindestens ein a (analog b) mehr als bs gefunden und akzeptiert das Wort damit, andernfalls nicht.

Aufgabe 5.5

$$G = \{V_N, V_T, P, S\}$$

$$L(G) := \{w \in V_T^* \mid S \xrightarrow[G]{*} w\}$$

$$V_T := \{a, b, c\}$$

$$V_N := \{S, A, B, C\}$$

$$S := S$$

$$P := \{S \rightarrow ABC, A \rightarrow aA \mid \lambda, B \rightarrow aBb \mid \lambda, C \rightarrow bCc \mid \lambda\}$$

$L_1 \subseteq L(G)$ (G erzeugt jedes Wort aus L_1)

$$L_1 = \{a^j a^i b^i b^k c^k \mid i, j, k \geq 0\}$$

Es werden erst beliebig viele as (I), dann $a^x b^x$ (II) und zum Schluss $b^y c^y$ (III) gelesen ($x, y \in \mathbb{N}_0$).

I ist gegeben durch $S \rightarrow ABC \wedge A \rightarrow aA \mid \lambda$

\Rightarrow für A kann man schreiben $a^n \mid n \in \mathbb{N}_0$ ($\hat{=} a^j$)

II ist gegeben durch $S \rightarrow ABC \wedge B \rightarrow aBb \mid \lambda$

\Rightarrow für B kann man schreiben $a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0$ ($\hat{=} a^i b^i$)

III ist gegeben durch $S \rightarrow ABC \wedge C \rightarrow bCc \mid \lambda$

\Rightarrow für C kann man schreiben $b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_0$ ($\hat{=} b^k c^k$)

$$\Rightarrow (a^j)(a^i b^i)(b^k c^k) = a^{i+j} b^{i+k} c^k \quad | i, j, k \geq 0 \text{ ist gegeben}$$

$$\Rightarrow L_1 = L(G) \text{ und insb.}$$

$$L_1 \subseteq L(A)$$

$L(G) \subseteq L_1$ (Jedes von G erzeugte Wort ist auch in L_1)

Durch $S \rightarrow ABC$ wird jedes Wort in drei Teilworte aufgeteilt: A (I), B (II), und C (III).

I. Aus A wird aA oder $\lambda \Rightarrow a^n \mid n \in \mathbb{N}_0$, da auch beim ersten Aufruf gleich die λ -Variante genommen werden kann. ($\hat{=} a^j$)

II. Aus B wird aBb oder $\lambda \Rightarrow a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0$, da λ von I. ($\hat{=} a^i b^i$)

III. Aus C wird bCc oder $\lambda \Rightarrow b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_0$, da λ . ($\hat{=} b^k c^k$)

$$\Rightarrow (a^j)(a^i b^i)(b^k c^k) = a^{i+j} b^{i+k} c^k \mid i, j, k \geq 0$$

$$L(G) = L_1 \text{ und insb.}$$

$$L(G) \subseteq L_1$$

Aufgabe 5.6

Teilaufgabe 1.

Die einfachste Möglichkeit wäre es, eine rechtsunendliche TM mit zwei Bändern zu benutzen. Dann kann das zweite Band wie ein Keller (i.F. 'Stack') behandelt werden:

Wird etwas auf den Stack gepusht, fährt der Automat zu der entsprechenden Position auf dem zweiten Band und schreibt, um danach wieder zurück zu der Stelle im Wort zu gehen, von der aus der Stack aufgerufen wurde. Wird etwas gepopt, so fährt der Automat wieder zu der entsprechenden Stelle und löscht; anschließend fährt er zurück zu der Stelle im Wort, von der aus der Stack aufgerufen wurde.

Da zu jedem PDA, der mit leerem Keller akzeptiert, ein PDA existiert, welcher mit Endzuständen akzeptiert, nimmt man nun jenen mit Endzustand. Da jede Kante des PDA mehrere Kanten der TM ersetzt wurde, nämlich eine für den Schreibvorgang, eine für den Löschvorgang und jeweils ausreichend, um zu den jeweiligen Stellen auf Band 2 zu gelangen, gelangt die TM letztendlich auch in einen Endzustand.

Teilaufgabe 2.

Es handelt sich wiederum um eine TM mit zwei rechtsunendliche Bändern.

Zunächst werden n a s gelesen. Für jedes a wird ein A auf Band 2 geschrieben.

Für jedes b wird ein A auf Band 2 in ein B konvertiert.

Analog dazu wird für jedes gelesene c ein B in ein C konvertiert.

Nachdem das erste b gelesen wurde, kann kein A mehr geschrieben werden. Mit a^*b^*a fährt der Automat in einen Fehlerzustand Z_{ERROR} .

Analog für c in Abhängigkeit von b und a .

Daraus folgt ein Wortaufbau in der Form $a^*b^*c^*$.

Sollten nun beispielsweise bei einem b (analog dazu c) mehr b s folgen, als A s auf Band 2 stehen, wird Z_{ERROR} aufgerufen.

$$\Rightarrow a^n b^m c^o \mid n \geq m \geq o$$

Am Ende wird nur noch geprüft, ob auf Band 2 ausschließlich C (und etwaige $\#$) stehen. Wenn ja, so wurden alle A s in B s und alle B s in C s konvertiert, woraus folgt, dass es jeweils gleich viele gewesen sein müssen. $\Rightarrow a^n b^m c^o \mid n = m = o$.

Ist dies nicht der Fall, bestand das Wort aus mehr a s als b s oder aus mehr b s als c s. Folglich wird das Wort nicht akzeptiert. Der Automat geht nur in einen Endzustand, wenn Band in der Form C^* mit beliebig vielen anschließenden $\#$ vorliegt und das Wort zu Ende gelesen wurde.