Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Modul: MATH3-Inf

Veranstaltung: 65-832

Übungsgruppe 2

Dienstag, 14.15 - 15.00

Geom 431

Utz Pöhlmann

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

6663579

Louis Kobras

4kobras@informatik.uni-hamburg.de

6658699

5. Juli 2016

Punkte für die Hausübungen:

12.1	12.2	12.3	Σ

Zettel Nr. 1 (Ausgabe: 28. Juni 2016, Abgabe: 28. Juni 2016)

Hausübung 1.1

[| 10]

(3+4+3 Punkte). Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze den Funktionsterm

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass f tatsächlich eine Dichte ist. *Hinweis:* Es empfiehlt sich, den Integrationsbereich $(-\infty, \infty)$ in $(-\infty, 0)$ und $[0, \infty)$ aufzuteilen.

b) Die Verteilung der reellen Zufallsvariable X besitze die Dichte f. Außerdem seien $A = \{X \geq 0\}$ und $B = \{-1 \leq X \leq 1\}$. Bestimmen Sie $P(A)$ und $P(B)$. *Hinweise:*

- Als Zufallsvariable bildet die Funktion X von einem Grundraum Ω in die reellen Zahlen ab. Insofern ist formal vollständig $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 0\}$. Mit den in der Stochastik üblichen Schreibweisen ist einfach $P(A) = P(X \geq 0)$ und entsprechend $P(B) = P(-1 \leq X \leq 1)$ zu interpretieren.
- Zur Kontrolle sei hier auch das Ergebnis (wichtig ist der Rechenweg) $P(B) = 1 - e^{-1}$ angegeben.

c) Bestimmen Sie auch $P(A \cap B)$ und entscheiden Sie, ob A und B unabhängig sind.

Teilaufgabe a)

Eine Dichte muss immer positiv sein:
Durch das $-|x|$ wird der Ausdruck immer negativ (oder 0). Nach Definition nimmt die natürliche Exponentialfunktion für $x = [-\infty, 0]$ Werte zwischen 0 und 1 ein. Durch das $\cdot \frac{1}{2}$ wird dieses Intervall halbiert auf $[0, \frac{1}{2}]$. Somit gilt $f(x) \geq 0$

Des Weiteren muss für eine Dichte gelten: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-|x|} \\
&= \int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{2} e^{-|x|} + \int_{0}^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-|x|} \\
&= \left[-\tfrac{[x]}{2x} e^{-|x|} \right]_{-\infty}^{0} + \left[-\tfrac{[x]}{2x} e^{-|x|} \right]_{0}^{\infty} \\
&= -\tfrac{[0]}{2 \cdot 0} e^{-|0|} - \lim_{a \to -\infty} -\tfrac{[a]}{2a} e^{-|a|} + \lim_{b \to \infty} -\tfrac{[b]}{2b} e^{-|b|} - \left(-\tfrac{[0]}{2 \cdot 0} e^{-|0|} \right)
\end{aligned}$$

`//TODO: Rest von 12.1`

NR:
Bilden der Stammfunktion von $\frac{1}{2} e^{-|x|}$

$$\begin{aligned}
\int f(x) &= \int \tfrac{1}{2} e^{-|x|} dx \\
&= \tfrac{1}{2} \int e^{-|x|} dx && \backslash z = -|x| \\
&= \tfrac{1}{2} \int e^{z} dx && \backslash \tfrac{dz}{dx} = (-|x|)' = -\tfrac{x}{|x|} \Leftrightarrow dx = -\tfrac{|x|}{x} dz \\
&= \tfrac{1}{2} \int e^{z} \cdot -\tfrac{|x|}{x} dz && \backslash \text{umstellen} \\
&= \tfrac{1}{2} \int -\tfrac{|x|}{x} e^{z} dz && \backslash \int a \cdot e^{z} dz = a \cdot e^{z} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{|x|}{x} e^{z} \right) && \backslash \text{ausmultiplizieren} \\
&= -\tfrac{|x|}{2x} e^{z} && \backslash z \text{ einsetzen} \\
&= -\tfrac{[x]}{2x} e^{-|x|}
\end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

Teilaufgabe c)

Hausübung 1.2

[| 11]

(4+7 Punkte). Die Verteilung der reellen Zufallsvariable X habe die Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der rellen Zufallsvariable Y habe die Dichte $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Es ist bekannt, dass

$$f(x) = \begin{cases} \gamma x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \gamma(2-x) & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & sonst \end{cases}$$

mit einem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt. Skizzieren Sie den Graphen von f und bestimmen Sie γ so, dass f tatsächlich eine Dichte wird.

b) Es ist bekannt, dass

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & sonst \end{cases}$$

gilt. Zeigen Sie, dass g für alle $a > 0$ eine Dichte ist, und bestimmen Sie a so, dass $P(Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ wird.

Teilaufgabe a)

Für Definition einer Dichte siehe Aufgabe 12.1 a)

$$\begin{array}{rcl|l||rcl|l} 0 & \leq & \gamma x & & 0 & \leq & \gamma(2-x) & \\ \frac{0}{x} & \leq & \gamma & \text{Fall 1: } 1 \geq x > 0 & \frac{0}{2-x} & \leq & \gamma & \text{Fall 1: } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \leq & \gamma & & 0 & \leq & \gamma & \\ \frac{0}{x} & \leq & \gamma & \text{Fall 2: } x = 0 & \frac{0}{2-x} & \leq & \gamma & \text{Fall 2: } x = 2 \\ 0 & \leq & \gamma 0 & & 0 & \leq & \gamma(2-2) & \\ 0 & \leq & 0 & & 0 & \leq & \gamma 0 & \\ & & & & 0 & \leq & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \gamma$ darf beliebig größergleich 0 gewählt werden.

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) & = & \int_{-\infty}^{0} 0 \ dx + \int_0^1 \gamma x \ dx + \int_1^2 \gamma(2-x) \ dx + \int_2^{\infty} 0 \ dx \\ & = & 0 + \int_0^1 \gamma x \ dx + \int_1^2 \gamma(2-x) \ dx + 0 \\ & = & \int_0^1 \gamma x \ dx + \int_1^2 2\gamma - 2x \ dx \\ & = & \left[\frac{\gamma}{2}x^2\right]_0^1 + \left[2\gamma x - x^2\right]_1^2 \\ & = & \frac{\gamma}{2}1^2 - \frac{\gamma}{2}0^2 + 2\gamma 2 - 2^2 - 2\gamma 1 - 1^2 \\ & = & 0.5\gamma - 0 + 4\gamma - 4 - 2\gamma - 1 \\ & = & 2.5\gamma - 5 \end{array}$$

Damit $f(x)$ eine Dichte wird muss 1 herauskommen:

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & 2.5\gamma - 5 & \backslash +5 \\ 6 & = & 2.5\gamma & \backslash : 2.5 \\ 2.4 & = & \gamma & \end{array}$$

Somit ist $\gamma = 2.4$.
Für die Skizze siehe Abbildung 1

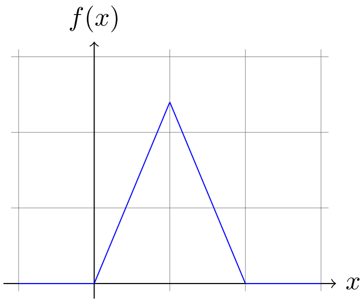

Abbildung 1: f(x) für $x \in [-1, 3]$

Teilaufgabe b)

Nach Aufgabenstellung ist $a - x \geq 0$

$$
\begin{array}{rcl|l}
0 & \leq & \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{Fall 1: a = 0} \\
0 & \leq & \frac{2(0-x)}{0^2} & \\
0 & \leq & \frac{-2x}{0} & \\
0 & \leq & - & \text{Durch 0 darf nicht geteilt werden} \\
0 & \leq & \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{Fall 2: a > 0}
\end{array}
$$

Da $a > 0$ angenommen wurde, gilt $\frac{2(a-x)}{a^2} \geq 0$.
Fall 3: $a < 0$ ist laut Aufgabenstellung nicht möglich.

Es wird im weiteren Verlauf also nur noch Fall 2 betrachtet:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x) &= \int_{-\infty}^{0} 0 \; dx + \int_0^a \frac{2(a-x)}{a^2} \; dx + \int_a^{\infty} 0 \; dx \\
&= 0 + \int_0^a \frac{2(a-x)}{a^2} \; dx + 0 \\
&= \int_0^a \frac{2(a-x)}{a^2} \; dx \\
&= \int_0^a \frac{2}{a^2}(a-x) \; dx \\
&= \frac{2}{a^2} \int_0^a (a-x) \; dx \\
&= \frac{2}{a^2} \left(\int_0^a a \; dx - \int_0^a x \; dx \right) \\
&= \frac{2}{a^2} \left([a \cdot x]_0^a - [\tfrac{x^2}{2}]_0^a \right) \qquad \backslash\text{Referenz für Aufgabenteil 2} \\
&= \frac{2}{a^2} \left(a \cdot a - 0 \cdot a - (\tfrac{a^2}{2} - \tfrac{0^2}{2}) \right) \\
&= \frac{2}{a^2} \left(a^2 - 0 - \frac{a^2}{2} + 0 \right) \\
&= \frac{2}{a^2} \left(a^2 - \frac{a^2}{2} \right) \\
&= \frac{2}{a^2} \cdot a^2 - \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{2} \\
&= 2 - 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Da sich das a rausgekürzt hat, ist $g(x)$ eine Dichte für alle $a < 0$.

Aufgabenteil 2:

$$\begin{aligned}
P(Y \leq \tfrac{1}{2}) &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} g(x)\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2(a-x)}{a^2}\ dx \\
&= 0 + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2(a-x)}{a^2}\ dx \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2(a-x)}{a^2}\ dx \\
&= \frac{2}{a^2}\left([a \cdot x]_0^{\frac{1}{2}} - [\frac{x^2}{2}]_0^{\frac{1}{2}} \right) && \backslash\text{Für Aufleitung siehe oben} \\
&= \frac{2}{a^2}\left(\frac{1}{2} \cdot a - 0 \cdot a - (\frac{\frac{1}{2}^2}{2} - \frac{0^2}{2}) \right) \\
&= \frac{2}{a^2}\left(\frac{a}{2} - 0 - \frac{1}{8} + 0 \right) \\
&= \frac{2}{a^2}\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{2}{a^2} \cdot \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{4a^2}
\end{aligned}$$

Da $P(Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ sein soll, wird dieser Wert eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{4a^2} \\
\frac{3}{4} &= \frac{4a}{4a^2} - \frac{1}{4a^2} && \backslash\text{linken Bruch mit } 4a \text{ erweitern} \\
\frac{3}{4} &= \frac{4a-1}{4a^2} && \backslash \cdot a^2 \\
\frac{3}{4}a^2 &= \frac{4a-1}{4} && \backslash\text{kürzen} \\
\frac{3}{4}a^2 &= a - \frac{1}{4} && \backslash -a + \frac{1}{4} \\
\frac{3}{4}a^2 - a + \frac{1}{4} &= 0 && \backslash : \frac{3}{4} \\
a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{1}{3} &= 0 && \backslash\text{Anwenden der p-q-Formel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} &= -\frac{-\frac{4}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{4}{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}} \\
a_{1,2} &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}} \\
a_{1,2} &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \\
a_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \\
a_2 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$P(Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ gilt für $a \in \{\frac{1}{3}, 1\}$

Hausübung 1.3

[| 2]

(2 Punkte). Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \in [0, \frac{3}{2}\pi), \\ 0, & sonst \end{cases}$$

charakterisiert. Begründen Sie, dass h keine Dichte ist.

$$h(x) = \begin{cases} sin(x), & x \in \left[0, \frac{2}{3}\Pi\right), & \text{siehe Abbildung 2} \\ 0 & \text{sonst.} & \text{Dies ist offensichtlich} \geq 0 \end{cases}$$

Nach Abbildung 2 ist $sin(x)$ für $x \in \left[0, \frac{2}{3}\Pi \approx 4.7\right)$ nicht überall ≥ 0. Daher ist dies keine Dichte.

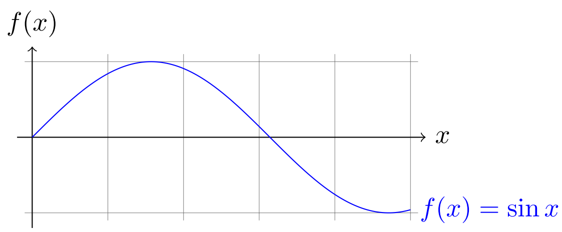

Abbildung 2: Die Sinusfunktion für $x \in [0, 5]$