Mathematik für Studierende der Informatik II
Analysis und Lineare Algebra

Abgabe der Hausaufgaben zum 21. Juni 2015

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann
6706472
fwuy089@studium.uni-hamburg.de

21. Juni 2015

Aufgabe 1

[/4]

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^{x^2}$.

Aufgabe 2

[/4]

Berechnen Sie die Ableitungen:

(a) $f(x) = x \cdot \sin 5x$

(b) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$

(c) $\sin(\cos(x-5))$

(c) $(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right))^{-2}$

Aufgabe 3

[/4]

Finden Sie die Seitenlänge einer quaderförmigen Streichholzschachtel, die bei gegebenem Volumen von 45cm^3 die minimale Oberfläche hat, um den Materialverbrauch möglichst klein zu halten. Dabei soll eine der Seiten die Länge 5cm haben, damit die Streichhölzer hineinpassen.

Aufgabe 4

[/4]

Welches gleichschenklige Dreieck hat bei gegebenem Umfang U die größte Fläche?

Aufgabe 5

[/4]

Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen tan und cot keine horizontalen Tangenten haben.

Die Steigung einer horizontalen Tangente ist 0.
Die Tangentensteigung wird durch die erste Ableitung derjenigen Funktion berechnet, die tangiert wird.

Tangens

Berechnung der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \text{x} \\
f(x) &= \tfrac{\sin x}{\cos x} \\
f'(x) &= \tfrac{\cos(x)\cdot\cos(x)\ -\ \sin(x)\cdot(-)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
f'(x) &= \tfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\text{(Nach Anwendung der Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird durch Anwendung des Kosinussatzes auf das rechtwinklige Dreieck des Einheitskreises, über welches die Kosinus-Funktion definiert ist, wobei durch die Eigenschaft der Rechtwinkligkeit der Satz von Pythagoras als Vereinfachung verwendet werden kann, weiter vereinfacht:

$$\begin{aligned}
\text{Satz des Pythagoras:}\quad & a^2 + b^2 = c^2 \\
a\ & := \cos(x) \\
b\ & := \sin(x) \\
c\ & := 1\text{, da der Radius des Einheitskreises (die Hypothenuse) 1 beträgt}
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich $a^2 + b^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1^2 = 1$ folgende Gleichung für die erste Ableitung der Tangensfunktion:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Damit die Steigung von $f(x)$ gleich 0 ist und somit eine horizontale Tangente vorliegt, muss der Funktionswert von $f'(x)$ gleich 0 sein. Wie zu erkennen ist, tritt dies nie ein, da $\frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0$.

Kotangens

Verfahren wie beim Tangens.
Bestimmung der Ableitung der *cot*-Funktion:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx}\cot(x) &= \tfrac{d}{dx}\tfrac{1}{\tan(x)} = \tfrac{d}{dx}\tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
&= \tfrac{((\cos(c))'\cdot\sin(x)\ -\ \cos(x)\cdot(\sin(x))'}{\sin^2(x)} && \text{(Nach Quotientenregel)} \\
&= \tfrac{-\sin(x)\cdot\sin(x)\ -\ \cos(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \tfrac{-\sin^2(x)\ -\ \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \tfrac{-(\sin^2(x)\ +\ \cos^2(x))}{\sin^2(x)} && \text{(Nach Anwenden des Satzes von Pythagoras)} \\
&= \tfrac{-1}{\sin^2(x)}
\end{aligned}$$

Wie eben ist auch hier wieder ersichtlich, dass die Ableitung der *cot*-Funktion niemals gleich 0 werden kann, wodurch auch die *cot*-Funktion keine Steigung von 0 und somit keine horizontale Tangente vorzuweisen hat.