Hausaufgaben zum 14. Mai 2015

Mathematik für Studierende der Informatik II
(Analysis und Lineare Algebra)

Louis Kobras

6658699

4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann

6663579

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann

6706472

fwuy089@studium.uni-hamburg.de

10. Mai 2015

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix zu invertieren, ist ebenjene Matrix B gesucht, mit der die gegebene Matrix multipliziert werden muss, um die Einheitsmatrix zu erhalten.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Daraus ergeben sich folgende neun Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
I & 1 = 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + (-1) \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{31} + 1 = a_{11} + a_{21} \\
II & 0 = 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{32} & \Rightarrow a_{32} = a_{12} + a_{22} \\
III & 0 = 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + (-1) \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{33} = a_{13} + a_{23} \\
 & & \\
IV & 0 = 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{21} = -a_{31} \\
V & 1 = 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\
VI & 0 = 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{23} = -a_{33} \\
 & & \\
VII & 0 = 2 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \\
VIII & 0 = 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\
IX & 1 = 2 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} &
\end{array}$$

Durch die offensichtlichen Umformungen und das Einsetzen von Gleichungen ineinander ermitteln wir nun die Werte $(a_{ij})_{i,j\in[1,2,3]}$ als Lösungen dieses Gleichungssystems.

$$
\begin{aligned}
&Wir\ beginnen\ mit\ der\ ersten\ Spalte:\\
&\quad Einsetzen\ von\ IV\ in\ I:\\
&\qquad a_{31}+1 = a_{11}+(-a_{31})\\
&\qquad \Rightarrow \quad a_{11} = a_{31}+a_{31}+1 = 2\cdot a_{31}+1\\
&\quad Einsetzen\ von\ a_{11}\ und\ a_{21}\ in\ VII:\\
&\qquad\qquad 0 = 2\cdot(2\cdot a_{31}+1)+2\cdot(-a_{31})+1\cdot a_{31} = 4\cdot a_{31}+2-2\cdot a_{31}+a_{31}\\
&\qquad\qquad\ \ = 2+3\cdot a_{31}\\
&\qquad \Rightarrow \quad a_{31} = -\frac{2}{3}\\
&\quad Einsetzen\ von\ a_{31}\ in\ a_{i1}:\\
&\qquad\quad a_{21} = -a_{31} = \frac{2}{3}\\
&\qquad\quad a_{11} = 2\cdot a_{31}+1 = \frac{7}{3}\\
&Fortfahren\ mit\ der\ zweiten\ Spalte:\\
&\quad Einsetzen\ von\ II\ in\ VIII:\\
&\qquad\qquad 0 = 2\cdot a_{12}+2\cdot a_{22}+1\cdot(a_{12}+a_{22})\\
&\qquad\qquad\ \ = 3\cdot a_{12}+3\cdot a_{22}\\
&\qquad \Rightarrow \quad a_{12} = -a_{22}\\
&\quad Einsetzen\ von\ a_{32} in\ V:\\
&\qquad\qquad 1 = 1\cdot a_{22}+1\cdot(a_{22}-a_{22})\\
&\qquad\quad \Rightarrow\ a_{22} = 1\\
&\quad Einsetzen\ von\ a_{22}\ in\ a_{i2}:\\
&\qquad\quad a_{12} = -a_{22} = -1\\
&\qquad\quad a_{32} = a_{22}-a_{22} = 1-1 = 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

wobei A die Matrix aus Aufgabe 1 ist.

Aufgabe 3

Zeigen Soe, dass für zwei (2×2)-Matrizen A und B tatsächlich die Formel

$$Det(A)Det(B) = Det(AB)$$

gilt.

Aufgabe 4

Die Folge $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Damit existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}| < \frac{1}{3}$ gilt. Bestimmen Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, das das leistet.

Aufgabe 5

Es sei $a \in \mathbb{R}$ irgendeine Zahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Man zeige nur unter Benutzung der Definition von Konvergenz, dass die Folge $(a + a_n)_{n\in\mathbb{N}7}$ gegen a konvergiert.