Übungsaufgaben zum 30. April 2015

Analysis und Lineare Algebra: Mathematik für Informatiker II

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

29.04.2015

Aufgabe 1

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Die Vektoren $v_1,...,v_r \in V$ bilden ein *minimales Erzeugendensystem*, falls sie ein Erzeugendensystem von V bilden, aber V nicht mehr von den Vektoren erzeugt wird, wenn man einen beliebigen der Vektoren entfernt. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1,...,v_r$ genau dann eine Basis von V bilden, wenn sie ein minimales Erzeugendensystem sind.

Seien $v_1,...,v_r$ ein minimales Erzeugendensystem. Eine Basis ist ein Erzeugendensystem aus linear unabhängigen Vektoren mit $|Basis| = Dim(Vektorraum)$. Sie ist damit das kleinstmögliche Erzeugendensystem, denn sobald ein Vektor aus der Basis entfernt wird, erzeugt sie den Vektorraum nicht mehr. Damit ist die Definition von *Basis* und *minimalem Erzeugendensystem* identisch.

$\Rightarrow$ Basis = minimales Erzeugendensystem.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Basis des von den Polynomen $x^2 - 1$, $x^2 + x$, $3x + 1$ und $x^2 - x + 1$ erzeugten Unterraums von $\mathbb{R}[x]$.

$$\begin{pmatrix} x^2 & & & - & 1 \\ x^2 & + & x & & \\ & + & 3x & + & 1 \\ x^2 & - & x & + & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrrrl} I & 1 & 0 & -1 & \\ II & 1 & 1 & 0 & II - I \\ III & 0 & 3 & 1 & \\ IV & 1 & -1 & 1 & IV - I \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrl} I & 1 & 0 & -1 & \\ II & 0 & 1 & 1 & \\ III & 0 & 3 & 1 & III - 3 \cdot II \\ IV & 0 & -1 & 2 & IV + II \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrl} I & 1 & 0 & -1 & \\ II & 0 & 1 & 1 & \\ III & 0 & 0 & -2 & III \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ IV & 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrl} I & 1 & 0 & -1 & I + III \\ II & 0 & 1 & 1 & II - III \\ III & 0 & 0 & 1 & \\ IV & 0 & 0 & 3 & IV - 3 \cdot III \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} I & 1 & 0 & 0 \\ II & 0 & 1 & 0 \\ III & 0 & 0 & 1 \\ IV & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Basis: \;\; x^2, x, 1}}$$

Aufgabe 3

Konstruieren Sie jeweils eine Basis der folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^3$ bzw $\mathbb{R}^4$:
(a) $U_1 \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x - y - z = 0\}$
(b) $U_2 \;=\; \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 3y + z = 0, \; x + y + w = 0\}$

(a)

$$x - y - z = 0$$
$$\Rightarrow x - (y+z) = 0$$
$$\Rightarrow x + (-1)(y+z) = 0$$

$$Seien: \; v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lccccl} I & 4 & 3 & 1 & & I \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \\ II & 5 & 2 & 3 & & \\ III & 9 & 4 & 5 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl} I & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & \\ II & 5 & 2 & 3 & & II - 5 \cdot I \\ III & 9 & 4 & 5 & & III - 9 \cdot I \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl} I & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & \\ II & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} & & II \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \\ III & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{11}{4} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl} I & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & \\ II & 0 & 1 & -1 & & \\ III & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{11}{4} & & III - \left(\frac{11}{4}\right) \cdot II \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl} I & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & I - \frac{3}{4} \cdot II \\ II & 0 & 1 & -1 & & \\ III & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} I & 1 & 0 & 1 \\ II & 0 & 1 & -1 \\ III & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\underline{\underline{Basis: \; (1,0,1), (0,1,-1)}}$$

(b)

$$x = -(3y+z)$$
$$x+3y+z = x+y+w$$
$$3y+z = y+w$$
$$2y+z = w$$

$$Seien: \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 3 & -1 & 0 & 2 & I:3 \\
II & 3 & -2 & 3 & -1 & \\
III & -5 & 1 & 2 & 4 & \\
IV & -1 & -1 & -2 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
II & 3 & -2 & 3 & -1 & II-3\cdot I \\
III & -5 & 1 & 2 & 4 & III+5\cdot I \\
IV & -1 & -1 & -2 & 0 & IV+I
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
II & 0 & -1 & 3 & -3 & II\cdot(-1) \\
III & 0 & -\frac{2}{3} & 2 & \frac{22}{3} & \\
IV & 0 & -\frac{4}{3} & -2 & \frac{2}{3} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
II & 0 & 1 & -3 & 3 & \\
III & 0 & -\frac{2}{3} & 2 & \frac{22}{3} & III+\frac{2}{3}\cdot II \\
IV & 0 & -\frac{4}{3} & -2 & \frac{2}{3} & IV+\frac{4}{3}\cdot II
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
II & 0 & 1 & -3 & 3 & \\
III & 0 & 0 & 0 & \frac{28}{3} & tausche\ mit\ IV \\
IV & 0 & 0 & 2 & \frac{11}{3} & tausche\ mit\ III
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
II & 0 & 1 & -3 & 3 & \\
III & 0 & 0 & 2 & \frac{11}{3} & III:2 \\
IV & 0 & 0 & 0 & \frac{28}{3} & IV\cdot\frac{3}{28}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & I+\frac{1}{3}\cdot II \\
II & 0 & 1 & -3 & 3 & \\
III & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & I-III \\
II & 0 & 1 & -3 & 3 & \\
III & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & I+\frac{1}{6}\cdot IV \\
II & 0 & 1 & -3 & 3 & \\
III & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
II & 0 & 1 & -3 & 3 & II+3\cdot III \\
III & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
II & 0 & 1 & 0 & \frac{17}{2} & II-\frac{2}{17}\cdot IV \\
III & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
II & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
III & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & III-\frac{11}{6}\cdot IV \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr}
I & 1 & 0 & 0 & 0 \\
II & 0 & 1 & 0 & 0 \\
III & 0 & 0 & 1 & 0 \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{Basis: (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)}}$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie eine Basis des von den Vektoren $v_1 = (-1, 2, 1, -1)$, $v_2 = (0, 2, 2, 1)$, $v_3 = (0, 0, 2, -1)$ und $v_4 = (1, 0, 1, -3)$ erzeugten Unterraums von $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & -1 & 2 & 1 & -1 & I \cdot (-1) \\
II & 0 & 2 & 2 & 1 & \\
III & 0 & 0 & 2 & -1 & \\
IV & 1 & 0 & 1 & -3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -2 & -1 & 1 & \\
II & 0 & 2 & 2 & 1 & \\
III & 0 & 0 & 2 & -1 & \\
IV & 1 & 0 & 1 & -3 & IV - I
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -2 & -1 & 1 & \\
II & 0 & 2 & 2 & 1 & II \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\
III & 0 & 0 & 2 & -1 & \\
IV & 0 & 2 & 2 & -4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -2 & -1 & 1 & \\
II & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \\
III & 0 & 0 & 2 & -1 & \\
IV & 0 & 2 & 2 & -4 & IV - 2 \cdot II
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & -2 & -1 & 1 & I + 2 \cdot II \\
II & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \\
III & 0 & 0 & 2 & -1 & III : 2 \\
IV & 0 & 0 & 0 & -5 & IV \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & 0 & 1 & 2 & I - III \\
II & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & II - III \\
III & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & III + \frac{1}{2} IV \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
I & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & I - \frac{5}{2} IV \\
II & 0 & 1 & 0 & 1 & II - IV \\
III & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr}
I & 1 & 0 & 0 & 0 \\
II & 0 & 1 & 0 & 0 \\
III & 0 & 0 & 1 & 0 \\
IV & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\underline{\underline{Basis : (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{erzeugen\ ganz\ \mathbb{R}^4}}$$

Aufgabe 5

Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Dimension des von den Vektoren $v_1 = (1, t, 1), v_2 = (2, 2t, t)$ und $v_3 = (-1, 1, 2t)$ erzeugten Untervektorraums U_t von $\mathbb{R}^3$.
Hinweis: Die Dimension hängt von t ab!

$$\begin{array}{llll l}
I & 1 & t & 1 & \\
II & 2 & 2t & t & II - 2 \cdot I \\
III & -1 & 1 & 2t & III + I
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
I & 1 & t & 1 \\
II & 0 & 0 & t-2 \\
III & 0 & t+1 & 2t+1
\end{array}$$

$$Tausche\ II\ und\ III.$$

$$\begin{array}{llll}
I & 1 & t & 1 \\
II & 0 & t+1 & 2t+1 \\
III & 0 & 0 & t-2
\end{array}$$

Ist $t = 2$, so lautet der letzte Vektor $v_3 = (0, 0, 2-2) = (0, 0, 0)$. Somit ist für $t = 2$ die Dimension des erzeugten Unterraums 2.
Für alle anderen t ist die Diemnsion 3, da kein Vektor zu $(0, 0, 0)$ wird.