Mathematik für Studierende der Informatik II
Analysis und Lineare Algebra

Abgabe der Hausaufgaben zum 25. Juni 2015

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann
6706472
fwuy089@studium.uni-hamburg.de

25. Juni 2015

Aufgabe 1

[/4]

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^{x^2}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^{x^2} &= \frac{d}{dx}e^{ln(x^{x^2})} && \text{Ausdrücken als Exponent von } e \\
&= \frac{d}{dx}e^{x^2 ln(x)} && \text{Anwenden der Potenzgesetze} \\
&= e^{x^2 ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}x^2 ln(x) && \text{Ableiten mithilfe der Kettenregel} \\
&= e^{x^2 ln(x)} \cdot \left(2x \cdot ln(x) \ + \ x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) && \text{Ableiten des zweiten Faktors} \\
&= e^{x^2 ln(x)} \cdot (2x \cdot ln(x) + x) && \text{Kürzen in der Klammer} \\
&= e^{x^2 ln(x)} \cdot (x + 2x \cdot ln(x)) && \text{Drehen der Summanden in der Klammer} \\
&= e^{ln(x^{x^2})} \cdot (x + 2x \cdot ln(x) && \text{Anwenden der Potenzgesetze auf den ersten Faktor} \\
&= x^{x^2}(x + 2x \cdot ln(x)) && \text{Auflösen des Exponenten von } e\text{, fertige Ableitung}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

[/4]

Berechnen Sie die Ableitungen:

(a) $f(x) = x \cdot \sin 5x$

(b) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$

(c) $g(x) = \sin(\cos(x - 5))$

(c) $h(x) = (1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right))^{-2}$

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \sin(5x) \\
f'(x) &= \frac{d}{dx}x \cdot \sin(5x) && \text{Produktregel} \\
&= 1 \cdot \sin(5x) \ + \ x \cdot (\sin(5x))' && \text{Kettenregel} \\
&= \sin(5x) \ + \ 5 \cdot x \cdot \cos(5x)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)} && sin(x)+\cos(x) := u \\
& && \cos(x) := v \\
f'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{u'v\ -\ uv'}{v^2} && \text{Quotientenregel} \\
f'(x) &= \frac{(\sin(x)+\cos(x))'\cdot\cos(x)\ -\ (\sin(x)+\cos(x))\cdot\cos(x)'}{\cos^2 x} \\
f'(x) &= \frac{\cos^2(x)-\sin(x)\cdot\cos(x)\ -\ (-\sin(x))(\sin(x)+\cos(x))}{\cos^2 x} \\
f'(x) &= \frac{\cos^2(x)-\sin(x)\cdot\cos(x)\ +\ \sin^2 x+\sin(x)\cos x}{\cos^2(x)} && \text{Verrechnen betragsgleicher vorzeichenunterschiedlicher Komponenten im Zähler} \\
f'(x) &= \frac{\sin^2 x\ +\ \cos^2 x}{\cos^2 x} && \text{Zusammenfassen (Begründung s. 5.2)} \\
f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sin(\cos(\text{x-5})) && \cos(x-5) := u \\
g(x) &= \sin(u) && \text{Kettenregel} \\
g'(x) &= \sin(u)' \\
g'(x) &= \cos(u)\cdot u' && u := \cos(x-5) \\
g'(x) &= \cos(\cos(x-5))\cdot(-\sin(x-5))\cdot(x-5)' \\
g'(x) &= -\cos(\cos(x-5))\cdot\sin(x-5)\cdot 1 \\
g'(x) &= -\cos(\cos(x-5))\cdot\sin(x-5)
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)^{-2} && \text{Umschreiben als Bruch} \\
h(x) &= \frac{1}{\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} && \text{Quotientenregel:}\ \begin{aligned} u &:= 1 \quad \Rightarrow u' = 0 \\ v &:= \left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)^2 \end{aligned} \\
h'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{u}{v} \\
h'(x) &= \frac{u'v\ -\ uv'}{v^2} \\
h'(x) &= \frac{0\cdot\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\ -\ 1\cdot\left[\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right]'}{\left(\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)^2} \\
h'(x) &= \frac{-\left[\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right]'}{\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4} \\
h'(x) &= -\frac{2\cdot\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}}{\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4} \\
h'(x) &= -\frac{\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4} && \text{Kürzen} \\
h'(x) &= -\frac{\frac{1}{-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3} && \text{Auflösen des Doppelbruches} \\
h'(x) &= -\frac{1}{-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3} && \text{Aufheben des doppelten Minus} \\
h'(x) &= \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

[/4]

Finden Sie die Seitenlänge einer quaderförmigen Streichholzschachtel, die bei gegebenem Volumen von 45cm^3 die minimale Oberfläche hat, um den Materialverbrauch möglichst klein zu halten. Dabei soll eine der Seiten die Länge 5cm haben, damit die Streichhölzer hineinpassen.

Ein Quader besitzt folgende Gleichungen:

$$O = 2ab + 2ac + 2bc$$

und

$$V = abc,$$

wobei O die Oberfläche ist, V das Volumen und a, b, c die Kanten.
Mit den gegebenen Werten können wir sagen:

$$V = 45cm \wedge (a = 5cm \Leftrightarrow bc = 9cm^2)$$

Folglich kann man b ausdrücken als:

$$b = \frac{9cm^2}{c}$$

Somit ergibt sich für O eine rein von c abhängige Gleichung:

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot 5cm \cdot \frac{9cm^2}{c} \;+\; 2 \cdot 5cm \cdot c \;+\; 2 \cdot \frac{9cm}{c} \cdot c \\ &= \frac{90}{c}cm^2 \;+\; c \cdot 10cm^2 \;+\; 18cm^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung können wir als Funktion $O(c)$ behandeln.

$$\begin{aligned} O(c) &= \tfrac{90}{c} + 10c + 18 \\ O'(c) &= \tfrac{d}{dx} 90 \cdot c^{-1} + 10 \cdot c + 18 \\ O'(c) &= -1 \cdot 90 \cdot c^{-2} + 10 \\ O'(c) &= -\tfrac{90}{c^2} + 10 && \text{1. Ableitung für notwendige Bedingung} \\ O''(c) &= \tfrac{d}{dx} - 90 \cdot c^{-2} + 10 \\ O''(c) &= -2 \cdot -90c^{-3} \\ O''(c) &= \tfrac{180}{c^3} && \text{2. Ableitung für hinreichende Bedingung} \end{aligned}$$

Da das Minimum der Oberfläche gesucht wird, wird die 1. Ableitung gleich 0 gesetzt. Das so erhaltene c wird anschließend in die 2. Ableitung eingesetzt, um zu bestimmen, ob an der Stelle ein Minimum oder ein Maximum vorliegt. Ist ein Minimum bestimmt, so kann der für c bestimmte Wert genutzt werden, um b und die Oberfläche der Schachtel zu bestimmen.

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lll}
0 & = -\frac{90}{c^2} + 10 & \mid -10 \\
-10 & = -\frac{90}{c^2} & \mid \cdot c^2 \\
-10c^2 & = -90 & \mid : (-10) \\
c^2 & = -\frac{90}{-10} & \\
c^2 & = 9 & \mid \sqrt{()} \\
c & = \pm 3 &
\end{array}$$

Es ist anzumerken, dass -3 als Lösung ausgeschlossen werden kann, da sonst eine negative Kantenlänge vorläge, welche im mindestens bis zu vierdimensionalen Raum nicht vorkommen kann.

Hinreichende Bedingung:

$$O'(3) \;=\; 0 \;\wedge\; O''(3) \;>\; 0 \;\Rightarrow \underline{Minimum}$$

c in V:

$$a = 5cm \wedge c = 3cm \wedge V = 45cm^3 \Leftrightarrow \underline{b = 3cm}$$

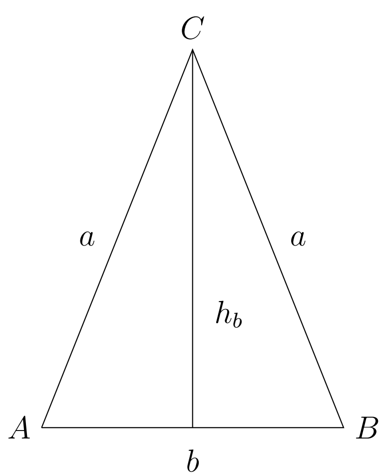
$b,\ c$ in O:

$$O_{min} \;=\; 2{\cdot}[5{\cdot}3]cm^2 + 2{\cdot}[5{\cdot}3]cm^2 + 2{\cdot}[3{\cdot}3]cm^2 \;=\; 2{\cdot}15cm^2 + 2{\cdot}15cm^2 + 2{\cdot}9cm^2 \;=\; \underline{\underline{78cm^2}}$$

Aufgabe 4

[/4]

Welches gleichschenklige Dreieck hat bei gegebenem Umfang U die größte Fläche?



h_b teilt b in der Mitte, also auf der Länge $\frac{b}{2}$. h_b steht rechtwinklig auf b.

$$
\begin{array}{llll}
 & U & = 2a + b & \Leftrightarrow b = U - 2a \\
 & A & = \frac{b \cdot h}{2} & \\
 & h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 & = a^2 & \\
\Leftrightarrow & h^2 & = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 & \\
\Leftrightarrow & h & = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} & \Rightarrow h \geq 0 \\
\text{setze} & h \text{ in } A \text{ ein:} & & \\
 & A(a,b) & = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{2} & \\
\text{setze} & b \text{ in } A \text{ ein:} & & \\
 & A(a) & = \frac{(U-2a) \cdot \sqrt{a^2 - \frac{(U-2a)^2}{4}}}{2} & \\
\Leftrightarrow & A(a) & = \frac{1}{2} \cdot (U - 2a) \cdot \sqrt{a^2 - \frac{(U-2a)^2}{4}} & \\
\Leftrightarrow & A(a) & = \frac{U-2a}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{U^2-4aU+4a^2}{4}} & \\
\Leftrightarrow & A(a) & = \frac{U-2a}{2} \cdot \sqrt{\frac{4a^2-4U^2+4aU-4a^2}{4}} & \\
\Leftrightarrow & A(a) & = \frac{U-2a}{2} \cdot \sqrt{\frac{-U^2+4aU}{4}} & \\
\Leftrightarrow & A(a) & = \frac{U-2a}{2} \cdot \sqrt{\frac{(-1) \cdot (U^2-4aU)}{4}} & \\
\Leftrightarrow & A(a) & = \frac{U-2a}{2} \cdot \sqrt{-\frac{1}{4} \cdot (U^2 - 4aU)} & \\
\Leftrightarrow & A(a) & = \frac{1}{2} \cdot (U - 2a) \cdot \sqrt{-\frac{U^2}{4} + aU} &
\end{array}
$$

Wird $-\frac{U^2}{4}$ negativ, so tritt eine irrationale Fläche auf. $aU = \frac{U^2}{4}$ $a = \frac{U}{4}$ $\Rightarrow -\frac{U^2}{4} + aU \geq 0$	Wird $U - 2a < 0$, so wird die Fläche negativ $U = 2a$ $\frac{U}{2} = a$ $\Rightarrow U - 2a \geq 0$

Um eine reelle, positive Fläche zu erhalten, muss a zwischen o.g. Werten liegen. Daraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} = \{a \in \mathbb{R} \quad | \tfrac{U}{4} \leq a \leq \tfrac{U}{2}\}$$

$\Rightarrow$ Unser gesuchtes Maximum ist nicht nur lokal, sondern global

$$\begin{aligned}
A'(a) &= \tfrac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \sqrt{-\tfrac{U^2}{4} + aU} \;+\; \tfrac{1}{2} \cdot (U - 2a) \cdot \tfrac{1}{2 \cdot \sqrt{-\frac{U^2}{4} + aU}} \cdot U \\
\Leftrightarrow A'(a) &= \tfrac{U-2a}{2} \cdot \tfrac{U}{2 \cdot \sqrt{-\frac{U^2}{4} + aU}} - \sqrt{-\tfrac{U^2}{4} + aU}
\end{aligned}$$

Gleich 0 setzen:

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{U-2a}{2} \cdot \tfrac{}{2\cdot} \\
\Leftrightarrow 0 &= \tfrac{U^2 - 2aU}{4\sqrt{-\frac{U^2}{4} + aU}} - \tfrac{\left(\sqrt{-\frac{U^2}{4} + aU}\right)^2 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{-\frac{U^2}{4} + aU}} \\
\Leftrightarrow 0 &= U^2 - 2aU + \left(\tfrac{U^2}{4} - aU\right) \cdot 4 \\
\Leftrightarrow 0 &= U^2 - 2aU + U^2 - 4aU \\
\Leftrightarrow 0 &= 2U^2 - 6aU \\
\Leftrightarrow 0 &= 2U(U - 3a) \\
\Leftrightarrow 0 &= U - 3a \qquad | + 3a \\
\Leftrightarrow 3a &= U
\end{aligned}$$

$U = 3a$ bedeutet im Klartext eingesetzt in $U = 2a + b$, die wir schon kennen:

$$2a + b = 3a \Leftrightarrow b = a$$

$\Rightarrow$ die maximale Flächehat ein gleichschenkliges Dreieck bei gegebenem Umfang, wenn es gleichseitig ist.

Aufgabe 5

[/4]

Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen tan und cot keine horizontalen Tangenten haben. Die Steigung einer horizontalen Tangente ist 0.
Die Tangentensteigung wird durch die erste Ableitung derjenigen Funktion berechnet, die tangiert wird.

Tangens

Berechnung der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \text{x} \\
f(x) &= \tfrac{\sin x}{\cos x} \\
f'(x) &= \tfrac{\cos(x)\cdot\cos(x) \;-\; \sin(x)\cdot(-)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
f'(x) &= \tfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \text{(Nach Anwendung der Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird durch Anwendung des Kosinussatzes auf das rechtwinklige Dreieck des Einheitskreises, über welches die Kosinus-Funktion definiert ist, wobei durch die Eigenschaft der Rechtwinkligkeit der Satz von Pythagoras als Vereinfachung verwendet werden kann, weiter vereinfacht:

$$\begin{aligned} \text{Satz des Pythagoras:} \quad & a^2 + b^2 = c^2 \\ a \quad & := \cos(x) \\ b \quad & := \sin(x) \\ c \quad & := 1, \text{ da der Radius des Einheitskreises (die Hypothenuse) 1 beträgt} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $a^2 + b^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1^2 = 1$ folgende Gleichung für die erste Ableitung der Tangensfunktion:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Damit die Steigung von $f(x)$ gleich 0 ist und somit eine horizontale Tangente vorliegt, muss der Funktionswert von $f'(x)$ gleich 0 sein. Wie zu erkennen ist, tritt dies nie ein, da $\frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0$:

$$0 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad | \cdot \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad 0 \neq 1 \lightning$$

Kotangens

Verfahren wie beim Tangens.
Bestimmung der Ableitung der *cot*-Funktion:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx} \cot(x) &= \tfrac{d}{dx} \tfrac{1}{\tan(x)} = \tfrac{d}{dx} \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= \tfrac{((\cos(c))' \cdot \sin(x) \ - \ \cos(x) \cdot (\sin(x))'}{\sin^2(x)} && \text{(Nach Quotientenregel)} \\ &= \tfrac{-\sin(x) \cdot \sin(x) \ - \ \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \tfrac{-\sin^2(x) \ - \ \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \tfrac{-(\sin^2(x) \ + \ \cos^2(x))}{\sin^2(x)} && \text{(Nach Anwenden des Satzes von Pythagoras)} \\ &= \tfrac{-1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

Wie eben ist auch hier wieder ersichtlich, dass die Ableitung der *cot*-Funktion niemals gleich 0 werden kann, da

$$0 = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad | \cdot \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad 0 \neq -1 \lightning$$

wodurch auch die *cot*-Funktion keine Steigung von 0 und somit keine horizontale Tangente vorzuweisen hat.