Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsgruppe 14

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6658699

Rene Ogniwek
reneogniwek@gmx.net
6425103

Steffi Kaussow
s.kaussow@gmail.com
6414862

18. Januar 2016

Punkte für den Hausaufgabenteil:

7.1	Σ

Zettel vom 06. 01. – Abgabe: 18. 01. 2016

[| 16]

Übungsaufgabe 7.1

Aufgabe 7.1.1

Sei $G = (V, E)$ ein Flussnetzwerk mit Kapazitätsfunktion $c, u, v \in V$ und f ein Fluss in G. Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$c_f(u, v) + c_f(v, u) = c(u, v) + c(v, u),$$

wobeic_f wie in der Vorlesung definiert ist. Geben Sie bei jedem Schritt eine Begründung an (z.B. folgt aus der Definition o.ä.). Was ist die Aussage der obigen Gleichung? (2 Pkt.)

$$\begin{array}{rcll}
c_f(u,v) + c_f(v,u) & = & c(u,v) - f(u,v) + c(v,u) - f(v,u) & s.Vl.10S.24 \\
& = & c(u,v) + c(v,u) - f(u,v) - f(v,u) & Kommutativgesetz \\
& = & c(u,v) + c(v,u) - f(u,v) - -f(u,v) & s.Vl.10S.17Punkt2 \\
& = & c(u,v) + c(v,u) - f(u,v) + f(u,v) & doppelte\ Negation \\
& = & c(u,v) + c(v,u) \quad \square & -a + a = a - a = 0
\end{array}$$

Aussage: Die Restkapazität von (u, v) plus die Restkapazität der Gegenrichtung (v, u) ist gleich der Kapazität von (u, v) plus die Kapazität der Gegenrichtung (v, u).

Aufgabe 7.1.2

Seien u und v Knoten in einem Flussnetzwerk $G = (V, E)$ derart, dass $(u, v) \notin E$ und $(v, u) \notin E$ gilt. Beweisen Sie, dass dann $f(u, v) = f(v, , u) = 0$ gilt. Begründen Sie auch hier Ihre Schritte. (2 Pkt.)

A Da $(u, v) \notin E$, gilt nach Vl. 10 S. 4 $c(u, v) = 0$.

B Da außerdem nach Vl. 10 S. 5 $f(u, v) \leq c(u, v)$ gilt, muss $f(u, v) \leq 0$ sein.

A2 [A] gelte auch für $(v, u) \notin E$.

B2 [B] gelte auch für $(v, u) \notin E$.

C Nach Asymmetrie (vgl. Vl. 10 S. 5) gilt $f(u, v) = f(v, u)$

D Nach [B], [B2], [C]: $0 \geq f(u, v) = f(v, u) \leq 0$

E $\Rightarrow 0 = f(u, v) = f(v, u)$

Aufgabe 7.1.3

Sei $G = (V, E)$ ein Flussnetzwerk und f ein Fluss in G. Seien $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$. Beweisen Sie

$$\begin{array}{rcl}
f(X \cup Y, Z) & = & f(X, Z) + f(Y, Z) \\
f(Z, X \cup Y) & = & f(Z, X) + f(Z, Y)
\end{array}$$

Begründen Sie auch hier ihre Schritte. Warum ist die Bedingung $X \cap Y = \emptyset$ nötig? (4 Pkt.)

1. Da $X \cap Y = \emptyset$, kann $X \cup Y = X + Y$ gesetzt werden

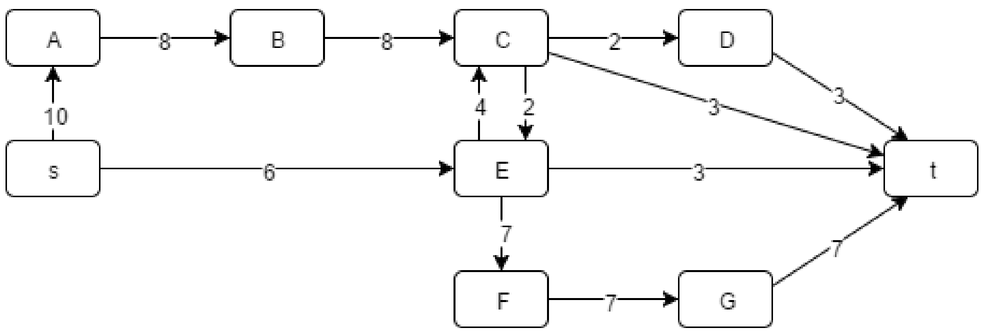
$$\begin{aligned} f(X \cup Y), Z &= \sum_{x,y \in X \cup Y} \sum_{z \in Z} f(xy, z) && Vl.10S.16; 1. \\ &= \sum_{x,y \in X+Y} \sum_{z \in Z} f(xy, z) && Attributivgesetz \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{z \in Z} f(x, z) + \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Z} f(y, z) && Vl.10S.16 \\ &= f(X, Z) + f(Y, Z) \quad \square \end{aligned}$$

Für $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$: Die Umformung erfolgt im hinteren Teil des Ausdruckes; der Weg ist identisch.

$X \cap Y = \emptyset$ ist erforderlich für $X \cup Y = X + Y$.

Aufgabe 7.1.4

Betrachten Sie das folgende Flussnetzwerk:



Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Edmonds-Karp einen maximalen Fluss und diesem Netzwerk. Geben Sie dazu stets als erstes den Erweiterungspfad im Restnetzwerk an (beachten Sie, dass das erste Restnetzwerk dem gegebenen Flussnetzwerk entspricht!), indem Sie einfach die Knoten des Pfades auflisten (z.B. $SABC$ für den Pfad von S nach C über A und $B=$ und dn Wert des Flusses angeben. Zeichnen Sie dann das obige Flussnetzwerk mit dem ermittelten gesamten Fluss. Als drittes zeichnen Sie das neue Restnetzwerk. Dann geben Sie sofern möglich einen neuen Erweiterungspfad an und so weiter. (6 Pkt.)

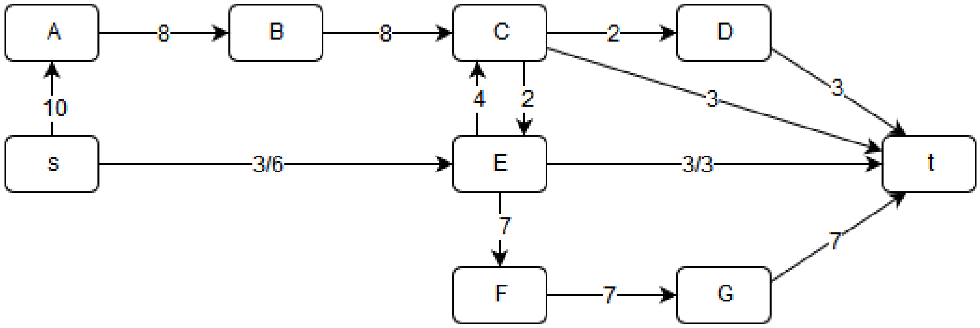
0-0 $f_0 = 0$

0-1 s. Graph Aufgabenstellung

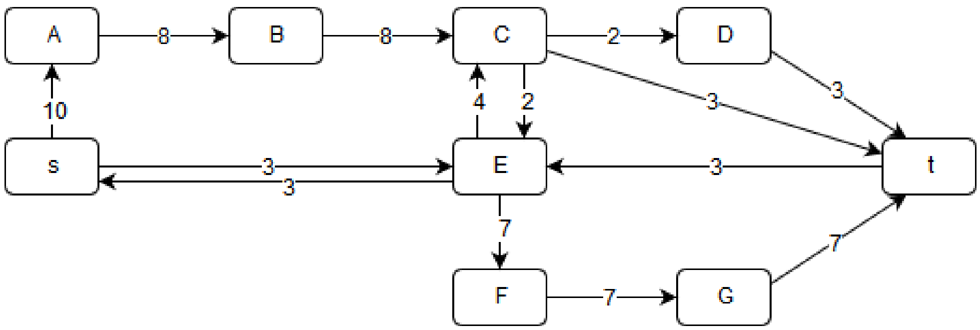
0-2 SET

0-3 $f_1 = min(c(S,E)c(E,T)) = 0 + 3 = 3$

0-4



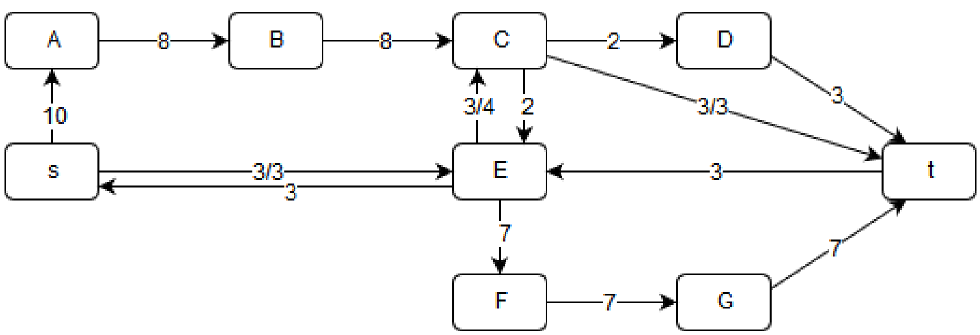
1-1



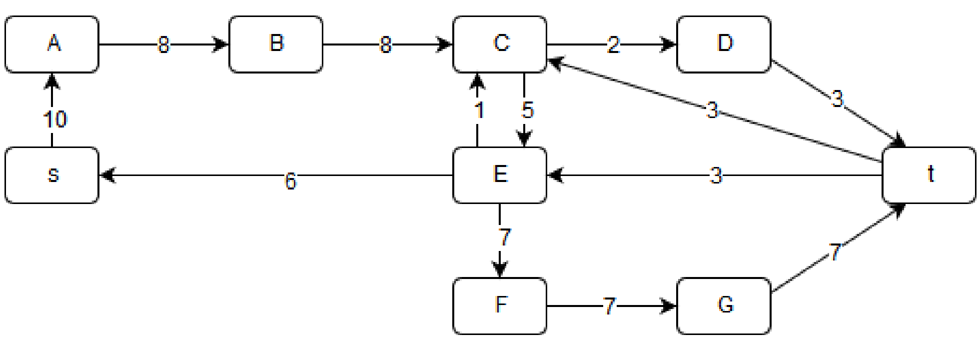
1-2 $SECT$

1-3 $f_2 = f_1 + min(c(S,E), c(E,C), c(C,T)) = 3 + 3 = 6$

1-4



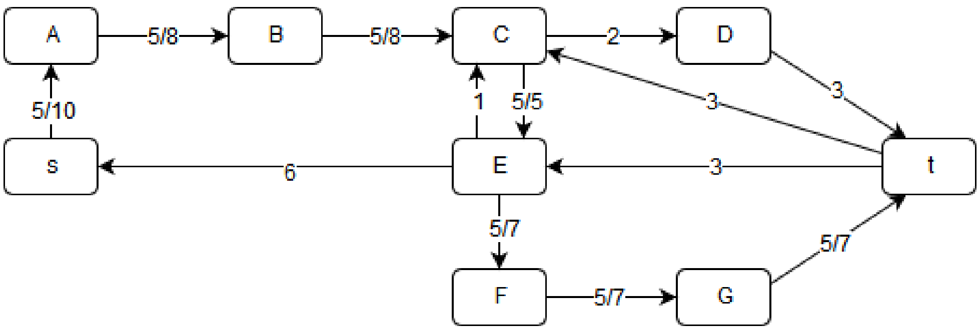
2-1



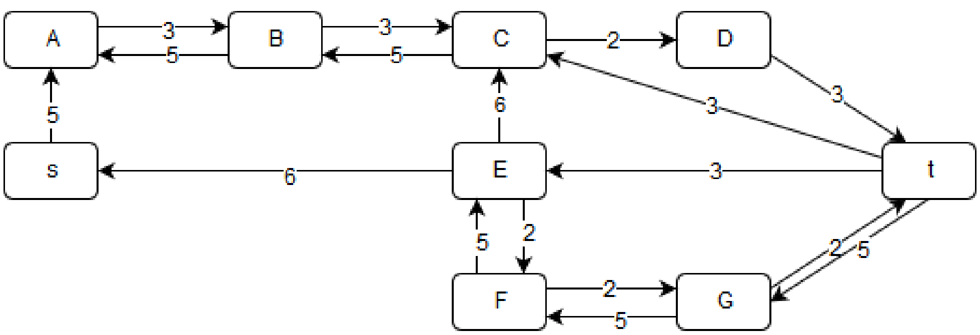
2-2 $SABCEFGT$

2-3 $f_3 = f_2 + min(c(S,A), c(A,B), c(B,C), c(C,E), c(E,F), c(F,G), c(G,T)) = 6 + 5 + 11$

2-4



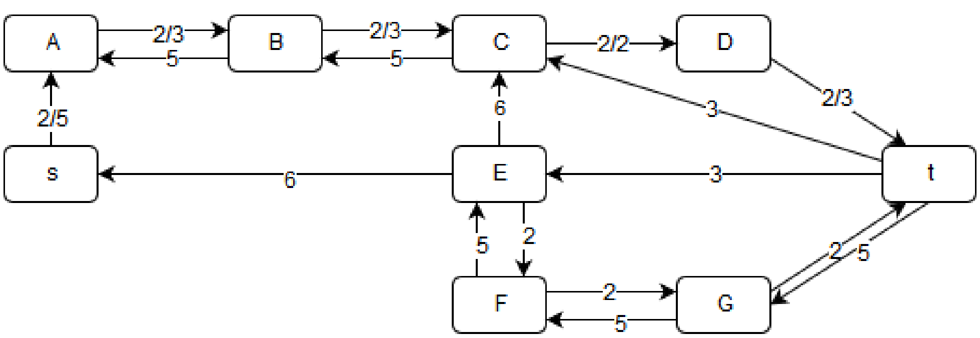
3-1



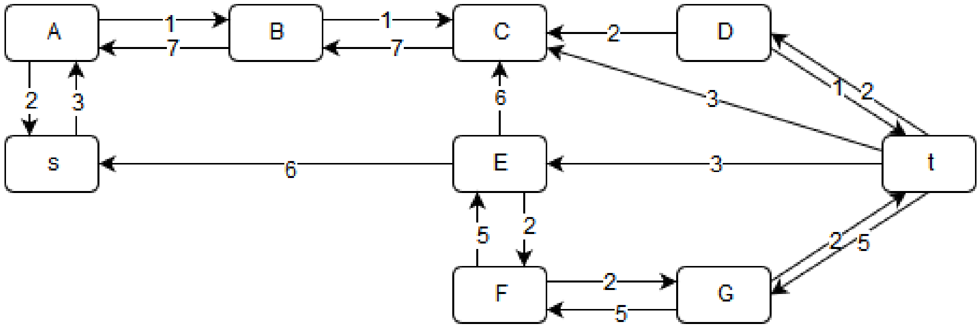
3-2 $SABCDT$

3-3 $f_4 = f_3 + min(c(S,A), c(A,B), c(B,C), c(C,D), c(D,T)) = 11 + 2 = 13$

3-4



4-1



Aufgabe 7.1.5

Sei $G = (V, E)$ mit der Kapazitätsfunktion c, Quelle s und Senke t ein Flussnetzwerk. Sei f ein Fluss in G. Sei (S, T) ein Schnitt. Wie hängen $|f|$, $f(S, T)$ und $c(S, T)$ zusammen? Begründen Sie ihre Antwort. (2 Pkt.)
Nach Vl. 10 S. 49 gilt $f(S, T) = |f|$.

Nach Vl. 10 S. 49 gilt $|f| \leq c(S, T)$.
Somit gilt: $f(S, T) = |f| \leq c(S, T)$.
Begründung: Für ein beliebiges Flusnetzwerk gilt:
Der Nettofluss durch einen beliebigen Schnitt ist gleich dem Wert des Flusses; und der Wert eines Flusses ist durch die Kapazität nach oben begrenzt.