

# Mathematik für Studierende der Informatik II

## Analysis und Lineare Algebra

Abgabe der Hausaufgaben zum 18. Juni 2015

Louis Kobras

6658699

4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann

6663579

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann

6706472

fwuy089@studium.uni-hamburg.de

18. Juni 2015

## Aufgabe 1

[ /4]

Es seien  $x, y, a \in (0, \infty)$ . Zeigen Sie

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

Anwendung der  $\log$ -Definition:

$$(1) \begin{cases} \log_a(f) = x \Leftrightarrow a^x = f \\ \log_a(g) = y \Leftrightarrow a^y = g \end{cases}$$

Bildung des Quotienten  $\frac{f}{g}$ :

$$\frac{f}{g} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{nach Präsenzaufgabe 8.1}$$

Wiederum Anwenden der  $\log$ -Definition:

$$\frac{f}{g} = a^{x-y} \quad \Leftrightarrow \quad \log_a \left( \frac{f}{g} \right) = x - y$$

Einsetzen von (1):

$$\log_a \left( \frac{f}{g} \right) = x - y = \log_a(f) - \log_a(g)$$

□

## Aufgabe 2

[ /4]

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a)  $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)^4$

(b)  $g(x) = \sqrt{2x^2 + x - 3}$

(c)  $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$

(a).

$$\frac{d}{dx}(2x^2 + 3x + 1)^4 = 4 \cdot (2x^2 + 3x + 1)^3 \cdot (4x + 3)$$

(b).

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 + x - 3} &= (2x^2 + x - 3)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{d}{dx}(2x^2 + x - 3)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4x + 1) = \frac{4x + 1}{2 \cdot \sqrt{(2x^2 + x - 3)}}\end{aligned}$$

(c).

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 1} &= (x^2 - 1)^{-1} \\ \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^{-1} &= -1 \cdot (x^2 - 1)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

[ /4]

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)  $f(x) = e^{x^2}$

(b)  $g(x) = x \cdot e^{x^2}$

(c)  $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

(a). (*Kettenregel*)

$$\begin{aligned}e^{x^2} &= e^{(x^2)} \\ \frac{d}{dx}e^{(x^2)} &= e^{(x^2)} \cdot 2x\end{aligned}$$

(b). (*Kettenregel und Produktregel*)

$$\begin{aligned}x \cdot e^{x^2} &= x \cdot e^{(x^2)} \\ \frac{d}{dx}x \cdot e^{(x^2)} &= 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{(x^2)} \cdot 2x = e^{(x^2)} \cdot (2x^2 + 1)\end{aligned}$$

(c). (*Produktregel*)

$$\begin{aligned}\frac{\ln x}{x} &= \ln(x) \cdot x^{-1} \\ \frac{d}{dx}\ln(x) \cdot x^{-1} &= \frac{1}{x} \cdot x^{-1} + \ln(x) \cdot -1 \cdot x^{-2} = \frac{1}{x^2} - \ln(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

[ /4]

Beweisen Sie die Quotientenregel mit Hilfe der Produktregel, der Kettenregel und der Tatsache

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad (1)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \\ h'(x) &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{1}{g'(x)} \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g'(x)}\right)' \cdot g'(x) \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)\right) \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + -\frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

**Berücksichtigen/  
Anwenden von:**

Produktregel

Kettenregel

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Klammern auflösen

multiplizieren

Erweitern mit  $\frac{g(x)}{g(x)}$

Auf einen Bruchstrich schreiben

Dieser Ausdruck ist gleich (??).

□

## Aufgabe 5

[ /4]

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$  mit Hilfe der Umkehrregel.

Umkehrfunktion:  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow f(x) = x^3$

Umstellen nach  $f^{-1}(y)$ :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} \\ y &= \sqrt[3]{f^{-1}(y)} \\ y^3 &= f^{-1}(y) \end{aligned} \quad \begin{cases} f(x) = x \Leftrightarrow y = f(y) \\ f(x) \hat{=} y \Leftrightarrow f(y) \hat{=} x \\ (\dots)^3 \end{cases}$$

Ableiten:

$$\begin{aligned}f(y) &= y^3 \\ f'(y) &= 3y^2\end{aligned}$$

Umkehrregel:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

In Umkehrregel:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2}$$

Umstellen nach  $x$ :

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{3y^2} \\ (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \\ (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot 2} \\ (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{6 \cdot x^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

$y$  resubstituieren:  $y = \sqrt[3]{x}$   
 $\sqrt[3]{\dots} = (\dots)^{\frac{1}{3}}$

Probe:

$$\begin{aligned}f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \\ (f^{-1})(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \quad (\text{Potenzregel}) \\ (f^{-1})(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \\ (f^{-1})(x) &= \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

□