Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsgruppe 14

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

Paul Testa
paul.testa@gmx.de
6251548

19. Oktober 2015

Punkte für den Hausaufgabenteil:

					Σ

1 Zettel vom 14.-16. Oktober // Abgabe: N/A

1.1 Präsenzaufgabe 1.1

Wiederholen Sie die O-Notation und die verwandten Notationen. Wie sind die einzelnen Mengen definiert? Was bedeutet es, wenn $f \in O(g)$ gilt, was wenn $f \in \Theta(g)$ gilt und so weiter?

$$\begin{array}{llll}
O(g(n)): & f(n) \in O(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^{+} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & \|f(n)\| <= c \cdot \|g(n)\| \\
o(g(n)): & f(n) \in o(g(n)) & \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^{+} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & \|f(n)\| <= c \cdot \|g(n)\| \\
\Omega(g(n)): & f(n) \in \Omega(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^{+} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & \|f(n)\| >= c \cdot \|g(n)\| \\
\omega(g(n)): & f(n) \in \omega(g(n)) & \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^{+} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & \|f(n)\| >= c \cdot \|g(n)\| \\
\Theta(g(n)): & f(n) \in \Theta(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{+} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & c_1 \cdot \|g(n)\| <= \|f(n)\| <= c_2 \cdot \|g(n)\|
\end{array}$$

1.2 Präsenzaufgabe 1.2

Beweisen Sie:

- $n^2 + 3n - 5 \in O(n^2)$
- $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$
- $n! \in O((n+1)!)$

Gilt im letzten Fall auch $n! \in o((n+1)!)$?

$$\begin{aligned}
f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \\
f(n) &= n^2 + 3n - 5 \\
g(n) &= n^2 \\
\frac{f(n)}{g(n)} &= \frac{n^2+3n-5}{n^2} \\
\\
lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{n^2} &= lim_{n\to\infty} 1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} \\
&= 1 + \frac{3}{\infty} - \frac{5}{\infty^2} \\
&= 1 + 0 + 0 \\
&= 1 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))
\end{aligned}$$

$\square$

$$\begin{aligned}
c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{+}, n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: \quad & c_1 \cdot n^2 <= n^2 - 2n <= c_2 \cdot n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & c_1 <= 1 - \frac{1}{n} <= c_2
\end{aligned}$$

Dies ist erfüllbar ab $n_0 >= 2$, da für $n = 1$ im mittleren Ausdruck 0 herauskommt und c_1 größer als 0, aber kleiner als der mittlere Ausdruck sein muss. Ist $n >= 2$, so kommt im mittleren Ausdruck $0,5$ heraus, für c_1 lässt sich ein beliebiger Wert aus $]0;0.5[$ wählen, sei es an dieser Stelle $\frac{1}{4}$. Als Obergrenze für c_2 lässt sich jeder Wert größer oder gleich 1 wählen, da der mittlere Ausdruck nicht größer als 1 werden kann und somit die Bedingung des "kleiner gleichßofort erfüllt ist.
Somit wird als Ergebnis für die Belegung gewählt: $c_1 = \frac{1}{4}; c_2 = 1; n_0 = 2$. Mit dieser Belegung gilt $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$

$\square$

$$
\begin{aligned}
f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \tfrac{f(n)}{g(n)} < \infty \\
f(n) &= n! \\
g(n) &= (n+1)! = (n+1) \cdot n! \\
\\
lim_{n\to\infty} \tfrac{n!}{(n+1)\cdot n!} &= lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n+1} \\
&= \tfrac{1}{\infty} \\
&= 0 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))
\end{aligned}
$$

Da die Bedingung für $o(g(n))$ ist, dass der Quotient nicht nur kleiner unendlich, sondern gleich null ist, was hier wie oben gezeigt gegeben ist, gilt auch $n! \in o((n+1)!)$.

$\square$

1.3 Präsenzaufgabe 1.3

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(h(n))$
2. $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O(h(n))$

$$\exists c_1 \in \mathbb{R}^+ \exists n_{0_1} \in \mathbb{N} \forall n >= n_{0_1} : \|f(n)\| <= c_1 \cdot \|h(n)\|$$

$$\exists c21 \in \mathbb{R}^+ \exists n_{0_2} \in \mathbb{N} \forall n >= n_{0_2} : \|g(n)\| <= c_2 \cdot \|h(n)\|$$

$$n_0 = max(n_{0_1}, n_{0_2})$$

$$\|f(n) + g(n)\| <= c_1 \cdot \|h(n)\| + c_2 \cdot \|h(n)\| <= (c_1 + c_2) \cdot \|h(n)\|$$

Seien $f(n)$ und $g(n)$ Polynome zweiten Grades sowie $h(n)$ ein Polynom dritten Grades. Dann sind sowohl $f(n)$ als auch $g(n)$ durch die *limes*-Bedingung in $O(h(n))$. Das Produkt zweier Polynome zweiten Grades ist allerdings ein Polynom vierten Grades, sodass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^3} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Damit ist das Produkt der Polynome nicht mehr in $O(h(n))$, da die *limes*-Bedingung, nach der der Quotient der Polynome für n gegen Unendlich kleiner als Unendlich sein zu hat, nicht erfüllt ist. Damit ist (2) widerlegt.

$\square$

2 Zettel vom 15.10. // Abgabe: 26.10.

2.1 Übungsaufgabe 2.1

[| 2]

Begründen Sie formal, warum folgende Größenabschätzungen gelten bzw. nicht gelten:

1. $3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3)$
2. $n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2)$

2.1.1

$$3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3) \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 6n + 20}{n^3} < \infty$$

$$lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 6n + 20}{n^3} = lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3} - \frac{6n}{n^3} + \frac{20}{n^3} = lim_{n\to\infty} 3 - \frac{6}{n^2} + \frac{20}{n^3} = 3 - 0 + 0 < \infty$$

$$\Rightarrow 3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3) \qquad \square$$

2.1.2

$$n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2) \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^3} < \infty \land lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^2} > 0$$

$$\frac{n^2 \cdot \log n}{n^2} = \frac{1 \cdot \log n}{1} = \log n > 0 \ \forall n > 1 \Rightarrow n^2 \cdot \log n \in \Omega(n^2)$$

$$lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^3} = lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \overset{\text{l'H}}{=} lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1} = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow n^2 \cdot \log n \in O(n^3)$$

$$\Rightarrow n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2) \qquad \square$$

2.2 Übungsaufgabe 2.2

[| 4]

Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem Wachstumsgrad in aufsteigender Reihenfolge, d.h. folgt eine Funktion $g(n)$ einer Funktion $f(n)$, so soll $f(n) \in O(g(n))$ gelten.

$$n, \log n, n^2, n^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n}^3, 2^n, \ln n, 1000$$

Mit log ist hier der Logarithmus zur Basis 2, mit ln der natürliche Logarithmus (Basis e) gemeint. Begründen Sie stets Ihre Aussage. Zwei Funktionen $f(n)$ und $g(n)$ befinden sich ferner in der selben Äquivalenzklasse, wenn $f(n) \in \Theta(g(n))$ gilt. Geben Sie an, welche Funktionen sich in derselben Äquivalenzklasse befinden und begründen Sie auch hier ihre Aussage.

2.3 Übungsaufgabe 2.3

[| 2]

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O((h(n))^2)$$

2.4 Übungsaufgabe 2.4

[| 8]

Seien

1. $$T(n) := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ 3 \cdot T(n-1) + 2, & \text{sonst} \end{cases}$$

2. $$S(n) := \begin{cases} c, & \text{für } n = 1 \\ 16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekurrenzgleichungen (c ist dabei eine Konstante).

Bestimmen Sie wie in der Vorlesung jeweils die Größenordnung der Funktion $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ einmals mittels der (a) Substitutionsmethode und einmal mittes des (b) Mastertheorems. Ihre Ergebnisse sollten zumindest hinsichtlich der O-Notation gleich sein, so dass Sie etwaige Rechenfehler entdecken können! Führen Sie bei (a) auch den Induktionsbeweis, der in der Vorlesung übersprungen wurde!