Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Modul: MATH3-Inf

Veranstaltung: 65-832

Übungsgruppe 2

Dienstag, 14.15 - 15.00

Geom 431

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

Felix Gebauer
4gebauer@informatik.uni-hamburg.de
6671660

9. Mai 2016

Punkte für die Hausübungen:

1.1	1.2	1.3	Σ	2.1	2.2	2.3	2.4	Σ	3.1	3.2	Σ	4.1	4.2	4.3	Σ

Inhaltsverzeichnis

Zettel Nr. 1 (Ausgabe: 05. April 2016, Abgabe: 12. April 2016)

Hausübung 1.1

[| 8]

(Zufallsexperimente, 2+2+2+2 Punkte). Handelt es sich in den folgenden Situationen um Zufallsexperimente? Begründen Sie ihre Antwort.

a) Sonnenaktivität am 07.04.2016 um 10:00.
Kein Zufallsexperiment, da die Situation nicht rekonstruierbar ist.

b) Verkehrssituation am Schlump Donnerstags 10:00.
Zufallsexperiment, da die Situation rekonstruiert und dementsprechend das Experiment beliebig oft wiederholt werden kann.

c) Gleichzeitiger Wurf von drei fairen Würfeln, Beobachtung der Augensumme.
Zufallsexperiment, da die Situation rekonstruiert und dementsprechend das Experiment beliebig oft wiederholt werden kann.

d) Lebenszeit römischer Kaiser nach Inthronisierung.
Kein Zufallsexperiment, da die Umstände für jeden Kaiser eindeutig sind und dementsprechend die Situation nicht rekonstruierbar ist.

Hausübung 1.2

[| 12]

(Zufall in der Praxis, 6+6 Punkte). Stellen Sie in den beiden folgenden Situationen dar, an welchen Stellen sich Zufallseinflüsse auswirken. Geben Sie darüber hinaus kurz an, welche Ziele (ggf. aus Sicht der unterschiedlichen Parteien) erreicht werden sollen.

a) Ein Flughafen hat eine Landebahn, die Flugzeuge müssen beim Landen einen gewissen zeitlichen Abstand halten (vorangegangenes Flugzeug muss die Landebahn verlassen und sich weit genug entfernt haben, Wirbelschleppen müssen "verflogen"sein, ...). Nach Flugplan kommen die Flugzeuge gleichmäßig an, der Abstand zwischen zwei Ankünften ist im Mittel etwas größer als der notwendige zeitliche Abstand zwischen zwei Landungen. Ist eine Landung für ein Flugzeug noch nicht möglich, da die Landebahn noch nicht wieder freigegeben ist, muss das Flugzeug eine Warteschleife fliegen.

Das primäre Zufallsereigniss ist die Verspätung von Fliegern[1]. Zufallsereignisse können sich insofern auf den Flughafen auswirken, dass Leute verspätet in ihren Flieger steigen können, ankommende Passagiere ihr Gepäck nicht zeitnah erhalten, da sich das Gepäckstück in einem anderen, verzufallten Flugzeug befinden kann, oder Passagiere ihren Anschluss verpassen. Eine zufällige Bombendrohung kann zu einer kompletten Evakuierung des Flughafens verleiten, wodurch der Betrieb vollständig zum Stillstand kommt. Zufällig kann es sein, dass zwei anfliegende Flugzeuge nicht richtig koordiniert werden und es zu einer (beinahe-)Kollision kommt. Der Gegenfall ist, dass ein Flugzeug zufällig fälschlicherweise in die Warteschlange eingereiht wird.

Die Ziele der Passagiere sind, dass sie ihr Gepäck erhalten und ihre Anschlussgelegenheiten rechtzeitig erreichen.

Die Ziele der Flughafenbetreiber sind ein reibungsloser Betrieb und zufriedene Passagiere.

[1] siehe analog dazu Beispiel 1.3.1 im Skript, Version 05.04.2016

b) Die Universität Hamburg betreibt das System STiNE zur Vorlesungsplanung, -information und -unterstützung auf einem Server. Von Studierenden und Dozenten kommen Anfragen an und werden bearbeitet. Wird eine Anfrage nicht nach einer bestimmten Zeit erfolgreich bearbeitet, so wird sie unerfolgreich abgelehnt.

Das primäre Zufallsereignis ist die Anfrage einer Person an das System[1]. Hierbei gibt es drei Zufallsgrößen: Art, Umfang und Anzahl der Anfragen. Die Art der Anfrage bindet unterschiedlich viele Ressourcen gleichzeitig, während der Umfang die Dauer der Ressourcenbindung beeinflusst. Die Anzahl der Anfragen gibt an, wie viele Anfragen das System gleichzeitig bearbeiten können muss. Ein weiteres Zufallsereignis ist der Zeitpunkt der Anfrage, welcher in einem Zeitraum der Unerreichbarkeit bzw. Nichtverfügbarkeit des Systems liegen kann.

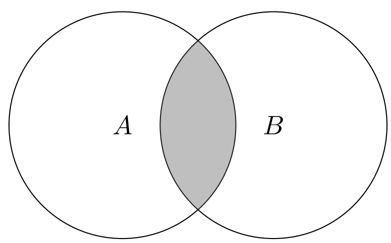
Ziel des Betreibers ist ein sinnvolles LoS[2].

Ziel des Service-Nutzers ist eine angemessene Bearbeitungszeit des Systems sowie dass er die Anfrage nicht mehrfach stellen muss, bis sie erfolgreich bearbeitet wird.

Hausübung 1.3

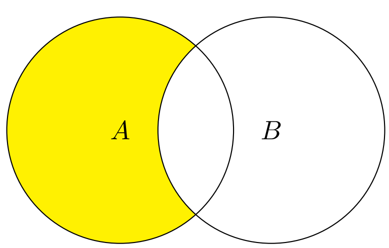
[| 5]

(Mengenoperationen und Venn-Diagramme, 1+1+1+2 Punkte). In einem Venn-Diagramm werden die Grundmengen symbolisch durch geometrische Objekte, meistens Kreise oder Ellipsen dargestellt. Die Resultate betrachteter Mengenverknüpfungen werden dann farblich oder durch Markierung hervorgehoben. Beispielsweise veranschaulicht das folgende Diagramm den Schnitt $A \cap B$ zweier Mengen A und B.



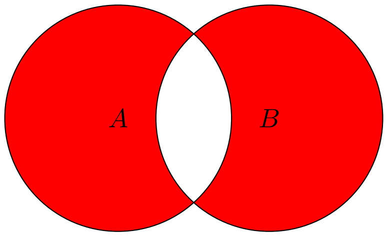
Zeichnen Sie die entsprechenden Diagramme für die folgenden Operationen.

a) $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ für zwei Mengen A, B.

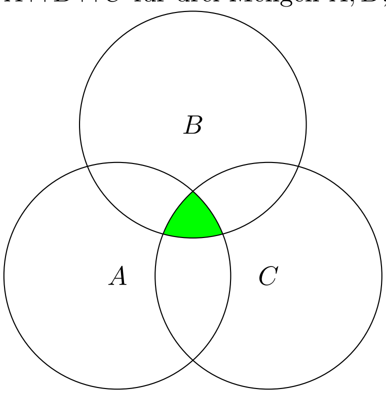


[1] analog Skript, Bsp. 1.3.2, V. 05.04.2016
[2] Skript, Bsp. 1.3.2, V. 05.04.2016

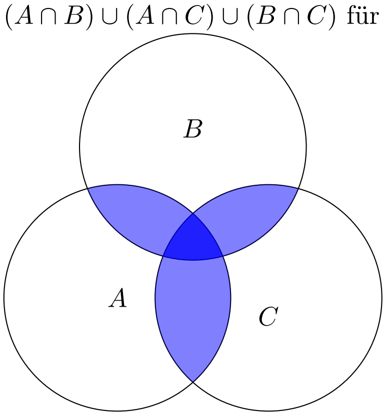
b) $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ für zwei Mengen A, B. ($A \Delta B$ heißt auch *symmetrische Mengendifferenz.*)



c) $A \cap B \cap C$ für drei Mengen A, B, C.



d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ für drei Mengen A, B, C.



Zettel Nr. 2 (Ausgabe: 12. April 2016, Abgabe: 19. April 2016)

Hausübung 2.1

[| 6]

(Ereignisse und Mengen, 3+3 Punkte). Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Ergebnismenge, außerdem seen $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse.

a) Beschreiben Sie das Ereignis $A \cup (B \cap C)$ verbal.

Es tritt das Ereignis A ein oder die Ereignisse B und C.

b) Beschreiben Sie das Ereignis "Höchstens zwei der Ereignisse A, B, C treten ein" mengentheoretisch.

$$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$$

Hausübung 2.2

[| 4]

(Warten auf Zahl, 2+2 Punkte). In einem Zufallsexperiment wird eine Münze solange geworfen, bis zum ersten Mal "Zahl" erscheint, die möglichen Ausgänge sind die natürlichen Zahlen, d.h. $\mathbb{N}$ ist die Ergebnismenge.

a) Stellen Sie das Ereignis "Der erste Wurf, bei dem Zahl erscheint, hat eine ungerade Nummer" als Menge dar.

$$\{k, k \in \mathbb{N}, 2 \not| k\}$$

k ist die Anzahl der Würfe, nach denen zum ersten Mal *Zahl* erscheint.

b) Stellen Sie das Ereignis "Spätestens nach 10 Würfen ist einmal Zahl erschienen" als Menge dar.

$$\{k, k \in \mathbb{N}, k \leq 10\}$$

k ist die Anzahl der Würfe, nach denen zum ersten Mal *Zahl* erscheint.

Hausübung 2.3

[| 7]

(Wahrscheinlichkeitsmaße, 2+5 Punkte). Über $\Omega = \{1, 2, 3\}$ soll ein Wahrscheinlichkeitsmaß P definiert werden.

a) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle so, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß wird.

A	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$P(A)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

$P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$ sind nach Definition gegeben.

Es gilt $\frac{1}{2} = P(\{1,3\}) = P(\{1\} \cup \{3\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) - P(\{1\} \cap \{3\}) = \frac{1}{3} + x - 0 \Rightarrow P(\{3\}) = \frac{1}{6}$.

Desweiteren kann über $P(\Omega) = P(\{1,2,3\}) = P(\{1\} \cap \{2\} \cap \{3\}) = 1$ der Wert von $P(\{2\})$ folgendermaßen ermittelt werden: $1 = P(\Omega) = P(\{1\} \cap \{2\} \cap \{3\}) = P(\{1\} \cap \{3\} \cap \{2\}) = P((\{1\} \cap \{3\}) \cap \{2\}) = P(\{1,3\}) + P(\{2\}) - P((\{1\} \cap \{3\}) \cup \{2\}) = \frac{1}{2} + x \Rightarrow x = P(\{2\}) = \frac{1}{2}$.

Über den Additionssatz gilt dann $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(-0) = P(\{1\}) + P(\{2\}) - P(\{1\} \cap \{2\}) = P(\{1\} \cap \{2\}) = P(\{1,2\}) = \frac{5}{6}$.

Analog dazu $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-0) = P(\{2\}) + P(\{3\}) - P(\{1\} \cap \{3\}) = P(\{2\} \cap \{3\}) = P(\{2,3\}) = \frac{2}{3}$.

b) In einer anderen Situation kennen Sie über $\Omega = \{1,2,3\}$ nur Angaben zu $P(\{1\})$ und $P(\{2,3\})$. Begründen Sie, warum diese Information nicht ausreicht, um $P : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ eindeutig festzulegen.

P ist nicht eindeutig festlegbar, da keine eindeutige Aussage über $P(\{2\})$ und $P(\{3\})$ getroffen werden kann; es ist lediglich deren Vereinigung bekannt. Ohne definitive Werte für $P(\{2\})$ und $P(\{3\})$ lassen sich deren Vereinigungen mit $P(\{1\})$ nicht berechnen, weswegen die Tabelle nicht vervollständigt werden kann.

Diese Information reicht nicht aus, um P eindeutig festzulegen, da man nur 2 Informationen gegeben hat, die weder eine Schnittmenge haben, um auf eine dritte schließen zu können, noch jedes bis auf ein Elementarereignis gegeben ist, um auf das letze schließen zu können. Somit sind keine weiteren Informationen extrahierbar.

Hausübung 2.4

[| 8]

(Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, 3+5 Punkte). Es werden zwei faire Würfel geworfen, dabei werden die folgenden Ereignisse betrachtet.

- A sei das Ereignis "Pasch gewürfelt" , d.h. beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl. Es gilt $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
- B sei das Ereignis "Maximum der Augenzahlen ist ≤ 3, es gilt $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- C sei das Ereignis "Augensumme 7 gewürfelt" , es gilt $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
- D sei das Ereignis "Augensumme 11 gewürfelt" , es gilt $P(D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

a) Es gilt außerdem $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Nutzen Sie diese Information und den Additionssatz, um $P(A \cup B)$ zu berechnen.

Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

b) Begründen Sie, dass A, C, D paarweise disjunkt sind. Berechnen Sie anschließend $P(A \cup C \cup D)$.

Da bei C und D unterschiedliche Summen gefordert sind, kann es nicht ein Ergebnis geben, welches auf beide Szenarien zutrifft. Die Summen, die in C und D gefordert werden, sind beide ungerade. Bei A

wird ein Pasch gefordert, d.h. beide Würfel zeigen die Augenzahl i. Demnach gilt für die Augensumme $i + i = 2i$, welches eine gerade Zahl ist, womit sie weder den Wert 7 noch den Wert 11 annehmen kann.

$$\begin{aligned} P(A \cup C \cup D) =& P(A) + P(C) + P(D) - (P(A \cap C) + P(A \cap D) + P(C \cap D)) + P(A \cap C \cap D) \\ =& \frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} - (0 + 0 + 0) + 0 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

Zettel Nr. 3 (Ausgabe: 19. April 2016, Abgabe: 26. April 2016)

Hausübung 3.1

[| 15]

(Die minimale Augenzahl, 5+5+3+2 Punkte). Es werden zwei faire Würfel geworfen, der Ergebnisraum ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, das Wahrscheinlichkeitsmaß durch $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ für alle $(i,j) \in \Omega$ definiert. Die Zufallsvariable X beschreibe nun das Merkmal "minimale Augenzahl", d.h

$$X : \Omega \to \Omega', X((i,j)) = \min\{i,j\}$$

mit $\Omega' = \{1,2,3,4,5,6\}$.

a) Bestimmen Sie $X^{-1}(\{x\})$ für $x = 1,2,3,4,5,6$.

- 1: $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(6,1),(5,1),(4,1),(3,1),(2,1)\}$
- 2: $\{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(6,2),(5,2),(4,2),(3,2)\}$
- 3: $\{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(6,3),(5,3),(4,3)\}$
- 4: $\{(4,4),(4,5),(4,6),(6,4),(5,4)\}$
- 5: $\{(5,5),(5,6),(6,5)\}$
- 6: $\{(6,6)\}$

b) Charakterisieren Sie die Verteilung von X, d.h. ergänzen Sie die Tabelle

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$^{11}/_{36}$	$^{9}/_{36}$	$^{7}/_{36}$	$^{5}/_{36}$	$^{3}/_{36}$	$^{1}/_{36}$

c) Ermitteln Sie $P(X \leq 3)$ und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die minimale Augenzahl ungerade ist.

- $P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = {}^{11+9+7}/_{36} = {}^{27}/_{36}$
- $P(X = x, 2 \nmid x) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) = {}^{11+7+3}/_{36} = {}^{21}/_{36}$

d) Hätte $\Omega' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ gewählt werden dürfen?

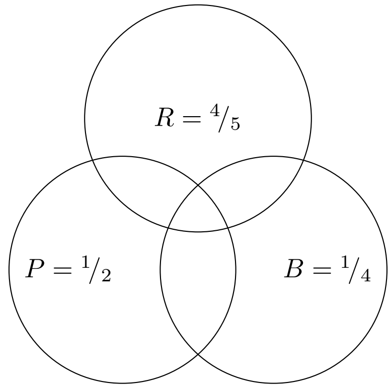
- Ja, da ein Abbild kein Urbild braucht ($X^{-1}(\{7\}) = X^{-1}(\{8\}) = X^{-1}(\{9\}) = X^{-1}(\{10\}) = \emptyset$).

Hausübung 3.2

[| 10]

(Archäologie, 10 Punkte). Bei Ausgrabungen in China haben Archäologen vor einigen Jahren einen Behälter entdeckt, in dem sich eine wohl 2400 Jahre alte "Suppe " befand. Die mit Knochen bestückte grünliche Flüssigkeit befand sich in einem Kessel, der in einem Grab in der Stadt Xian entdeckt wurde, wie die Zeitung "Global Times"berichtete. Der Fund wurde bei Ausgrabungen im Rahmen des Ausbaus des Flughafens der Stadt Xian gemacht, die für ihre Terrakotta-Armee bekannt ist. Eine Untersuchung sollte nun zeigen, welche Zutaten sich in der Flüssigkeit befanden, und ob es sich tatsächlich um eine Suppe handelt (soweit die Realität . . .)

Wissenschaftler und Studierende der Universität Hamburg mischten bei diesen Untersuchungen mit. Sie überlegten vorher, ob in dem Behälter wenigstens eine der Zutaten “Reis”, “Peking-Ente” oder “Brokkoli” zu identifizieren sei. Dabei nehmen sie an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Reis verwendet wurde, bei $\frac{4}{5}$ liegt, die für Peking-Ente bei $\frac{1}{2}$ und die bei Brokkoli bei $\frac{1}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Reis und Peking-Ente verwendet wurden, liegt bei $\frac{9}{20}$, die Wahrscheinlichkeit für Reis und Brokkoli bei $\frac{3}{20}$, die Wahrscheinlichkeit für Peking-Ente und Brokkoli bei $\frac{1}{20}$. Schließlich liegt die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Zutaten verwendet wurden, ebenfalls bei $\frac{1}{20}$. Hätten Sie hier helfen können? Ermitteln Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.



Stehe P für *Peking-Ente*, R für *Reis* und B für *Brokkoli*. Neben der Beschriftung des Venn-Diagramms gilt außerdem:

- $P(\{R\} \cap \{B\}) = {}^{3}/_{20}$
- $P(\{R\} \cap \{P\}) = {}^{9}/_{20}$
- $P(\{P\} \cap \{B\}) = {}^{1}/_{20}$
- $P(\{R\} \cap \{B\} \cap \{P\}) = {}^{1}/_{20}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine dieser Zutaten verwendet wurde, liegt somit bei $P(\{B\} \cup \{P\} \cup \{R\}) = P(\{B\}) + P(\{P\}) + P(\{R\}) - (P(\{R\} \cap \{B\}) + P(\{R\} \cap \{P\}) + P(\{P\} \cap \{B\})) + P(\{R\} \cap \{B\} \cap \{P\}) = {}^{5}/_{20} + {}^{10}/_{20} + {}^{16}/_{20} - ({}^{3}/_{20} + {}^{9}/_{20} + {}^{1}/_{20}) + {}^{1}/_{20} = {}^{19}/_{20}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei dieser Zutaten verwendet wurden, liegt bei $P(\{R\} \cap \{B\}) + P(\{R\} \cap \{P\}) + P(\{P\} \cap \{B\}) - 2 \cdot P(\{R\} \cap \{B\} \cap \{P\}) = {}^{3+9+1-1}/_{20} = {}^{12}/_{20}$.

Wie nach Aufgabe ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Zutaten verwendet wurden, gerade $P(\{R\} \cap \{B\} \cap \{P\}) = {}^{1}/_{20}$.

Zettel Nr. 4 (Ausgabe: 26. April 2016, Abgabe: 3. Mai 2016)

Hausübung 4.1

[| 10]

(Fußball, 4+3+3 Punkte). Der Trainer eines Fußballklubs hat in seinem Aufgebot drei Torhüter, sieben Verteidiger, acht Mittelfeldspieler und vier Stürmer.

a. Auf wieviele Arten kann der Trainer ein Team zusammenstellen, wenn er im 4-4-2-Systm spielen will, also mit einem Torhüter, je vier Verteidigern und Mittelfeldspielern sowie zwei Stürmern?

$$\begin{aligned}
& \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2} \\
= \; & {}^{3!}/_{1!2!} \cdot {}^{7!}/_{4!3!} \cdot {}^{8!}/_{4!4!} \cdot {}^{4!}/_{2!2!} \\
= \; & 3 \cdot (7 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 6 \\
= \; & 3 \cdot 35 \cdot 70 \cdot 6 \\
= \; & 210 \cdot 210 \\
= \; & 44100 \text{ Möglichkeiten}
\end{aligned}$$

b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der bei den Fans beliebte Stürmer Abel Bebel im Team, wenn der als Feierbiest bekannte Trainer nach feuchtfröhlichem Beisammensein seine Trainingseindrücke vergisst und aus allen im 4-4-2-System möglichen Aufstellungen rein Zufällig eine auswählt?

Hier wird einer der Stürmer gesetzt, der Trainer hat also noch 1 Slot, den er mit einem von 3 Stürmern besetzen kann, übrig. Der Rest ändert sich nicht.

$$\begin{aligned}
& \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{3}{1} \\
= \; & 3 \cdot 35 \cdot 70 \cdot 3 \\
= \; & 22050
\end{aligned}$$

Es gibt also 22050 Fälle, die Abel Bebel enthalten, und insgesamt 44100. Also ist er in der Hälfte der Fälle enthalten, womit er zu 50% auf dem Platz steht.

c. Auf wieviele Arten kann der Trainer die vier ausgewählten Verteidiger auf den vier Positionen seiner Abwehrkette verteilen, wenn er davon ausgeht, dass alle ausgewählten Verteidiger jede Position spielen können?

$$4! = 24$$

Hausübung 4.2

[| 7]

(Ein neues Spiel 77, 3+4 Punkte). Sie arbeiten bei einer Lotterie. Diese möchte eine Variante der bekannten Fernsehlotterie „Spiel 77 " auf den Markt bringen:

- Es werden wie gewohnt 7 Ziffern von 0 bis 9 mit Zurücklegen gezogen, jede Ziffer kann also mehrfach vorkommen.
- Im Unterschied zum bekannten Spiel werden die Ziffern am Ende der Größe nach aufgsteigend sortiert, aus der Ziehung 5,0,7,9,1,7,5 wird also die Zahl 0155779 zusammengesetzt.

Die sortierte siebenstellige Zahl ist dann das Ergebnis der Ziehung, die Menge aller solchen sortierten Zahlen wird mit Ω bezeichnet.

a. Wie viele Ergebnisse gibt es, d.h. wie viele Elemente enthält Ω?

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{10+7-1}{7} = \binom{16}{7} = 11440$$

b. Ist auf Ω eine Laplace-Annahme gerechtfertigt?

Nein, da $P(X = \text{"}0000000\text{"})$ geringer ist als $P(X = \text{"}1234567\text{"})$. Dies ist bedingt durch den Umstand der Sortierung, womit z. B. die Ereignisse $X = \text{"}1234567\text{"}$ und $X = \text{"}7654321\text{"}$ auf das gleiche Ergebnis abbilden, jedoch Ergenisse wie $X = \text{"}iiiiiii\text{"}, i \in [0, 1, \ldots, 9]$ jeweils nur ein Urbild haben.

Hausübung 4.3

[| 8]

(Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, 8 Punkte). Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine diskrete Menge, $P, Q : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, und es sei $\alpha \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass durch

$$R(A) := \alpha P(A) + (1 - \alpha)Q(A), \qquad A \subset \Omega$$

ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß $R : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ definiert wird. Warum gilt dies für $\alpha \notin [0, 1]$ nicht?

$$\begin{aligned} R(\Omega) &= \alpha \cdot P(\Omega) + (1 - \alpha) \cdot Q(\Omega) \qquad P(\Omega), Q(\Omega) = 1, \text{ da es Wahrscheinlichkeitsmaße sind} \\ &= \alpha + 1 - \alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\alpha \in [0, 1]$ muss gelten, da $R \to [0, 1]$ sonst nicht gilt

$$\begin{aligned} R(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \alpha \cdot P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + (1 - \alpha) \cdot Q(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \\ &= \alpha \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) + (1 - \alpha) \cdot \sum_{i=1} \infty Q(A_1) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha \cdot P(A_i) + (1 - \alpha) \cdot Q(A_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} R(A_i) \end{aligned}$$

Zettel Nr. 5 (Ausgabe: 03. Mai 2016, Abgabe: 10. Mai 2016)

Hausübung 5.1

[| 11]

(Stichprobenentnahme, 5+6 Punkte). Aufgrund von Ungenauigkeiten in der Produktion sind in jedem 1000er Pack einer bestimmten Sorte Schrauben immer 70 dabei, die nicht den Qualitätsanforderungen entsprechen. Sie entnehmen einem vollen 1000er Pack acht Schrauben. Da Sie diese nicht zurücklegen, sondern verwenden, wissen Sie, dass die Anzahl X der defekten Schrauben unter den acht entnommenen einer hypergeometrischen Verteilung folgt.

Hinweis: Sie werden einen Computer oder Taschenrechner benötigen.

Teilaufgabe a)

Geben Sie die Parameter der hypergeometrischen Verteilung an, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Schrauben defekt sind.

$$X\tilde{\ }Hg_{8,70,1000} = \frac{\binom{70}{n} \cdot \binom{1000-70}{8-n}}{\binom{1000}{8}} = P(X = n)$$

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\binom{70}{i}\binom{1000-70}{8-i}}{\binom{1000}{8}} \approx 0.9857 \hat{=} 98.57\%$$

Teilaufgabe b)

Verwenden Sie eine geeignete Binomialverteilung zur Approximation, und bestimmen Sie darauf basierend eine Näherung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Wie bewerten Sie die Approximation?

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{8}{i} \cdot \left(\frac{70}{1000}\right)^{i} \cdot \left(1 - \frac{70}{1000}\right)^{8-i} \approx 0.9853 \hat{=} 98.53\%$$

Abweichung minimal; Binomialverteilung eignet sich als Näherung, wenn die Varianz größer als 9 ist (hier gegeben durch $V = 1000 \cdot 0.01 \cdot 0.99 = 9.9$) und der Bruch ${}^{n}/_{N}$ kleiner als 0.05 (hier gegeben durch ${}^{n}/_{N} = {}^{8}/_{1000} = 0.008 \leq 0.05$).

Hausübung 5.2

[| 10]

(Glücksspiel, 5+5 Punkte). In einem Glücksspiel haben Sie eine Gewinnwahrscheinlichkeit von ${}^{1}/_{100}$. Sie spielen ein Jahr lang wöchentlich, also 52 mal. X bezeichne die Anzahl von Spielen, bei denen Sie gewinnen.

Hinweis: Auch hier werden Sie einen Computer oder Taschenrechner benötigen.

Teilaufgabe a)

Welcher Verteilung folgt die Zufallsvariable X? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie

- höchstens einmal gewinnen,
- mehr als einmal gewinnen.

$$X\tilde{\ }Bin_{52,0.01} = P(X = n) = \binom{52}{n} \cdot 0.01^{n} \cdot 0.99^{52-n}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= \textstyle\sum_{i=0}^{1} \binom{52}{i} \cdot 0.01^{i} \cdot 0.99^{52-i} &\approx\ & 0.9044 \hat{=} 90.44\% \\ P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) &\approx\ & 1 - 0.9044 = 0.0956 \end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

Setzen Sie eine geeignete Poisson-Verteilung zur Approximation ein, und berechnen Sie mit dieser eine Näherung dafür, dass Sie mehr als einmal gewinnen.

$$Pois_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

$$\lambda = n \cdot p = 52 \cdot 0.01 = 0.52$$

$$Pois_{0.52}(i > 1) = \sum_{i=2}^{52} {}^{0.52^i}/_{i!}\ e^{-0.52} \approx 0.0963 \hat{=} 9.63\%$$

Hausübung 5.3

[| 4]

(Eine Zähldichte, 4 Punkte). Die Funktion $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ mit $k \to p_k$ soll eine Zähldichte werden. Äquivalent formuliert soll $(p_k)_{k=1}^n$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor werden. Dabei ist $p_k = c \cdot k$ mit einer Konstanten c gesetzt.

Bestimmen Sie c so, dass die Anforderungen an eine Zähldichte bzw. einen Wahrscheinlichkeitsvektor erfüllt sind.

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^n k = {}^1/_2 n(n+1)$.