Formale Grundlagen der Informatik I

Abgabe der Hausaufgaben

Übungsgruppe 24 am Freitag, d. 25. Juni 2015

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Philipp Quach
6706421
4quach@informatik.uni-hamburg.de

25. Juni 2015

Aufgabe 10.4

[/2]

Beweisen Sie, dass eine Inferenzregel $R = \frac{F_1,\ldots,F_n}{G}$ genau dann korrekt ist, wenn $\{F_1,\ldots,F_n\} \vDash G$ gilt. (Nutzen Sie dazu die Definition der Korrektheit einer Inferenzregel auf Folie 31.)

Definition: Wenn $M \vdash_R H$ (durch Benutzen von R wird aus einer Formel M die Formel H), dann auch $M \vDash H$ (jede Belegung, die M wahr macht, macht auch H wahr).
Daraus folgt, dass $M \vdash_R H$ gleichbedeutend ist mit:
Wir haben eine Menge aus Formeln $A_1,\ldots,A_m$, eine Inferenzregel $R = \frac{B_1,\ldots,B_m}{C}$ und eine Formel H.
Wir formen um:

$R = \frac{B_1,\ldots,B_m}{C}$	Sei $n \leq m \wedge A_1,\ldots,A_{m-x} \equiv B_1,\ldots,B_n \;\; \vert x \geq 0$
$R = \frac{A_1,\ldots,A_m}{C}$	Da $A_1,\ldots,A_{m-x}$ die benutzen Formeln aus M sind,
	sei nun C die geschlussfolgerte Formel (also H)
$R = \frac{A_1,\ldots,A_m}{H}$	$A_1,\ldots,A_{m-x} \in M \Rightarrow M \geq \{A_1,\ldots,A_{m-x}\}$
	$\Rightarrow$ Für $A_1,\ldots,A_{m-x}$ kann auch M eingesetzt werden,
	da die zusätzlichen Formeln nicht benutzt werden müssen.
$R = \frac{M}{H}$	

Am Anfang wurde definiert, dass $M \vDash H$ gilt. Nun ist:

$$\frac{F_1,\ldots,F_n}{G} = R = \frac{M}{H} \qquad \text{s. links:} \begin{cases} M = F_1,\ldots,F_n \\ H = G \end{cases}$$

$\Rightarrow M \vDash H \equiv \{F_1,\ldots,F_n\} \vDash H$

Aufgabe 10.5

[/3]

Aufgabe 10.5.1

Seien $F = ((A \Leftrightarrow B) \wedge B \wedge \neg C)$ und $G = ((B \vee \neg C) \Leftrightarrow \neg C) \wedge \neg C \wedge \neg(B \vee \neg C)$. Geben Sie eine Substitution *sub* an mit $sub(F) = G$ oder begründen Sie, warum dies nicht möglich ist.

Da nur atomare Formeln substituiert werden können, muss der Bijunktionspfeil erhalten bleiben, da in beiden Formeln nur jeweils einer vorkommt. $\Rightarrow \text{sup}(A) = (B \vee \neg C)$
Die Position der Formeln ergibt dann $\text{dub}(B) = (\neg C)$. Durch $\text{sub}(C) = (B \vee \neg C)$ wird aus F G.

Aufgabe 10.5.2

Zeigen Sie, dass für jede Formel F und jede Substitution sub gilt: Wenn F eine Tautologie ist, dann ist auch $sub(F)$ eine Tautologie. Vervollständigen Sie dazu den Beweis aus der Vorlesung. Führen Sie insb. die dort nicht ausgeführte strukturelle Induktion.

Seien $A_1, \ldots, A_n$ die in F vorkommenden Aussagensymbole und $\mathcal{A}$ eine Belegung. Sei $\mathcal{A}'$ eine neue Belegung mit $\mathcal{A}'(A_i) := \mathcal{A}(\mathrm{sub}(A_i))$.
Dies ist möglich, da alle A_i kontingent sind.
Sei B eine Behauptung: $\mathcal{A}'(F) = \mathcal{A}(\mathrm{sub}(F))$.

1. Induktionsanfang: B gilt für jede atomare Formel (gegeben durch die Definition von $\mathcal{A}'$)

2. Induktionsannahme: "$B(C)$" $\wedge$ "$B(D)$" gelte für "C" $\wedge$ "D".

3. Induktionsschritt: Unter Annahme von (2) gilt:

$B(\neg C) \overset{\text{laut Def. v. }\mathcal{A}}{=} \mathrm{sub}(\neg C) \overset{\text{s. Vl 17 S. 5}}{=} \neg\,\mathrm{sub}(C) \overset{l.Def.v.\mathcal{A}}{=} \neg B(C)$ (gilt wegen (2))
$B(C \circ D) \overset{l.Def.v.\mathcal{A}}{=} \mathrm{sub}((C \circ D) \overset{\text{s. Vl 17 S. 5}}{=} \mathrm{sub}(C) \circ \mathrm{sub}(D) \overset{l.Def.v.\mathcal{A}}{=} B(C) \circ B(D)$ (gilt wegen (2))
$\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Aufgabe 10.6

[/7]

Aufgabe 10.6.1

Zeigen oder Widerlegen Sie, dass die folgenden Inferenzregeln korrekt sind:

$$\frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow A}{\neg B \vee A} \qquad \frac{(A \vee B) \Rightarrow C, \neg C \wedge \neg B}{A \vee B}$$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$\neg B \vee A$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1

$\Rightarrow$ bewiesen, da $(\neg B \vee A)$ auch dann wahr ist, wenn $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ wahr ist.

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	$\neg C$	$\neg B$	$\neg C \wedge \neg B$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

$\Rightarrow$ widerlegt, da $(A \vee B)$ an mindestens einer Stelle wahr ist, an der $(A \vee B) \Rightarrow C$ und $C \wedge \neg B$ wahr sind.

Aufgabe 10.6.2

Sei $\mathcal{C} = (\mathcal{L}_{AL}, Ax, \mathcal{R})$ ein Kalkül der Aussagenlogik mit $Ax = \{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)\}$ und $R = \{\frac{\neg G, F \Rightarrow G}{\neg F}, \frac{\neg G, F \wedge G}{F}\}$. Sei ferner $M = \{A \vee C, \neg(E \Rightarrow C)\}$.
Zeigen Sie $M \vdash_{\rfloor} A$ durch Angabe einer Ableitung.

$R_1 = \frac{\neg G, F \Rightarrow G}{\neg F} \hat{=}$Modus Tollens (MT) $\wedge$ $R_2 = \frac{\neg G, F \wedge G}{F} \hat{=}$Disjunktiver Syllogismus (DS)

$$\begin{array}{lll} M & \vdash (E \Rightarrow C) & [\text{aus M}] \\ & \vdash C \Rightarrow (E \Rightarrow C) & [Ax \text{ mit } \operatorname{sub}(A) = C \wedge \operatorname{sub}(B) = E] \\ & \vdash \neg C & [\text{MT mit } \operatorname{sub}(G) = (E \Rightarrow C) \wedge \operatorname{sub}(F) = C] \\ & \vdash A \vee C & [\text{aus M}] \\ & \vdash A & [\text{DS1 mit } \operatorname{sub}(G) = \neg C \wedge \operatorname{sub}(F) = A] \end{array} \tag{1}$$