

# **Hausaufgaben zum 14. Mai 2015**

**Mathematik für Studierende der Informatik II  
(Analysis und Lineare Algebra)**

Louis Kobras

6658699

4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann

6663579

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann

6706472

fwuy089@studium.uni-hamburg.de

10. Mai 2015

# Aufgabe 1

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix zu invertieren, ist ebenjene Matrix  $B$  gesucht, mit der die gegebene Matrix multipliziert werden muss, um die Einheitsmatrix zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich folgende neun Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} I & 1 = 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + (-1) \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{31} + 1 = a_{11} + a_{21} \\ II & 0 = 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{32} & \Rightarrow a_{32} = a_{12} + a_{22} \\ III & 0 = 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + (-1) \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{33} = a_{13} + a_{23} \\ \\ IV & 0 = 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{21} = -a_{31} \\ V & 1 = 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\ VI & 0 = 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{23} = -a_{33} \\ \\ VII & 0 = 2 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \\ VIII & 0 = 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\ IX & 1 = 2 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} & \end{array}$$

Durch die offensichtlichen Umformungen und das Einsetzen von Gleichungen ineinander ermitteln wir nun die Werte  $(a_{ij})_{i,j \in [1,2,3]}$  als Lösungen dieses Gleichungssystems.

Wir beginnen mit der ersten Spalte :

Einsetzen von IV in I :

$$\begin{aligned}a_{31} + 1 &= a_{11} + (-a_{31}) \\ \Rightarrow a_{11} &= a_{31} + a_{31} + 1 = 2 \cdot a_{31} + 1\end{aligned}$$

Einsetzen von  $a_{11}$  und  $a_{21}$  in VII :

$$\begin{aligned}0 &= 2 \cdot (2 \cdot a_{31} + 1) + 2 \cdot (-a_{31}) + 1 \cdot a_{31} = 4 \cdot a_{31} + 2 - 2 \cdot a_{31} + a_{31} \\ &= 2 + 3 \cdot a_{31} \\ \Rightarrow a_{31} &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Einsetzen von  $a_{31}$  in  $a_{11}$  und  $a_{21}$  :

$$\begin{aligned}a_{21} &= -a_{31} = \frac{2}{3} \\ a_{11} &= 2 \cdot a_{31} + 1 = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Fortfahren mit der zweiten Spalte :

Einsetzen von II in VIII :

$$\begin{aligned}0 &= 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot (a_{12} + a_{22}) \\ &= 3 \cdot a_{12} + 3 \cdot a_{22} \\ \Rightarrow a_{12} &= -a_{22}\end{aligned}$$

Einsetzen von  $a_{32}$  in V :

$$\begin{aligned}1 &= 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot (a_{22} - a_{22}) \\ \Rightarrow a_{22} &= 1\end{aligned}$$

Einsetzen von  $a_{22}$  in  $a_{12}$  und  $a_{32}$  :

$$\begin{aligned}a_{12} &= -a_{22} = -1 \\ a_{32} &= a_{22} - a_{22} = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Fortfahren mit der dritten Spalten :

Einsetzen von VI in III :

$$\begin{aligned}0 &= 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot (-a_{33} + (-1) \cdot a_{33}) \\ \Rightarrow a_{13} &= 2 \cdot a_{33}\end{aligned}$$

Einsetzen von  $a_{13}$  und  $a_{23}$  in IX :

$$\begin{aligned}1 &= 2 \cdot (2 \cdot a_{33}) + 2 \cdot (-a_{33}) + 1 \cdot a_{33} = 4 \cdot a_{33} - 2 \cdot a_{33} + 1 \cdot a_{33} = 3 \cdot a_{33} \\ \Rightarrow a_{33} &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Einsetzen von  $a_{33}$  in  $a_{13}$  und  $a_{23}$  :

$$\begin{aligned}a_{13} &= 2 \cdot a_{33} = \frac{2}{3} \\ a_{23} &= -a_{33} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Anhand dieser Werte für  $a_{ij}$  stellen wir nun die Matrix  $B$  auf:

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Matrix handelt es sich um das Inverse der Matrix  $A$  aus der Aufgabe.

*Probe:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Probe gemacht.

## Aufgabe 2

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei  $A$  die Matrix aus Aufgabe 1 ist.

## Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für zwei  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $A$  und  $B$  tatsächlich die Formel

$$\det(A)\det(B) = \det(AB)$$

gilt.

## Aufgabe 4

Die Folge  $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen 0. Damit existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $|\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}| < \frac{1}{3}$  gilt. Bestimmen Sie das kleinste  $n_0 \in \mathbb{N}$ , das das leistet.

## Aufgabe 5

Es sei  $a \in \mathbb{R}$  irgendeine Zahl und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Man zeige nur unter Benutzung der Definition von Konvergenz, dass die Folge  $(a + a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert.