Übungsaufgaben zum 16. April 2015

Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Aufgabenbereich 1

Für die folgenden linearen Gleichungssysteme stelle man die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimme die allgemeine Lösung mit dem Gauß-Verfahren.

Anmerkung: *Ein Lineares Gleichungssystem wird im Folgenden als 'LGS' bezeichnet werden. Des Weiteren stehe 'EKM' für den Begriff 'erweiterte Koeffizientenmatrix' sowie 'GL' für 'Lösung durch Anwendung des Gauß-Verfahrens'*

Aufgabe 1

LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

EKM:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

GL:

$$\begin{array}{lrrrrl} I & 2 & 1 & 1 & 1 & (:2) \\ II & 1 & -1 & 1 & 4 & \\ III & 3 & 1 & 2 & -1 & (:3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 1 & -1 & 1 & 4 & II - I \\ III & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & III - I \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & (\cdot(-\frac{2}{3})) \\ III & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & (\cdot(-6)) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \\ III & 0 & 1 & -1 & 5 & III - II \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
II & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \\
III & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{22}{3} & \left(\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
II & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\
III & 0 & 0 & 1 & -11
\end{array}$$

$$\underline{\underline{x_3 = -11}}$$

$$-\frac{7}{3} = x_2 - \frac{1}{3} \cdot 11$$

$$-\frac{7}{3} = x_2 + \frac{11}{3}$$

$$\underline{\underline{x_2 = -\frac{18}{3} = -6}}$$

$$\frac{1}{2} = x_1 + \frac{1}{2} \cdot (-6) + \frac{1}{2} \cdot (-11)$$

$$\frac{1}{2} = x_1 - 3 - 5.5$$

$$\underline{\underline{x_1 = 9}}$$

Aufgabe 2

LGS:

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = 4 \\ & & 3x_1 & + & 2x_2 & = 4 \end{array}$$

EKM:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

GL:

$$\begin{array}{lccccl} I & 2 & 1 & 1 & 1 & (:2) \\ II & 1 & -1 & 1 & 4 & \\ III & 3 & 0 & 2 & 2 & (:3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 1 & -1 & 1 & 4 & (II - I) \\ III & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{2} & (III - I) \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \left(\cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right) \\ III & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & (\cdot(-2)) \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \\ III & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & (III - II) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ II & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ III & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}$$

$$0 \neq \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{k.L.}}$$

Aufgabe 3

LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 \;+\; x_2 \;+\; x_3 &= 1 \\ x_1 \;-\; x_2 \;+\; x_3 &= 4 \\ 3x_1 \;+\; 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

EKM:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

GL:

$$\begin{array}{llllll} I & 2 & 1 & 1 & 1 & (:2) \\ II & 1 & -1 & 1 & 4 & \\ III & 3 & 0 & 2 & 5 & (:3) \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 1 & -1 & 1 & 4 & (II \;-\; I) \\ III & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & (III \;-\; I) \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \left(\cdot\;\left(-\frac{2}{3}\right)\right) \\ III & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & (\cdot\;(-2)) \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ II & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \\ III & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & (III \;-\; II) \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} I & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ II & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ III & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot x_3 \\ -\frac{7}{3} &= x_2 \;-\; \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{2} &= x_1 \;+\; \frac{1}{2}x_2 \;+\; \frac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{7}{3} + \frac{1}{3}x_3 \\ x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{7}{6} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_3 = \frac{10}{6} - \frac{1}{3}x_3 \end{aligned}$$

Einsetzen von x_1 und x_2 in I:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{10}{6} - \frac{2}{6}x_3 - \frac{7}{6} + \frac{1}{6}x_3 + \frac{3}{6}x_3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_3 = 0}} \end{aligned}$$

Einsetzen von x_3 in x_2, anschließend x_3 und x_2 in x_1:

$$x_2 = -\frac{7}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_2 = -\frac{7}{3}}}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{7}{6} - \frac{0}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = \frac{5}{3}}}$$

Aufgabenbereich 2

Wir gehen davon aus, dass die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems durch elementare Zeilenumformung auf die folgende Zeilenstufenform gebracht wurde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Welches sind die führenden und welches sind die freien Variablen? Man bestimme die allgemeine Lösung.

*Die **führenden** Variablen sind x_1, x_2. x_5.*
*Die **freien** Variablen sind x_3, x_4, x_6.*

Aufgabe 4: Lösung durch Rückwärtssubstitution ("Gauß-Verfahren")

$$\begin{aligned} x_5 &= 3x_6 - 2 \\ x_2 &= -3x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_1 &= -2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 + 1 \\ &= -2(-3x_3 - 2x_4 + 1) - 3x_3 + x_4 + 3x_6 - 2 - 2x_6 + 1 \\ &= 6x_3 + 4x_4 - 2 - 3x_3 + x_4 + 3x_6 - 2 - 2x_6 + 1 \\ &= 3x_3 + 5x_4 + x_6 - 3 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\{(3t + 5u + v - 3, -3t - 2u + 1, t, u, 3v - 2, v) \mid t, u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^6$

Aufgabe 5: Lösung durch Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addieren von III auf I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Subtrahieren von 2·II von I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3_x3 + 5_x4 + x_6 - 3 \\ x_2 &= -3x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_5 &= 3x_6 - 2 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\{(3t + 5u + v - 3, -3t - 2u + 1, t, u, 3v - 2, v) \mid t, u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^6$