Formale Grundlagen der Informatik I

Abgabe der Hausaufgaben
Übungsgruppe 24 am 12. Juni 2015

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Philipp Quach
6706421
4quach@informatik.uni-hamburg.de

12. Juni 2015

Aufgabe 8.3

[/4]

Geben Sie für jede der folgenden Formeln jeweils an, ob diese erfüllbar ist, falsifizierbar, kontingent, allgemeingültig oder unerfüllbar.

1. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$
2. $((A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$
3. $(((((A \wedge B) \wedge C) \wedge D) \wedge E) \Rightarrow (\neg A \vee E))$
4. $(((C \Rightarrow B) \vee A) \wedge (A \vee \neg B))$

1.

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1

Die Formel ist erfüllbar und falsifizierbar, aber insbesondere kontingent.

2.

A	B	$(A \wedge B)$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Die Formel ist falsifizierbar und insbesondere unerfüllbar (Kontradiktion).

3.

$(((A \wedge B) \wedge C) \wedge D) \wedge E \quad := \quad F$

A	B	C	D	E	F	$(\neg A \vee E)$	$F \Rightarrow (\neg A \vee E)$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	$*$	$*$	$*$	$*$	0	?	1
$*$	0	$*$	$*$	$*$	0	?	1
$*$	$*$	0	$*$	$*$	0	?	1
$*$	$*$	$*$	0	$*$	0	?	1
$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	?	1

Wie hier zu sehen ist, ist der als *F* definierte Ausdruck genau dann wahr, wenn [A-E] wahr ist. Da in diesem Fall auch der Ausdruck $(\neg A \vee E)$ wahr ist, ist die Implikation ebenfalls wahr. Wird nun eines der Literale [A-E] falsch, so wird auch *F* falsch; und da $0 \Rightarrow *$ immer wahr ist, ist somit auch der untersuchte Ausdruck$[F] \Rightarrow (\neg A \vee E)$ wahr für alle [A-E], die unwahr sind. Der Zustand von $(\neg A \vee E)$ interessiert dann nicht weiter. Ebenso ist der Zustand der einzelnen Literale uninteressant: Sobald ein einzelnes Literal unwahr ist, ist der gesamte Ausdruck *F* falsch, folglich die *don't care*s.
Somit ergibt sich: Die Formel ist erfüllbar und insbesondere allgemeingültig (Tautologie).

4.

$((C \Rightarrow B) \vee A) \ := \ F$

A	B	C	$(C \Rightarrow B)$	F	$(A \vee \neg B)$	$F \wedge (A \vee \neg B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Die Formel ist erfüllbar und falsifizierbar und insbesondere kontingent.

Aufgabe 8.4

[/5]

Seien *T,K,F,G* und *H* aussagenlogische Formeln, die keine Aussagensymbole gemein haben. Sei ferner *T* eine Tautologie, *K* eine Kontradiktion und *F,G* und *H* kontingente Formeln. Zu welcher semantischen Kategorie (tautologisch, kontradiktorisch, kontinget) gehören dann die folgenden Formeln? Begründen Sie dabei stets Ihre Aussage!

1. $(F \vee \neg G)$
2. $(K \Rightarrow (F \vee \neg G))$
3. $((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \vee G))$
4. $((T \Leftrightarrow \neg K) \Rightarrow F)$
5. $((T \Leftrightarrow K) \Rightarrow (((F \vee \neg G) \wedge T) \Leftrightarrow ((\neg F \vee G) \wedge) G)))$

1.

F ist kontingent.
G ist kontingent $\Rightarrow \neg G$ ist auch kontingent.
$\Rightarrow F \vee \neg G$ ist auch kontingent, weil beide Teilbedingungen kontingent sind.

2.

Die Formel ist eine Tautologie, da *K* immer 0 ist und $0 \Rightarrow *$ immer wahr ist.

3.

F kontingent und *G* kontingent $\Rightarrow (F \vee G)$ auch kontingent.
F kontingent und *G* kontingent $\Rightarrow (F \Rightarrow G)$ auch kontingent.
Der Ausdruck *Kontingent impliziert Kontingent* ist ebenfalls kontingent, da beide Teilbedingungen kontingent sind.

4.

K ist immer falsch, woraus folgt, dass $\neg K$ immer wahr ist.
T ist immer wahr, woraus folgt, dass $T \Leftrightarrow \neg K$ immer wahr ist.
$wahr \Rightarrow *$ ist kontingent, da $wahr \Rightarrow wahr$ immer wahr zurückgibt, $wahr \Rightarrow falsch$ jedoch falsch.

5.

$(T \Leftrightarrow K)$ ist immer falsch, da *T* immer wahr und *K* immer falsch ist und $wahr \Leftrightarrow falsch$ ist immer falsch. $falsch \Rightarrow *$ ist immer wahr.
Daraus folgt, dass diese Formel allgemeingültig ist (tautologisch).

Aufgabe 8.5

[/3]

Gegeben sei eine kontextfreie Grammatik mit den folgenden Produktionen

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & \neg S|(S \vee S)|(S \wedge S)|(S \Rightarrow S)|(S \Leftrightarrow S)|T \\ T & \rightarrow & A|B|C|D|E \end{array}$$

Dabei sollen *A,B,C,D,D,(,),*$\neg$,$\vee$,*l*,$\Rightarrow$,$\Leftrightarrow$ Terminale und *S* und *T* Nonterminale sein.
Diese Grammatik erzeugt alle aussagenlogischen Formeln, die nur die atomaren Formeln *A,B,C,D* und *E* enthalten.
Beweisen Sie mittels struktureller Induktion eine Richtung dieser Behauptung, nämlich dass jede aussagenlogische Formel, die nur die atomaren Formeln *A,B,C,D* und *E* enthält, von der Grammatik generiert werden kann.

Induktionsanfang: B:G gilt für jede atomare Formel:

$S \to T$

$T \to A|B|C|D|E$

$\Rightarrow G$ gilt für jede atomare Formel aus $\{A, B, C, D, E\}$

Induktionsannahme: $B(M), B(N)$ gilt für zwei Formeln M, N ($B(X) :=$ Behauptung für *X*).

Induktionsschritt: $B(\neg M)$ ist : $S \to \neg S \to \neg M$. Dies geht, da $B(M)$ gilt, also möglich ist.
$B(M \circ N)$ ist: $S \to S \circ S$, wonach das erste *S* zu $S \to M$ und das zweite *S* zu $S \to N$ wird.
$S \to M$ geht, da $B(M)$ gilt; und $S \to N$ geht, da $B(N)$ gilt.
$\circ \in \{\vee, 1, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$