Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Modul: MATH3-Inf

Veranstaltung: 65-832

Übungsgruppe 2

Dienstag, 14.15 - 15.00

Geom 431

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

Felix Gebauer
4gebauer@informatik.uni-hamburg.de
6671660

26. April 2016

Punkte für die Hausübungen:

3.1	3.2	Σ

Utz Pöhlmann 6663579 | Louis Kobras 6658699 | Felix Gebauer 6671660

Zettel Nr. 3 (Ausgabe: 19. April 2016, Abgabe: 26. April 2016)

Hausübung 3.1

[| 15]

(Die minimale Augenzahl, 5+5+3+2 Punkte). Es werden zwei faire Würfel geworfen, der Ergebnisraum ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, das Wahrscheinlichkeitsmaß durch $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ für alle $(i,j) \in \Omega$ definiert. Die Zufallsvariable X beschreibe nun das Merkmal "minimale Augenzahl", d.h

$$X : \Omega \to \Omega', X((i,j)) = \min\{i,j\}$$

mit $\Omega' = \{1,2,3,4,5,6\}$.

a) Bestimmen Sie $X^{-1}(\{x\})$ für $x = 1,2,3,4,5,6$.

- 1: $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(6,1),(5,1),(4,1),(3,1),(2,1)\}$
- 2: $\{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(6,2),(5,2),(4,2),(3,2)\}$
- 3: $\{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(6,3),(5,3),(4,3)\}$
- 4: $\{(4,4),(4,5),(4,6),(6,4),(5,4)\}$
- 5: $\{(5,5),(5,6),(6,5)\}$
- 6: $\{(6,6)\}$

b) Charakterisieren Sie die Verteilung von X, d.h. ergänzen Sie die Tabelle

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$^{11}/_{36}$	$^{9}/_{36}$	$^{7}/_{36}$	$^{5}/_{36}$	$^{3}/_{36}$	$^{1}/_{36}$

c) Ermitteln Sie $P(X \leq 3)$ und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die minimale Augenzahl ungerade ist.

- $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = {}^{11+9+7}/_{36} = {}^{27}/_{36}$
- $P(X = x, 2 \nmid x) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = {}^{11+7+3}/_{36} = {}^{21}/_{36}$

d) Hätte $\Omega' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ gewählt werden dürfen?

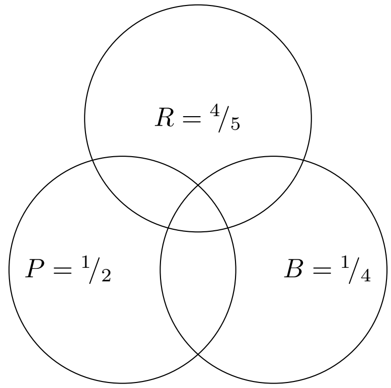
- Ja, da ein Abbild kein Urbild braucht ($X^{-1}(\{7\}) = X^{-1}(\{8\}) = X^{-1}(\{9\}) = X^{-1}(\{10\}) = \emptyset$).

Hausübung 3.2

[| 10]

(Archäologie, 10 Punkte). Bei Ausgrabungen in China haben Archäologen vor einigen Jahren einen Behälter entdeckt, in dem sich eine wohl 2400 Jahre alte "Suppe " befand. Die mit Knochen bestückte grünliche Flüssigkeit befand sich in einem Kessel, der in einem Grab in der Stadt Xian entdeckt wurde, wie die Zeitung "Global Times"berichtete. Der Fund wurde bei Ausgrabungen im Rahmen des Ausbaus des Flughafens der Stadt Xian gemacht, die für ihre Terrakotta-Armee bekannt ist. Eine Untersuchung sollte nun zeigen, welche Zutaten sich in der Flüssigkeit befanden, und ob es sich tatsächlich um eine Suppe handelt (soweit die Realität ...)

Wissenschaftler und Studierende der Universität Hamburg mischten bei diesen Untersuchungen mit. Sie überlegten vorher, ob in dem Behälter wenigstens eine der Zutaten "Reis", "Peking-Ente" oder "Brokkoli" zu identifizieren sei. Dabei nehmen sie an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Reis verwendet wurde, bei $\frac{4}{5}$ liegt, die für Peking-Ente bei $\frac{1}{2}$ und die bei Brokkoli bei $\frac{1}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Reis und Peking-Ente verwendet wurden, liegt bei $\frac{9}{20}$, die Wahrscheinlichkeit für Reis und Brokkoli bei $\frac{3}{20}$, die Wahrscheinlichkeit für Peking-Ente und Brokkoli bei $\frac{1}{20}$. Schließlich liegt die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Zutaten verwendet wurden, ebenfalls bei $\frac{1}{20}$. Hätten Sie hier helfen können? Ermitteln Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.



Stehe P für *Peking-Ente*, R für *Reis* und B für *Brokkoli*. Neben der Beschriftung des Venn-Diagramms gilt außerdem:

- $P(\{R\} \cap \{B\}) = {}^{3}/_{20}$
- $P(\{R\} \cap \{P\}) = {}^{9}/_{20}$
- $P(\{P\} \cap \{B\}) = {}^{1}/_{20}$
- $P(\{R\} \cap \{B\} \cap \{P\}) = {}^{1}/_{20}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine dieser Zutaten verwendet wurde, liegt somit bei $P(\{B\} \cup \{P\} \cup \{R\}) = P(\{B\}) + P(\{P\}) + P(\{R\}) - (P(\{R\} \cap \{B\}) + P(\{R\} \cap \{P\}) + P(\{P\} \cap \{B\})) + P(\{R\} \cap \{B\} \cap \{P\}) = {}^{5}/_{20} + {}^{10}/_{20} + {}^{16}/_{20} - ({}^{3}/_{20} + {}^{9}/_{20} + {}^{1}/_{20}) + {}^{1}/_{20} = {}^{19}/_{20}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei dieser Zutaten verwendet wurden, liegt bei $P(\{R\} \cap \{B\}) + P(\{R\} \cap \{P\}) + P(\{P\} \cap \{B\}) - 2 \cdot P(\{R\} \cap \{B\} \cap \{P\}) = {}^{3+9+1-1}/_{20} = {}^{12}/_{20}$.

Wie nach Aufgabe ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Zutaten verwendet wurden, gerade $P(\{R\} \cap \{B\} \cap \{P\}) = {}^{1}/_{20}$.