

Formale Grundlagen der Informatik I

Abgabe der Hausaufgaben

Übungsgruppe 24 am Freitag, d. 19. Juni 2015

Louis Kobras

6658699

4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann

6663579

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Philipp Quach

6706421

4quach@informatik.uni-hamburg.de

19. Juni 2015

Aufgabe 9.4

[/5]

9.4.1

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Folgerbarkeitsbeziehung mittels einer Wahrheitstafel:

$$\{\neg B, A \Rightarrow B\} \models \neg A$$

$$A \Rightarrow B := F$$

A	B	$\neg B$	F	$\neg A$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

Nur in der ersten Zeile wurden $\neg B$ und F wahr; dort ist auch $\neg A$ wahr. Damit ist die Aussage bewiesen.

9.4.2

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Äquivalenz mittels einer Wahrheitstafel:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$A \Rightarrow B := F$$

$$F \Rightarrow B := G$$

$$B \Rightarrow A := H$$

$$A \Rightarrow H := I$$

A	B	F	G	H	I
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$$\Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \equiv A$$

$$\Rightarrow A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \equiv T$$

$A \not\equiv T \Rightarrow$ widerlegt (siehe Spalten 4 und 6).

9.4.3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: Wenn $F \equiv G$ und $G \models H$ gilt, dann gilt auch $F \models H$.

$F \equiv G$ bedeutet: Wenn F wahr ist, ist G auch wahr; wenn F falsch ist, ist G auch

falsch $\Rightarrow H$ bleibt H .

$G \models H$ bedeutet: Wenn G wahr ist und H wahr ist, gilt dies; wenn G wahr ist, H jedoch falsch ist, gilt dies nicht; wenn H wahr ist, gilt dies.

$F \models H$ bedeutet: Wenn F wahr ist und H wahr ist, gilt dies; wenn F wahr ist und H falsch ist, gilt dies nicht; wenn F falsch ist, gilt dies.

9.4.4

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: Wenn $F \equiv G$ und $G \models H$ gilt, dann gilt auch $H \models F$.

$H \models F$ bedeutet: Wenn H wahr ist und F wahr ist, gilt dies; wenn H wahr ist, F jedoch falsch ist, gilt dies nicht; wenn H falsch ist, gilt dies.

Dies stimmt nicht überein mit 9.4.3 und zeigt somit auf, dass die Aussage nicht korrekt ist \Rightarrow widerlegt.

9.4.5

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: Wenn $F_1 \equiv F_2$ und $G_1 \equiv G_2$ gilt, dann gilt $F_1 \models G_1$ genau dann, wenn $F_2 \models G_2$.

$F_1 \equiv F_2$ bedeutet: Wenn F_1 wahr ist, ist F_2 auch wahr; wenn F_1 falsch ist, ist F_1 auch falsch $\Rightarrow F_1$ bleibt F_2 .

$G_1 \equiv G_2$ bedeutet: Wenn G_1 wahr ist, ist G_2 auch wahr; wenn G_1 falsch ist, ist G_2 auch falsch $\Rightarrow G_1$ bleibt G_2 .

$F_1 \models G_1$ bedeutet: Wenn F_1 wahr ist und G_1 wahr ist, gilt dies; wenn F_1 wahr ist, G_1 jedoch falsch ist, gilt dies nicht; wenn G_1 wahr ist, gilt dies.

$F_2 \models G_2$ bedeutet: Wenn F_2 wahr ist und G_2 wahr ist, gilt dies; wenn F_2 wahr ist, G_2 jedoch falsch ist, gilt dies nicht; wenn G_2 wahr ist, gilt dies.

Da der dritte und vierte Absatz zueinander kongruent sind, ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 9.5

[/4]

9.5.1

Bilden Sie zu

$$F := (\neg C \Rightarrow \neg(\neg A \vee B)) \wedge (A \vee C)$$

durch Äquivalenzumformungen nach dem Verfahren aus der Vorlesung eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Geben Sie dabei bei jeder Umformung an, welche Umformungsregel Sie anwenden.

$(\neg C \Rightarrow \neg(\neg A \vee B)) \wedge (A \vee C)$	Eliminieren von \Rightarrow
$(\neg\neg C \vee \neg(\neg A \vee B)) \wedge (A \vee C)$	Aufheben von Doppelten Negationen
$(C \vee \neg(\neg A \vee B)) \wedge (A \vee C)$	Anwenden des de Morgan-Gesetzes
$(C \vee (\neg\neg A \wedge \neg B)) \wedge (A \vee C)$	Aufheben von Doppelten Negationen
$((C \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (A \vee C))$	Anwenden des Distributiv-Gesetzes
$((C \vee A) \wedge (C \vee \neg B)) \wedge (A \vee C)$	Anwenden des Assoziativgesetzes
$(C \vee A) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (C \vee A)$	Streichen doppelt vorkommender Terme
$(C \vee A) \wedge (C \vee \neg B)$	KNF

9.5.2

Bilden Sie zu

$$G := ((A \Leftrightarrow B) \vee \neg B) \wedge \neg C$$

eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform mit der in der Vorlesung behandelten Wahrheitstafelmethode.

$$((A \Leftrightarrow B) \vee \neg B) \quad := \quad F$$

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \Leftrightarrow B$	F	$F \wedge \neg C$	
0	0	0	1	1	1	1	1	$\leftarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
0	0	1	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	1	0	0	0	\vee
0	1	1	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	0	1	1	$\leftarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
1	0	1	1	0	0	1	0	\vee
1	1	0	0	1	1	1	1	$\leftarrow (A \wedge B \wedge \neg C)$
1	1	1	0	0	1	1	0	

$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$	Anwenden des Distributivgesetzes
$((\neg B \wedge \neg C) \wedge (\neg A \vee A)) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$	$(\neg A \vee A) = 1 \Rightarrow$ kann gekürzt werden
$((\neg B \wedge \neg C)) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$	Omittieren von Klammern
$(\neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$	DNF

Aufgabe 9.6

[/3]

Wenden Sie auf die folgenden Hornformeln den Markierungsalgorithmus an, um die Erfüllbarkeit zu prüfen. Geben Sie dabei an in welchem Schritt Aussagesymbole markiert werden und geben sie ferner sofern möglich eine erfüllende Belegung an.

1. $(\neg A \vee G \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg E \vee \neg F) \wedge (\neg D \vee C \vee \neg B) \wedge (\neg D \vee B) \wedge D \wedge (A \vee \neg F) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E \vee \neg B)$
2. $(\neg G \vee E \vee \neg D) \wedge (\neg F \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee \neg E \vee A) \wedge B \wedge (F \vee \neg G \vee \neg D) \wedge G \wedge (D \vee \neg B) \wedge (\neg E \vee \neg F)$

9.6.1

1. D
2. B $(D \Rightarrow B)$
3. C $((D \wedge B) \Rightarrow C), A(B \Rightarrow A)$
4. G $((D \wedge A) \Rightarrow G), E((C \wedge B \wedge D) \Rightarrow E)$

Erfüllende Belegung A mit $(A) = A(B) = A(C) = A(D) = A(E) = A(G) = 1 \wedge A(F) = 0$

9.6.2

1. G, B
2. D $(B \Rightarrow D)$
3. E $((G \wedge D) \Rightarrow E), F((G \wedge D) \Rightarrow F)$
4. C $(F \Rightarrow C), A((B \wedge D \wedge E) \Rightarrow A) \dots$ OH!

unerfüllbar: $(\neg E \vee \neg F)$