Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Modul: MATH3-Inf

Veranstaltung: 65-832

Übungsgruppe 2

Dienstag, 14.15 - 15.00

Geom 431

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

Felix Gebauer
4gebauer@informatik.uni-hamburg.de
6671660

10. Mai 2016

Punkte für die Hausübungen:

5.1	5.2	5.3	Σ

Utz Pöhlmann 6663579 | Louis Kobras 6658699 | Felix Gebauer 6671660

Zettel Nr. 5 (Ausgabe: 03. Mai 2016, Abgabe: 10. Mai 2016)

Hausübung 5.1

[| 11]

(Stichprobenentnahme, 5+6 Punkte). Aufgrund von Ungenauigkeiten in der Produktion sind in jedem 1000er Pack einer bestimmten Sorte Schrauben immer 70 dabei, die nicht den Qualitätsanforderungen entsprechen. Sie entnehmen einem vollen 1000er Pack acht Schrauben. Da Sie diese nicht zurücklegen, sondern verwenden, wissen Sie, dass die Anzahl X der defekten Schrauben unter den acht entnommenen einer hypergeometrischen Verteilung folgt.

Hinweis: Sie werden einen Computer oder Taschenrechner benötigen.

Teilaufgabe a)

Geben Sie die Parameter der hypergeometrischen Verteilung an, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Schrauben defekt sind.

$$X\tilde{\ }Hg_{8,70,1000} = \frac{\binom{70}{n} \cdot \binom{1000-70}{8-n}}{\binom{1000}{8}} = P(X=n)$$

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\binom{70}{i}\binom{1000-70}{8-i}}{\binom{1000}{8}} \approx 0.9857 \hat{=} 98.57\%$$

Teilaufgabe b)

Verwenden Sie eine geeignete Binomialverteilung zur Approximation, und bestimmen Sie darauf basierend eine Näherung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Wie bewerten Sie die Approximation?

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{8}{i} \cdot \left(\frac{70}{1000}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{70}{1000}\right)^{8-i} \approx 0.9853 \hat{=} 98.53\%$$

Abweichung minimal; Binomialverteilung eignet sich als Näherung, wenn die Varianz größer als 9 ist (hier gegeben durch $V = 1000 \cdot 0.01 \cdot 0.99 = 9.9$) und der Bruch ${}^n/_N$ kleiner als 0.05 (hier gegeben durch ${}^n/_N = {}^8/_{1000} = 0.008 \leq 0.05$).

Hausübung 5.2

[| 10]

(Glücksspiel, 5+5 Punkte). In einem Glücksspiel haben Sie eine Gewinnwahrscheinlichkeit von ${}^1/_{100}$. Sie spielen ein Jahr lang wöchentlich, also 52 mal. X bezeichne die Anzahl von Spielen, bei denen Sie gewinnen.

Hinweis: Auch hier werden Sie einen Computer oder Taschenrechner benötigen.

Teilaufgabe a)

Welcher Verteilung folgt die Zufallsvariable X? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie

- höchstens einmal gewinnen,
- mehr als einmal gewinnen.

$$X\tilde{\ }Bin_{52,0.01} = P(X=n) = \binom{52}{n} \cdot 0.01^n \cdot 0.99^{52-n}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= \textstyle\sum_{i=0}^{1} \binom{52}{i} \cdot 0.01^i \cdot 0.99^{52-i} &\approx& \quad 0.9044 \hat{=} 90.44\% \\ P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) &\approx& \quad 1 - 0.9044 = 0.0956 \end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

Setzen Sie eine geeignete Poisson-Verteilung zur Approximation ein, und berechnen Sie mit dieser eine Näherung dafür, dass Sie mehr als einmal gewinnen.

$$Pois_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

$$\lambda = n \cdot p = 52 \cdot 0.01 = 0.52$$

$$Pois_{0.52}(i > 1) = \sum_{i=2}^{52} {}^{0.52^i}/_{i!}\; e^{-0.52} \approx 0.0963 \widehat{=} 9.63\%$$

Hausübung 5.3

[| 4]

(Eine Zähldichte, 4 Punkte). Die Funktion $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ mit $k \to p_k$ soll eine Zähldichte werden. Äquivalent formuliert soll $(p_k)_{k=1}^n$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor werden. Dabei ist $p_k = c \cdot k$ mit einer Konstanten c gesetzt.

Bestimmen Sie c so, dass die Anforderungen an eine Zähldichte bzw. einen Wahrscheinlichkeitsvektor erfüllt sind.

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^n k = {}^1/_2 n(n+1)$.

Anmerkung: $i := k$. Es gilt:

$$p_i = c \cdot i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c \cdot i = 1$$

Durch den Hinweis erhalten wir:

$$1 = \sum_{i=1}^n ci = c \cdot \sum_{i=1}^n i \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sum_{i=1}^n i} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

Nichtnegativität. i ist stets positiv, ebenso wie n. Beide Werte werden an keiner Stelle subtrahiert. Damit nimmt der Term nie einen negativen Wert an.

Normiertheit. Für die Normiertheit muss gelten: $\sum_{i=1}^n c \cdot i = 1$.

$$\begin{aligned} 1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{2}{n(n+1)} \cdot i \\ &= \textstyle\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i \\ \Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^n i &= \textstyle\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Zusammen mit c ergibt sich dann

$$c \cdot \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2}{n(n+1)} = 1 \quad \square$$