Mathematik für Studierende der Informatik II
Analysis und Lineare Algebra

Abgabe der Hausaufgaben zum 17. Juni 2015

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann
6706472
fwuy089@studium.uni-hamburg.de

17. Juni 2015

Aufgabe 1

[/4]

Es seien $x, y, a \in (0, \infty)$. Zeigen Sie

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y.$$

Anwendung der *log*-Definition:

$$(1)\ \begin{cases} log_a(f) = x \Leftrightarrow a^x = f \\ log_a(g) = y \Leftrightarrow a^y = g \end{cases}$$

Bildung des Quotienten $\frac{f}{g}$:

$$\frac{f}{g} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \textit{nach Präsenzaufgabe 8.1}$$

Wiederum Anwenden der *log*-Definition:

$$\frac{f}{g} = a^{x-y} \quad \Leftrightarrow \quad log_a\left(\frac{f}{g}\right) = x - y$$

Einsetzen von (1):

$$log_a\left(\frac{f}{g}\right) = x - y = log_a(f) - log_a(g)$$

$\square$

Aufgabe 2

[/4]

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)^4$

(b) $g(x) = \sqrt{2x^2 + x - 3}$

(c) $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$

(a).

$$\frac{d}{dx}(2x^2+3x+1)^4 = 4\cdot(2x^2+3x+1)^3\cdot(4x+3)$$

(b).

$$\sqrt{2x^2+x-3} = (2x^2+x-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}(2x^2+x-3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot(2x^2+x-3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4x+1) = \frac{4x+1}{2\cdot\sqrt{(2x^2+x-3)}}$$

(c).

$$\frac{1}{x^2-1} = (x^2-1)^{-1}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)^{-1} = -1\cdot(x^2-1)^{-2}\cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

Aufgabe 3

[/4]

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = e^{x^2}$

(b) $g(x) = x\cdot e^{x^2}$

(c) $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

(a). *(Kettenregel)*

$$e^{x^2} = e^{(x^2)}$$

$$\frac{d}{dx}e^{(x^2)} = e^{(x^2)}\cdot 2x$$

(b). *(Kettenregel und Produktregel)*

$$x\cdot e^{x^2} = x\cdot e^{(x^2)}$$

$$\frac{d}{dx}x\cdot e^{(x^2)} = 1\cdot e^{x^2}\ +\ x\cdot e^{(x^2)}\cdot 2x = e^{(x^2)}\cdot(2x^2+1)$$

(c). *(Produktregel)*

$$\frac{\ln x}{x} = \ln(x)\cdot x^{-1}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x)\cdot x^{-1} = \frac{1}{x}\cdot x^{-1}\ +\ \ln(x)\cdot -1\cdot x^{-2} = \frac{1}{x^2}\ -\ \ln(x)\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1-\ln(x))$$

Aufgabe 4

[/4]

Beweisen Sie die Quotientenregel mit Hilfe der Produktregel, der Kettenregel und der Tatsache

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \;=\; \frac{f'(x)\cdot g(x) \;-\; f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2} \tag{1}$$

Beweis.

	Berücksichtigen/ Anwenden von:
$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$	Produktregel
$h'(x) = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\frac{1}{g'(x)}$	Kettenregel
$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g'(x)}\right)'\cdot g'(x)$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{1}{(g(x))^2}\cdot g'(x)\right)$	Klammern auflösen
$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot -\frac{g(x)}{(g(x))^2}$	multiplizieren
$= \frac{f'(x)}{g(x)} + -\frac{f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	Erweitern mit $\frac{g(x)}{g(x)}$
$= \frac{f'(x)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$	Auf einen Bruchstrich schreiben
$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	Dieser Ausdruck ist gleich (1).

$\square$

Aufgabe 5

[/4]

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ mit Hilfe der Umkehrregel.

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow f(x) = x^3$

Umstellen nach $f^{-1}(y)$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} && \begin{cases} f(x) = x \Leftrightarrow y = f(y) \\ f(x) \hat{=} y \Leftrightarrow f(y) \hat{=} x \end{cases} \\ y &= \sqrt[3]{f^{-1}(y)} && (\dots)^3 \\ y^3 &= f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Ableiten:

$$f(y) = y^3$$
$$f'(y) = 3y^2$$

Umkehrregel:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

In Umkehrregel:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2}$$

Umstellen nach x:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \tfrac{1}{3y^2} \\ (f^{-1})'(x) &= \tfrac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \\ (f^{-1})'(x) &= \tfrac{1}{3 \cdot x^{\frac{1}{3} \cdot 2}} \\ (f^{-1})'(x) &= \tfrac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

y resubstituieren: $y = \sqrt[3]{x}$

$\sqrt[3]{\ldots} = (\ldots)^{\frac{1}{3}}$

Probe:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \\ (f^{-1})(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \quad (Potenzregel) \\ (f^{-1})(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \\ (f^{-1})(x) &= \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$