

Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsgruppe 14

Utz Pöhlmann

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras

4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

15. Oktober 2015

Punkte:

					Σ
--	--	--	--	--	----------

1 Präsenzteil

1.1 Präsenzaufgabe 1.1

Wiederholen Sie die O -Notation und die verwandten Notationen. Wie sind die einzelnen Mengen definiert? Was bedeutet es, wenn $f \in O(g)$ gilt, was wenn $f \in \Theta(g)$ gilt und so weiter?

$$\begin{aligned}
 O(g(n)) : f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|f(n)\| \leq c \cdot \|g(n)\| \\
 o(g(n)) : f(n) \in o(g(n)) &\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|f(n)\| < c \cdot \|g(n)\| \\
 \Omega(g(n)) : f(n) \in \Omega(g(n)) &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|f(n)\| \geq c \cdot \|g(n)\| \\
 \omega(g(n)) : f(n) \in \omega(g(n)) &\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|f(n)\| > c \cdot \|g(n)\| \\
 \Theta(g(n)) : f(n) \in \Theta(g(n)) &\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot \|g(n)\| \leq \|f(n)\| \leq c_2 \cdot \|g(n)\|
 \end{aligned}$$

1.2 Präsenzaufgabe 1.2

Beweisen Sie:

- $n^2 + 3n - 5 \in O(n^2)$
- $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$
- $n! \in O((n+1)!)$

Gilt im letzten Fall auch $n! \in o((n+1)!)$?

$$\begin{aligned}
 f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \\
 f(n) &= n^2 + 3n - 5 \\
 g(n) &= n^2 \\
 \frac{f(n)}{g(n)} &= \frac{n^2 + 3n - 5}{n^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 5}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} \\
 &= 1 + \frac{3}{\infty} - \frac{5}{\infty^2} \\
 &= 1 + 0 + 0 \\
 &= 1 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot n^2 \leq n^2 - 2n \leq c_2 \cdot n^2 \\
 \Leftrightarrow c_1 \leq 1 - \frac{2}{n} \leq c_2
 \end{aligned}$$

Dies ist erfüllbar ab $n_0 \geq 2$, da für $n = 1$ im mittleren Ausdruck 0 herauskommt und c_1 größer als 0, aber kleiner als der mittlere Ausdruck sein muss. Ist $n \geq 2$, so kommt im mittleren Ausdruck 0,5 heraus, für c_1 lässt sich ein beliebiger Wert aus $]0; 0.5[$ wählen, sei es an dieser Stelle $\frac{1}{4}$. Als Obergrenze für c_2 lässt sich jeder Wert größer oder gleich 1 wählen, da der mittlere Ausdruck nicht größer als 1 werden kann und somit die Bedingung des "kleiner gleichsofort erfüllt ist.

Somit wird als Ergebnis für die Belegung gewählt: $c_1 = \frac{1}{4}; c_2 = 1; n_0 = 2$. Mit dieser Belegung gilt $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$

□

$$\begin{aligned}
f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \\
f(n) &= n! \\
g(n) &= (n+1)! = n \cdot n!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n \cdot n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{\infty} \\
&= 0 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))
\end{aligned}$$

Da die Bedingung für $o(g(n))$ ist, dass der Quotient nicht nur kleiner unendlich, sondern gleich null ist, was hier wie oben gezeigt gegeben ist, gilt auch $n! \in o((n+1)!)$.

□

1.3 Präsenzaufgabe 1.3

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(h(n))$
2. $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O(h(n))$