Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Modul: MATH3-Inf

Veranstaltung: 65-832

Übungsgruppe 2

Dienstag, 14.15 - 15.00

Geom 431

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

16. Juni 2016

Punkte für die Hausübungen:

10.1	10.2	10.3	10.4	Σ

Zettel Nr. 1 (Ausgabe: 14. Juni 2016, Abgabe: 14. Juni 2016)

Hausübung 1.1

[| 10]

(Tschebyscheff und Binomialverteilung, Fortsetzung, 2+4+2+2 Punkte). Es sei $Y_n \tilde{} Bin_{n,0.5}$, insbesondere also $\mathbf{E}[Y] = \frac{n}{2}$ und $\mathbf{Var}[Y] = \frac{n}{4}$.

a) Stellen Sie $P(Y_n = 0) + P(Y_n = n)$ in der Form $P(|Y_n - \mathbf{E}[Y_n]| \geq \epsilon)$ dar, d.h. geben Sie an, wie Sie ϵ wählen müssen.

b) Welche Abschätzung erhalten Sie für $P(|Y_n - \mathbf{E}[Y_n]| \geq \epsilon)$ mit den Werten aus b) mit der Tschebyscheff-Ungleichung?

c) Bestimmen Sie $P(Y_n = 0) + P(Y_n = n)$ exakt.

d) Wie bewerten Sie den Vergleich zwischen Abschätzung und exakter Wahrscheinlichkeit?

Teilaufgabe a)

Es wird $\epsilon = \mathbf{E}[Y_n] = \frac{n}{2}$ gewählt.
$P(|Y_n - \mathbf{E}[Y_n]| \geq \frac{n}{2})$

Teilaufgabe b)

$P(|Y_n - \mathbf{E}[Y_n]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{Var}[Y_n]}{\epsilon^2} = \frac{\frac{n}{4}}{2^2} = n$

Teilaufgabe c)

$$\begin{aligned} Bin_{n,0.5}(0) + Bin_{n,0.5}(n) &= \binom{n}{0} \cdot 0,5^0 \cdot (1-0,5)^{n-0} + \binom{n}{n} \cdot 0,5^n \cdot (1-0,5)^{n-n} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0,5^n + 1 \cdot 0,5^n \cdot 1 \\ &= 0,5^n + 0,5^n \\ &= 2 \cdot 0.5^n \end{aligned}$$

Teilaufgabe d)

Wie erwartet ist die Abschätzung ziemlich ungenau.

Hausübung 1.2

[| 6]

(Tschebyscheff und diskrete Gleichverteilung, 2+4 Punkte). Es sei Y auf $\{-2n, ..., 2n\}$ gleichverteilt.

a) Ist X auf $\{a, ..., b\}$ gleichverteilt, so haben Sie in vergangenen Übungen $\mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ und $\mathbf{Var}[X] = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$ gezeigt. Daraus folgt natürlich insbesondere $\mathbf{E}[Y] = 0$. Vereinfachen Sie den Term für $\mathbf{Var}[Y]$ geeignet. *Hinweis:* Der Bruch lässt sich soweit kürzen, dass der Nenner 3 übrigbleibt.

b) Wenden Sie die Tschebyscheff-Ungleichung zur Abschätzung von

$$P(Y \in \{-2n, ..., -n\} \cup \{n, ..., 2n\}) = P(|Y - 0| \geq n)$$

an. Ist diese Abschätzung trivial? *Erinnerung:* Wahrscheinlichkeiten liegen ohnehin immer im Intervall [0,1]. Eine obere Abschätzung ≥ 1 wäre also trivial.

Teilaufgabe a)

$$\begin{aligned}
\textbf{Var}[Y] &= \tfrac{(b-a)(b-a+2)}{12} && \backslash\text{Formel für } \textbf{Var}[X] \\
&= \tfrac{b^2-ba+2b-ab+a^2-2a}{12} && \backslash\text{ausmultipliziert} \\
&= \tfrac{a^2-2ab+b^2-2a+2b}{12} && \backslash\text{umgestellt} \\
&= \tfrac{(-2n)^2-2(2n)(-2n)+(2n)^2-2(-2n)+2(2n)}{12} && \backslash\text{Grenzen eingesetzt, } a := -2n; b := 2n \\
&= \tfrac{4n^2-(-8n^2)+4n^2-(-4n)+4n}{12} && \backslash\text{* aufgelöst} \\
&= \tfrac{4n^2+8n^2+4n^2+4n+4n}{12} && \backslash\text{- und + aufgelöst} \\
&= \tfrac{16n^2+8n}{12} && \backslash\text{zusammengefasst} \\
&= \tfrac{8n(2n+1)}{12} && \backslash\text{8n ausgeklammert} \\
&= \tfrac{2n(2n+1)}{3} && \backslash\text{gekürzt}
\end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

$$\begin{aligned}
P(|Y-0| \geq n) &\leq \tfrac{\textbf{Var}[Y]}{n^2} && \backslash\text{Tschebyscheff-Ungleichung} \\
&= \tfrac{\frac{2\cdot n\cdot(2\cdot n+1)}{3}}{n^2} && \backslash\text{eingesetzt} \\
&= \tfrac{2\cdot(2\cdot n+1)}{3\cdot n} && \backslash\text{gekürzt}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist nun von n abhängig.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot(2\cdot n+1)}{3\cdot n} = \frac{4}{3}$ gilt, ist die obere Abschätzung ≥ 1
Damit ist sie trivial.

Hausübung 1.3

[| 6]

(Münzwerfen, 6 Punkte). Ein (kreisförmiges) Geldstück mit $1cm$ Durchmesser wird zufällig auf ein Schachbrett geworfen, dessen (quadratische) Felder eine Seitenlänge von $4cm$ haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze komplett in einem schwarzen Feld zu liegen kommt? (Ein Wurf wird nur als gültig betrachtet, wenn die Münze komplett auf dem Schachbrett zu liegen kommt, andernfalls wird er wiederholt.)

Hinweis: Charakterisieren Sie die Lage der Münze über ihren Mittelpunkt und treffen Sie für diesen eine geeignete Gleichverteilungsannahme.

- $r_{\text{Münze}} = \frac{d_{\text{Münze}}}{2} = \frac{1cm}{2} = 0,5cm$
- $A_{\text{Schachbrettfeld}} = \textit{Seitenlänge}\cdot\textit{Seitenlänge} = 4cm \cdot 4cm = 16cm^2$
- $n_{\text{Schachbrettfelder}} = 8 \cdot 8 = 64$
- $n_{\text{schwarze Felder}} = \frac{8\cdot 8}{2} = \frac{64}{2} = 32$

Die Münze wird als im Feld liegend betrachtet, sofern der Mittelpunkt einen mindestens so großen Abstand von jedem Rand des Feldes hat, wie der Radius der Münze groß ist.

- $A_{\text{Münze im Feld}} = (4cm - (2 \cdot 0.5cm)) \cdot (4cm - (2 \cdot 0.5cm)) = 3cm \cdot 3cm = 9cm^2$
- $A_{\text{günstige Fläche}} = n_{\text{schwarze Felder}} \cdot A_{\text{Münze im Feld}} = 32 \cdot 9cm^2 = 288cm^2$
- $A_{\text{gesamte Fläche}} = n_{\text{Schachbrettfelder}} \cdot A_{\text{Schachbrettfeld}} = 64 \cdot 16cm^2 = 1024cm^2$
- $P_{\text{Wurf gültig}} = \frac{\textit{günstige Fälle}}{\textit{gesamte Fälle}} = \frac{A_{\text{günstige Fläche}}}{A_{\text{gesamte Fläche}}} = \frac{288cm^2}{1024cm^2} = 0,28125 \mathrel{\hat{=}} 28\%$

Oder als Fließtext:

Von den 64 Feldern eines Schachbrettes sind 32 schwarz.
Wegen des Durchmessers (Radius=0.5cm) wird von jedem Feld ein Rand der Breite 0.5cm abgeschnitten; damit liegt der Mittelpunkt der Münze innerhalb eines Bereiches, in dem die ganze Münze in einem Feld liegt.
Dadurch ergibt sich für ein gültiges Feld eine Fläche von $(4-2\cdot 0.5)cm\cdot(4-2\cdot 0.5)cm = 3cm\cdot 3cm = 9cm^2$.
Die gesamte gültige Fläche für einen 'erfolgreichen' (erfolgreich := Münze landet auf 'schwarz') Wurf bei $9cm^2\cdot 32 = 288cm^2$.
Die gesamte Fläche des Schachbrettes beträgt $64\cdot 4cm\cdot 4cm = 1024cm^2$.
Die Wahrscheinlichkeit eines gültigen Wurfes ist gleich dem Verhältnis der gültigen Fläche zur Gesamtfläche:

$$P(X='schwarz') = \frac{A_{gültig}}{A_{gesamt}} = \frac{288cm^2}{1024cm^2} = 0.28125 \hat{=} 28.13\%$$

Hausübung 1.4

[| 3]

(Die negative Binomialverteilung, 3 Punkte). Sind die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_m$ unabhängig und identisch mit Parameter p geometrisch verteilt, so kann die Zufallsvariable $S = X_1 + ... + X_m$ als Zeitpunkt des m-ten Erfolgs in einer Bernoulli-Kette mit Runden-Erfolgsparameter p interpretiert werden. Es lässt sich dann

$$P(S=n) = \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m}$$

zeigen, entweder über kombinatorische Argumente oder über sukzessives Aufsummieren und entsprechenden Induktionsbeweis. Bestimmen Sie $\mathbf{E}[S]$ und $\mathbf{Var}[S]$.

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{E}[S] & = \sum_{n=m}^{\infty}\left(n\cdot\binom{n-1}{m-1}\cdot p^m\cdot(1-p)^{n-m}\right) & \backslash n\cdot\binom{n-1}{m-1} = m\cdot\binom{n}{m} \\
 & = \sum_{n=m}^{\infty}\left(m\cdot\binom{n}{m}\cdot p^m\cdot(1-p)^{n-m}\right) & \backslash\text{Index erniedrigt} \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty}\left(m\cdot\binom{n+m}{m}\cdot p^m\cdot p\cdot\frac{1}{p}\cdot(1-p)^{n+m-m}\right) & \backslash\cdot p\cdot\frac{1}{p} \\
 & = m\cdot\frac{1}{p}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{n+m}{m}\cdot p^{m+1}\cdot(1-p)^n\right) & \backslash\frac{1}{p}\text{ aus der Summe gezogen; } \wedge\ p^m\cdot p = p^{m+1} \\
 & = m\cdot\frac{1}{p}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{(n+1)+m-1}{m}\cdot p^{m+1}\cdot(1-p)^n\right) & \backslash\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{(n+1)+m-1}{m}\cdot p^{m+1}\cdot(1-p)^n\right) = 1 \\
 & = m\cdot\frac{1}{p}\cdot 1 & \\
 & = \frac{m}{p} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{Var}[S] & = \mathbf{E}[S^2] - (\mathbf{E}[S])^2 & \backslash\text{Definition von }\mathbf{Var}[S] \\
 & = \left(\sum_{n=m}^{\infty}\left(n^2\cdot P(S=n)\right)\right) - \left(\sum_{n=m}^{\infty}\left(n\cdot P(S=n)\right)\right)^2 & \backslash\text{Definition von }\mathbf{E}[S] \\
 & = \left(\sum_{n=m}^{\infty}\left(n^2\cdot\binom{n-1}{m-1}\cdot p^m\cdot(1-p)^{n-m}\right)\right) - \left(\frac{m}{p}\right)^2 & \backslash\text{eingesetzt} \\
 & = \left(\sum_{n=m}^{\infty}\left(n\cdot m\cdot\binom{n}{m}\cdot p^m\cdot(1-p)^{n-m}\right)\right) - \left(\frac{m}{p}\right)^2 & \backslash n\cdot\binom{n-1}{m-1} = m\cdot\binom{n}{m} \\
 & = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot m\cdot\binom{n+m}{m}\cdot p^m\cdot(1-p)^{n+m-m}\right)\right) - \left(\frac{m}{p}\right)^2 & \backslash\text{Index erniedrigt} \\
 & = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot m\cdot\binom{n+m}{m}\cdot p^m\cdot p\cdot\frac{1}{p}\cdot(1-p)^{n+m-m}\right)\right) - \left(\frac{m}{p}\right)^2 & \backslash\cdot p\cdot\frac{1}{p} \\
 & = \left(m\cdot\frac{1}{p}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot\binom{n+m}{m}\cdot p^m\cdot p\cdot(1-p)^n\right)\right) - \left(\frac{m}{p}\right)^2 & \backslash\frac{1}{p}\text{ aus der Summe gezogen} \\
 & = \left(m\cdot\frac{1}{p}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot\binom{n+m}{m}\cdot p^{m+1}\cdot(1-p)^n\right)\right) - \left(\frac{m}{p}\right)^2 & \backslash p^m\cdot p = p^{m+1} \\
 & = \frac{m}{p}\cdot\frac{1-p+m}{p} - \frac{m^2}{p^2} & \backslash\sum_{n=0}^{\infty}(...) = \frac{1-p+m}{p} \\
 & = \frac{m\cdot(1-p+m)}{p^2} - \frac{m^2}{p^2} & \backslash\cdot\text{ zusammengefasst} \\
 & = \frac{m-m\cdot p+m^2}{p^2} - \frac{m^2}{p^2} & \backslash\text{Klammer aufgelöst} \\
 & = \frac{m-m\cdot p+m^2-m^2}{p^2} & \backslash\text{- zusammengefasst} \\
 & = \frac{m-m\cdot p}{p^2} & \backslash\text{vereinfacht} \\
 & = \frac{m\cdot(1-p)}{p^2} & \backslash\text{ausgeklammert}
\end{array}$$