Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Modul: MATH3-Inf

Veranstaltung: 65-832

Übungsgruppe 2

Dienstag, 14.15 - 15.00

Geom 431

Utz Pöhlmann

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

6663579

Louis Kobras

4kobras@informatik.uni-hamburg.de

6658699

21. Juni 2016

Punkte für die Hausübungen:

11.1	11.2	11.3	Σ

Zettel Nr. 1 (Ausgabe: 21. Juni 2016, Abgabe: 21. Juni 2016)

Hausübung 1.1

[| 8]

Rechnen mit der Exponentialverteilung, 4+4 Punkte). Es sei $X\tilde{}Exp_\lambda$.

a) Begründen Sie

$$P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x]) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & 0 < 0. \end{cases}$$

b) Für welches $x \in \mathbb{R}$ gilt $P(X \leq x) = \frac{1}{2}$?

Teilaufgabe a)

$$\begin{array}{lcll} P(X \in (-\infty, x]) & = & P(-\infty < X \leq x) & \\ & = & \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y & \backslash f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & sonst \end{cases} \\ & \overset{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 0}{=} & \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y & \\ & = & [-e^{\lambda y}]_0^x & \\ & = & -e^{\lambda x} - (-e^{\lambda 0}) & \\ & = & e^{\lambda 0} - e^{\lambda x} & \\ & = & 1 - e^{\lambda x} & \end{array}$$

Für $c \to -\infty \wedge d \geq 0$ gilt bei $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Dies ist nun das gleiche Ergebnis, wie oben in Schritt 2. Somit ist Gleichheit gezeigt.

Teilaufgabe b)

$$\begin{array}{rcll} P(X \leq x) & = & \frac{1}{2} & \backslash \text{aus a)} \\ 1 - e^{-\lambda x} & = & \frac{1}{2} & \backslash -1 \\ -e^{-\lambda x} & = & -\frac{1}{2} & \backslash \cdot(-1) \\ e^{-\lambda x} & = & \frac{1}{2} & \backslash ln() \\ ln(e^{-\lambda x}) & = & ln(\frac{1}{2}) & \\ -\lambda x \cdot ln(e) & = & ln(\frac{1}{2}) & \backslash ln(e) = 1 \\ -\lambda x \cdot 1 & = & ln(\frac{1}{2}) & \backslash -\lambda \\ x & = & \frac{ln(\frac{1}{2})}{-\lambda} & \end{array}$$

$P(X \leq x) = \frac{1}{2}$ gilt somit für $x = \frac{ln(\frac{1}{2})}{-\lambda}$.

Hausübung 1.2

[| 9]

(Die Normalappxorimation, Fortsetzung, 3+3+3 Punkte). In der Situation aus Präsenzübung sei X die Anzahl der Ausschussteile unter den 400 Schrauben.

a) Bestimmen Sie $P(34 \leq X \leq 52)$ mit der Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur.

b) Bestimmen Sie $P(34 \leq X \leq 52)$ mit der Normalapproximation ohne Stetigkeitskorretur.

c) Bestimmen Sie $P(10 \leq X \leq 70)$ mit der Normalapproximation.

Teilaufgabe a)

$\mathbf{E}[x] = n \cdot p \wedge \mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X] \cdot (1-p)$ werden aus Präsenzaufgabe 11.2 übernommen.

$$\begin{aligned} P(34 \leq X \leq 52) &= \Phi\left(\tfrac{52.5-40}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{33.5-40}{6}\right) \\ &= \Phi\left(\tfrac{12.5}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{-6.5}{6}\right) \\ &= \Phi(2.08\overline{3}) - \Phi(-1.08\overline{3}) \\ &\approx 0.9812 - (1 - 0.8599) \\ &= 0.9812 + 0.8599 - 1 \\ &= 0.8411 \end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

$$\begin{aligned} P(34 \leq X \leq 52) &= \Phi\left(\tfrac{52-40}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{34-40}{6}\right) \\ &= \Phi\left(\tfrac{12}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{-6}{6}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &\approx 0.9772 - (1 - 0.8413) \\ &= 0.9772 + 0.8413 - 1 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

Teilaufgabe c)

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 70) &= \Phi\left(\tfrac{70-40}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{10-40}{6}\right) \\ &= \Phi\left(\tfrac{30}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{-30}{6}\right) \\ &= 2 \cdot \Phi\left(\tfrac{30}{6}\right) - 1 \\ &= 2 \cdot \Phi(5) - 1 \\ &\approx 2 \cdot 1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Hausübung 1.3

[| 8]

(Normalapproximation für Einzelwahrscheinlichkeiten, 3+3+2 Punkte). Bei der Normalapproximation **mit** Stetigkeitskorrektur können auch Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X = k)$ für $X\tilde{\ }Bin_{n,p}$ und $k \in \{0, ..., n\}$ approximiert werden:

$$P(X = k) = P(k \leq X \leq k) = P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5) \approx \Phi\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

a) Betrachten Sie den Fall $n = 10000$, $p = 0.5$ und $k = 5000$. Dann gilt auf vier gelten[de] Stellen gerundet

$$P(X = k) = \binom{10000}{5000} 0.5^{10000} \approx 0.007979.$$

Berechnen Sie mit obiger Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur eine Näherung.

b) Es sei n gerade, $p = 0.5$ sowie $k = \frac{n}{2}$. $P(X = k)$ wird nun einmal exakt und einmal über die Normalapproximation bestimmt. Geben Sie jeweils die Größenordnung für die Anzahl durchzuführender Operationen an. Gehen Sie dabei insbesondere darauf ein, wie diese Anzahl jeweils von n abhängt.

c) Warum können sich die Formeln zur Normalapproximation **ohne** Stetigkeitskorrektur nicht eignen, um Näherungen für $P(X = k) = P(k \leq X \leq k)$ zu ermitteln?

Teilaufgabe a)

$$\begin{aligned}
P(X=5000) &= P(5000 \le X \le 5000) \\
&= \Phi\left(\frac{5000.5-10000\cdot 0.5}{\sqrt{10000\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}}\right) - \Phi\left(\frac{4999.5-10000\cdot 0.5}{\sqrt{10000\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{0.5}{50}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5}{50}\right) \\
&= \Phi\left(0.01\right) - \left(1-\Phi\left(0.01\right)\right) \\
&= 2\cdot\Phi\left(0.01\right) - 1 \\
&= 2\cdot 0.5040 - 1 \\
&= 1.0080 - 1 \\
&= 0.0080
\end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

exakte Bestimmung:

$P(X=\frac{n}{2}) =$

$$\frac{\underbrace{\binom{n}{\frac{n}{2}}}_{n \text{ Operationen}\{n!}}{\underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)!}_{\frac{n}{2}\text{ Operationen}} \cdot \underbrace{\left(n-\frac{n}{2}\right)!}_{\frac{n}{2}\text{ Operationen}}} \cdot \underbrace{0.5^n}_{n\text{ Operationen}}$$

Das macht insgesamt:

$$\begin{array}{ll}
 & n \text{ Operationen} \\
+ & \frac{n}{2} \text{ Operationen} \\
+ & \frac{n}{2} \text{ Operationen} \\
+ & n \text{ Operationen} \\
\hline
 & 3\cdot n \text{ Operationen}
\end{array}$$

Das macht insgesamt $3n$ Operationen + die 3 Operationen um sie zu verknüpfen.
Dies liegt in $\mathrm{O}(3n+3)$ und insbesondere in $\mathrm{O}(n)$.

Bestimmung über Normalapproximation:

$P(X=\frac{n}{2}) =$

$$\Phi\left(\frac{\overbrace{n+0.5}^{1\text{ Operation}} - \overbrace{(n\cdot 0.5)}^{1\text{ Operation}}}{\underbrace{(n\cdot 0.5)}_{1\text{ Operation}} \cdot \underbrace{(1-0.5)}_{1\text{ Operation}}}\right) - \Phi\left(\frac{\overbrace{n-0.5}^{1\text{ Operation}} - \overbrace{(n\cdot 0.5)}^{1\text{ Operation}}}{\underbrace{(n\cdot 0.5)}_{1\text{ Operation}} \cdot \underbrace{(1-0.5)}_{1\text{ Operation}}}\right)$$

Das macht insgesamt:

$$\begin{array}{ll}
 & 1 \text{ Operation} \\
+ & 1 \text{ Operation} \\
+ & 1 \text{ Operation} \\
+ & 1 \text{ Operation} \\
+ & 1 \text{ Operation} \\
+ & 1 \text{ Operation} \\
+ & 1 \text{ Operation} \\
+ & 1 \text{ Operation} \\
\hline
 & 8 \text{ Operationen}
\end{array}$$

Das macht insgesamt 8 Operationen + die 5 Operationen um sie zu verknüpfen.
Dies liegt in $\mathrm{O}(13)$ und insbesondere in $\mathrm{O}(1)$.

Teilaufgabe c)

Ohne Stetigkeitskorrektur lautet die Gleichung:

$P(a \le X \le a) \approx \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}\right)$

Da $Y - Y = 0$ ist, gilt auch $\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}\right) = 0$

Somit würde immer $P(X=a) = P(a \le X \le a) = 0$ rauskommen.
Dies ist jedoch keine sinnvolle Näherung.