Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Modul: MATH3-Inf

Veranstaltung: 65-832

Übungsgruppe 2

Dienstag, 14.15 - 15.00

Geom 431

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

Felix Gebauer
4gebauer@informatik.uni-hamburg.de
6671660

18. April 2016

Punkte für die Hausübungen:

1.1	1.2	1.3	Σ

Zettel Nr. 2 (Ausgabe: 12. April 2016, Abgabe: 19. April 2016)

Hausübung 2.1

[| 6]

(Ereignisse und Mengen, 3+3 Punkte). Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Ergebnismenge, außerdem seen $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse.

a) Beschreiben Sie das Ereignis $A \cup (B \cap C)$ verbal.

Es tritt das Ereignis A ein oder die Ereignisse B und C.

b) Beschreiben Sie das Ereignis "Höchstens zwei der Ereignisse A, B, C treten ein" mengentheoretisch.

$$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$$

Hausübung 2.2

[| 4]

(Warten auf Zahl, 2+2 Punkte). In einem Zufallsexperiment wird eine Münze solange geworfen, bis zum ersten Mal "Zahl" erscheint, die möglichen Ausgänge sind die natürlichen Zahlen, d.h. $\mathbb{N}$ ist die Ergebnismenge.

a) Stellen Sie das Ereignis "Der erste Wurf, bei dem Zahl erscheint, hat eine ungerade Nummer" als Menge dar.

$$\{k, k \in \mathbb{N}, 2 \not| k\}$$

k ist die Anzahl der Würfe, nach denen zum ersten Mal *Zahl* erscheint.

b) Stellen Sie das Ereignis "Spätestens nach 10 Würfen ist einmal Zahl erschienen" als Menge dar.

$$\{k, k \in \mathbb{N}, k \leq 10\}$$

k ist die Anzahl der Würfe, nach denen zum ersten Mal *Zahl* erscheint.

Hausübung 2.3

[| 7]

(Wahrscheinlichkeitsmaße, 2+5 Punkte). Über $\Omega = \{1, 2, 3\}$ soll ein Wahrscheinlichkeitsmaß P definiert werden.

a) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle so, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß wird.

A	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$P(A)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

$P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$ sind nach Definition gegeben.

Es gilt $\frac{1}{2} = P(\{1,3\}) = P(\{1\} \cup \{3\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) - P(\{1\} \cap \{3\}) = \frac{1}{3} + x - 0 \Rightarrow P(\{3\}) = \frac{1}{6}$.

Desweiteren kann über $P(\Omega) = P(\{1,2,3\}) = P(\{1\} \cap \{2\} \cap \{3\}) = 1$ der Wert von $P(\{2\})$ folgendermaßen ermittelt werden: $1 = P(\Omega) = P(\{1\} \cap \{2\} \cap \{3\}) = P(\{1\} \cap \{3\} \cap \{2\}) = P((\{1\} \cap \{3\}) \cap \{2\}) = P(\{1,3\}) + P(\{2\}) - P((\{1\} \cap \{3\}) \cup \{2\}) = \frac{1}{2} + x \Rightarrow x = P(\{2\}) = \frac{1}{2}$.

Über den Additionssatz gilt dann $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(-0) = P(\{1\}) + P(\{2\}) - P(\{1\} \cap \{2\}) = P(\{1\} \cap \{2\}) = P(\{1,2\}) = \frac{5}{6}$.

Analog dazu $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-0) = P(\{2\}) + P(\{3\}) - P(\{1\} \cap \{3\}) = P(\{2\} \cap \{3\}) = P(\{2,3\}) = \frac{2}{3}$.

b) In einer anderen Situation kennen Sie über $\Omega = \{1,2,3\}$ nur Angaben zu $P(\{1\})$ und $P(\{2,3\})$. Begründen Sie, warum diese Information nicht ausreicht, um $P : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ eindeutig festzulegen.

P ist nicht eindeutig festlegbar, da keine eindeutige Aussage über $P(\{2\})$ und $P(\{3\})$ getroffen werden kann; es ist lediglich deren Vereinigung bekannt. Ohne definitive Werte für $P(\{2\})$ und $P(\{3\})$ lassen sich deren Vereinigungen mit $P(\{1\})$ nicht berechnen, weswegen die Tabelle nicht vervollständigt werden kann.

Diese Information reicht nicht aus, um P eindeutig festzulegen, da man nur 2 Informationen gegeben hat, die weder eine Schnittmenge haben, um auf eine dritte schließen zu können, noch jedes bis auf ein Elementarereignis gegeben ist, um auf das letze schließen zu können. Somit sind keine weiteren Informationen extrahierbar.

Hausübung 2.4

[| 8]

(Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, 3+5 Punkte). Es werden zwei faire Würfel geworfen, dabei werden die folgenden Ereignisse betrachtet.

- A sei das Ereignis "Pasch gewürfelt" , d.h. beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl. Es gilt $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
- B sei das Ereignis "Maximum der Augenzahlen ist ≤ 3, es gilt $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- C sei das Ereignis "Augensumme 7 gewürfelt" , es gilt $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
- D sei das Ereignis "Augensumme 11 gewürfelt" , es gilt $P(D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

a) Es gilt außerdem $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Nutzen Sie diese Information und den Additionssatz, um $P(A \cup B)$ zu berechnen.

Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

b) Begründen Sie, dass A, C, D paarweise disjunkt sind. Berechnen Sie anschließend $P(A \cup C \cup D)$.

Da bei C und D unterschiedliche Summen gefordert sind, kann es nicht ein Ergebnis geben, welches auf beide Szenarien zutrifft. Die Summen, die in C und D gefordert werden, sind beide ungerade. Bei A

wird ein Pasch gefordert, d.h. beide Würfel zeigen die Augenzahl i. Demnach gilt für die Augensumme $i + i = 2i$, welches eine gerade Zahl ist, womit sie weder den Wert 7 noch den Wert 11 annehmen kann.

$$\begin{aligned} P(A \cup C \cup D) =& P(A) + P(C) + P(D) - (P(A \cap C) + P(A \cap D) + P(C \cap D)) + P(A \cap C \cap D) \\ =& \frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} - (0 + 0 + 0) + 0 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \end{aligned}$$