Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsgruppe 14

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

15. Oktober 2015

Punkte für den Hausaufgabenteil:

					Σ

1 Präsenzteil

1.1 Präsenzaufgabe 1.1

Wiederholen Sie die O-Notation und die verwandten Notationen. Wie sind die einzelnen Mengen definiert? Was bedeutet es, wenn $f \in O(g)$ gilt, was wenn $f \in \Theta(g)$ gilt und so weiter?

$$\begin{array}{llll}
O(g(n)): & f(n) \in O(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & \|f(n)\| <= c \cdot \|g(n)\| \\
o(g(n)): & f(n) \in o(g(n)) & \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & \|f(n)\| <= c \cdot \|g(n)\| \\
\Omega(g(n)): & f(n) \in \Omega(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & \|f(n)\| >= c \cdot \|g(n)\| \\
\omega(g(n)): & f(n) \in \omega(g(n)) & \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & \|f(n)\| >= c \cdot \|g(n)\| \\
\Theta(g(n)): & f(n) \in \Theta(g(n)) & \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: & c_1 \cdot \|g(n)\| <= \|f(n)\| <= c_2 \cdot \|g(n)\|
\end{array}$$

1.2 Präsenzaufgabe 1.2

Beweisen Sie:

- $n^2 + 3n - 5 \in O(n^2)$
- $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$
- $n! \in O((n+1)!)$

Gilt im letzten Fall auch $n! \in o((n+1)!)$?

$$\begin{aligned}
f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \tfrac{f(n)}{g(n)} < \infty \\
f(n) &= n^2 + 3n - 5 \\
g(n) &= n^2 \\
\tfrac{f(n)}{g(n)} &= \tfrac{n^2+3n-5}{n^2} \\
\\
lim_{n\to\infty} \tfrac{n^2+3n-5}{n^2} &= lim_{n\to\infty} 1 + \tfrac{3}{n} - \tfrac{5}{n^2} \\
&= 1 + \tfrac{3}{\infty} - \tfrac{5}{\infty^2} \\
&= 1 + 0 + 0 \\
&= 1 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))
\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} \forall n >= n_0: \quad & c_1 \cdot n^2 <= n^2 - 2n <= c_2 \cdot n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & c_1 <= 1 - \tfrac{1}{n} <= c_2
\end{aligned}$$

Dies ist erfüllbar ab $n_0 >= 2$, da für $n = 1$ im mittleren Ausdruck 0 herauskommt und c_1 größer als 0, aber kleiner als der mittlere Ausdruck sein muss. Ist $n >= 2$, so kommt im mittleren Ausdruck $0,5$ heraus, für c_1 lässt sich ein beliebiger Wert aus $]0; 0.5[$ wählen, sei es an dieser Stelle $\frac{1}{4}$. Als Obergrenze für c_2 lässt sich jeder Wert größer oder gleich 1 wählen, da der mittlere Ausdruck nicht größer als 1 werden kann und somit die Bedingung des "kleiner gleichßofort erfüllt ist.
Somit wird als Ergebnis für die Belegung gewählt: $c_1 = \frac{1}{4}; c_2 = 1; n_0 = 2$. Mit dieser Belegung gilt $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$

□

$$\begin{aligned} f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \tfrac{f(n)}{g(n)} < \infty \\ f(n) &= n! \\ g(n) &= (n+1)! = n \cdot n! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} \tfrac{n!}{n \cdot n!} &= lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \\ &= \tfrac{1}{\infty} \\ &= 0 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \end{aligned}$$

Da die Bedingung für $o(g(n))$ ist, dass der Quotient nicht nur kleiner unendlich, sondern gleich null ist, was hier wie oben gezeigt gegeben ist, gilt auch $n! \in o((n+1)!)$.

$\square$

1.3 Präsenzaufgabe 1.3

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(h(n))$
2. $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O(h(n))$

Sind $f(n)$ und $g(n)$ in $O(h(n))$, so erfüllen sie die Bedingung $lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} < \infty$ bzw. $lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} < \infty$. Das heißt, dass $h(n)$ größeres Wachstum erfährt als die anderen beiden Funktionen. Da sich der Grad einer Funktion nicht durch Addition ändert, bleibt die Summe kleiner oder gleich $h(n)$. Somit ist (1) gezeigt.

Seien $f(n)$ und $g(n)$ Polynome zweiten Grades sowie $h(n)$ ein Polynom dritten Grades. Dann sind sowohl $f(n)$ als auch $g(n)$ durch die *limes*-Bedingung in $O(h(n))$. Das Produkt zweier Polynome zweiten Grades ist allerdings ein Polynom vierten Grades, sodass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^3} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Damit ist das Produkt der Polynome nicht mehr in $O(h(n))$, da die *limes*-Bedingung, nach der der Quotient der Polynome für n gegen Unendlich kleiner als Unendlich sein zu hat, nicht erfüllt ist. Damit ist (2) widerlegt.

$\square$