Stochastik 1 für Studierende der Informatik

Modul: MATH3-Inf

Veranstaltung: 65-832

Übungsgruppe 2

Dienstag, 14.15 - 15.00

Geom 431

Utz Pöhlmann
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de
6663579

Louis Kobras
4kobras@informatik.uni-hamburg.de
6658699

Felix Gebauer
4gebauer@informatik.uni-hamburg.de
6671660

24. Mai 2016

Punkte für die Hausübungen:

6.1	6.2	6.3	Σ

Zettel Nr. 6 (Ausgabe: 10. Mai 2016, Abgabe: 24. Mai 2016)

Hausübung 6.1

[| 9]

(Roulette, 3+4+2 Punkte). Beim Roulette sind die möglichen Ausgänge die Zahlen 0, . . . , 36, bei guten Roulette-Tischen ist eine Laplace-Annahme gerechtfertigt. Im Spiel können Sie auf verschiedene Gruppen von Zahlen (einzelne Zahlen, corner, split, rot/schwarz, . . .) wetten, allen Wettmöglichkeiten ist gemeinsam, dass sie die (grüne) 0 nicht enthalten. Als allgemeine Auszahlungsregel gilt: Haben Sie auf eine Gruppe aus k Zahlen gesetzt, erhalten Sie (Ihren Einsatz mitgerechnet) das $^{36}/_{k}$-fache Ihres Einsatzes zurück. Setzen Sie n Geldeinheiten ein, so beträgt Ihr Gewinn im Erfolgsfall $n \cdot (^{36}/_{k} - 1)$, im Misserfolgsfall verlieren Sie ihren Einsatz, Ihr Gewinn beträgt also $-n$ Geldeinheiten.

Teilaufgabe a)

In der einfachsten Variante setzen sie auf „rot” oder „schwarz”. Beide Zahlengruppen umfassen jeweils 18 der 37 möglichen Ereignisse. Setzen Sie n Geldeinheiten ein, so können Sie im Erfolgsfall n Geldeinheiten Gewinn machen, im Misserfolgsfall verlieren Sie n Geldeinheiten. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Gewinns.

$$\mu(x) = n \cdot \left(\frac{36}{18} - 1\right) \cdot \frac{18}{37} - n \cdot \frac{18}{37} - n \cdot \frac{1}{37} \approx -0.027n$$

Teilaufgabe b)

Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall mit dem Setzen auf k Zahlen und bestimmen Sie auch hier den Erwartungswert Ihres Gewinns.

$$\mu(x) = n \cdot \left(\frac{36}{k} - 1\right) \cdot \frac{k}{37} - n \cdot \frac{37-k}{37} = 35n - \frac{2kn}{37} = n \cdot \left(35 - \frac{2k}{37}\right)$$

Teilaufgabe c)

Wie hängt der Erwartungswert des Gewinns von n ab? Wie hängt er von k ab?

Je größer k wird, desto größer der zu erwartende Verlust. Der Faktor, mit dem der Gewinn ausgezahlt wird, ist $f(k)$, die Auszahlung ist von n abhängig in $n \cdot f(k)$. n wirkt deutlich stärker in die Auszahlung als k.

Hausübung 6.2

[| 7]

(Die Varianz der Poisson-Verteilung, 7 Punkte). Es sei $Z\tilde{}Pois_\lambda$. Bestimmen Sie **Var**[Z]. *Hinweis:* Den Erwartungswert haben Sie bereits in der Präsenzübung bestimmt.

$Var[Z] = E[X^2] - E[X]^2 \overset{da\ E[X]=\lambda}{=} \sum_{i=z=0}^{\infty} z^2 \cdot \frac{\lambda^z \cdot e^{-\lambda}}{z!} - \lambda^2$

Da für $z = 0$ die ganze Summe den Wert 2 annimmt, kann die Untergrenze inkrementiert werden.

$Var[Z] = \sum_{i=z=1}^{\infty} z^2 \cdot \frac{\lambda^z \cdot e^{-\lambda}}{z!} - \lambda^2 = \sum_{i=z=1}^{\infty} z^2 \cdot \frac{\lambda \cdot \lambda^{z-1} \cdot e^{-\lambda}}{z \cdot (z-1)!} - \lambda^2 = \lambda \cdot \sum_{i=z=1}^{\infty} z \cdot \frac{\lambda^{z-1} \cdot e^{-\lambda}}{(z-1)!} - \lambda^2$

Redekrementierung der Untergrenze ergibt einen Term $(z + 1)$, welcher mit dem Bruch ausmultipliziert wird, wodurch zwei Summen entstehen.

$Var[Z] = \lambda \cdot \sum_{i=z=1}^{\infty} z \cdot \frac{\lambda^{z-1} \cdot e^{-\lambda}}{(z-1)!} - \lambda^2 = \lambda \cdot \sum_{i=z=0}^{\infty} (z + 1) \cdot \frac{\lambda^z \cdot e^{-\lambda}}{z!} - \lambda^2 = \lambda \cdot \sum_{i=z=0}^{\infty} z \cdot \frac{\lambda^z \cdot e^{-\lambda}}{z!} + \lambda \cdot \sum_{i=z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z \cdot e^{-\lambda}}{z!} - \lambda^2$

Die erste Summe des Terms ist eben $E[Z] = \lambda$ und die zweite Summe ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, somit 1. Demnach gilt also:
$Var[Z] = \lambda \cdot \sum_{i=z=0}^{\infty} z \cdot \frac{\lambda^z \cdot e^{-\lambda}}{z!} + \lambda \cdot \sum_{i=z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z \cdot e^{-\lambda}}{z!} - \lambda^2 = \lambda \cdot \lambda + \lambda \cdot 1 - \lambda^2 = \lambda \Rightarrow Var[Z] = \lambda$ $\square$

Hausübung 6.3

[| 9]

(Noch ein Glücksspiel, 3+2+4 Punkte). Sie möchten ein neues Glücksspiel anbieten. Dazu stehen Ihnen geometrische Objekte zur Verfügung, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots$ jeweils einen Smiley anzeigen. Der Ablauf des Spiels sieht wie folgt aus: In der ersten Runde wird das Objekt mit Smiley-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewürfelt, in der zweiten Runde das mit Smiley-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, …, allgemein wird in der n-ten Runde das Objekt mit Smiley-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$ gewürfelt. Das Spiel endet, sobald zum ersten Mal ein Smiley erscheint. Sie bezeichnen mit X die Runde, in der zum ersten Mal ein Smiley gewürfelt wird. Nach etwas Überlegung wissen Sie, dass dann

$$P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

gilt (Sie müssen diese Formel nicht begründen). Die Spieler setzen zu Beginn einen festen Betrag, und erhalten in Abhängigkeit von X am Ende des Spiels eine Auszahlung. Dabei ziehen Sie folgende Möglichkeiten in Betracht:

a) Ist $X = k$, so zahlen Sie k Geldeinheiten aus.

b) Ist $X = k$, so zahlen Sie k^2 Geldeinheiten aus.

c) Ist $X = k$, so zahlen Sie $\frac{8}{k+2}$ Geldeinheiten aus.

Geben Sie jeweils an, wie hoch Sie den Einsatz zu Beginn des Spiels wählen müssen, um ein faires Spiel zu erzeugen.

Hinweis: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Bei einem fairen Spiel macht keine Seite nennenswerten Gewinn, bei langen Versuchsreihen mitteln sich Gewinn und Verlust einer jeden Partei auf 0. Demnach muss der Erwartungswert gleich dem Einsatz sein, damit ein Spiel fair ist, denn nur dann machen im Schnitt weder Spieler noch Bank Gewinn oder Verlust. Es gilt: $\mu(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p_i \overset{Distributivgesetz}{=} \Leftrightarrow {}^{\mu(X)}/_{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} = \sum_{i=1}^{\infty} i \overset{\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1}{\Leftrightarrow} \mu(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i$

Es wird also jeweils der Erwartungswert bestimmt; der Einsatz ist diesem dann gleichzusetzen.

Teilaufgabe a)

$$\frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k+1}$$
$$\mu(x) = 1$$

Der Einsatz sollte also **1 Geldeinheiten** betragen.

Teilaufgabe b)

$$\frac{k^2}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} = k+1$$
$$\mu(x) = x$$

Es lässt sich also **kein faires Spiel** erzeugen mit dieser Auszahlung.

Teilaufgabe c)

$$\frac{\frac{8}{k+2}}{k(k+1)} = \frac{8}{k(k+1)(k+2)} = 8 \cdot \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\mu(x) = 2$$

Der Einsatz sollte also **2 Geldeinheiten** betragen.