

# Algorithmen und Datenstrukturen

## Übungsgruppe 14

Utz Pöhlmann

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de  
6663579

Louis Kobras

4kobras@informatik.uni-hamburg.de  
6658699

Rene Ogniwek

reneogniwek@gmx.net  
6428103

Steffi Kaussow

s.kaussow@gmail.com  
6414862

23. November 2015

**Punkte für den Hausaufgabenteil:**

4.1	4.2	4.3	$\Sigma$

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zettel vom 14.-16. Oktober – Abgabe: N/A</b>	<b>1</b>
1.1	Präsenzaufgabe 1.1 . . . . .	1
1.2	Präsenzaufgabe 1.2 . . . . .	1
1.3	Präsenzaufgabe 1.3 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Zettel vom 15.10. – Abgabe: 26.10.</b>	<b>3</b>
2.1	Übungsaufgabe 2.1 . . . . .	3
2.1.1	. . . . .	3
2.1.2	. . . . .	3
2.2	Übungsaufgabe 2.2 . . . . .	3
2.3	Übungsaufgabe 2.3 . . . . .	6
2.4	Übungsaufgabe 2.4 . . . . .	7
2.4.1	2.4.1 . . . . .	7
2.4.2	2.4.2 . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Zettel vom 29. 10. – Abgabe: 09. 11.</b>	<b>10</b>
3.1	Übungsaufgabe 3.1 . . . . .	10
3.1.1	Aufgabe 3.1.1 . . . . .	10
3.1.2	Aufgabe 3.1.2 . . . . .	10
3.1.3	Aufgabe 3.1.3 . . . . .	10
3.2	Übungsaufgabe 3.2 . . . . .	10
3.3	Übungsaufgabe 3.3 . . . . .	11
3.3.1	Aufgabe 3.3.1 . . . . .	12
3.3.2	Aufgabe 3.3.2 . . . . .	13
3.3.3	Aufgabe 3.3.3 . . . . .	14
3.4	Übungsaufgabe 3.4 . . . . .	14
3.4.1	Aufgabe 3.4.1 . . . . .	15
3.4.2	Aufgabe 3.4.2 . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Zettel vom 09. 10. – Abgabe: 23. 11.</b>	<b>18</b>
4.1	Übungsaufgabe 4.1 . . . . .	18
4.1.1	Aufgabe 4.1.1 . . . . .	18
4.1.2	Aufgabe 4.1.2 . . . . .	18
4.2	Übungsaufgabe 4.2 . . . . .	18
4.2.1	Aufgabe 4.2.1 . . . . .	19
4.2.2	Aufgabe 4.2.2 . . . . .	19
4.2.3	Aufgabe 4.2.3 . . . . .	20
4.3	Übungsaufgabe 4.3 . . . . .	20
4.3.1	Aufgabe 4.3.1 . . . . .	20
4.3.2	Aufgabe 4.3.2 . . . . .	20

# 1 Zettel vom 14.-16. Oktober – Abgabe: N/A

## 1.1 Präsenzaufgabe 1.1

Wiederholen Sie die  $O$ -Notation und die verwandten Notationen. Wie sind die einzelnen Mengen definiert? Was bedeutet es, wenn  $f \in O(g)$  gilt, was wenn  $f \in \Theta(g)$  gilt und so weiter?

$$\begin{aligned} O(g(n)) : f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|f(n)\| \leq c \cdot \|g(n)\| \\ o(g(n)) : f(n) \in o(g(n)) &\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|f(n)\| < c \cdot \|g(n)\| \\ \Omega(g(n)) : f(n) \in \Omega(g(n)) &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|f(n)\| \geq c \cdot \|g(n)\| \\ \omega(g(n)) : f(n) \in \omega(g(n)) &\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|f(n)\| > c \cdot \|g(n)\| \\ \Theta(g(n)) : f(n) \in \Theta(g(n)) &\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot \|g(n)\| \leq \|f(n)\| \leq c_2 \cdot \|g(n)\| \end{aligned}$$

## 1.2 Präsenzaufgabe 1.2

Beweisen Sie:

- $n^2 + 3n - 5 \in O(n^2)$
- $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$
- $n! \in O((n+1)!)$

Gilt im letzten Fall auch  $n! \in o((n+1)!)$ ?

$$\begin{aligned} f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \\ f(n) &= n^2 + 3n - 5 \\ g(n) &= n^2 \\ \frac{f(n)}{g(n)} &= \frac{n^2 + 3n - 5}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 5}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} \\ &= 1 + \frac{3}{\infty} - \frac{5}{\infty^2} \\ &= 1 + 0 + 0 \\ &= 1 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot n^2 &\leq n^2 - 2n \leq c_2 \cdot n^2 \\ \Leftrightarrow c_1 &\leq 1 - \frac{2}{n} \leq c_2 \end{aligned}$$

Dies ist erfüllbar ab  $n_0 \geq 2$ , da für  $n = 1$  im mittleren Ausdruck 0 herauskommt und  $c_1$  größer als 0, aber kleiner als der mittlere Ausdruck sein muss. Ist  $n \geq 2$ , so kommt im mittleren Ausdruck 0,5 heraus, für  $c_1$  lässt sich ein beliebiger Wert aus  $]0; 0.5[$  wählen, sei es an dieser Stelle  $\frac{1}{4}$ . Als Obergrenze für  $c_2$  lässt sich jeder Wert größer oder gleich 1 wählen, da der mittlere Ausdruck nicht größer als 1 werden kann und somit die Bedingung des "kleiner gleichsofort" erfüllt ist.

Somit wird als Ergebnis für die Belegung gewählt:  $c_1 = \frac{1}{4}; c_2 = 1; n_0 = 2$ . Mit dieser Belegung gilt  $n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$

□

$$\begin{aligned} f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \\ f(n) &= n! \\ g(n) &= (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{\infty} \\ &= 0 < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \end{aligned}$$

Da die Bedingung für  $o(g(n))$  ist, dass der Quotient nicht nur kleiner unendlich, sondern gleich null ist, was hier wie oben gezeigt gegeben ist, gilt auch  $n! \in o((n+1)!)$ .

□

### 1.3 Präsenzaufgabe 1.3

Beweisen oder widerlegen Sie:

1.  $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(h(n))$
2.  $f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O(h(n))$

$$\exists c_1 \in \mathbb{R}^+ \exists n_{0_1} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{0_1} : \|f(n)\| \leq c_1 \cdot \|h(n)\|$$

$$\exists c_2 \in \mathbb{R}^+ \exists n_{0_2} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{0_2} : \|g(n)\| \leq c_2 \cdot \|h(n)\|$$

$$n_0 = \max(n_{0_1}, n_{0_2})$$

$$\|f(n) + g(n)\| \leq c_1 \cdot \|h(n)\| + c_2 \cdot \|h(n)\| \leq (c_1 + c_2) \cdot \|h(n)\|$$

Seien  $f(n)$  und  $g(n)$  Polynome zweiten Grades sowie  $h(n)$  ein Polynom dritten Grades. Dann sind sowohl  $f(n)$  als auch  $g(n)$  durch die *limes*-Bedingung in  $O(h(n))$ . Das Produkt zweier Polynome zweiten Grades ist allerdings ein Polynom vierten Grades, sodass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

Damit ist das Produkt der Polynome nicht mehr in  $O(h(n))$ , da die *limes*-Bedingung, nach der der Quotient der Polynome für  $n$  gegen Unendlich kleiner als Unendlich sein zu hat, nicht erfüllt ist. Damit ist (2) widerlegt.

□

## 2 Zettel vom 15.10. – Abgabe: 26.10.

### 2.1 Übungsaufgabe 2.1

[ | 2 ]

Begründen Sie formal, warum folgende Größenabschätzungen gelten bzw. nicht gelten:

1.  $3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3)$
2.  $n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2)$

#### 2.1.1

$$\begin{aligned} 3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 6n + 20}{n^3} < \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 6n + 20}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{n^3} - \frac{6n}{n^3} + \frac{20}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \frac{6}{n^2} + \frac{20}{n^3} = 3 - 0 + 0 < \infty \\ &\Rightarrow 3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3) \quad \square \end{aligned}$$

#### 2.1.2

$$\begin{aligned} n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^3} < \infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^2} > 0 \\ \frac{n^2 \cdot \log n}{n^2} &= \frac{1 \cdot \log n}{1} = \log n > 0 \quad \forall n > 1 \Rightarrow n^2 \cdot \log n \in \Omega(n^2) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \log n}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \\ &\Rightarrow n^2 \cdot \log n \in O(n^3) \cap \Omega(n^2) \quad \square \end{aligned}$$

### 2.2 Übungsaufgabe 2.2

[ | 4 ]

Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem Wachstumsgrad in aufsteigender Reihenfolge, d.h. folgt eine Funktion  $g(n)$  einer Funktion  $f(n)$ , so soll  $f(n) \in O(g(n))$  gelten.

$$n, \log n, n^2, n^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n^3}, 2^n, \ln n, 1000$$

Mit  $\log$  ist hier der Logarithmus zur Basis 2, mit  $\ln$  der natürliche Logarithmus (Basis  $e$ ) gemeint. Begründen Sie stets Ihre Aussage. Zwei Funktionen  $f(n)$  und  $g(n)$  befinden sich ferner in der selben Äquivalenzklasse, wenn  $f(n) \in \Theta(g(n))$  gilt. Geben Sie an, welche Funktionen sich in derselben Äquivalenzklasse befinden und begründen Sie auch hier ihre Aussage.

Die bearbeitete Menge wird i.F. als  $M_F$  bezeichnet. Die Menge, die gerade alle Elemente von  $M_F$  in aufsteigend sortierter Reihenfolge enthält, wird als  $M'_F$  bezeichnet.

$M_F$  wird mit INSERTSORT in  $M'_F$  hineinsortiert.

Sei  $e \in M_F$ . Für  $e$  wird das Element 1000 gewählt. Da  $|M'_F|$  leer ist, muss 1000 nicht weiter geprüft werden.

$$M'_F = \{1000\}$$

$e$  wird nun über  $M_F$  iteriert, bis  $M'_F = \text{Sorted}(M_F)$ .

$$e = n$$

$$\begin{array}{l} f(n) = n \\ g(n) = 1000 \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1000} = \infty \Rightarrow n \notin O(1000)$$

$$\begin{array}{l} f(n) = 1000 \\ g(n) = n \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n} = 0 \Rightarrow 1000 \in O(n) \Rightarrow n \text{ folgt } 1000$$

$$M'_F = \{1000, n\}$$

$$e = \log n$$

$$\begin{array}{l} f(n) = \log(n) \\ g(n) = n \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(2) \cdot n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(2) \cdot n} = 0 \Rightarrow \log(n) \in O(n) \Rightarrow n \text{ folgt } \log(n)$$

$$\begin{array}{l} f(n) = \log(n) \\ g(n) = 1000 \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{1000} = \infty \Rightarrow \log(n) \notin O(1000)$$

$$M'_F = \{1000, \log n, n\}$$

$$e = 4$$

$$\begin{array}{l} f(n) = 4 \\ g(n) = n \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0 \Rightarrow 4 \in O(n) \Rightarrow n \text{ folgt } 4$$

$$\begin{array}{l} f(n) = 4 \\ g(n) = \log(n) \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\log(n)} = 0 \Rightarrow 4 \in O(\log(n)) \Rightarrow \log(n) \text{ folgt } 4$$

$$\begin{array}{l} f(n) = 4 \\ g(n) = 1000 \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{1000} = 0,004 \Rightarrow 4 \in \Theta(1000) \Rightarrow 4 \text{ und } 1000 \text{ befinden sich in der selben } \ddot{\text{A}}\text{-klasse}$$

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n\}$$

$$e = n^2$$

$$\begin{array}{l} f(n) = n^2 \\ g(n) = n \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \infty \Rightarrow n^2 \notin O(n)$$

$$\begin{array}{l} f(n) = n \\ g(n) = n^2 \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 \Rightarrow n \in O(n^2) \Rightarrow n^2 \text{ folgt } n$$

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n, n^2\}$$

$$e = n^{\frac{1}{2}}$$

$$f(n) = n^{\frac{1}{2}}$$

$$g(n) = n^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow n^{\frac{1}{2}} \in O(n^2) \quad \Rightarrow n^2 \text{ folgt } n^{\frac{1}{2}}$$

$$f(n) = n^{\frac{1}{2}}$$

$$g(n) = n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow n^{\frac{1}{2}} \in O(n) \quad \Rightarrow n \text{ folgt } n^{\frac{1}{2}}$$

$$f(n) = n^{\frac{1}{2}}$$

$$g(n) = \log(n) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log(n)} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot n^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{n(2) \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2) \cdot n^{\frac{1}{2}}}{2} = \infty \quad \Rightarrow n^{\frac{1}{2}} \notin O(\log(n))$$

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n^{\frac{1}{2}}, n, n^2\}$$

$$e = \sqrt{n}^3$$

$$f(n) = \sqrt{n}^3$$

$$g(n) = n^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{n}^3 \in O(n^2) \quad \Rightarrow n^2 \text{ folgt } \sqrt{n}^3$$

$$f(n) = \sqrt{n}^3$$

$$g(n) = n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} = \infty \quad \Rightarrow \sqrt{n}^3 \notin O(n)$$

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n^{\frac{1}{2}}, n, \sqrt{n}^3, n^2\}$$

$$e = 2^n$$

$$f(n) = 2^n$$

$$g(n) = n^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2) \cdot 2^n}{2 \cdot n} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(2) \cdot 2^n}{2} = \infty \quad \Rightarrow 2^n \notin O(n^2)$$

$$f(n) = n^2$$

$$g(n) = 2^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n}{\ln(2) \cdot 2^n} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\ln^2(2) \cdot 2^n} = 0 \quad \Rightarrow n^2 \in O(2^n) \quad \Rightarrow n^2 \text{ folgt } 2^n$$

$$M'_F = \{4, 1000, \log n, n^{\frac{1}{2}}, n, \sqrt{n}^3, n^2, 2^n\}$$

$$e = \ln n$$

$$f(n) = \ln(n)$$

$$g(n) = 2^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{2^n} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(2) \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot \ln(2) \cdot 2^n} = 0 \quad \Rightarrow \ln(n) \in O(2^n) \quad \Rightarrow 2^n \text{ folgt } \ln(n)$$

$$f(n) = \ln(n)$$

$$g(n) = n^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot n^2} = 0 \quad \Rightarrow \ln(n) \in O(n^2) \quad \Rightarrow n^2 \text{ folgt } \ln(n)$$

$$f(n) = \ln(n)$$

$$g(n) = \sqrt{n}^3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}^3} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{2} \sqrt{n}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6 \cdot n^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow \ln(n) \in O(\sqrt{n}^3) \quad \Rightarrow \sqrt{n}^3 \text{ folgt } \ln(n)$$

$$f(n) = \ln(n)$$

$$g(n) = n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow \ln(n) \in O(n) \quad \Rightarrow n \text{ folgt } \ln(n)$$

$$f(n) = \ln(n)$$

$$g(n) = n^{\frac{1}{2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow \ln(n) \in O(n^{\frac{1}{2}}) \quad \Rightarrow n^{\frac{1}{2}} \text{ folgt } \ln(n)$$

$$f(n) = \ln(n)$$

$$g(n) = \log(n) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\log(n)} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln(2) \cdot n}} = \ln(2) \quad \Rightarrow \ln(n) \in \Theta(\log(n)) \quad \Rightarrow \ln(n) \text{ und } \log(n) \text{ befinden sich in der selben } \ddot{\text{A}}\text{-klasse}$$

$$M'_F = \{4, 1000, \ln n, \log n, n^{\frac{1}{2}}, n, \sqrt{n}^3, n^2, 2^n\}$$

In der selben Äquivalenzklasse befinden sich zum einen 4 und 1000 und zum anderen  $\log(n)$  und  $\ln(n)$ . Die restlichen Werte sind jeweils alleine in ihrer Äquivalenzklasse.

## 2.3 Übungsaufgabe 2.3

[ | 2 ]

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$f(n), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O((h(n))^2)$$

Für diesen Beweis wird der Beweis des dritten Satzes der Summen- und Produkteigenschaften der O-Notation<sup>1</sup> zu Hilfe genommen:

*Beweis.* Sei  $f \in O(h_1)$  und  $g \in O(h_2)$ , dann gibt es ein  $c, n_0$ , so dass  $f(n) \leq c \cdot h_1(n) \forall n \geq n_0$  und ebenso  $c', n'_0$ , so dass  $g(n') \leq c' \cdot h_2(n') \forall n' \geq n'_0$ . Daraus folgt  $f(n'') \cdot g(n'') \leq c \cdot c' \cdot h_1(n'') \cdot h_2(n'') \forall n'' \geq \max(n_0, n'_0)$ , also  $f \cdot g \in O(h_1 \cdot h_2)$ .  $\square$

Setzt man nun  $h_1, h_2 = h$  folgt daraus für den letzten Ausdruck des Beweises  $f(n) \cdot g(n) \in O(h(n) \cdot h(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O((h(n))^2)$ .

<sup>1</sup>vgl. Vorlesung, Foliensatz 1 (14.10.), S.33



## 2.4 Übungsaufgabe 2.4

[ | 8 ]

Seien

1.

$$T(n) := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ 3 \cdot T(n-1) + 2, & \text{sonst} \end{cases}$$

2.

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{für } n = 1 \\ 16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekurrenzgleichungen ( $c$  ist dabei eine Konstante).

Bestimmen Sie wie in der Vorlesung jeweils die Größenordnung der Funktion  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  einmal mittels der (a) Substitutionsmethode und einmal mittels des (b) Mastertheorems. Ihre Ergebnisse sollten zumindest hinsichtlich der O-Notation gleich sein, so dass Sie etwaige Rechenfehler entdecken können! Führen Sie bei (a) auch den Induktionsbeweis, der in der Vorlesung übersprungen wurde!

### 2.4.1 2.4.1

a)

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(n-1) + 2 \\ &= 3 * (3 * T(n-2) + 2) + 2 = 3^2 * T(n-2) + 3^2 - 1 \\ &= 3^2 * (3 * T(n-3) + 2) + 8 = 3^3 * T(n-3) + 3^3 - 1 \\ &= \dots \\ &= 3^k * T(n-k) + 3^k - 1 \end{aligned}$$

Wir kommen auf eine sinnvolle Verallgemeinerung der Formel.

Beweis der Formel durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang:  $T(0)$  gilt nach Definition.

Induktionsschritt: Sei  $n \in \mathbb{N}$  (s. Aufgabenstellung). Wir nehmen an, dass  $T(n)$  gilt (Induktionsannahme) und zeigen  $T(n+1)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 * T(n-1) + 2 \\ T(n+1) &= 3 * T(n+1-1) + 2 \\ &= 3 * T(n) + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 3^k * T(n-k) + 3^k - 1 \\ T(n+1) &= 3^k * T(n+1-k) + 3^k - 1 \end{aligned}$$

Das zeigt  $T(n+1)$ .

Damit sind der Induktionsanfang und der Induktionsschritt bewiesen. Es folgt, dass  $T(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Da die Rekursion bei  $T(0) = 0$ , also  $n-k = 0$  abbricht, wird mit  $k = n$  weiter gerechnet.

$$\begin{aligned} T(n) &= 3^k * T(n-k) + 3^k - 1 \\ &= 3^n * T(n-n) + 3^n - 1 \\ &= 3^n * T(0) + 3^n - 1 \\ &= 3^n * 0 + 3^n - 1 \\ &= 3^n - 1 \in \Theta(3^n) \end{aligned}$$

b) Das Mastertheorem ist auf Aufgabe 1. nicht anwendbar, da die Form

$$T(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

bei

$$T(n) := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ 3 \cdot T(n-1) + 2, & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht eingehalten wurde.

## 2.4.2 2.4.2

a)

$$\begin{aligned} S(n) &= 16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2 \\ &= 16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2}{4}) + n^2 \\ &= 16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2 \\ &= 16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2 \\ &= 16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2}{4}) + n^2 \end{aligned}$$

Keine sinnvolle Vereinfachung erkennbar. => Substitutionsmethode nicht anwendbar.

b) Die Form

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

ist bei

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{für } n = 1 \\ 16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

eingehalten. Das Mastertheorem ist daher anwendbar.

I.  $S(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$ , falls  $f(n) \in O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$  für ein  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{\log_b(a)-\epsilon}) \\ n^2 &\in O(n^{\log_4(16)-\epsilon}) \\ n^2 &\in O(n^{2-\epsilon}) \end{aligned}$$

Hierfür kann kein  $\epsilon$  gefunden werden. Daher gilt diese Aussage nicht

II.  $S(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log_2(n))$ , falls  $f(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{\log_b(a)}) \\ n^2 &\in O(n^{\log_4(16)}) \\ n^2 &\in O(n^2) \end{aligned}$$

Dies stimmt, daher gilt diese Aussage.

III.  $S(n) \in \Theta(f(n))$ , falls  $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$  für ein  $\epsilon > 0$  **und**  $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n)$  für ein  $\delta < 1$  und große  $n$ .

$$\begin{array}{ll} f(n) & \in \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon}) \\ n^2 & \in \Omega(n^{\log_4(16)+\epsilon}) \\ n^2 & \in \Omega(n^{2+\epsilon}) \end{array}$$

Dies stimmt für alle  $\epsilon \geq 0$ , also auch für mindestens ein  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{array}{ll} a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n) & \backslash \text{einsetzen} \\ 16 \cdot (\frac{n}{4})^2 \leq \delta \cdot n^2 & \backslash \sqrt{()} \\ 4 \cdot \frac{n}{4} \leq \sqrt{\delta} \cdot n & \\ n \leq \sqrt{\delta} \cdot n & \backslash :n \text{ (n ist immer positiv, da } n \in \mathbb{N}, \text{ s. Aufgabenstellung)} \\ 1 \leq \sqrt{\delta} & \backslash ()^2 \\ 1 \leq \delta & \end{array}$$

Damit ist  $\delta \geq 1$  und nicht, wie benötigt,  $\delta < 1$ . Daher gilt diese Aussage nicht.

Da nur II. gilt, gilt  $S(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log_2(n))$ , also  $S(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$ .

### 3 Zettel vom 29. 10. – Abgabe: 09. 11.

#### 3.1 Übungsaufgabe 3.1

[ | 3 ]

Gegeben seien die folgenden Code-Fragmente. Geben Sie eine möglichst dichte asymptotische obere Schranke für die Laufzeit der einzelnen Code-Fragmente jeweils in Abhängigkeit von  $n$  an. Begründen Sie Ihre Behauptung. (Es geht hier nicht um die Bedeutung des Codes, nur um die Laufzeit. An der Stelle von  $sum = sum + j$  könnte sinnvoller(er) Code stehen. Die Einrückung gibt den Skopus der Schleifenkonstrukte an.)

ALGO1()	ALGO2()	ALGO3()
1 <b>for</b> $i = 0$ <b>to</b> $n$	1 $i = 1$	1 $i = 1$
2 <b>for</b> $j = n$ <b>downto</b> 1	2 <b>while</b> $i < 2 \cdot n$	2 <b>while</b> $i \cdot i < n$
3 $sum = sum + j$	3 <b>for</b> $j = 1$ <b>to</b> $i$	3 $i = i + 1$
4 <b>for</b> $j = 1$ <b>to</b> $n$	4 $sum = sum + j$	4 $j = n$
5 $sum = sum + j$	5 $i = i + 2$	5 <b>while</b> $j > 1$
		6 $sum = sum + j$
		7 $j = j/2$

##### 3.1.1 Aufgabe 3.1.1

Der Algorithmus läuft in  $O(n^2)$ .

Bei beiden inneren **for**-Blöcke laufen jeweils  $n - 1$  mal durch, sodass der innere Block insgesamt  $2 \cdot (n - 1) = 2n - 2$  mal ausgeführt wird. Die äußere **for**-Schleife läuft gerade  $n$  mal; also wird der Block der Länge  $2n - 2$   $n$  mal ausgeführt. Dies führt zu einer Laufzeit von  $n \cdot (2n - 2) = 2n^2 - 2n \in \mathcal{O}(n^2)$ .

##### 3.1.2 Aufgabe 3.1.2

Die äußere Schleife läuft zwar bis  $2 \cdot n$ , da die Zählvariable allerdings in Zweierschritten inkrementiert wird, wird die Schleife  $n$  mal durchlaufen. Die innere Schleife wird  $n \cdot (n - 1)$  mal durchlaufen ( $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2 \cdot n - 3 + 2 \cdot n - 1 = n \cdot (n - 1)$ ). Dies ergibt insgesamt eine Laufzeit von  $n \cdot n \cdot (n - 1) = n^3 - n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$ .

##### 3.1.3 Aufgabe 3.1.3

Die äußere Schleife wird  $\sqrt{n}$  mal durchlaufen, da  $i^2 = n \Rightarrow i = \sqrt{n}$ . Zeilen 5-7 laufen in  $\log n$ . Das ergibt eine Gesamtlaufzeit in  $\mathcal{O}(\sqrt{n} \cdot \log n)$ .

#### 3.2 Übungsaufgabe 3.2

[ | 2 ]

Gegeben sei folgender Algorithmus, der ein Array  $A$  als Eingabe erwartet (dessen genaue Funktionsweise nachfolgend aber nicht wichtig ist):

---

**Algorithm 1** FUNC(A)

---

```
1: if  $A.lnge < 4$  then
2:   return 4
3: else
4:    $sum = 0$ 
5:   for  $i = 1$  to  $A.laenge$  do
6:      $sum = sum + A[i]$ 
7:   end for
8:    $x = A.laenge/4$ 
9:    $y = \text{FUNC}(A[x + 1..2 \cdot x])$ 
10:   $z = \text{FUNC}(A[3 \cdot x + 1..A.laenge])$ 
11:   $r = y$ 
12:  for  $i = 1$  to  $A.laenge$  do
13:     $r = r + z \cdot A[i]$ 
14:  end for
15:  return  $sum + r$ 
16: end if
```

---

Leiten Sie eine Rekurrenzgleichung für die Laufzeit der Methode FUNC in Abhängigkeit von der Arraygröße  $n$  von  $A$  ab. Begründen Sie ihre Gleichung.

$$A(n) := \begin{cases} 5, & \text{falls } n < 4 \\ A(\frac{n}{2}) + A(\frac{n}{4}) + 2n + 4, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die 5 im ersten Teil der Rekurrenzgleichung erklärt sich durch die ersten beiden Zeilen im Pseudocode.

Der Aufruf in Zeile 8 dauert  $\frac{n}{2}$ , der in Zeile 9 dauert  $\frac{n}{4}$ . Dadurch erklärt sich das  $A(\frac{n}{2}) + A(\frac{n}{4})$  im zweiten Teil der Rekurrenzgleichung.

Zeile 5 und 6 laufen in  $n$  ab.

Zeile 11 und 12 laufen auch in  $n$  ab.

Zeile 4, 7, 10 und 13 laufen jeweils mit konstantem Zeitaufwand.

Deshalb ist das, was hinter den  $A(x)$ -Aufrufen steht,  $n + n + c$ , wobei  $c$  in diesem Fall den Wert 4 hat, da wir vier Zeilen mit konstantem Zeitaufwand im Pseudocode haben.

### 3.3 Übungsaufgabe 3.3

[ | 3 ]

Gegeben seien die folgenden Rekurrenzgleichungen  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$ , wobei die  $c_i$  und  $d_i$  Konstanten seien.

$$\begin{aligned} T_1(n) &:= \begin{cases} c_1 & \text{für } n = 1 \\ 8 \cdot T_1(\frac{n}{2}) + d_1 \cdot n^3, & \text{sonst} \end{cases} \\ T_2(n) &:= \begin{cases} c_2 & \text{für } n = 1 \\ 5 \cdot T_2(\frac{n}{4}) + d_2 \cdot n^2, & \text{sonst} \end{cases} \\ T_3(n) &:= \begin{cases} c_3 & \text{für } n = 1 \\ 6 \cdot T_3(\frac{n}{3}) + d_3 \cdot n \cdot \log n, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Größenordnungen der Funktionen  $T_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mittels des Mastertheorems. Ist dies nicht möglich, geben Sie an warum. Geben Sie Ihre Ergebnisse nachvollziehbar an.

### 3.3.1 Aufgabe 3.3.1

Die Form

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

ist bei

$$T_1(n) := \begin{cases} c_1, & \text{für } n = 1 \\ 8 \cdot T_1(\frac{n}{2}) + d_1 \cdot n^3, & \text{sonst} \end{cases}$$

eingehalten. Das Mastertheorem ist daher anwendbar.

I.  $T_1(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$ , falls  $f(n) \in O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$  für ein  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{\log_b(a)-\epsilon}) \\ d_1 \cdot n^3 &\in O(n^{\log_2(8)-\epsilon}) \\ d_1 \cdot n^3 &\in O(n^{3-\epsilon}) \end{aligned}$$

Hierfür kann kein  $\epsilon$  gefunden werden. Daher gilt diese Aussage nicht.

II.  $T_1(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log_2(n))$ , falls  $f(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{\log_b(a)}) \\ d_1 \cdot n^3 &\in O(n^{\log_2(8)}) \\ d_1 \cdot n^3 &\in O(n^3) \end{aligned}$$

Dies stimmt, daher gilt diese Aussage.

III.  $T_1(n) \in \Theta(f(n))$ , falls  $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$  für ein  $\epsilon > 0$  **und**  $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n)$  für ein  $\delta < 1$  und große  $n$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon}) \\ d_1 \cdot n^3 &\in \Omega(n^{\log_2(8)+\epsilon}) \\ d_1 \cdot n^3 &\in \Omega(n^{3+\epsilon}) \end{aligned}$$

Dies stimmt für alle  $\epsilon \geq 0$ , also auch für mindestens ein  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} a \cdot f(\frac{n}{b}) &\leq \delta \cdot f(n) && \backslash \text{einsetzen} \\ 8 \cdot d_1 \cdot (\frac{n}{2})^3 &\leq \delta \cdot d_1 \cdot n^3 && \backslash \sqrt[3]{()} \\ \sqrt[3]{d_1} \cdot 2 \cdot \frac{n}{2} &\leq \sqrt[3]{\delta} \cdot \sqrt[3]{d_1} \cdot n && \backslash : \sqrt[3]{d_1} \\ n &\leq \sqrt[3]{\delta} \cdot n && \backslash : n \text{ (n ist immer positiv, da } n \in \mathbb{N}, \text{ s. Aufgabenstellung)} \\ 1 &\leq \sqrt[3]{\delta} && \backslash ()^3 \\ 1 &\leq \delta \end{aligned}$$

Damit ist  $\delta \geq 1$  und nicht, wie benötigt,  $\delta < 1$ . Daher gilt diese Aussage nicht.

Da nur II. gilt, gilt  $T_1(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log_2(n))$ , also  $T_1(n) \in \Theta(n^3 \cdot \log_2(n))$ .

### 3.3.2 Aufgabe 3.3.2

Die Form

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

ist bei

$$T_2(n) := \begin{cases} c_2, & \text{für } n = 1 \\ 5 \cdot T_2(\frac{n}{4}) + d_2 \cdot n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

eingehalten. Das Mastertheorem ist daher anwendbar.

I.  $T_2(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$ , falls  $f(n) \in O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$  für ein  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{\log_b(a)-\epsilon}) \\ d_2 \cdot n^2 &\in O(n^{\log_4(5)-\epsilon}) \\ d_2 \cdot n^2 &\in O(n^{1.160964047443681-\epsilon}) \end{aligned}$$

Hierfür kann kein  $\epsilon$  gefunden werden. Daher gilt diese Aussage nicht.

II.  $T_2(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log_2(n))$ , falls  $f(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{\log_b(a)}) \\ d_2 \cdot n^2 &\in O(n^{\log_4(5)}) \\ d_2 \cdot n^2 &\in O(n^{1.160964047443681}) \end{aligned}$$

Dies stimmt nicht, daher gilt diese Aussage nicht.

III.  $T_2(n) \in \Theta(f(n))$ , falls  $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$  für ein  $\epsilon > 0$  **und**  $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq \delta \cdot f(n)$  für ein  $\delta < 1$  und große  $n$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon}) \\ d_2 \cdot n^2 &\in \Omega(n^{\log_4(5)+\epsilon}) \\ d_2 \cdot n^2 &\in \Omega(n^{1.160964047443681+\epsilon}) \end{aligned}$$

Dies stimmt für alle  $\epsilon \geq 2 - \log_4(5) \approx 0.839035952556319$ , also auch für mindestens ein  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} a \cdot f(\frac{n}{b}) &\leq \delta \cdot f(n) && \backslash \text{einsetzen} \\ 4 \cdot d_2 \cdot (\frac{n}{5})^2 &\leq \delta \cdot d_2 \cdot n^2 && \backslash \sqrt{(\cdot)} \\ \sqrt{d_2} \cdot 2 \cdot \frac{n}{5} &\leq \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{d_2} \cdot n && \backslash : \sqrt{d_2} \\ \frac{2}{5} \cdot n &\leq \sqrt{\delta} \cdot n && \backslash : n \text{ (n ist immer positiv, da } n \in \mathbb{N}, \text{ s. Aufgabenstellung)} \\ \frac{2}{5} &\leq \sqrt{\delta} && \backslash ()^2 \\ \frac{4}{25} &\leq \delta \\ 0.16 &\leq \delta \end{aligned}$$

Damit gilt  $\delta \geq 0.16$ . Somit wurde, wie benötigt, mindestens ein  $\delta < 1$  gefunden ( $0.16 \leq \delta < 1$ ). Daher gilt diese Aussage.

Da nur III. gilt, gilt  $T_2(n) \in \Theta(f(n))$ , also  $T_2(n) \in \Theta(d_2 \cdot n^2)$ , also  $T_2 \in \Theta(n^2)$ .

### 3.3.3 Aufgabe 3.3.3

Die Form

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{falls } n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

ist bei

$$T_3(n) := \begin{cases} c_3, & \text{für } n = 1 \\ 6 \cdot T_3(\frac{n}{3}) + d_3 \cdot n \cdot \log(n), & \text{sonst} \end{cases}$$

eingehalten. Das Mastertheorem ist daher anwendbar.

I.  $T_3(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$ , falls  $f(n) \in O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$  für ein  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} f(n) &\in O(n^{\log_b(a)-\epsilon}) \\ d_3 \cdot n \cdot \log(n) &\in O(n^{\log_3(6)-\epsilon}) \\ d_3 \cdot n \cdot \log(n) &\in O(n^{1.6309297535714573-\epsilon}) \end{aligned}$$

Es gilt:  $d_3 \cdot n \cdot \log(n) < n^{\log_3(6)}$  für alle  $n > 0$ , für  $d_3 = 1$ .

Da aber nur  $d_3 \cdot n \cdot \log(n) \leq n^{\log_3(6)}$  für alle  $n > 1$  (s. Definition  $T_3$ ) gefordert ist, kann hierfür mindestens ein  $\epsilon$  gefunden werden.

Für größere  $d_3$  gilt allerdings, dass die  $n$  nicht mehr beliebig größer 1 sein dürfen, sondern eine obere Schranke bekommen.

Somit hängt die Lösung stark von  $d_3$  ab und das Mastertheorem ist ungeeignet für die Lösung dieser Aufgabe.

## 3.4 Übungsaufgabe 3.4

[ | 8 ]

1. Geben Sie für die Funktion *merge* in *mergesort* (siehe Folie 9, Kapitel 3) sinnvollen Pseudocode an. Orientieren Sie sich dabei an der natürlichsprachlichen Formulierung auf Folie 10, Kapitel 3. Ihr Pseudocode sollte diese Formulierung möglichst nah umsetzen. Weisen Sie dann Ihren Pseudocode von *merge* als korrekt nach, indem Sie eine sinnvolle Schleifeninvariante formulieren und nutzen. Nutzen Sie dies dann, um auch *mergesort* selbst als korrekt nachzuweisen. (Siehe auch Folie 11, Kapitel 3.)
2. Gegeben sei eine Sequenz  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  von Zahlen (als Array). Ein Paar  $(i, j)$  mit  $i < j$ , aber  $a_i > a_j$  nennen wir einen *Konflikt* (in  $A$ ). Gesucht ist nun, gegebend das Array  $A$ , die Anzahl der Konflikte in  $A$ . Ihre Aufgabe ist es, einen Divide&Conquer Algorithmus zu entwerfen, der das Problem in  $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$  löst. Beschreiben Sie zunächst Ihre Idee. Geben Sie dann den Algorithmus konkreter an und begründen Sie dann überzeugend, warum Ihr Algorithmus das Problem korrekt löst (sie müssen dazu nicht unbedingt auf die Schleifeninvarianten zurückgreifen). Zuletzt begründen Sie auch, warum die Laufzeit ihres Algorithmus tatsächlich in  $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$  liegt.



### 3.4.1 Aufgabe 3.4.1

MERGE(A, B)

```
1   $cur_A = 0$ 
2   $cur_B = 0$ 
3   $C = newlist$ 
4  while  $cur_A < A.length \ \& \ cur_B < B.length$ 
5      if  $cur_A < A.length$ 
6           $a_i = A[cur_A]$ 
7      if  $cur_B < B.length$ 
8           $b_j = B[cur_B]$ 
9      if  $a_i < b_j$ 
10          $C.append \ a_i$ 
11          $cur_A = cur_A + 1$ 
12     else
13          $C.append \ b_j$ 
14          $cur_B = cur_B + 1$ 
15 if  $cur_B = B.length$ 
16     for  $i = cur_A$  to  $A.length$ 
17          $C.append \ A[i]$ 
18 else
19     for  $j = cur_B$  to  $B.length$ 
20          $C.append \ B[j]$ 
21 return  $C$ 
```

Korrektheit von MERGE(A, B):

Schleifeninvariante:

Zu Beginn jeder Iteration sind die Listen A, B und C in sich sortiert.

Initialisierung:

Vor der ersten Iteration der **while**-Schleife sind die Listen A und B geordnet, weil sie geordnet „angeliefert“ werden. Die Liste C ist geordnet, weil sie zu diesem Zeitpunkt noch leer ist.

Fortsetzung:

Bei jeder Iteration wird jeweils das kleinste Element aus beiden Listen der Liste C hinzugefügt. Die Listen A und B verlieren kein Element, also sind sie immer noch sortiert. Die Liste C bekommt immer ein neues Element, welches größer oder gleich dem letzten ist. Somit bleibt C auch bei jeder Iteration sortiert.

Terminierung:

Die **while**-Schleife terminiert stets, da bei jeder Iteration mindestens einer der beiden Zeiger um eine Stelle in Richtung Listenende verrückt wird. Damit kommt ein Zeiger - sofern die Listen endlich sind - irgendwann am Ende an.

Neue Initialisierung:

Die **for**-Schleife in Zeile 16 oder 19 verletzt auch nicht die Invariante. Zu Beginn sind alle drei Listen sortiert, aber B - oder A - wurde schon vollständig an C angefügt. Somit sind alle Elemente der verbleibenden Liste A - oder B - größer oder gleich dem letzten - und größten - Element in C.

Neue Fortsetzung:

Da alle Elemente der verbleibenden Liste A - oder B - größer oder gleich jedem Element in C sind, können wir einfach das nächste - und damit kleinste - verbleibende Element aus A - oder B - an C anfügen. Bei

diesem Schritt bleibt A - oder B - sortiert, weil sie nicht verändert wird, und C auch, da sie nur ein weiteres größeres Element angesetzt bekommt.

Neue Terminierung:

Die **for**-Schleife terminiert auch, da der Zähler bei jeder Iteration um 1 erhöht wird. Solange die Liste A - oder B - also nicht unendlich ist, erreicht der Zähler irgendwann ihr Ende.

Wenn die Schleifen abgebrochen sind, gilt, dass die Listen A, B und C sortiert sind. Die Ausgabeliste C also auch. Dies wollten wir zeigen, damit ist dieser Algorithmus korrekt.

Korrektheit von MERGESORT(A, L, R):

Induktion:

Induktion über die Größe der Eingabeliste:

Induktionsanfang:

Hat die Liste die Länge 1, so ist  $l = r$ . Die Ursprungsliste wird nicht verändert, womit MERGESORT korrekt ist. Denn einelementige Listen sind immer sortiert.

Induktionsannahme:

Ist MERGESORT für die Länge  $n \in \mathbb{N}$  wahr, so ist es auch für die Länge  $n + 1$  wahr.

Induktionsschritt:

Durch den rekursiven Aufruf, wird MERGESORT( $n$ ) für jedes  $n > 1$  zu zwei Aufrufen von MERGESORT( $\frac{n}{2}$ ). Somit wird es bei jedem Rekursionsschritt halb so groß und kommt damit irgendwann bei  $x$  Aufrufen von MERGESORT(1) an. Dieses gilt nach Induktionsanfang.

### 3.4.2 Aufgabe 3.4.2

Idee:

Wir nehmen MERGESORT und jedes mal, wenn wir 2 Elemente tauschen müssen, inkrementieren wir den Zähler um 1. Wenn Die Liste sortiert wurde, dann sollte der Zähler die Anzahl der Konflikte anzeigen.

Pseudocode:

```
MERGECOUNT(A, L, R)
1  Zähler = 0
2  if  $l < r$ 
3       $q = (l + r) / 2$ 
4      MERGECOUNT(A, L, Q)
5      MERGECOUNT(A, Q + 1, R)
6       $B = \text{newArray}(A[l] \text{ to } A[q])$ 
7       $C = \text{newArray}(A[q + 1] \text{ to } A[r])$ 
8      MERGECOUNT-COUNTER(B, C, ZAEHLER)
9  return Zähler
```

```

MERGECOUNT-COUNTER(A, B, ZAEHLER)
1  C = newArray
2  while A.length > 0 & B.length > 0
3      if A[0] > B[0]
4          C.append(B[0])
5          B = cdr(B)
6          Zaehler = Zaehler + A.length
7      else
8          C.append(A[0])
9          A = cdr(A)
10 while A.length > 0
11     C.append(A[0])
12     A = cdr(A)
13 while B.length > 0
14     C.append(B[0])
15     B = cdr(B)
16 return C, Zaehler

```

#### Korrektheit:

Da die Schleifeninvariante nicht unbedingt nötig ist (s. Aufgabenstellung) folgt hier die rein logische Begründung:

Wir teilen die Liste in der Mitte in 2 gleiche Teile, ohne die Reihenfolge der Elemente zu verändern. Dies tun wir so lange, bis nur noch einelementige Listen da sind. Einelementige Listen sind immer sortiert. Diese Listen werden nun wie folgt zusammengefügt:

Sollte das kleinste - also erste - Element in der rechten Liste (B) kleiner sein, als das kleinste - also erste - Element in der linken Liste (A), dann steht das Element aus B mit allen Elementen aus A in Konflikt. Wir erhöhen also den Konfliktzähler um die Anzahl der Elemente in Liste A.

Wenn allerdings das erste Element von A kleiner ist, als das erste Element von B, existiert kein Konflikt und der Zähler bleibt unangetastet.

Ist eine Liste leer, so sind die restlichen Elemente der anderen Liste nach Vorgehensweise des Verfahrens allesamt größer als das letzte Element der, nun leeren, Liste und sortiert, weswegen sie keine Konflikte mehr vorweisen und direkt an das Ergebnis angehängt werden können. Somit bleibt auch hier der Zähler unangetastet.

Oben beschriebenes passiert bei jeder Rekursion aufs Neue, weshalb der Zähler kontinuierlich weiterwächst - sofern Konflikte vorhanden.

Der Algorithmus terminiert zudem immer, da MERGESORT ebenfalls immer terminiert und sich MERGECOUNT nur im Erhöhen des Zählers von MERGESORT unterscheidet.

#### Zeitaufwand:

MERGECOUNT und MERGECOUNT-COUNTER verhalten sich genau, wie MERGESORT und MERGE, bis auf eine Erhöhung eines Zählers, was allerdings mit konstantem Zeitaufwand zu bewältigen ist und daher bei der O-Notation nicht ins Gewicht fällt. Somit liegt MERGECOUNT - genauso wie MERGESORT - ebenfalls in  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ .

## 4 Zettel vom 09. 10. – Abgabe: 23. 11.

### 4.1 Übungsaufgabe 4.1

[ | 3 ]

#### 4.1.1 Aufgabe 4.1.1

**Eingabe:** Eine endliche Menge  $U$  und eine Größe  $s(u) \in \mathbb{N}$ , eine Kapazität  $K \in \mathbb{N}$  und eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ .

**Frage:** Gibt es eine Partitionierung von  $U$  in paarweise disjunkten Teilmengen  $U_1, U_2, \dots, U_n$  (d.h. die  $U_i$  enthalten zusammen alle Elemente aus  $U$  und jedes Element aus  $U$  ist in genau einem der  $U_i$ ) derart, dass  $\sum_{u \in U_i} s(u) \leq K$  für jedes  $i$  gilt?

Es kann eine Variante des Binary Sort Algorithmus angewandt werden:

```
PARTITION(SET S, INT C)
1  if sum(s) < c
2      return true
3  elseif max(s) > c
4      return false
5  else
6      Partition(s[0; (s.size/2)], c)
7      Partition(s[(s.size/2); s.size], c)
```

Ist die gesamte Größe von  $s$  bereits kleiner gleich  $K$ , kann der Algorithmus sofort terminieren und **true** zurückgeben. Andernfalls wird  $U$  halbiert und für die Teilmengen wird erneut geprüft. Dies wird rekursiv fortgeführt, bis eine Ebene erreicht wurde, auf der die Größe aller Teilmengen kleiner gleich  $K$  ist.

Da bereits zu Beginn geprüft wird, ob ein einzelnes Element größer als die Kapazität ist, ist gewährleistet, dass bei rekursiven Aufruf der Algorithmus spätestens dann terminiert, wenn jede Teilmenge genau die Mächtigkeit 1 hat. Ist ein einzelnes Element von  $U$  bereits größer als  $K$ , so ist das Problem nicht lösbar und der Algorithmus terminiert, **false** zurückgebend.

Durch die jeweilige Halbierung wird die Funktion höchstens  $\log n$  mal rekursiv aufgerufen.  $\text{sum}(s)$  und  $\text{max}(s)$  haben jeweils eine lineare Laufzeit aus  $\mathcal{O}(n)$ . Damit werden insgesamt  $a \cdot b \cdot n \cdot \log n + f(n) + g(n)$ <sup>1</sup> Schritte zur vollständigen Berechnung benötigt, die obere Schranke liegt also in  $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ . Dies ist nicht polynomiell und liegt somit in  $NP$ .

#### 4.1.2 Aufgabe 4.1.2

**Eingabe:** Ein endliches Alphabet  $\Sigma$ , eine endliche Menge  $S \subset \Sigma^*$  von Worten und eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ .

**Frage:** Gibt es ein Wort  $w \in \Sigma^*$  mit  $|w| \geq n$  derart, dass  $w$  ein Teilwort von jedem  $x \in S$  ist?

Es wird das kürzeste Wort  $x \in S$  gewählt (Laufzeit  $\mathcal{O}(S.length)$ ). Nun wird ein Teilwort mit der Länge  $n$  aus  $x$  gewählt und geprüft, ob es in allen anderen Wörtern aus  $S$  auch existiert (Laufzeit  $\mathcal{O}(S.length)$ ). Ist dies der Fall, wird **true** ausgegeben, sonst wird das nächste Teilwort aus  $x$  mit der Länge  $n$  gewählt (Laufzeit  $\mathcal{O}(k)$ ;  $k \in \mathbb{N}$ ). Wurde erfolglos über  $x$  iteriert, bricht der Algorithmus ab und gibt **false** zurück. Die Laufzeit ist konstant in  $\mathcal{O}(a)$ ;  $a \in \mathbb{N}$ .

Die Gesamtlaufzeit liegt damit bei  $\mathcal{O}(a + k + (2 \cdot S.length))$ .

### 4.2 Übungsaufgabe 4.2

[ | 7 ]

---

<sup>1</sup> $a, b, f(n), g(n)$  sind Faktoren bzw. Konstanten, die in  $\text{sum}(s)$  und  $\text{max}(s)$  entstehen können, allerdings vernachlässigbar sind

#### 4.2.1 Aufgabe 4.2.1

Zegen Sie, dass  $P$  und  $NP$  jeweils gegenüber Konkatenation abgeschlossen sind (d.h. mit  $L_1, L_2 \in P$  ist auch  $L_1 \cdot L_2 \in P$  und entsprechend für  $NP$ ).

**Für  $P$ :** Seien  $L_1, L_2 \in P, w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, w_3 = w_1 \cdot w_2$ . Sei außerdem  $w_3 = b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_n; w_3 \in L_3; L_3 = L_1 \cdot L_2$ .

Wähle  $w_1 = b_1 b_2 b_3 \dots b_i$  und  $w_2 = b_{i+1} b_{i+2} \dots b_n$ .

Solange  $w_1 \notin L_1 \wedge w_2 \notin L_2$  gilt, erhöhe  $i$  um 1 (als Startwert für  $i$  gilt 0.) Dies teilt das Wort in zwei Teilworte und wir wissen nun, wo wir  $w_3$  teilen müssen, um  $w_1$  und  $w_2$  zu erhalten. Bei  $i = 0$  gilt  $w_1 = \lambda$ , bei  $i = n$  gilt  $w_2 = \lambda$ . Nun wird  $w_1$  wie vorher in  $L_1$  in Polynomialzeit gelöst. Ebenso  $w_2$  in  $L_2$ .

Die Zerlegung benötigt im schlimmsten Fall  $n + 1$  Ausführungen, da es  $n + 1$  mögliche Zerteilungen von  $w_3$  gibt. Somit beträgt die Gesamtlaufzeit die Zeit, die  $w_1$  in  $L_1$  benötigt (ein Polynom) plus die Zeit, die  $w_2$  in  $L_2$  benötigt (auch ein Polynom) mal die Zeit, die das Zerschneiden benötigt ( $n + 1$ ), also:  $(Polynom(L_1) + Polynom(L_2)) * (n + 1)$ . Dies ist allerdings wieder ein Polynom.

**Für  $NP$ :** Seien  $L_1, L_w \in NP, w_1 \in L_1, w_2 \in L_2$  und  $w_3 = w_1 \cdot w_2$  und  $w_3 = b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_n$  und  $w_3 \in L_3$  und  $L_3 = L_1 \cdot L_2$ .

Wähle  $w_1 = b_1 b_2 b_3 \dots b_i$  und  $w_2 = b_{i+1} b_{i+2} \dots b_n$ .

Solange  $w_1 \notin L_1$  und  $w_2 \notin L_2$  gilt, erhöhe  $i$  um 1 (als Startwert für  $i$  gilt 0.)

Dies teilt das Wort in zwei Teilworte und wir wissen nun, wo wir  $w_3$  teilen müssen, um  $w_1$  und  $w_2$  zu erhalten. Bei  $i = 0$  gilt  $w_1 = \lambda$ , bei  $i = n$  gilt  $w_2 = \lambda$ . Nun wird  $w_1$  wie vorher in  $L_1$  in Nichtpolynomialzeit gelöst. Ebenso  $w_2$  in  $L_2$ .

Die Zerlegung benötigt im schlimmsten Fall  $n + 1$  Ausführungen, da es  $n + 1$  mögliche Zerteilungen von  $w_3$  gibt. Somit beträgt die Gesamtlaufzeit die Zeit, die  $w_1$  in  $L_1$  benötigt (ein Nichtpolynom) + die Zeit, die  $w_2$  in  $L_2$  benötigt (auch ein Nichtpolynom) \* die Zeit, die das Zerschneiden benötigt ( $n + 1$ ), also:  $(Nichtpolynom(L_1) + Nichtpolynom(L_2)) * (n + 1)$ . Dies ist allerdings wieder ein Nichtpolynom.

#### 4.2.2 Aufgabe 4.2.2

Geben Sie unter der Annahme  $P = NP$  einen Algorithmus an, der in polynomieller Zeit zu einer aussagenlogischen Formel eine erfüllende Belegung bestimmt, sofern eine existiert. Begründen Sie kurz, warum Ihr Algorithmus das Gewünschte leistet.

##### Brute Force:

Wir setzen für jedes Literal 1 ein und testen.

Erfüllt die Belegung nicht, ersetzen wir eine 1 durch eine 0 und prüfen dann alle Belegungen, die aus  $(n - 1)$  1 und einer 0 bestehen. Wenn die Belegung wieder nicht erfüllt, wird eine weitere 1 durch eine 0 ersetzt, solange, bis die Belegung aus  $0^n$  besteht oder eine erfüllende Belegung gefunden wurde. Handelt es sich bei  $0^n$  auch nicht um eine erfüllende Belegung, so existiert keine.

Dieser Algorithmus benötigt im schlimmsten Fall  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  viele Schritte. Dies liegt in  $NP$  und damit unter der Annahme  $P = NP$  auch in  $P$ . Damit ist es in polynomieller Zeit lösbar.

### 4.2.3 Aufgabe 4.2.3

Zeigen Sie, dass unter der Annahme  $P = NP$  jedes  $J \in P$  außer  $L = \emptyset$  und  $L = \Sigma^*$   $NP$ -vollständig ist. Warum gilt diese Aussage nicht für die beiden ausgeschlossenen Fälle?

Sei  $P = NP$ . Damit sind alle Probleme aus  $NP$  auch in Polynomialzeit lösbar. Zudem ist jedes Problem aus  $P$  in Polynomialzeit auf jedes andere Problem aus  $P$  reduzierbar (, da es sich bei allen Problemen in  $P$  um Polynome handelt,) was genau der Definition von  $NP$  entspricht. Allerdings sind in  $P$  nur endliche Teilmengen von  $\Sigma^+$ , denn  $\emptyset$  ist nicht entscheidbar, ebenso wie unendliche Sprachen ( $\Sigma^*$ ). Somit sind sie auch nicht in  $P$ . Da jedoch  $P = NP$  gilt, liegt der Rest aus  $P$  ebenfalls in  $NPC$ . Somit ist, wenn  $P = NP$  gilt, jedes  $L$  aus  $P$  auch in  $NP$ , außer der Leeren Menge und dem unendlichen  $\Sigma^*$ .

## 4.3 Übungsaufgabe 4.3

[ | 6 ]

### 4.3.1 Aufgabe 4.3.1

Sei 2-SAT die Menge aller (sinnvoll codierten) aussagenlogischen Formeln, die mindestens zwei erfüllende Belegungen haben. Zeigen Sie, dass 2-SAT  $NP$ -vollständig ist.

Ein Algorithmus für 2-SAT:

Als Algorithmus für 2-SAT kann eine modifizierte Version des Brute Force Algorithmus' aus 4.2.2 dienen:

Es wird jede mögliche Belegung für eine aussagenlogische Formel durchprobiert und geschaut, ob sie erfüllend ist. Wenn sie erfüllend ist, wird ein Zähler um 1 inkrementiert. Sollte dieser Zähler die Zahl 2 erreichen, wird "true" ausgegeben, sonst wird die nächste Belegung probiert. Hat der Zähler, nachdem alle Belegungen durchprobiert wurden, noch nicht die 2 erreicht, wird "false" ausgegeben.

Dieser Algorithmus läuft im schlimmsten Fall in  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  vielen Schritten.

Dies liegt in  $NP$  und zeigt daher  $2\text{-SAT} \in NP$ .

Wir wissen aus der Vorlesung:  $\text{SAT} \in NPC$

Reduktion von SAT auf 2-SAT:

Angenommen Automat A löst 2-SAT, dann hat A einen Unterautomaten B, der ausgibt, ob eine beliebige aussagenlogische Formel erfüllbar ist. A gibt nun "true" aus, wenn B für eine Formel mindestens 2 mal "true" ausgegeben hat.

Dieser Automat B wäre allerdings genau die Lösung zu unserem SAT-Problem, welches laut der Vorlesung ja sogar  $NPC$  ist. Daher kann dieser Automat B nicht existieren, woraus folgt, dass A auch nicht existieren kann.

Dies zeigt  $2\text{-SAT} \in NPH$ .

Somit muss  $2\text{-SAT}$  in der Schnittmenge von  $NP$  und  $NPH$  sein, also gilt  $2\text{-SAT} \in NPC$ .

### 4.3.2 Aufgabe 4.3.2

Die folgende Beschreibung verallgemeinert das Spiel *Minesweeper* auf einen ungerichteten Graphen: Sei  $G$  ein ungerichteter Graph. Jeder Knoten von  $G$  enthält entweder eine einzelne *Mine* oder ist leer. Der Spieler kann einen Knoten wählen. Ist es eine Mine, hat er verloren. Ist der Knoten leer, dann wird dieser mit der Anzahl der direkt benachbarten Knoten beschriftet, die eine Mine enthalten. Der Spieler gewinnt, wenn alle leeren Knoten gewählt wurden. Das Problem ist nun folgendes: Gegeben ein Graph zuzüglich einiger beschrifteter Knoten, ist es möglich Minen so auf die verbleibenden Knoten abzulegen, dass jeder Knoten  $v$ , der mit  $k$  beschriftet ist, genau  $k$  direkt benachbarte Knoten besitzt, die eine Mine enthalten? Formulieren Sie dieses Problem sinnvoll als formale Sprache (und füllen Sie dadurch die Lücken in obiger Beschreibung) und zeigen

Sie dann, dass dieses Problem *NP*-vollständig ist.

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Funktion  $f$ , die jedem Knoten  $v$  aus  $V$  einen Wert  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  zuweist. Dieser Wert kann sich von Knoten zu Knoten unterscheiden.

**Frage:** Gibt es eine Verteilung von Minen  $U$ , sodass jeder Knoten  $v$  aus  $V$  genau  $k$  Nachbarknoten hat, die eine Mine besitzen?

Sei  $n$  die Gesamtanzahl der Felder als Produkt der Anzahl der Spalten  $c$  und der Anzahl der Reihen  $r$ . Dann gibt es  $n$  Felder, für die gilt: Es gibt einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V := \text{Menge aller Knoten} \wedge |V| = n$  und  $E := \exists e(u, v; u, v \in V) \in E \Leftrightarrow u \vee v \text{ ist eine Mine}$ . Es gibt also genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten, wenn auf mindestens einem der beiden Knoten eine Mine liegt. Außerdem liegt ein Feld  $f$  in einem Gitter der Größe  $n = r \times c$ . Eine Mine hat damit die Koordinaten  $x, y$  und die Nachbarn einer Mine gehen von  $x - 1, y - 1$  bis  $x + 1, y + 1$ . Sei außerdem  $k \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Kanten eines Knotens, also gerade die Anzahl der Bomben neben dem gewählten Feld. Es gibt für einen Knoten genau zwei Fälle, mit denen er beschriftet werden kann:

$$\text{Beschriftung} := \begin{cases} \text{Bombe} & \text{wenn Bombe,} \\ k & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit muss für einen gewählten Knoten entschieden werden, ob das Spiel vorbei ist. Ist dies nicht der Fall, so muss die Anzahl der Kanten gezählt werden, die dieser Knoten hat, wobei die Anzahl der Kanten zwischen 0 und 8 liegen kann (wegen der Struktur von *Minesweeper*). Somit ergibt sich auch  $k \in [0; 8]$ .