Formale Grundlagen der Informatik I

Abgabe der Hausaufgaben

Übungsgruppe 24 am Freitag, d. 3. Juli 2015

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Philipp Quach
6706421
4quach@informatik.uni-hamburg.de

3. Juli 2015

Aufgabe 11.4

[/4]

11.4.1

Prüfen Sie mittels des Resolutionsverfahrens, ob die Formel

$$F = (A \vee \neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A) \wedge (B \vee C)$$

erfüllbar oder unerfüllbar ist.

$$\begin{tikzcd}
\{A, \neg B, C\} \arrow[dr] & \{C, \neg A\} \arrow[d] & \{B, C\} \arrow[ddl] & \{B, \neg C\} \arrow[dd] & \{\neg B, \neg C\} \arrow[ddl] \\
 & \{\neg B, C\} \arrow[d] & & & \\
 & \{C\} \arrow[dr] & & \{\neg C\} \arrow[dl] & \\
 & & \square & &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ **unerfüllbar**

11.4.2

Prüfen Sie mittels des Resolutionsverfahrens, ob die folgende Folgerbarkeitsbeziehung gilt:

$$(A \Rightarrow D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \vDash (B \Rightarrow D)$$

vgl. 11.2.1:
$F \vDash G \Leftrightarrow F \wedge \neg G \vDash$
$sub(F) = (A \Rightarrow D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \quad \wedge \quad sub(G) = (B \Rightarrow D)$

$$\begin{array}{ll}
(A \Rightarrow D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \wedge \neg(B \Rightarrow D) \vDash & \text{Auflösen von } ' \Rightarrow' \\
(\neg A \vee D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \wedge \neg(\neg B \vee D) \vDash & \text{de Morgan} \\
(\neg A \vee D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \wedge \neg\neg B \vee \neg D \vDash & \text{Aufheben von } \neg\neg \\
(\neg A \vee D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \wedge B \vee \neg D \vDash &
\end{array}$$

An dieser Stelle ist sowohl die Klausel B als auch die Klausel $\neg B$ zu finden, welche sich direkt zu $\square$ zusammenfassen lassen, da sie eine Kontradiktion sind. Folglich gilt die Folgerbarkeitsbeziehung.

Aufgabe 11.5

[/3]

Geben Sie kurz und kompakt die wichtigsten Argumente aus dem Beweis des Resolutionssatzes wieder. (Sie sollen hier nicht den Beweis wiedergeben, sondern aus dem Beweis die Vorgehensweise und die wichtigsten Argumente herausarbeiten und diese mit Ihren Worten wiedergeben.)

Voraussetzung ist das Vorliegen der Struktur als KNF.
Es müssen die **Korrektheit** und die **Vollständigkeit** der Resolution gezeigt werden.

Korrektheit: Sei $\square \in Res^*(F)$. Aus der Definition von $Res^*(F)$ folgt $F \equiv Res^n(F)$ mit $n :$ $\square \in Res^n(F) \Rightarrow K_1, K_2 \in Res^n(F); K_1 = \{L\} \wedge K_2 = \{\overline{L}\}$.
Dies alles zeigt die *Korrektheit* der Resolution.

Vollständigkeit: Mit Induktion kann gezeigt werden, dass $\square \in Res^*(F)$ für jede Formelmenge mit n atomaren Formeln gilt (da für $n = 0$ die Formelmenge leer ist, ist sie grundsätzlich nicht erfüllbar).
Es müssen zwei Umformungen gebildet werden, die zunächst A_{n+1} durch ϵ ersetzen in dem Sinne, dass bei F_0 A_{n+1} gleich 0 gesetzt wird und folglich, da eine KNF vorliegt, jedes Vorkommen von 0 in einer Klausel ignoriert werden kann und jedes Vorkommen von $\neg 0 = 1$ eine Klausel automatisch wahr macht, Vorkommen von A_{n+1} wegfallen und Vorkommen von $\neg A_{n+1}$ ihre ganze Klausel wegfallen lassen, da die immer wahr ist. Analog wird bei F_1 A_{n+1} gleich 1 gesetzt. Folglich werden Klauseln, die A_{n+1} enthalten, komplett omittiert, während Vorkommen von $\neg A_{n+1}$ gestrichen werden.
Somit erhält man zwei Formelmengen F_0 und F_1, die nur die Fomeln $A_1, \ldots, A_n$ enthalten. Für diese Formelmenge wurde der Resolutionssatz bereits im Induktionsanfang gezeigt. Somit ist ersichtlich, dass der Resolutionssatz auch für eine Formelmenge der Größe $n + 1$ gilt, unabhängig der Belegung der Formel A_{n+1}.
Dies zeigt die *Vollständigkeit* der Resolution.

Aufgabe 11.6

[/5]

11.6.1

Für jede natürliche Zahl gilt, dass sie entweder gerade oder ungerade ist. Ist sie gerade, so impliziert das, dass sie nicht ungerade ist. Ist y gerade, so ist $P = 1 \wedge Q = 0$, andernfalls (y ist ungerade) ist $P = 0 \wedge Q = 1$.

Dies bedingt eine Fallunterscheidung:

$$
\begin{array}{r|l}
\text{1. Fall: } y \bmod 2 = 0 & \text{2. Fall: } y \bmod 2 = 1 \\
\\
\forall y[(P(y) \lor Q(f(y))) \land (P(y) \Rightarrow \neg Q(y)] & \forall y[(P(y) \lor Q(f(y))) \land (P(y) \Rightarrow \neg Q(y)] \\
\\
f(y) = y & f(y) = y \\
\land P(y) = 1 \ (\textit{weil } y \textit{ gerade}) & \land P(y) = 0 \ (\textit{weil } y \textit{ gerade}) \\
\land Q(y) = 0 \text{ (s.oben)} & \land Q(y) = 1 \text{ (s.oben)} \\
\Rightarrow ((1 \lor 0) \land (1 \Rightarrow \lor \neg 0)) & \Rightarrow ((0 \lor 1) \land (0 \Rightarrow \neg 1)) \\
1 \land (1 \Rightarrow 1) & 1 \land (0 \Rightarrow 0) \\
1 \land 1 & 1 \land 1 \\
1 & 1
\end{array}
$$

11.6.2

$$
\begin{array}{r|l}
\mathcal{A} = (U.I) & \forall y[(P(y) \lor Q(f(y))] \land (P(y) \Rightarrow \neg Q(y)] \\
U = \mathbb{N}_0 & ((1 \lor 1) \land (1 \Rightarrow \neg 1)) \\
I(P) = \{n \in \mathbb{N}_0\} & 1 \land 1 \Rightarrow 0 \\
I(Q) = \{n \in \mathbb{N}_o\} & 1 \land 0 \\
I(f) = f' | f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; f'(n) = n & 0
\end{array}
$$

11.6.3

Sei $\mathcal{A} = (U, I)$.
U = {Schere, Stein, Papier | Schere schlägt Papier, Papier schlägt Stein, Stein schlägt Schere}
$I(P) = \{(x, y) | x$ schläg y
$F = \forall x \exists y P(x, y) \quad \land G = \exists y \forall x P(x, y)$
F heißt: "Für jedes Element aus U gibt es ein anderes Element, dass es schlägt."
G heißt: Ës gibt ein Element aus U, welche alle anderen Elemente schlägt."
Während F offensichtlich wahr ist (vgl. Def. v. U), ist G offensichtlich falsch.

Beweis.
1. Fall: 'Schere': wird von 'Stein' geschlagen
2. Fall: 'Stein': wird von 'Papier geschlagen
3. Fall: 'Papier': wird von 'Schere' geschlagen

Damit ist für jedes Element aus U gezeigt, dass es nicht alle anderen Elemente schlägt. □