Formale Grundlagen der Informatik I

Abgabe der Hausaufgaben
Übungsgruppe 24 am 31. Mai 2015

Louis Kobras
6658699
4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann
6663579
4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Philipp Quach
6706421
4quach@informatik.uni-hamburg.de

31. Mai 2015

Aufgabe 7.3

Aufgabe 7.3.1

Zeigen Sie, dass aus $L_1, L_2 \in P$ auch $L_1 \cap L_2 \in P$ und $\overline{L_1} \in P$ folgt, dass also P gegenüber Durchschnitts- und Komplementbildung abgeschlossen ist.

Sei μ in $L_1 \cap L_2$. Dann ist μ in L_1 oder L_2, aber auch in P.
Sei μ in L_1. Dann ist μ in P, aber auch in $L_1 \cap L_2$.
Sei μ in L_2. Dann ist μ in P, aber auch in $L_1 \cap L_2$.
Daraus folgt, dass $L_1, L_2 \in P \Rightarrow L_1 \cap L_2 \in P$.

Sei $L_1 \subseteq P$. Dann gilt: $L_1 = P \setminus \overline{L_1}$. Daraus ergibt sich $\overline{L_1} = P \setminus L_1 \quad \Rightarrow \overline{L_1} \in P$.

Aufgabe 7.3.2

Zeigen Sie, dass aus $L_1, L_2 \in NP$ auch $L_1 \cap L_2 \in NP$ folgt.

Sei μ in $L_1 \cap L_2$. Dann ist μ in L_1 oder L_2, aber auch NP.
Sei μ in L_1. Dann ist μ in NP, aber auch in $L_1 \cap L_2$.
Sei μ in L_2. Dann ist μ in NP, aber auch in $L_1 \cap L_2$.
Daraus folgt, dass $L_1, L_2 \in NP \Rightarrow L_1 \cap L_2 \in NP$.

Aufgabe 7.4

Zeigen Sie, dass das Färbungsproblem (siehe unten) in *NP* liegen, indem Sie einen Verifikationsalgorithmus mit polynomialer Laufzeit fur dieses Problem angeben. Beachten Sie dabei, dass Sie das Zertifikat spezifizieren müssen.

- Das Färbungsproblem

  - Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$
  - Frage: Kann G mit k Farben gefärbt werden, d.h. gibt es eine Funktion $c : V \rightarrow \{1, ..., k\}$ derart, dass $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt?

Aufgabe 7.5

Betrachten Sie das folgende Problem:
Gegeben: Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1) und G_2 = (V_2, E_2)$.
Frage: Gibt es Teilmengen $V \subseteq V_1$ und $E \subseteq E_1$ derart, dass $|V| = |V_2|$ und $|E| = |E_2|$ gilt und eine bijektive Abbildung $f : V_2 \rightarrow V$ existiert mit $\{u, v\} \in E_2$ genau dann, wenn $\{f(u), f(v)\} \in E$?

Aufgabe 7.5.1

Zeigen Sie, dass das Problem in *NP* liegt, indem Sie einen *NP*-Algorithmus angeben, der das Problem löst.

Aufgabe 7.5.2

Beweisen Sie, dass das Problem *NP*-hart (und damit insgesamt *NP*-vollständig) ist, indem Sie eine Reduktion von einem Ihnen bekannten *NP*-vollständigen Problem angeben.

Aufgabe 7.6

Sei A ein Algorithmus, der eine konstante Anzahl von Aufrufen von Unterroutinen enthält. Zählt man jeden dieser Aufrufe als einen Schritt, so sei A ein Polynomialzeit-Algorithmus. Zeigen Sie, dass A insgesamt in polynomialer Zeit läuft, wenn die Unterroutinen in polynomialer Zeit laufen. Zeigen Sie ferner, dass ein Algorithmus mit exponentieller Laufzeit entstehen kann, wenn ein Algorithmus eine polynomiale Anzahl von Aufrufen von Unterroutinen mit polynomialer Laufzeit enthält.