

Hausaufgaben zum 21. Mai 2015

**Mathematik für Studierende der Informatik II
(Analysis und Lineare Algebra)**

Louis Kobras

6658699

4kobras@informatik.uni-hamburg.de

Utz Pöhlmann

6663579

4poehlma@informatik.uni-hamburg.de

Jennifer Hartmann

6706472

fwuy089@studium.uni-hamburg.de

21. Mai 2015

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix zu invertieren, ist ebenjene Matrix B gesucht, mit der die gegebene Matrix multipliziert werden muss, um die Einheitsmatrix zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich folgende neun Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} I & 1 = 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + (-1) \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{31} + 1 = a_{11} + a_{21} \\ II & 0 = 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{32} & \Rightarrow a_{32} = a_{12} + a_{22} \\ III & 0 = 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + (-1) \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{33} = a_{13} + a_{23} \\ \\ IV & 0 = 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \Rightarrow a_{21} = -a_{31} \\ V & 1 = 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\ VI & 0 = 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} & \Rightarrow a_{23} = -a_{33} \\ \\ VII & 0 = 2 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \\ VIII & 0 = 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \\ IX & 1 = 2 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} & \end{array}$$

Durch die offensichtlichen Umformungen und das Einsetzen von Gleichungen ineinander ermitteln wir nun die Werte $(a_{ij})_{i,j \in [1,2,3]}$ als Lösungen dieses Gleichungssystems.

Wir beginnen mit der ersten Spalte :

Einsetzen von IV in I :

$$\begin{aligned}a_{31} + 1 &= a_{11} + (-a_{31}) \\ \Rightarrow a_{11} &= a_{31} + a_{31} + 1 = 2 \cdot a_{31} + 1\end{aligned}$$

Einsetzen von a_{11} und a_{21} in VII :

$$\begin{aligned}0 &= 2 \cdot (2 \cdot a_{31} + 1) + 2 \cdot (-a_{31}) + 1 \cdot a_{31} = 4 \cdot a_{31} + 2 - 2 \cdot a_{31} + a_{31} \\ &= 2 + 3 \cdot a_{31} \\ \Rightarrow a_{31} &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Einsetzen von a_{31} in a_{11} und a_{21} :

$$\begin{aligned}a_{21} &= -a_{31} = \frac{2}{3} \\ a_{11} &= 2 \cdot a_{31} + 1 = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Fortfahren mit der zweiten Spalte :

Einsetzen von II in VIII :

$$\begin{aligned}0 &= 2 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot (a_{12} + a_{22}) \\ &= 3 \cdot a_{12} + 3 \cdot a_{22} \\ \Rightarrow a_{12} &= -a_{22}\end{aligned}$$

Einsetzen von a_{32} in V :

$$\begin{aligned}1 &= 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot (a_{22} - a_{22}) \\ \Rightarrow a_{22} &= 1\end{aligned}$$

Einsetzen von a_{22} in a_{12} und a_{32} :

$$\begin{aligned}a_{12} &= -a_{22} = -1 \\ a_{32} &= a_{22} - a_{22} = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Fortfahren mit der dritten Spalten :

Einsetzen von VI in III :

$$\begin{aligned}0 &= 1 \cdot a_{13} + 1 \cdot (-a_{33} + (-1) \cdot a_{33}) \\ \Rightarrow a_{13} &= 2 \cdot a_{33}\end{aligned}$$

Einsetzen von a_{13} und a_{23} in IX :

$$\begin{aligned}1 &= 2 \cdot (2 \cdot a_{33}) + 2 \cdot (-a_{33}) + 1 \cdot a_{33} = 4 \cdot a_{33} - 2 \cdot a_{33} + 1 \cdot a_{33} = 3 \cdot a_{33} \\ \Rightarrow a_{33} &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Einsetzen von a_{33} in a_{13} und a_{23} :

$$\begin{aligned}a_{13} &= 2 \cdot a_{33} = \frac{2}{3} \\ a_{23} &= -a_{33} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Anhand dieser Werte für $(a_{ij})_{i,j \in [1,2,3]}$ stellen wir nun die Matrix B auf:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Matrix handelt es sich um das Inverse der Matrix A aus der Aufgabe.

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I \quad a_{11} = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$II \quad a_{11} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -1 + 1 + 0 = 0$$

$$III \quad a_{11} = \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$IV \quad a_{11} = -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

$$V \quad a_{11} = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$VI \quad a_{11} = -\frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$VII \quad a_{11} = -\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

$$VIII \quad a_{11} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

$$IX \quad a_{11} = \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Probe gemacht.

Aufgabe 2

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei A die Matrix aus Aufgabe 1 ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

I	1	1	-1	1		
II	0	1	1	2		
III	2	2	1	3	$(III - 2 \cdot I)$	
I	1	1	-1	1		
II	0	1	1	2		
III	0	0	3	1	$(: 3)$	
I	1	1	-1	1	$(I - II)$	
II	0	1	1	2		
III	0	0	1	$\frac{1}{3}$		

I	1	0	-2	-1	$(I + 2 \cdot II)$
II	0	1	1	2	$(II - III)$
III	0	0	1	$\frac{1}{3}$	
I	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	
II	0	1	0	$\frac{5}{3}$	
III	0	0	1	$\frac{1}{3}$	

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für zwei (2×2) -Matrizen A und B tatsächlich die Formel

$$\text{Det}(A)\text{Det}(B) = \text{Det}(AB)$$

gilt.

Zunächst werden die Determinanten von A und B und dann deren Produkt bestimmt.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{Det}(B) = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$$

$$\text{Det}(AB) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}$$

$$- a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}$$

Nun wird zunächst das Produkt der Matrizen A und B bestimmt, anschließend die Determinante des Produktes:

$$AB = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \cdot (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ &\quad - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \cdot (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \end{aligned}$$

$$= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}$$

$$+ a_{12}b_{21}a_{12}b_{11} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}$$

$$- a_{11}b_{12}a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}$$

$$- a_{12}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{21}b_{22}a_{22}b_{21}$$

$$= a_{11}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}$$

$$+ a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}$$

$$- a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}$$

$$- a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}$$

$$- a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}$$

Damit ist gezeigt, dass $\text{Det}(A)\text{Det}(B) = \text{Det}(AB)$.

Aufgabe 4

Die Folge $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Damit existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}| < \frac{1}{3}$ gilt. Bestimmen Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, das das leistet.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} &= \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{3} \\ n^2 &= 3n + 3 \\ n^2 - 3n - \frac{3^2}{2} &= 3 + \frac{9}{4} \\ \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{21}{4} \\ n - \frac{3}{2} &= \pm \frac{\sqrt{21}}{2} \\ n &= \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \\ n &\approx 3.79\end{aligned}$$

Da die kleinstmögliche ganze Zahl n gesucht wird, und $3 < 3.79$ und somit herausfällt, sowie alle Zahlen kleiner 3, ergibt sich für n der Minimalwert $n_0 = 4$.

Probe:

$$\begin{aligned}n = 3 : \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} &= \frac{4}{9} > \frac{1}{3} \\ n = 4 : \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} &= \frac{5}{16} < \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Es sei $a \in \mathbb{R}$ irgendeine Zahl und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Man zeige nur unter Benutzung der Definition von Konvergenz, dass die Folge $(a + a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. (a_n) konvergiert gegen 0, wenn n gegen ∞ geht.

$$a \in \mathbb{R} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0^+ \vee 0^-$$

\Rightarrow rechnen wir zu jedem Wert a_n eine Zahl a hinzu, konvergiert diese neue Folge $a_n + a$ gegen a , da a_n gegen 0 geht und $0 + a = a$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a + a_n = a$$