

Rechnerübung zu Optimierungsansätze unter Unsicherheit

Organisatorische Hinweise:

- Die Rechnerübung kann in Gruppen von bis zu 3 Studierenden bearbeitet werden.
- Die Bearbeitungs- und Abgabefrist ist **Sonntag, der 15. Dezember 2024, um 23:59 Uhr**. Es ist keine Verlängerung der Abgabefrist möglich.
- Die Abgabe
 - erfolgt per E-Mail bei Herrn Christian Füllner (christian.fuellner@kit.edu),
 - sollte die Antworten auf die Fragen aus der Aufgabenstellung in einem PDF-Dokument sowie den dokumentierten GAMS-Quellcode (.gms-Dateien) enthalten,
 - sollte gut kommentiert sein und die Ergebnisse sollten klar ersichtlich dargestellt werden,
 - sollte alle Namen, Matrikelnummern und E-Mail-Adressen der Gruppenmitglieder enthalten.
- Durch das Bestehen der Rechnerübung erhalten alle Gruppenmitglieder einen Bonus von einem Notenschritt (0.3 oder 0.4) auf ihre Klausur. Boni werden nur auf bestandene Klausuren angerechnet.
- Ein in diesem Semester erworbener Bonus behält auch für zukünftigen Klausuren seine Gültigkeit.
- Die Korrektur der Rechnerübung beginnt erst nach Abgabeschluss.
- Bei zweifacher Abgabe derselben Lösung ist mit Nichtbestehen der Rechnerübung bei der Gruppen zu rechnen.

Problemstellung:

Gegeben sei das lineare Problem zur Optimierung des persönlichen Ernährungsplans eines/r Studierenden.

Zielsetzung ist es, unter Einhaltung der empfohlenen Mindest- und Höchstmengen diverser Inhaltsstoffe und Berücksichtigung einiger Geschmackspräferenzen, die Kosten für die Ernährung zu minimieren.

Zur Vereinfachung wird dabei von nur 9 unterschiedlichen verfügbaren Lebensmitteln ausgegangen. Dabei bezeichnen die Entscheidungsvariablen $x_i, i = 1, \dots, 9$, die zu konsumierende Menge des i -ten Lebensmittels in 100 g. Die mit den Entscheidungsvariablen assoziierten Lebensmittel sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Definition der Entscheidungsvariablen

Variable	Menge Lebensmittel in 100 g
x_1	Äpfel
x_2	Cornflakes
x_3	Karotten
x_4	Kartoffeln
x_5	Käse
x_6	Milch
x_7	Schokolade
x_8	Spinat
x_9	Steak

Das Optimierungsproblem lässt sich dann wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0.22x_1 + 0.18x_2 + 0.07x_3 + 0.14x_4 + 0.55x_5 + 0.1x_6 + 0.54x_7 + 0.28x_8 + 3.2x_9 \\ \text{s.t.} \quad & 52x_1 + 355x_2 + 26x_3 + 71x_4 + 354x_5 + 64x_6 + 536x_7 + 17x_8 + 121x_9 \geq 2400 \\ & \text{(Mindestbedarf Kalorien in kcal)} \\ & 0.35x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 + 25x_5 + 3.5x_6 + 9x_7 + 2.5x_8 + 21x_9 \geq 56 \\ & \text{(Mindestbedarf Proteine in g)} \\ & 18x_1 + 307x_2 + 7x_3 + 24.5x_4 - 177x_5 - 12x_6 - 52x_7 - 6.5x_8 - 60.5x_9 \geq 0 \\ & \text{(Kohlenhydrate decken 50\% des Kalorienbedarfs)} \\ & 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 + 0.11x_4 + 28.3x_5 + 3.5x_6 + 31.5x_7 + 0.3x_8 + 4x_9 \geq 50 \\ & \text{(Mindestbedarf Fette in g)} \\ & 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 + 0.11x_4 + 28.3x_5 + 3.5x_6 + 31.5x_7 + 0.3x_8 + 4x_9 \leq 70 \\ & \text{(Maximalkonsum Fette in g)} \\ & 7x_1 + 13x_2 + 41x_3 + 6x_4 + 800x_5 + 120x_6 + 214x_7 + 126x_8 + 3x_9 \geq 500 \\ & \text{(Mindestbedarf Calcium in mg)} \\ & 30x_1 + 60x_2 + 53x_3 + 47x_4 + 300x_5 + 170x_6 + 370x_7 + 230x_8 + 130x_9 \geq 1100 \end{aligned}$$

(Mindestbedarf Vitamin B2 in μg)

$$x_1 + x_3 + x_8 \geq 4$$

(Mindestens 400 g „gesund“)

$$x_1, \dots, x_9 \leq 5$$

$$x_1, \dots, x_9 \geq 0$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_6 \leq 2$$

$$x_7 \leq 3$$

$$x_9 \geq 1$$

(Schranken)

Erklärung der Zielfunktion:

Die Zielfunktionskoeffizienten beschreiben die Preise in € je 100 g Lebensmittel.

Erklärung der Nebenbedingungen:

Mindestbedarf Kalorien, Proteine, Fette, Calcium und Vitamin B2: Um den täglichen Ernährungsbedarf bei moderater körperlicher Aktivität und durchschnittlicher Größe zu decken, muss der/die Studierende mindestens 2400 kcal konsumieren. Für Proteine, Fette, Calcium und Vitamin B2 sollen zudem die empfohlenen Tagesmengen eingehalten werden.

Mindestbedarf Kohlenhydrate: Für Kohlenhydrate gilt die Empfehlung das zumindest 50% der täglichen Kalorienmenge durch sie gedeckt werden sollte. Dadurch kommen auch negative Koeffizienten auf der linken Seite zustande.

Maximalkonsum Fette: Der Konsum an Fetten soll einen Betrag von 70 g pro Tag nicht überschreiten.

Gesunde Ernährung: Um die Ernährung ausgewogen zu halten, sollen mindestens 400 g an „gesunden“ Lebensmitteln (Äpfel, Karotten, Spinat) konsumiert werden.

Ausgewogene Ernährung und Schranken: Um eine sehr einseitige Ernährung zu vermeiden, soll die Menge jedes Lebensmittels auf 500 g gedeckelt werden. Ausnahmen sind Cornflakes mit maximal 300 g und Schokolade mit maximal 300 g. Für Milch besteht eine leichte Unverträglichkeit, weshalb nur maximal 200 g je Tag konsumiert werden sollten. Da der/die Studierende auf ein saftiges Steak nicht gänzlich verzichten möchte, sollte dies zu mindestens 100 g auf dem täglichen Ernährungsplan stehen.

Aufgabe R.1 (LP-Modellierung):

- (a) Modellieren Sie das gegebene Optimierungsproblem in GAMS.

Verwenden Sie hierbei Indexmengen, wie in der Einführung zu GAMS beschrieben. Speichern Sie ihr Modell unter dem Namen **Aufgabe1.gms**.

- (b) Lösen Sie das Problem unter Verwendung eines geeigneten Solvers. Geben Sie die optimale Lösung (Optimalpunkt und Optimalwert) des Problems explizit an.

Kontrollergebnis: Der Optimalwert sollte gerundet 5.17 € betragen.

Auftretende Unsicherheiten:

Es ist davon auszugehen, dass die in der Problemstellung angegebenen Daten aufgrund diverser Faktoren als unsicher anzusehen sind.

- Aufgrund von Fluktuationen der Marktpreise sowie Variationen in Art und Qualität der Lebensmittel ist zu erwarten, dass die Zielfunktionskoeffizienten Schwankungen unterliegen können. Gehen sie davon aus, dass die folgenden **relativen** oder **absoluten** Abweichungen vom zunächst angenommenen Wert möglich sind.

Tabelle 2: Mögliche Abweichung der Zielfunktionskoeffizienten

	Äpfel	Cornflakes	Karotten	Kartoffeln	Käse
absolute Abweichung in € je 100 g	0.06			0.04	0.1
relative Abweichung in %		15	20		

	Milch	Schokolade	Spinat	Steak
absolute Abweichung in € je 100 g			0.1	
relative Abweichung in %	25	40		40

- Gehen Sie davon aus, dass auch die Konzentrationen an Proteinen, Fett, Calcium und Vitamin B2 in den Lebensmitteln Abweichungen unterliegen können. Zur Vereinfachung können folgende **relativen** Abweichungen von ihren Nominalwerten (in beide Richtungen) unterliegen.

Tabelle 3: Mögliche relative Abweichungen

Bestandteil	Äpfel	Cornflakes	Karotten	Kartoffeln	Käse
Proteine	20%	10%	20%	5%	1%
Fette	20%	20%	20%	2%	1%
Calcium	20%	50%	20%	2%	10%
Vitamin B2	15%	20%	20%	1%	5%

	Milch	Schokolade	Spinat	Steak
Proteine	10%	1%	10%	15%
Fette	10%	1%	15%	30%
Calcium	20%	1%	10%	20%
Vitamin B2	5%	1%	20%	15%

- In verschiedenen Ratgebern und je nach Konstitution schwanken die empfohlenen Mindestangaben für die Kalorien und Nährstoffe zum Teil erheblich. Gehen Sie von den folgenden **absoluten** Abweichungen aus.

Tabelle 4: Mögliche absolute Abweichungen des Mindestbedarfs

Größe	Kalorien	Proteine	Fette	Calcium	Vitamin B2
Einheit	kcal	g	g	mg	µg
	350	10	10	200	300

- Gehen Sie bei allen Unsicherheiten davon aus, dass Schwankungen in beide Richtungen möglich sind.

Aufgabe R.2 (Modellierung der Unsicherheiten):

Der Ernährungsplan soll im Folgenden mittels robuster Optimierung gegen die bestehenden Unsicherheiten abgesichert werden.

Die Unsicherheitsmenge sei allgemein durch

$$\mathcal{U} = \left\{ \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} (c^0)^\top & d^0 \\ \hline A^0 & b^0 \end{array} \right]}_{=: D^0} + \sum_{\ell=1}^L \zeta_\ell \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} (c^\ell)^\top & d^\ell \\ \hline A^\ell & b^\ell \end{array} \right]}_{=: D^\ell} \mid \zeta \in \mathcal{Z} \right\}$$

beschrieben.

- (a) Geben Sie in Ihrer PDF-Abgabe exemplarisch für die Protein-Restriktion (2. Restriktion) die Datenmatrizen D_2^0, \dots, D_2^L explizit an.

Gehen Sie bei der Wahl von L , wie in Vorlesung und Übung üblich, davon aus, dass für alle Spalten des Problems separate Shift-Matrizen und Störungsvektoren eingeführt werden, sodass sich innerhalb jeder Zeile die unsicheren Parameter unabhängig voneinander ändern können.

Aufgabe R.3 (Modellierung von Äquivalenten):

- (a) Zunächst soll nun von einer Intervall-Unsicherheitsmenge ausgegangen werden.
- (i) Formulieren Sie ein LP-Äquivalent des robusten Pendants des Problems in GAMS. Speichern Sie ihr Modell unter dem Namen **Aufgabe3a.gms**.
 - (ii) Lösen Sie das Problem unter Verwendung eines geeigneten Solvers. Geben Sie die optimale Lösung des Problems (Optimalpunkt und Optimalwert) explizit an.
 - (iii) Wie viele Variablen und Restriktionen besitzt Ihre Modellierung aus (i)? Geben Sie explizit an, wie sich diese Zahlen zusammensetzen.
- (b) Gehen Sie nun von einer Ellips-Unsicherheitsmenge aus.
- (i) Formulieren Sie ein Äquivalent des robusten Pendants des Problems in GAMS. Speichern Sie ihr Modell unter dem Namen **Aufgabe3b.gms**.
 - (ii) Lösen Sie das Problem unter Verwendung eines geeigneten Solvers. Geben Sie die optimale Lösung des Problems (Optimalpunkt und Optimalwert) explizit an.
- (c) Vergleichen Sie Ihre Lösungen aus Aufgabe R.1(b), Aufgabe R.3(a) und Aufgabe R.3(b). Interpretieren Sie die Unterschiede.
- (d) Angenommen, wegen körperlicher Aktivität kann der Kalorienbedarf sogar um 750 g im Vergleich zum Nominalwert steigen. Welche Besonderheit ergibt sich bei der Lösung des Problems unter Intervall-Unsicherheit? Gilt dies auch unter Ellips-Unsicherheit?

Wichtig: Vorgaben zur Modellierung in GAMS:

- Verwenden Sie bei Ihrer Modellierung geeignete Indexmengen.
- Modellieren Sie die Äquivalente jeweils in der in der Vorlesung vorgestellten Form.
- Modellieren Sie dazu insbesondere die Einträge der Datenmatrizen in geeigneter Form. Es ist dabei Ihnen überlassen, ob Sie die Datenmatrizen ganzheitlich modellieren oder die Einträge $c^\ell, d^\ell, b^\ell, A^\ell$ separat voneinander definieren.
- Lösungen für die Intervall-Unsicherheit, in denen einfach die Koeffizienten angepasst werden (naiver Ansatz aus Übung 4) sind nicht zulässig!