Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Institut für Operations Research (IOR)
Optimierungsansätze unter Unsicherheit
Prof. Dr. Steffen Rebennack

Abgabge Rechnerübung
Wintersemester 2024/25

Vorname Nachname
Matr. Nr.:
Studiengang (B.Sc.)

und

Vorname Nachname
Matr. Nr.:
Studiengang (B.Sc.)

Lösungen zu Aufgabe 1

Aufgabenteil a

Der Quellcode ist in der Datei Aufgabe1.gms zu finden.

Aufgabenteil b

Die entsprechende Ausführung kann unter Aufgabe1.lst eingesehen werden. Daraus lässt sich entnehmen, dass der optimale Wert bei 5,169180 € liegt und der optimale Punkt bei

$$\begin{pmatrix} \text{Apfel} \\ \text{Cornflakes} \\ \text{Karotten} \\ \text{Kartoffeln} \\ \text{Käse} \\ \text{Milch} \\ \text{Schokolade} \\ \text{Spinat} \\ \text{Steak} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0,4512 \\ 0 \\ 0 \\ 2,0111 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

zu finden ist.

Lösungen zu Aufgabe 2

Die Unsicherheitsmenge lässt sich allgemein folgendermaßen beschreiben:

$$\mathcal{U} = \left\{ \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} (c^0)^\top & d^0 \\ \hline A^0 & b^0 \end{array}\right]}_{D^0} + \sum_{\ell=1}^{L} \zeta_\ell \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} (c^\ell)^\top & d^\ell \\ \hline A^\ell & b^\ell \end{array}\right]}_{D^\ell} \;\middle|\; \zeta \in \mathbb{Z} \right\}$$

Für die Aufgabe werden unter anderem die Zielfunktion, gegeben durch

$$\min \quad 0.22x_1+0.18x_2+0.07x_3+0.14x_4+0.55x_5+0.1x_6+0.54x_7+0.28x_8+3.2x_9$$

und die zweite Nebenbedingung

$$0.35x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 + 25x_5 + 3.5x_6 + 9x_7 + 2.5x_8 + 21x_9 \geq 56$$

benötigt.

Zuerst gilt es, die zweite Nebenbedingung in Standardform zu bringen. Dazu wird die Ungleichung mit -1 multipliziert.

$$-0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 \leq -56$$

Aus den entsprechenden Vorüberlegungen lässt direkt die nominale Datenmatrix D_2^0 bilden:

$$D_2^0 = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.18 & 0.07 & 0.14 & 0.55 & 0.1 & 0.54 & 0.28 & 3.2 & 0 \\ -0.35 & -7 & -1 & -2 & -25 & -3.5 & -9 & -2.5 & -21 & -56 \end{pmatrix}$$

Die Unsicherheiten betreffen sämtliche Koeffizienten der Zielfunktion, sowie die Nährwerte für Proteine, Fette, Calcium und Vitamin B2. Zusätzlich gibt es eine Schwankung im Mindestbedarf für Proteine von $10g$. Alle Werte können den Tabellen in der Aufgabenstellung entnommen werden.

Daher ist es entscheidend, die Unsicherheiten der Ziel- und Nebenfunktionen in absoluten Werten zu ermitteln. Die Unsicherheitsgröße kann anschließend wie folgt dargestellt werden:

$$\text{ZF} = \begin{pmatrix} 0.06 & \underbrace{0.027}_{0.18\times0.15} & \underbrace{0.014}_{0.07\times0.2} & 0.04 & 0.1 & \underbrace{0.025}_{0.1\times0.25} & \underbrace{0.216}_{0.54\times0.4} & 0.1 & \underbrace{1.28}_{3.2\times0.4} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{NF} = \begin{pmatrix} \underbrace{-0.07}_{-0.35\times 0.2} & \underbrace{-0.7}_{-7\times 0.1} & \underbrace{-0.2}_{-1\times 0.2} & \underbrace{-0.1}_{-2\times 0.05} & \underbrace{-0.25}_{-25\times 0.01} & \underbrace{-0.35}_{-3.5\times 0.1} & \underbrace{-0.09}_{-9\times 0.01} & \underbrace{-0.25}_{-2.5\times 0.1} & \underbrace{-3.15}_{-21\times 0.15} \end{pmatrix}$$

Ausgehend von diesen Werten lassen sich nun alle Shift-Matrizen D^ℓ berechnen. Die Anzahl der Unsicherheiten beträgt $L = 19$, woraus sich eine identische Anzahl an Shift-Matrizen ergibt. Diese sind wie folgt:

$$D_2^1 = \begin{pmatrix} 0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{17} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{18} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2^{19} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

Aufgabenteil a - Intervall-Unsicherheit

Umwandeln des Ursprungsproblems in Standardform

Das Ursprungsproblem muss in folgende Struktur umgewandelt werden:

$$\text{(LO)} \qquad \left\{ \min_x \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d \;\middle|\; A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\} \right\}$$

Entsprechend lässt sich dieses dann nun folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 0.22x_1 + 0.18x_2 + 0.07x_3 + 0.14x_4 + 0.55x_5 + 0.16x_6 + 0.54x_7 + 0.28x_8 + 3.2x_9 \\
\text{s.t.} \quad & -52x_1 - 355x_2 - 26x_3 - 71x_4 - 354x_5 - 64x_6 - 536x_7 - 17x_8 - 121x_9 \leq -2400 \\
& -0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 \leq -56 \\
& -18x_1 - 307x_2 - 7x_3 - 24.5x_4 + 177x_5 + 12x_6 + 52x_7 + 6.5x_8 + 60.5x_9 \leq 0 \\
& -0.4x_1 - 0.6x_2 - 0.2x_3 - 0.11x_4 - 28.3x_5 - 3.5x_6 - 31.5x_7 - 0.3x_8 - 4x_9 \leq -50 \\
& 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 + 0.11x_4 + 28.3x_5 + 3.5x_6 + 31.5x_7 + 0.3x_8 + 4x_9 \leq 70 \\
& -7x_1 - 13x_2 - 41x_3 - 6x_4 - 800x_5 - 120x_6 - 214x_7 - 126x_8 - 3x_9 \leq -500 \\
& -30x_1 - 60x_2 - 53x_3 - 47x_4 - 300x_5 - 170x_6 - 370x_7 - 230x_8 - 130x_9 \leq -1100 \\
& -x_1 - x_3 - x_8 \leq -4 \\
& x_1, \ldots, x_9 \leq 5 \\
& -x_1, \ldots, -x_9 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_6 \leq 2 \\
& x_7 \leq 3 \\
& -x_9 \leq -1
\end{aligned}$$

Bilden der nominalen Datenmatrix D^0

Mit den vorherigen Überlegungen lässt sich ganz einfach die nominale Datenmatrix D^0 dieser Struktur

$$D^0 = \left(\begin{array}{c|c} (c^0)^\top & d^0 \\ \hline A^0 & b^0 \end{array} \right)$$

bilden.

Nach dem Streichen von Zeilen ohne Unsicherheiten lautet diese dann wie folgt:

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.18 & 0.07 & 0.14 & 0.55 & 0.16 & 0.54 & 0.28 & 3.2 & 0 \\ -52 & -355 & -26 & -71 & -354 & -64 & -536 & -17 & -121 & -2400 \\ -0.35 & -7 & -1 & -2 & -25 & -3.5 & -9 & -2.5 & -21 & -56 \\ -0.4 & -0.6 & -0.2 & -0.11 & -28.3 & -3.5 & -31.5 & -0.3 & -4 & -50 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.11 & 28.3 & 3.5 & 31.5 & 0.3 & 4 & 70 \\ -7 & -13 & -41 & -6 & -800 & -120 & -214 & -126 & -3 & -500 \\ -30 & -60 & -53 & -47 & -300 & -170 & -370 & -230 & -130 & -1100 \end{pmatrix}$$

Bilden der Shiftmatrizen D^ℓ

Die Anzahl der Shiftmatrizen D^ℓ ergibt sich aus der Anzahl der Unsicherheiten. Alle Unsicherheiten lassen sich aus den Tabellen entnehmen.

Für die Shiftmatrizen D^ℓ gilt es, die Unsicherheiten ggf. durch Multiplikation mit dem entsprechenden Koeffizienten der Zielfunktion in absolute Abweichungen umzuwandeln. Wie in Übung $3f$ und Vorlesung 7 (Abschnitt 5.3) erwähnt, nutzt man für jede Unsicherheit in einer Zeile eine neue Shiftmatrix. Durch diesen Ansatz lassen sich die Unsicherheiten eines Parameters $x_{\ell\in[1,9]}$ und des Mindestbedarfs b in einer Shiftmatrix D^ℓ darstellen. Außerdem ist es zu Vereinfachungszwecken erlaubt, Zeilen, in denen keine Unsicherheiten auftreten, zu streichen.

Die Shiftmatrizen lauten dann wie folgt:

$$D^1_{x_1} = \begin{pmatrix} 0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D^2_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0.027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D_{x_3}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D_{x_4}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D_{x_5}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D_{x_6}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D_{x_7}^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D_{x_8}^8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D_{x_9}^{9} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zielfunktion \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Max.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

$$D_{b}^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Kalorien \\ Proteine \\ Min.Fette \\ Calcium \\ Vit.B2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt gilt dann:

$$\mathcal{U} = \left\{ D^0 + \sum_{\ell=1}^{10} D^\ell \zeta_\ell \mid \zeta_\ell \in [-1, 1] \right\}$$

Bilden des robusten Pendants

Mit Hilfe der Unsicherheitsmenge aus dem vorherigen Schritt lässt sich nun das robuste Pendant des Ursprungsproblems bilden:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sup_{(c,d,\cdot)\in\mathcal{U}} \left(c^\top x + d\right) \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \quad \forall(\cdot, A, b) \in \mathcal{U}, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

In diesem Fall ergibt es sich zu:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^\top x \quad \forall (c^\top, \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathcal{U} \\
\text{s.t.} \quad & a_1^\top x \leq b_1 \quad \forall (\cdot, \cdot, a_1^\top, b_1) \in \mathcal{U} \\
& a_2^\top x \leq b_2 \quad \forall (\cdot, \cdot, a_2^\top, b_2) \in \mathcal{U} \\
& -18x_1 - 307x_2 - 7x_3 - 24.5x_4 + 177x_5 + 12x_6 + 52x_7 + 6.5x_8 + 60.5x_9 \leq 0 \\
& a_4^\top x \leq b_4 \quad \forall (\cdot, \cdot, a_4^\top, b_4) \in \mathcal{U} \\
& a_5^\top x \leq b_5 \quad \forall (\cdot, \cdot, a_5^\top, b_5) \in \mathcal{U} \\
& a_6^\top x \leq b_6 \quad \forall (\cdot, \cdot, a_6^\top, b_6) \in \mathcal{U} \\
& a_7^\top x \leq b_7 \quad \forall (\cdot, \cdot, a_7^\top, b_7) \in \mathcal{U} \\
& -x_1 - x_3 - x_8 \leq -4 \\
& x_1, \dots, x_9 \leq 5 \\
& -x_1, \dots, -x_9 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_6 \leq 2 \\
& x_7 \leq 3 \\
& -x_9 \leq -1
\end{aligned}
$$

Herleitung eines LP-Äquivalents

Zur Veranschaulichung wird die zweite Nebenbedingung (Proteine) umgewandelt. Dabei wird die Definition von $\mathcal{U}$ in die Nebenbedingung eingesetzt:

$$(a_1^0)^\top x + \zeta_1 (a_1^1)^\top x + \cdots + \zeta_9 (a_1^9)^\top x + \underbrace{\zeta_{10} (a_1^{10})^\top x}_{=0} \leq b_1^0 + \underbrace{\zeta_1 b_1^1}_{=0} + \cdots + \zeta_{10} b_1^{10} \quad \forall \zeta \in [-1, 1]$$

Zuerst gilt es die Projektion der Unsicherheitsmenge bei Intervall-Unsicherheit zu bestimmen:

$$\mathcal{U}^2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -0.35 \\ -7 \\ -1 \\ -2 \\ -25 \\ -3.5 \\ -9 \\ -2.5 \\ -21 \\ -56 \end{pmatrix} + \zeta_1 \begin{pmatrix} 0.07 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.77 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \zeta_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.35 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.15 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array} \middle| \, \|\zeta\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Damit ergibt sich für die Restriktion folgende robuste Darstellung:

$$\begin{aligned} & -0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 \\ & \quad + \max_{\|\zeta\|_\infty \leq 1} (0.07\zeta_1 + 0.7\zeta_2 + 0.2\zeta_3 + 0.1\zeta_4 + 1.77\zeta_5 + 0.35\zeta_6 \\ & \quad + 0.9\zeta_7 + 0.25\zeta_8 + 3.15\zeta_9 - 10\zeta_{10}) \leq -56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & -0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 \\ & \quad + 0.07|\zeta_1| + 0.7|\zeta_2| + 0.2|\zeta_3| + 0.1|\zeta_4| + 1.77|\zeta_5| + 0.35|\zeta_6| \\ & \quad + 0.9|\zeta_7| + 0.25|\zeta_8| + 3.15|\zeta_9| + 10|\zeta_{10}| \leq -56 \end{aligned}$$

Ein lineares Äquivalent lässt sich daraufhin mit Hilfe des Lifting-Ansatzes aufstellen:

$$\begin{aligned} &- 0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 \\ &\quad + w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24} + w_{25} + w_{26} + w_{27} + w_{28} + w_{29} + w_{210} \end{aligned} \leq -56$$

$$\begin{aligned} -w_{21} \leq 0.07x_1 \leq w_{21} \\ -w_{22} \leq 0.7x_2 \leq w_{22} \\ -w_{23} \leq 0.2x_3 \leq w_{23} \\ -w_{24} \leq 0.1x_4 \leq w_{24} \\ -w_{25} \leq 1.77x_5 \leq w_{25} \\ -w_{26} \leq 0.35x_6 \leq w_{26} \\ -w_{27} \leq 0.9x_7 \leq w_{27} \\ -w_{28} \leq 0.25x_8 \leq w_{28} \\ -w_{29} \leq 3.15x_9 \leq w_{29} \\ -w_{210} \leq 10 \leq w_{210} \end{aligned}$$

Die restlichen Schritte zur Herleitung des linearen Äquivalents wurden analog durchgeführt. Man findet das gesamte lineare Programm unter dem Abschnitt LP-Äquivalent bei Intervall-Unsicherheit.

Lösung des linearen Programms

Nach der Herleitung des linearen Äquivalents kann das lineare Programm gelöst werden. Hierzu wurde der Code entsprechend in Aufgabe3a.gms umgesetzt. Jedoch muss erwähnt werden, dass es uns nicht möglich war, erfolgreich das lineare Programm in GAMS umzusetzen. Dies merkten wir daran, dass der optimale Wert entgegen unserer Intuition bei 13.610 € lag. Aus diesem Grund haben wir uns dazu entschieden, das entsprechende Problem zusätzlich mit dem naiven Ansatz zu lösen, auf welchem die nachfolgenden Erkenntnisse basieren. Daraus lässt sich entnehmen, dass die optimale Lösung in folgendem Punkt liegt:

$$x^* = \begin{pmatrix} \text{Apfel} \\ \text{Cornflakes} \\ \text{Karotten} \\ \text{Kartoffeln} \\ \text{Käse} \\ \text{Milch} \\ \text{Schokolade} \\ \text{Spinat} \\ \text{Steak} \end{pmatrix}^T = \big(0, 3, 4, 4.7749, 0, 1.0713, 1.9635, 0, 1\big)$$

Der optimale Zielfunktionswert beträgt 7.914778 €.

Zusammensetzung der Variablen und Restriktionen

Die Variablen und Restriktionen des linearen Programms besteht aus 9 Entscheidungsvariablen x_i, 51 Unsicherheitsvariablen in den Nebenbedingungen w_{ai} und 9 Unsicherheitsvariablen in der Zielfunktion w_{0i}. Zu den vorher bestehenden Restriktionen kommen je Unsicherheitsvariable eine Restriktion hinzu, die die Unsicherheiten beschreiben, d.h. es kommen auf die bestehenden 14 Restriktionen 60 hinzu. Demnach besteht das lineare Programm aus 69 Variablen und 74 Restriktionen.

Aufgabenteil b - Ellips-Unsicherheit

Herleitung eines LP-Äquivalents

Um das lineare Äquivalent für Ellips-Unsicherheit abzuleiten, können wir ähnliche Vorüberlegungen wie bei Intervall-Unsicherheit anwenden. Allerdings wird die Unsicherheitsmenge $\mathcal{U}$ unter Verwendung der euklidischen Norm anstelle der Supremumsnorm beschrieben. In diesem Fall lautet sie dann wie folgt:

$$\mathcal{U} = \left\{ D^0 + \sum_{\ell=1}^{10} D^\ell \zeta_\ell \mid \|\zeta\|_2 \leq 1 \right\}$$

Wir betrachten dieselbe Nebenbedingung wie im Fall der Intervall-Unsicherheit und erhalten das folgende robuste Pendant:

$$\begin{aligned}
&-0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 \\
&+ \max_{\|\zeta\|_2 \leq 1} (0.07\zeta_1 + 0.7\zeta_2 + 0.2\zeta_3 + 0.1\zeta_4 + 1.77\zeta_5 + 0.35\zeta_6 \\
&\quad + 0.9\zeta_7 + 0.25\zeta_8 + 3.15\zeta_9 - 10\zeta_{10}) \leq -56
\end{aligned}$$

Da wir es mit der euklidischen Norm zu tun haben, kann die Nebenbedingung wie folgt umformuliert werden:

$$\begin{aligned}
&-0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 \\
&\quad + \sqrt{\begin{matrix} 0.0049x_1^2 + 0.49x_2 + 0.04x_3^2 + 0.01x_4^2 + 3.1329x_5^2 \\ +0.1225x_6^2 + 0.81x_7^2 + 0.0625x_8^2 + 9.9225x_9^2 + 100 \end{matrix}} \leq -56
\end{aligned}$$

Die restlichen Schritte zur Herleitung des linearen Äquivalents wurden analog durchgeführt. Man findet das gesamte lineare Programm unter dem Abschnitt LP-Äquivalent bei Ellips-Unsicherheit.

Lösung des Programms

Nach der Herleitung des Äquivalents kann das Programm gelöst werden. Hierzu wurde der Code entsprechend in Aufgabe3b.gms umgesetzt. Da es sich um ein nichtlineares Problem handelt, wird es mit einem entsprechenden Solver gelöst. Aus der Durchführung lässt sich entnehmen, dass die optimale

Lösung in folgendem Punkt liegt:

$$x^* = \begin{pmatrix} \text{Apfel} \\ \text{Cornflakes} \\ \text{Karotten} \\ \text{Kartoffeln} \\ \text{Käse} \\ \text{Milch} \\ \text{Schokolade} \\ \text{Spinat} \\ \text{Steak} \end{pmatrix}^T = \big(2.484, 3, 5, 5, 0, 0.371, 1.728, 0, 1\big)$$

Der optimale Zielfunktionswert beträgt 7.6895 €.

Aufgabenteil c - Vergleich der Ergebnisse

Wie aus den vorherigen Teilaufgaben ersichtlich, unterscheiden sich die Ergebnisse der verschiedenen Unsicherheitsmodelle:

- Nominalfall ohne Unsicherheiten: 5.1692 €
- Intervall-Unsicherheit: 7.9148 €
- Ellips-Unsicherheit: 7.6895 €

Auf den ersten Blick erkennt man, dass die Berücksichtigung von Unsicherheiten die Zielwerte erhöht, da robuste Optimierungen mehr Sicherheit bieten, jedoch auf Kosten der Effizienz.

1b) und 3a): Hier besteht ein deutlicher Unterschied, der zeigt, wie stark die Annahme von Intervall-Unsicherheiten den Zielwert beeinflusst. Der Wert steigt um ca. 53%, da die Worst-Case-Kombinationen der Parameter einbezogen werden.

1b) und 3b): Auch hier steigt der Zielwert deutlich, jedoch moderater als bei der Intervall-Unsicherheit, um ca. 49%.

3a) und 3b): Der Unterschied zwischen Intervall- und Ellips-Unsicherheit beträgt ca. 2.85%. Man erkennt, dass die Ellips-Unsicherheit effizienter ist, da sie realistischere Abhängigkeiten und Verteilungen der Unsicherheiten berücksichtigt.

Die Unterschiede in den Ergebnissen zeigen, dass die Wahl des Unsicherheitsmodells einen großen Einfluss auf die Zielfunktion hat. Interpretieren lässt sich dies folgendermaßen:

Keine Unsicherheit: Die Lösung ohne Unsicherheiten ist die günstigste, jedoch nicht robust. Sobald Unsicherheiten auftreten, kann die Lösung unbrauchbar werden.

Intervall-Unsicherheit: Die Lösung mit Intervall-Unsicherheiten ist sehr konservativ. Sie berücksichtigt Worst-Case-Szenarien, bei denen alle Unsicherheiten ihre Extremwerte annehmen können. Dadurch steigt der Zielwert stark an, was hohe Sicherheit, aber auch Ineffizienz bedeutet.

Ellips-Unsicherheit: Diese Lösung bietet ebenfalls Robustheit, ist jedoch weniger konservativ als die Lösung mit Intervall-Unsicherheiten. Die Berücksichtigung von Abhängigkeiten zwischen Unsicherheiten führt zu einem niedrigeren Zielwert, was im Kontext der Minimierung besser ist.

Abschließend lässt sich sagen, dass das Einbeziehen von Unsicherheiten die Zielwerte erheblich erhöht, wobei die Berücksichtigung von Intervall Unsicherheiten die konservativste, aber auch teuerste Lösung bietet. Der Unterschied zwischen den robusten Lösungen zeigt, dass die Wahl der Unsicherheitsmenge einen Einfluss auf den Zielwert hat. Dieser Unterschied ist jedoch nicht extrem und eher von Relevanz, wenn Effizienz eine besonders wichtige Rolle spielt.

Aufgabenteil d - Erhöhung der benötigten Kalorien

Nach Einführung der Intervall- und Ellips-Unsicherheiten lässt sich der erhöhte Kalorienbedarf nicht mehr decken. Das liegt daran, dass durch die erhöhte Kalorienzufuhr die maximale Fett-Restriktion verletzt wird, da sie eine obere Schranke darstellt. Grund dafür ist, dass das robuste Pendant Worst-Case-Szenarien abbildet. In einem Szenario ohne Unsicherheiten könnte der erhöhte Kalorienbedarf gedeckt werden. Dies lässt sich durch Anpassen der Restriktionen in den bisherigen GAMS-Dateien überprüfen.

LP-Äquivalent bei Intervall-Unsicherheit

$$
\begin{array}{ll}
\min & 0.22x_1 + 0.18x_2 + 0.07x_3 + 0.14x_4 + 0.55x_5 + 0.16x_6 + 0.54x_7 + 0.28x_8 + 3.2x_9 + w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04} + w_{05} + w_{06} + w_{07} + w_{08} + w_{09} \\
\text{s.t.} & -w_{01} \leq 0.06x_1 \leq w_{01} \\
& -w_{02} \leq 0.027x_2 \leq w_{02} \\
& -w_{03} \leq 0.014x_3 \leq w_{03} \\
& -w_{04} \leq 0.04x_4 \leq w_{04} \\
& -w_{05} \leq 0.1x_5 \leq w_{05} \\
& -w_{06} \leq 0.04x_6 \leq w_{06} \\
& -w_{07} \leq 0.216x_7 \leq w_{07} \\
& -w_{08} \leq 0.1x_8 \leq w_{08} \\
& -w_{09} \leq 1.28x_9 \leq w_{09} \\
& -52x_1 - 355x_2 - 26x_3 - 71x_4 - 354x_5 - 64x_6 - 536x_7 - 17x_8 - 121x_9 \leq -2400 - w_{110} \\
& -w_{110} \leq 350 \leq w_{110} \\
& -0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 + w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24} + w_{25} + w_{26} + w_{27} + w_{28} + w_{29} \leq -56 - w_{210} \\
& -w_{21} \leq 0.07x_1 \leq w_{21} \\
& -w_{22} \leq 0.7x_2 \leq w_{22} \\
& -w_{23} \leq 0.2x_3 \leq w_{23} \\
& -w_{24} \leq 0.1x_4 \leq w_{24} \\
& -w_{25} \leq 1.77x_5 \leq w_{25} \\
& -w_{26} \leq 0.35x_6 \leq w_{26} \\
& -w_{27} \leq 0.9x_7 \leq w_{27} \\
& -w_{28} \leq 0.25x_8 \leq w_{28} \\
& -w_{29} \leq 3.15x_9 \leq w_{29} \\
& -w_{210} \leq 10 \leq w_{210} \\
& -18x_1 - 307x_2 - 7x_3 - 24.5x_4 + 177x_5 + 12x_6 + 52x_7 + 6.5x_8 + 60.5x_9 \leq 0 \\
& -0.4x_1 - 0.6x_2 - 0.2x_3 - 0.11x_4 - 28.3x_5 - 3.5x_6 - 31.5x_7 - 0.3x_8 - 4x_9 + w_{41} + w_{42} + w_{43} + w_{44} + w_{45} + w_{46} + w_{47} + w_{48} + w_{49} \leq -50 - w_{410} \\
& -w_{41} \leq 0.8x_1 \leq w_{41} \\
& -w_{42} \leq 0.12x_2 \leq w_{42} \\
& -w_{43} \leq 0.04x_3 \leq w_{43} \\
& -w_{44} \leq 0.0022x_4 \leq w_{44} \\
& -w_{45} \leq 0.035x_5 \leq w_{45} \\
& -w_{46} \leq 0.35x_6 \leq w_{46} \\
& -w_{47} \leq 3.15x_7 \leq w_{47} \\
& -w_{48} \leq 0.045x_8 \leq w_{48} \\
& -w_{49} \leq 1.2x_9 \leq w_{49} \\
& -w_{410} \leq 10 \leq w_{410} \\
& 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 + 0.11x_4 + 28.3x_5 + 3.5x_6 + 31.5x_7 + 0.3x_8 + 4x_9 + w_{51} + w_{52} + w_{53} + w_{54} + w_{55} + w_{56} + w_{57} + w_{58} + w_{59} \leq 70 \\
& -w_{51} \leq 0.8x_1 \leq w_{51} \\
& -w_{52} \leq 0.12x_2 \leq w_{52} \\
& -w_{53} \leq 0.04x_3 \leq w_{53} \\
& -w_{54} \leq 0.0022x_4 \leq w_{54} \\
& -w_{55} \leq 0.035x_5 \leq w_{55} \\
& -w_{56} \leq 0.35x_6 \leq w_{56} \\
& -w_{57} \leq 3.15x_7 \leq w_{57} \\
& -w_{58} \leq 0.045x_8 \leq w_{58} \\
& -w_{59} \leq 1.2x_9 \leq w_{59} \\
& -7x_1 - 13x_2 - 41x_3 - 6x_4 - 800x_5 - 120x_6 - 214x_7 - 126x_8 - 3x_9 + w_{61} + w_{62} + w_{63} + w_{64} + w_{65} + w_{66} + w_{67} + w_{68} + w_{69} \leq -500 - w_{610} \\
& -w_{61} \leq 1.4x_1 \leq w_{61} \\
& -w_{62} \leq 6.5x_2 \leq w_{62} \\
& -w_{63} \leq 8.2x_5 \leq w_{63} \\
& -w_{64} \leq 0.12x_4 \leq w_{64} \\
& -w_{65} \leq 80x_5 \leq w_{65} \\
& -w_{66} \leq 24x_6 \leq w_{66} \\
& -w_{67} \leq 21.4x_7 \leq w_{67} \\
& -w_{68} \leq 12.6x_8 \leq w_{68} \\
& -w_{69} \leq 0.6x_9 \leq w_{69} \\
& -w_{610} \leq 200 \leq w_{610} \\
& -30x_1 - 60x_2 - 53x_3 - 47x_4 - 300x_5 - 170x_6 - 370x_7 - 230x_8 - 130x_9 + w_{71} + w_{72} + w_{73} + w_{74} + w_{75} + w_{76} + w_{77} + w_{78} + w_{79} \leq -1100 - w_{710} \\
& -w_{71} \leq 4.5x_1 \leq w_{71} \\
& -w_{72} \leq 12x_2 \leq w_{72} \\
& -w_{73} \leq 10.6x_5 \leq w_{73} \\
& -w_{74} \leq 0.47x_4 \leq w_{74} \\
& -w_{75} \leq 15x_5 \leq w_{75} \\
& -w_{76} \leq 8.5x_6 \leq w_{76} \\
& -w_{77} \leq 37x_7 \leq w_{77} \\
& -w_{78} \leq 46x_8 \leq w_{78} \\
& -w_{79} \leq 19.5x_9 \leq w_{79} \\
& -w_{710} \leq 300 \leq w_{710} \\
& -x_1 - x_3 - x_8 \leq -4 \\
& x_1, \ldots, x_9 \leq 5 \\
& -x_1, \ldots, -x_9 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_6 \leq 2 \\
& x_7 \leq 3 \\
& -x_9 \leq -1
\end{array}
$$

LP-Äquivalent bei Ellips-Unsicherheit

$$
\begin{array}{ll}
\min & 0.22x_1 + 0.18x_2 + 0.07x_3 + 0.14x_4 + 0.55x_5 + 0.16x_6 + 0.54x_7 + 0.28x_8 + 3.2x_9 \\
& \quad + \sqrt{0.0036x_1^2 + 0.000729x_2^2 + 0.000196x_3^2 + 0.0016x_4^2 + 0.01x_5^2 + 0.0016x_6^2 + 0.046656x_7^2 + 0.01x_8^2 + 1.6384x_9^2} \\
\text{s.t.} & -52x_1 - 355x_2 - 26x_3 - 71x_4 - 354x_5 - 64x_6 - 536x_7 - 17x_8 - 121x_9 + \sqrt{122500} \leq -2400 \\
& -0.35x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 - 3.5x_6 - 9x_7 - 2.5x_8 - 21x_9 \\
& \quad + \sqrt{0.0049x_1^2 + 0.49x_2^2 + 0.04x_3^2 + 0.01x_4^2 + 3.1329x_5^2 + 0.1225x_6^2 + 0.81x_7^2 + 0.0625x_8^2 + 9.9225x_9^2 + 100} \leq -56 \\
& -18x_1 - 307x_2 - 7x_3 - 24.5x_4 + 177x_5 + 12x_6 + 52x_7 + 6.5x_8 + 60.5x_9 \leq 0 \\
& -0.4x_1 - 0.6x_2 - 0.2x_3 - 0.11x_4 - 28.3x_5 - 3.5x_6 - 31.5x_7 - 0.3x_8 - 4x_9 \\
& \quad + \sqrt{0.64x_1^2 + 0.0144x_2^2 + 0.0016x_3^2 + 0.00000484x_4^2 + 0.001225x_5^2 + 0.1225x_6^2 + 9.9225x_7^2 + 0.002025x_8^2 + 1.44x_9^2 + 100} \leq -50 \\
& 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 + 0.11x_4 + 28.3x_5 + 3.5x_6 + 31.5x_7 + 0.3x_8 + 4x_9 \\
& \quad + \sqrt{0.64x_1^2 + 0.0144x_2^2 + 0.0016x_3^2 + 0.00000484x_4^2 + 0.001225x_5^2 + 0.1225x_6^2 + 9.9225x_7^2 + 0.002025x_8^2 + 1.44x_9^2} \leq 70 \\
& -7x_1 - 13x_2 - 41x_3 - 6x_4 - 800x_5 - 120x_6 - 214x_7 - 126x_8 - 3x_9 \\
& \quad + \sqrt{1.96x_1^2 + 42.25x_2^2 + 67.24x_3^2 + 0.0144x_4^2 + 6400x_5^2 + 576x_6^2 + 457.96x_7^2 + 158.76x_8^2 + 0.36x_9^2 + 40000} \leq -500 \\
& -30x_1 - 60x_2 - 53x_3 - 47x_4 - 300x_5 - 170x_6 - 370x_7 - 230x_8 - 130x_9 \\
& \quad + \sqrt{20.25x_1^2 + 144x_2^2 + 112.36x_5^2 + 0.2209x_4^2 + 225x_5^2 + 72.25x_6^2 + 1369x_7^2 + 2116x_8^2 + 380.25x_9^2 + 90000} \leq -1100 \\
& -x_1 - x_3 - x_8 \leq -4 \\
& x_1, \ldots, x_9 \leq 5 \\
& -x_1, \ldots, -x_9 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_6 \leq 2 \\
& x_7 \leq 3 \\
& -x_9 \leq -1
\end{array}
$$