

1. Contextualisation

Les applications de géolocalisation et de calcul d'itinéraires sont omniprésentes dans notre quotidien. Elles permettent de rechercher l'itinéraire le plus rapide ou le plus court mais aussi le moins cher ou le plus écologique. Comment calculer le « *meilleur* » itinéraire ?

2. Modélisation d'un réseau routier

Un réseau de villes et les routes qui les relient peuvent être représentés par un **graphe** :

- les villes représentent les **sommets** du graphe,
- la distance de trajet (exprimée en Km) est alors indiquée sur l'**arête** (lien) entre deux villes,
- 2 villes sont dites **voisines** s'il existe une **arête** entre ces 2 villes.

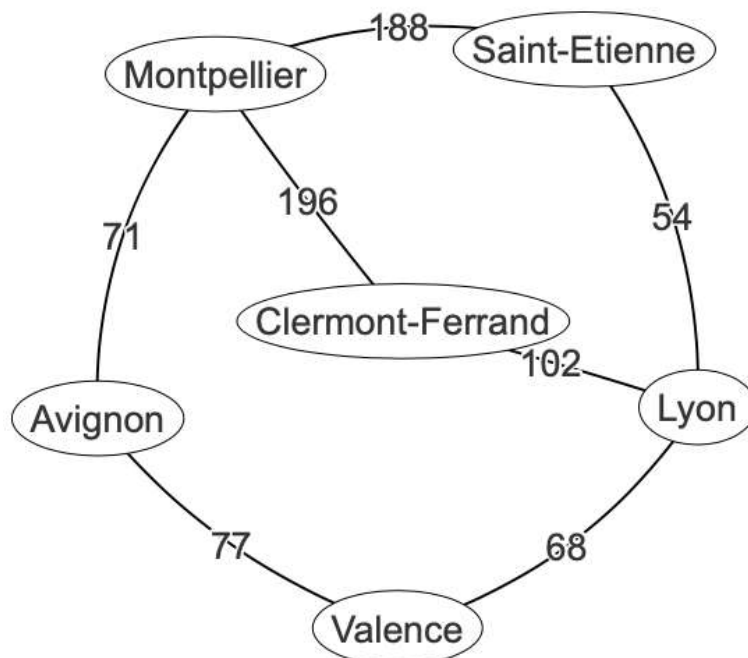


Figure 1. Exemple de graphe

Trouver un itinéraire pour aller d'une ville à une autre revient à :

À Faire 1 : Répondre aux questions suivantes :

A) Quelle est la distance du chemin de Montpellier à Lyon via Clermont-Ferrand ?

B) En passant par Saint-Étienne ?

C) En passant par Avignon et Valence ?

D) Quel est le chemin le plus court ?

3. Algorithme pour déterminer le chemin le plus court

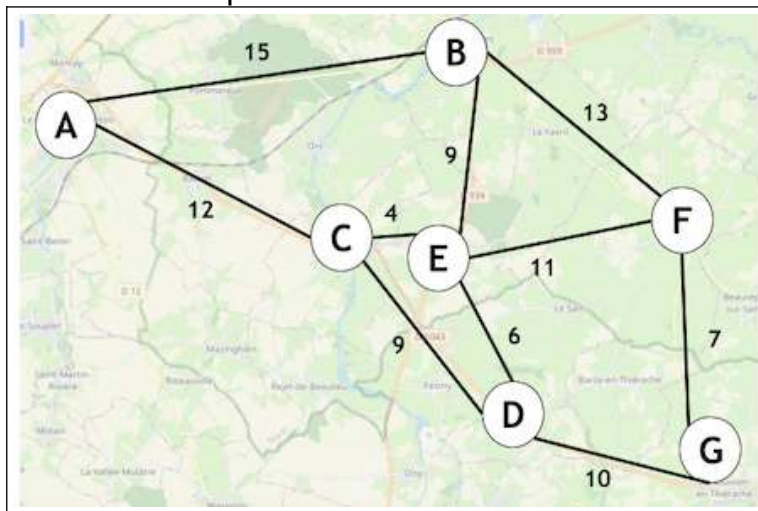
L'algorithme utilisé dans les applications de calculs d'itinéraires (telles que Waze, Google Maps, OpenStreetMap...) a été mis au point par le mathématicien **Edsger Dijkstra** en 1959 (alors que les GPS n'existaient pas) et est toujours utilisé de nos jours dans nos téléphones.

L'algorithme se décompose en 2 étapes :

- Construire un tableau des coûts,
- Lire le tableau des coûts pour construire le chemin le plus court.

Étape 1 : Construction du tableau des coûts

Prenons l'exemple d'un itinéraire entre le Câteau-Cambrésis (A) et Le Nouvion en Thiérache (G).



Le graphe ci-contre modélise une partie du réseau routier de la région du Thiérache (Région qui s'étend sur les départements du Nord, de l'Aisne et des Ardennes) :

- Les **sommets** représentent ,
- Les **arêtes** indiquent
- Les **poïds** des arêtes correspondent aux entre 2 villes.

✍ **À Faire 2** : Construisons le **tableau des coûts** selon l'algorithme de Dijkstra.

- Le tableau contient n colonnes et n lignes où n représente
- L'en-tête du tableau est constituée des
- Les cases des lignes suivantes vont contenir une valeur de type {coût, prédécesseur} où le coût correspond à la distance minimale entre la ville de la colonne et la ville de départ et prédécesseur la ville précédant la ville de la colonne dans le chemin minimal.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Cours SNT	Thème : Localisation Comment calculer un itinéraire entre 2 positions ?	LO-C2
-----------	--	-------


Méthode de remplissage du tableau des coûts :

1. On initialise la ligne 1 avec $\{0, A\}$ pour la ville de départ A et $\{+\infty, A\}$ pour toutes les autres villes
À chaque étape :
2. On passe à la ligne suivante du tableau
3. On sélectionne la ville v de coût minimum
4. On considère v comme **visitée** (On raye les cases des lignes suivantes)
5. Pour toutes les villes w voisines **non visitées** de v , on met à jour la case avec $\{\text{coût de } vw + \text{coût de } v, v\}$ si $\text{coût de } vw + \text{coût de } v < \text{coût de } w\}$
6. On répète les étapes jusqu'à la **dernière ligne** du tableau

A la fin de la construction du tableau des coûts, n connaît pour chaque ville

Étape 2 : Détermination du chemin le plus court

Pour obtenir le chemin le plus court entre la ville de départ (A) et la ville d'arrivée (A), il faut utiliser le tableau des coûts en partant de la ville d'arrivée (G) et prendre les prédécesseurs successifs des villes jusqu'à la ville de départ (A).

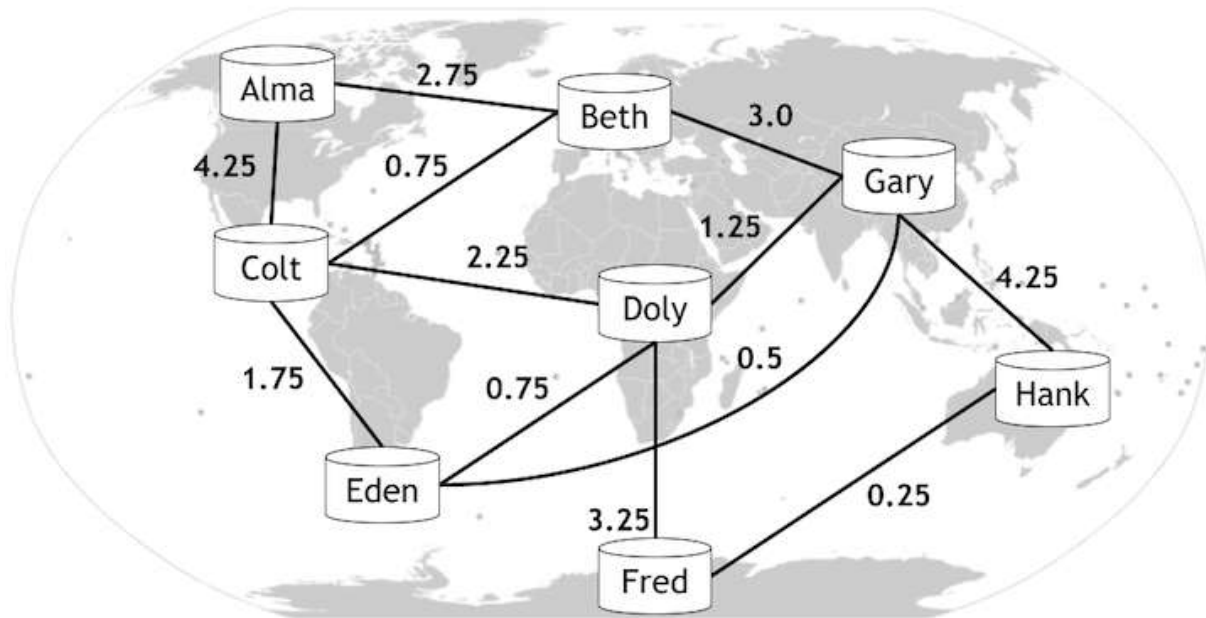
 **À Faire 3 :** Quel est le chemin le plus court entre A et G ? À quelle distance totale de trajet correspond-il ?

 **À Faire 4 :** Mêmes questions pour le chemin le plus court entre A et F.

Remarques sur l'algorithme de Dijkstra

4. Exercice d'application

Soit le graphe, ci-dessous, modélisant un réseau de **data center** (serveur stockant des données) connectés entre eux.



- Les **sommets** représentent les data center,
- Les **arêtes** représentent l'existence d'une connexion internet entre 2 data center,
- Les **poids** des arêtes représentent l'émission de CO₂ (en tonnes) d'une connexion internet entre 2 data center.

On cherche à calculer le chemin **le plus écologique** dans un échange de données entre les serveurs Alma et Hank.

✍ **À Faire 5** : En utilisant l'algorithme de Dijkstra :

1. Construire le tableau des coûts
2. Quel est le chemin le plus écologique entre les serveurs Alma et Hank et son coût total en émission de CO₂ ?