第四章

线性空间

在代数、分析及几何中通常会遇到一些对象, 需要对它们实施加法或乘法(数乘)运算, 如实数、复数、 几何中平面或空间中的向量、分析中给定的函数等等. 也许有人认为这些对象本质上是不同, 它们定义的加法和乘法或数乘运算相互之间除了名称相同之外没有共同之处. 但是若关注这些不同类型对象上定义的运算, 会发现这些运算本身具有很多相同的性质, 例如这些对象相加的结果与被加项的次序无关(交换律), 又如相加还满足结合律, 乘法(数乘)与加法还满足分配律等. 因此本章引入的线性空间将关注这些不同对象间运算时共同的东西, 而不拘泥于具体的对象, 若将这些具有不同性质的对象视作集合, 也就是集合中的对象间能够实施"加法"及'乘法('数乘)"运算, 又满足一些规律, 这个集合将被称作线性空间. 当然在具体对象的性质没有明确之前不能说明它们之间是如何进行运算的, 但可以先假定这些运算服从一定的算术规律, 再以适当的形式将这些规律叙述成公理的形式.

在给出线性空间的严格定义之前, 先简单介绍运算、代数系统、域等概念.

设 F 为给定的集合, F 上的二元运算(用符号 $\circ$ 表示该运算)定义为:

$$\circ : F \times F \to F$$

其中 $F \times F$ 为集合 F 的笛卡尔积, 这个定义可以推广到 n元运算. 若运算的结果还是 F 中的元素, 则称运算是封闭的. 关于运算定义了下列性质:

1. 可结合: $\forall x, y, z \in F$ 有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

2. 可交换: $\forall x, y \in F$ 有 $x \circ y = y \circ x$.

以及跟运算相关的特殊元素:

1. 单位元(identities): $\exists e \in F$, 使得 $\forall x \in F$ 都有 $e \circ x = x \circ e = x$, 则称 e 为运算 $\circ$ 的单位元.

2. 逆元(inverse): $x \in F$ 若存在元素 $y \in F$ 使得 $x \circ y = y \circ x = e$, 则称 y 为 x 关于运算$\circ$ 的逆元.

代数系统是指由集合 F 及其上定义的一些运算构成的系统, 表示为 $\langle F, \text{运算}1, \text{运算}2, \ldots, \text{运算}k \rangle$.

域是一种代数系统, 指在集合 F 上定义了" 加法"和" 乘法"的二元运算(分别用符号"+" 和"×" 表示), 这两个运算在 F 上封闭, 且它们还满足下述规则:

1. 运算“$+$” 可结合.
2. 运算“$+$” 可交换.
3. F 中存在加法单位元 “0”.
4. $\forall x \in F$ 存在加法逆元 $y \in F$ 使得 $x+y=0$, 通常将 y 记成 $-x$, 称加法逆元为负元.
5. 运算“$\times$” 可结合.
6. 运算“$\times$” 可交换.
7. F 中存在乘法单位元 “1”.
8. F 中任意非“0”元素x, 存在乘法逆元, 常记成 x^{-1}.
9. 运算 $\times$ 对 $+$ 成立分配律, 即: $\forall x, y, z \in F$ 有 $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

则代数系统$\langle F, +, \times\rangle$称为域. 在不产生混淆的前提下, 为了方便, 两个元素相乘 $a \times b$ 时, 就直接写成 ab.

例 1. *考虑整数集 $\mathbb{Z}$上的加法和乘法, 因除了1之外其它非零整数不存在乘法逆元, 因此 $\langle \mathbb{Z}, +, \times\rangle$ 不是域.*

不难验证有理数集$\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$、复数集 $\mathbb{C}$ 上定义的加法和乘法构成的都是域. 这也是为什么有理数集、实数集或复数集常被称作有理数域、实数域或复数域, 而没有人会称整数域或自然数域.

例 2. *集合 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$上定义模2加法“$\oplus_2$”和乘法“$\otimes_2$”, 即 $\forall x, y \in \mathbb{F}_2$*

$$\begin{array}{rcl} x \oplus_2 y & = & x + y \ \ mod\, 2 \\ x \otimes_2 y & = & xy \ \ mod\, 2 \end{array}$$

易证代数系统 $\langle \mathbb{F}_2, \oplus_2, \otimes_2\rangle$ 是域, 通常被称作二进制域.

当构成域的集合是有限集时, 也称为有限域.

4.1 线性空间的概念

4.1.1 线性空间的定义

定义 4.1. *集合 V 是由定义在数域 F 上的对象构成的非空集合, 称这些对象为元素, 关于这些元素及数域定义了“加法”和“ 数乘”运算, 若运算若满足下列公理*

I. 封闭性公理

(1) 加法运算封闭, 即 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 则 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$.

(2) 数乘运算封闭, 即 $\lambda \in F, \forall \mathbf{x} \in V$ 则 $\lambda \mathbf{x} \in V$.

II. 关于加法的公理

(3) 加法可交换, 即 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 有 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

(4) 加法可结合, 即 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ 有 $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

(5) V 中存在零元$\mathbf{0}$(加法单位元), 使得 $\forall x \in V$ 有 $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

(6) V 中任意元素 $\mathbf{x}$ 都存在负元$-\mathbf{x}$(加法逆元) 使得 $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

III. 关于数乘的公理

(7) 数乘运算可结合, 即 $\forall\mathbf{x}\in V$ 以及数域中的任意数$k,l\in F$ 成立:

$$k\,(l\mathbf{x})=(kl)\,\mathbf{x}$$

(8) 存在数乘的单位元"1", $\forall\mathbf{x}\in V$, 有

$$1\mathbf{x}=\mathbf{x}$$

(9) 数乘对 V 中加法成立分配律, 即 $\forall k\in F$及$\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, 有

$$k\,(\mathbf{x}+\mathbf{y})=k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$$

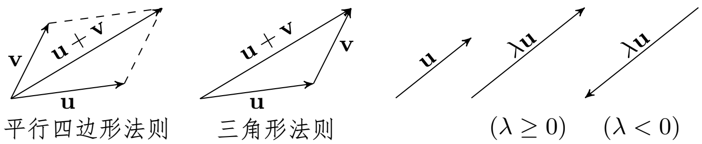
(10) 数乘对数域 F 中的加法成立分配律, 即 $\forall k,l\in F$及 $\forall\mathbf{x}\in F$ 有

$$(k+l)\,\mathbf{x}=k\mathbf{x}+l\mathbf{x}$$

就称 V 为数域 F 上的**线性空间**.

线性空间定义中的加法是 $V\times V\to V$的映射, 数乘是 $F\times V\to V$的映射, 与数域 F上的加法、乘法运算之间有本质区别, 虽然在符号使用上为了方便没有区别, 但要清楚它们之间是不同的.

例 3. 考虑平面上所有过原点的向量, 它有长度和方向特征, 采用平行四边形法则(或三角形法则)定义向量之间的加法, 而数乘为实数λ与向量相乘, 数乘结果是向量, 它的方向与数乘前向量的方向一致($\lambda\geq 0$)或则反向($\lambda<0$), 它的长度是数乘前向量长度的$|\lambda|$倍. 若所有这些向量构成的集合表示成 V, 则 V 是定义在实数域上(向量长度、方向用实数表示), 可以验证向量加法和数乘运算满足线性空间空间定义中的所有条件, 所以它构成线性空间. 在解析几何中讨论这些向量时, 常将平面向量表示



(a) 加法 (b) 数乘

图 4.1: 几何向量的加法、数乘运算

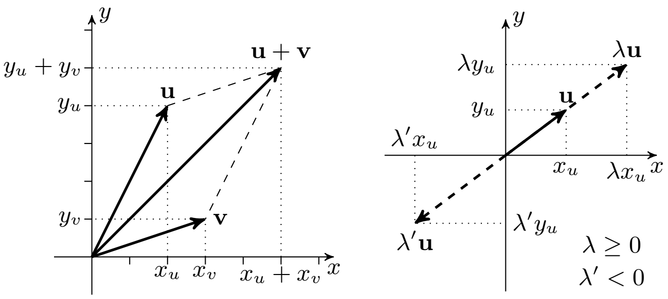
成: $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, 它的长度为 $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, 方向表示成向量与x轴的夹角, 即向量的集合(记为 $\mathbb{R}^2$)为:

$$\mathbb{R}^2=\left\{\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

定义向量加法和数乘运算:

$$\text{加法:}\quad \begin{bmatrix} x_u\\ y_u\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_v\\ y_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_u+x_v\\ y_u+y_v\end{bmatrix}$$

$$\text{数乘:}\quad \lambda\begin{bmatrix} x_u\\ y_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda x_u\\ \lambda y_u\end{bmatrix}$$



(a) 加法　　　　(b) 数乘

图 4.2: 解析几何中向量的加法、数乘运算

易证 $\mathbb{R}^2$ 是线性空间, 若推广到n(非零自然数)阶向量, 即

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2, \ldots, n) \right\}$$

结论也成立. 因 $\mathbb{R}^n$ 常与几何向量联系在一起, 所以也称为 n 阶向量空间. 若 $\mathbb{R}^n$ 是定义在实数域 $\mathbb{R}$ 上, 也称实线性空间或实向量空间. 若定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 称 $\mathbb{C}^n$ 为复线性空间或复向量空间.

例 4. *设集合 V 由定义于数域F上的所有 $m \times n$阶矩阵构成, 按前述章节中给出的矩阵加法和数乘运算易证构成数域 F 上的线性空间, 通常也将 V 记成 $F^{m\times n}$, 若 $F = \mathbb{R}$, 称为$m \times n$阶实矩阵(线性)空间, 记为 $\mathbb{R}^{m\times n}$, 若 $F = \mathbb{C}$, 称为 $m \times n$ 阶复矩阵(线性)空间, 记为 $\mathbb{C}^{m\times n}$.*

例 5. *数域 F 上所有一元多项式(多项式系数是F中元素)全体构成的集合记为 $F[x]$, 按通常的多项式加法和多项式数乘运算, 构成数域F 上的线性空间. 若将数域F 上次数不超过n 次的一元多项式全体构成的集合记为$F[x]_n$, 在多项式加法和数乘下也构成线性空间.*

例 6. *设集合 $C[a, b]$ 是由区间 $[a, b]$上所有连续实函数构成, 按通常方法定义函数加法和数乘(实数与函数相乘)运算, 构成的也是线性空间.*

根据线性空间定义可知它具有下列性质:

1. V 中的零元“$\mathbf{0}$” 是唯一的.

   证 由公理(5)可知V中存在零元, 假设 $\mathbf{0}_1$ 和 $\mathbf{0}_2$ 是两个零元, 根据公理(5)

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}$$

2. $\forall \mathbf{x} \in V$ 其负元是唯一的.

   证 假设 $\mathbf{x}$ 存在两个负元 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$, 根据公理(6)有

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}) + \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}$$

3. 0 是数域F 中的零元, $\forall \mathbf{x} \in V$ 成立 $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$(其中等式右端的 0 是 V 中的零元).

证 根据公理(8)、(9) 有

$$0\mathbf{x}+\mathbf{x}=0\mathbf{x}+1\mathbf{x}=(0+1)\,\mathbf{x}=1\mathbf{x}=\mathbf{x}$$

在等式两端加上 $\mathbf{x}$ 的负元$-\mathbf{x}$, 有

$$\begin{aligned}
\text{等式左端:}\quad & 0\mathbf{x}+\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=0\mathbf{x}+\mathbf{0}=0\mathbf{x}\\
\text{等式右端:}\quad & \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}\\
\text{因此}\quad & 0\mathbf{x}=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

4. $\mathbf{0}$ 是V 的零元, $\forall\lambda\in F$ 有 $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

   证 根据公理(10)有

$$\mathbf{0}=\lambda\mathbf{0}$$

5. $\forall\mathbf{x}\in V$ 它的负元为 $(-1)\,\mathbf{x}$(其中 -1 为域 F 中 1的负元).

   证 由公理(8)、(9) 有

$$\mathbf{x}+(-1)\,\mathbf{x}=1\mathbf{x}+(-1)\,\mathbf{x}=(1+(-1))\,\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

   根据公理(6)知: $(-1)\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{x}$ 的负元.

6. $\forall\lambda\in F,\forall\mathbf{x}\in V$, 有 $(-\lambda)\,\mathbf{x}=\lambda\,(-\mathbf{x})=-\,(\lambda\mathbf{x})$.(利用性质5证明)

7. 若 $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 则 $\lambda=0$ 或 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.(利用性质3和4证明)

4.1.2 线性子空间

许多问题中, 一个“大”的线性空间的一部分, 关于该线性空间的加法和数乘还可形成线性空间, 例如: 几何空间中, 任意一个过原点的平面关于几何向量的加法和数乘运算也构成线性空间(满足线性空间公理). 显然, 该平面是几何空间的一部分, 且关于几何空间的运算构成线性空间. 为此, 引入子空间的概念.

定义 4.2. *给定数域F上的线性空间V, 设 S 是V 的一个非空子集, 同时S 关于 V 上的运算也构成线性空间, 则称S为V的一个**线性子空间**.*

为了说明线性空间V的一个子集S是否为线性空间, 不一定要按线性空间的十条公理一一验证, 仅需检查下列三条是否成立:

定理 4.1.1. *S是数域F上线性空间V的非空子集, 则当且仅当S满足封闭性公理(1)、(2)时, 它是V的子空间.*

证: 必要性显然, 下面证充分性:

S是V的子集, 因此公理(1)~(4) 和(7)~(10) 在S 上自然成立.

由S 非空,则 $\exists\mathbf{x}\in S$,根据封闭性公理 $\forall\lambda\in F$, $\lambda\mathbf{x}\in S$, 取 $\lambda=0$, 则 $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}\in S$, 因此, 公理(5)满足.

$\forall\mathbf{x}\in S$, 取 $\lambda=-1$, 由封闭性知 $(-1)\mathbf{x}\in S$, 且

$$\mathbf{x}+(-1)\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

根据性质(5)可知 $(-1)\mathbf{x}$是$\mathbf{x}$的负元, 因此公理(6)满足.

显而易见, 仅包含V的零向量的集合和V本身都是线性空间V的子空间, 称它们为**平凡子空间**.

例 7. *设*$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *将满足方程* $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ *的解构成的集合记为*$\mathfrak{N}(\mathbf{A})$, *即*

$$\mathfrak{N}(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{x}\middle|\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \wedge \mathbf{Ax}=\mathbf{0}\right\}$$

易证$\mathfrak{N}(\mathbf{A})$*满足定理4.1.1, 因此它是* $\mathbb{R}^n$ *的子空间, 称为矩阵*$\mathbf{A}$ *的**核**或**零空间**.*

例 8. *设*$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *集合*$\mathfrak{R}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}^m$*定义为*

$$\mathfrak{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y}|\mathbf{y}=\mathbf{Ax}\wedge \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\}$$

则$\mathfrak{R}(\mathbf{A})$*也满足定理4.1.1. 所以,它是* $\mathbb{R}^m$*的子空间, 称为矩阵*$\mathbf{A}$ *的**值域**. 另外, 对*$\mathfrak{R}(\mathbf{A})$*中的任意向量*$\mathbf{y}$*, 由定义可知它是矩阵*$\mathbf{A}$*的列向量的线性组合, 所以*$\mathfrak{R}(\mathbf{A})$*也称为*$\mathbf{A}$*的**列空间**, 记为*$\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

例 9. *例6中的线性空间*$C[a,b]$ *的子集*$E[a,b]$*定义为*

$$E[a,b] = \left\{f(x)\middle|f(x)\in C[a,b]\wedge f(-x)=f(x)\right\}$$

则$E[a,b]$ *满足定理4.1.1, 它是*$C[a,b]$*的子空间.*

例 10. *设* $f(x)=ae^x+be^{-x}$, *其中*$a,b\in\mathbf{R}$, *称*$f(x)$ *为函数* e^x *和* e^{-x}*的线性组合, 则*a,b*所有不同取值下的函数* $f(x)$, *构成集合*S, *则* S *满足封闭性性定理, 它是*$\mathbb{R}$*上的连续函数空间*C*的子空间.*

例 11. *设* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ *是数域*F*上的线性空间* V *的一组向量, 定义集合*

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k) = \left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha_i\middle|\lambda_i\in F\,(i=1,2,\ldots,k)\right\}$$

可验证$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$*满足定理4.1.1的封闭性公理, 它是*$V$*的子空间, 常称它为由*$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$***生成(或张成)的子空间**, *记成:*$\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$, *其中*$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ *为**生成元**.*

例 12. *如线性空间*$\mathbb{R}^3$ *的两组不同向量*$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ *和* $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$, *生成两个子空间:* $L_1(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ *及* $L_2(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$, *其中*$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}-0.5\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ *和* $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}-1.5\\2\\1\end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$. *生成的子空间*$L_1(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ *表示的平面满足下列方程*

$$2x_1+x_2+x_3=0$$

易证向量$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ *的端点恰好是该平面上的三个不共线的点, 因此生成子空间*L_2*与*L_1 *表示的是同一个子空间(平面).*

例12说明, 两组不同的向量可能生成相同的子空间. 那么, 当给出多个线性空间或线性子空间时, 如何描述线性空间及它们之间的关系? 因此将引入刻画线性空间特征的基、维数等概念.

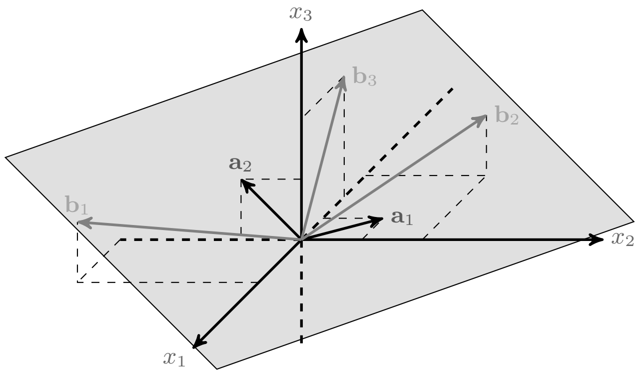


图 4.3: 例12

4.2 线性空间的基、维数和坐标

4.2.1 基与维数

定义 4.3. *线性空间V中的一组线性无关的向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, 若$V$中的任意向量都可表示成它们的线性组合, 则称这组向量为线性空间V的**基**.*

线性空间的基不唯一, 但组成基的向量个数是唯一的.

定义 4.4. *线性空间V的一个基中含有的向量个数称为线性空间V的维数, 记为$\dim V$.*

例 13. *在$\mathbb{R}^n$空间中, 向量组*

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性无关, 并且$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

*其中 $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 为向量 $\mathbf{x}$的分量. 它构成线性空间$\mathbb{R}^n$ 的一组基, 通常称为**自然基**或**常用基**, 空间$\mathbb{R}^n$ 的维数为$\dim \mathbb{R}^n = n$.*

例 14. *$\mathbb{R}^{m\times n}$是所有$m \times n$阶实矩阵构成的线性空间, 考察一组$m \times n$阶矩阵:$\mathbf{e}_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$, 其中矩阵 $\mathbf{e}_{ij}$的第i行第j列元素为1,其它元素为0. 这组矩阵线性无关, 并且$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 均可表示为*

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_{ij}$$

显然, 这组矩阵构成$\mathbf{R}^{m\times n}$ 的一组基, 并且 $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = m \times n$.

例 15. *考虑矩阵$\mathbf{A}$的零空间$\mathfrak{N}(\mathbf{A})$和值域(列空间)$\mathfrak{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{Col}(\mathbf{A})$, 由线性方程组的解理论可知, 方程组$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系构成空间$\mathfrak{N}(\mathbf{A})$的一组基, 且$\dim\mathfrak{N}(\mathbf{A}) = n - \mathrm{rank}(\mathbf{A})$. 由空间 $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ 定义可知 $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, 其中$\mathbf{a}_i(i = 1, 2, \ldots, n)$为矩阵$\mathbf{A}$的列向量, 因此 $\mathbf{A}$的列向量中线性独立的向量构成$\mathfrak{R}(\mathbf{A})$的基, 且 $\dim\mathfrak{R}(\mathbf{A}) = \dim\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A})$.*

4.2.2 坐标系

对于线性空间V, 指定一组基的重要原因就是给V引入一个"坐标系", 如空间$\mathbb{R}^n$中的向量$\mathbf{x}$一般是在**自然基**$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$下的表述. 坐标系将使得 V 像$\mathbb{R}^n$一样便于操作.

定义 4.5. *设向量组$\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ 是线性空间V的一个基, 则 $\forall\mathbf{x} \in V$, 有*

$$\mathbf{x} = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n \tag{4.1}$$

则称 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为向量$\mathbf{x}$在基$\mathcal{B}$下的坐标, 表示成$[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$.

坐标系的存在依赖于下列唯一表示定理

定理 4.2.1. *(唯一表示定理) 设$\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ 是V的一个基, 则 $\forall\mathbf{x} \in V$ 可唯一表示成式(4.1).*

证: 假设$\forall\mathbf{x} \in V$ 在基$\mathcal{B}$下的表示不唯一, 即除了式(4.1)还存在另一种关于基$\mathcal{B}$的线性组合

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i'\varepsilon_i \tag{4.2}$$

等式(4.1)和(4.2)相减, 得

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')\,\varepsilon_i = \mathbf{0}$$

若 $\exists x_i \neq x_i'$, 说明存在不全为零的一组数使ε_i的线性组合为零, 这与$\mathcal{B}$ 是 V的一个基矛盾.
因此 $x_i = x_i'(i = 1, 2, \ldots, n)$, 即表示式(4.1)唯一.

例 16. *设 $\mathbf{x}$ 是$\mathbb{R}^2$ 中任一向量, $\mathbf{x}$ 在基$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ 下的坐标如图4.4所示.*

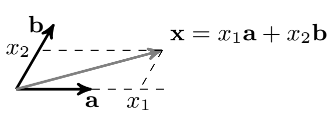


图 4.4: 例16

例 17. *设$\mathbb{R}^2$ 的一个基$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 向量$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, 求$\mathbf{x}$ 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2$下的坐标.*

解: 事实上, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$是在自然基下的坐标, 即$\mathbf{x}=1\cdot\mathbf{e}_1+6\cdot\mathbf{e}_2$. 设 $\mathbf{x}=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2$, 其中 x_1,x_2 为待求的$\mathbf{x}$ 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的坐标.

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$$

求得$x_1=-2,x_2=3$, 即 $\mathbf{x}=(-2)\varepsilon_1+3\varepsilon_2$.

例 18. *实数域上的3次多项式空间 $\mathbb{R}[x]_3$, 已知 $\mathcal{B}_1=\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\}$ 和 $\mathcal{B}_2=\{1-x,1+2x+3x^2,-1+x+x^2+x^3,5-2x^2+x^3\}$ 是两组基, 求$f(x)=x+5x^2-x^3$ 在$\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ 下的坐标.*

解: 设 $f(x)$ 在$\mathcal{B}_1$ 下的坐标为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 则有

$$\begin{bmatrix}1 & 1+x & 1+x+x^2 & 1+x+x^2+x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}^T=x+5x^2-x^3$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcr}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 &=& 0\\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 &=& 1\\ \alpha_3+\alpha_4 &=& 5\\ \alpha_4 &=& -1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcr}\alpha_1 &=& -1\\ \alpha_2 &=& -4\\ \alpha_3 &=& 6\\ \alpha_4 &=& -1\end{array}\right.$$

设 $f(x)$ 在$\mathcal{B}_2$ 下的坐标为 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$, 则有

$$\beta_1(1-x)+\beta_2(1+2x+3x^2)+\beta_3(-1+x+x^2+x^3)+\beta_4(5-2x^2+x^3)=x+5x^2-x^3$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}\beta_1 &+& \beta_2 &-& \beta_3 &+& 5\beta_4 &=& 0\\ -\beta_1 &+& 2\beta_2 &+& \beta_3 &&&=& 1\\ && 3\beta_2 &+& \beta_3 &-& 2\beta_4 &=& 5\\ &&&& \beta_3 &+& \beta_4 &=& -1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcr}\beta_1 &=& 11/8\\ \beta_2 &=& 11/8\\ \beta_3 &=& -3/8\\ \beta_4 &=& -5/8\end{array}\right.$$

例18说明(1) 线性空间的基不唯一; (2) 向量在不同的基下的坐标一般也不同;

4.3 线性空间同构

开始介绍同构之前先引入映射的概念.

4.3.1 映射

定义 4.6. *设 S,T 为两个集合, 若存在一个法则σ, 使得对集合S中每个元素α, 按法则σ, 都有T 中唯一确定的元素β与它对应, 则称σ为从集合S到集合T的**映射**, 记作 $\sigma: S\mapsto T$. 把 β 称为α在映射σ下的像, 常写成 $\beta=\sigma(\alpha)$, 而α也称为β在映射σ下的一个原象.*

通常将集合S称为映射σ的定义域, 而S在映射σ下的像的全体称为值域, 记为$\sigma(S)$, 它是T的一个子集, 即 $\sigma(S)\subseteq T$.

(1) 若 $\sigma(S)=T$, 则称映射σ为满射的.

(2) 对S中任意两个不同的元素α_1,α_2, 在映射σ下的像也不同, 即若 $\alpha_1\neq\alpha_2$, 则 $\sigma(\alpha_1)\neq\sigma(\alpha_2)$, 就称映射$\sigma$为单射的.

(2) 若映射σ既是满射又是单射, 就称σ为一一映射或双射.

例 19. *设$\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$, 其中 $\forall x \in \mathbb{N}, \sigma(x) = (-1)^x x$, σ是单射.*

例 20. *设$\tau : \mathbb{Z} \mapsto \{0, 1\}$, 其中 $\forall x \in \mathbb{Z}, \tau(x) = x \bmod 2$, 表示任意整数$x$除以2以后的余数, σ 是满射.*

例 21. *设$\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$, 其中$\mathbb{R}^+$表示正实数集, $\forall x \in \mathbb{R}, \sigma(x) = e^x$, 则$\sigma$ 是双射.*

设$\sigma : S \mapsto T$, $\tau : T \mapsto U$, 将$\sigma \circ \tau$ 称为映射的合成, 且 $\sigma \circ \tau : S \mapsto U$, 常写成$\tau(\sigma(\bullet))$. 如例19和例20的映射合成后为 $\mathbb{N}$到$\{0, 1\}$的映射, 即对任意自然数x, $\tau(\sigma(x)) = (-1)^x x \bmod 2$.

4.3.2 同构

定义 4.7. *给定数域F上的线性空间V 和W, 设 σ 是 $V \mapsto W$ 的映射, 若映射满足:*

(1) 任意$\alpha, \beta \in V$, 有 $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$.

(2) 任意数$c \in F$ 和任意$\alpha \in V$, 有$\sigma(c\alpha) = c\sigma(\alpha)$.

*称σ为**线性映射**. 当$V = W$时, 线性映射又称为**线性变换**.*

线性变换将在下一章讨论, 这里考虑下面特殊的线性映射.

定义 4.8. *V和W是数域F上的线性空间, 若从V到W的线性映射是一一映射(双射), 则称该线性映射为**同构映射**. 这时的线性空间V和W 称为**同构**(isomorphism), 记为$V \cong W$.*

定理 4.3.1. *设数域F上的线性空间$V \cong W$, 则同构映射将V的零向量映射到W的零向量.*

> **证**: 设 $\sigma : V \mapsto W$ 为同构映射, $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ 分别为线性空间V和W的零向量, 根据线性空间性质(3)有: $\mathbf{0}_V = 0\mathbf{x}$, 其中$0 \in F$, $\mathbf{x} \in V$, 因此 $\sigma(\mathbf{0}_V) = \sigma(0\mathbf{x}) = 0\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$.

例 22. *数域$\mathbb{R}$ 上的二次多项式空间*

$$\mathbb{R}[x]_2 = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \middle| a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2\right\}$$

与线性空间$\mathbb{R}^3$之间的对应关系如下:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

显然, 这是一一映射关系, 而且它是线性空间$\mathbb{R}[x]_2$与$\mathbb{R}^3$之间的同构映射, 且对任意$a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ 和$c \in \mathbb{R}$, 满足

$$\begin{array}{ccccccc} & a_0 & + & a_1 x & + & a_2 x^2 \\ + & b_0 & + & b_1 x & + & b_2 x^2 \\ \hline & (a_0 + b_0) & + & (a_1 + b_1)x & + & (a_2 + b_2)x^2 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cl} & c \cdot \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) \\ = & (ca_0) + (ca_1)x + (ca_2)x^2 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad c \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_0 \\ ca_1 \\ ca_2 \end{bmatrix}$$

因此 $\mathbb{R}[x]_2 \cong \mathbb{R}^3$.

定理 4.3.2. *数域F上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.*

证: 设U,V 均为数域 F上为n维线性空间, $\mathfrak{B}_U = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ 和 $\mathfrak{B}_V = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 分别为U和V的基. 则对$\forall \mathbf{x} \in U$, 可唯一表示成 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$, 定义$U$到$V$的映射$\sigma$, 它满足对 $\forall \mathbf{x} \in V$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i$$

可证明它是$U \mapsto V$的线性映射, 因为对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, 有

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i \in U$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \varepsilon_i$$

$$\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \beta_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_i = \sigma(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{y})$$

对任意$c \in F, \mathbf{x} \in U, c\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c x_i \varepsilon_i$, 则

$$\sigma(c\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c x_i \beta_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i = c\sigma(\mathbf{x})$$

由上面两式可见映射σ是U到V的线性映射.

现证明σ是一一映射: 设 $\mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \varepsilon_i, \mathbf{x}_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \varepsilon_i \in U$, 若

$$\sigma(\mathbf{x}_1) = \sigma(\mathbf{x}_2) = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \beta_i$$

因任何向量在基下的坐标唯一, 有 $x_{1i} = x_{2i} (i = 1, 2, \ldots, n)$, 因此 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, 由此$\sigma$是单射的.
对任意向量$\mathbf{y} \in V$, $\mathbf{y}$ 可唯一表示成$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_i$, 存在 $\sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i = \mathbf{x} \in U$ 与它对应, 即$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, 因此$\sigma$是满射的. 由此证明了$\sigma$是$U \mapsto V$ 的一一映射又是线性映射, 因而σ是U到V的同构映射, 即$U \cong V$.

反之, 若 $U \cong V$, 则存在$\tau : U \mapsto V$的线性一一映射, τ^{-1} 是V到U的一一线性映射. 且τ将线性空间的零向量$\mathbf{0}_U$映射到V的$\mathbf{0}_V$. (因$\mathbf{0}_U = 0\mathbf{x}$, 所以$\tau(\mathbf{0}_U) = \tau(0\mathbf{x}) = 0\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_V$), 同理 τ^{-1}将$\mathbf{0}_V$映射到$\mathbf{0}_U$.

假设$m = \dim U \neq \dim V = n$, 不妨设$m \geq n$. 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$是$U$的一个基, 在线性映射$\tau$下, 令

$$\mathbf{y}_i = \sigma(\varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

因τ是双射, 所以$\tau^{-1}(\mathbf{y}_i) = \varepsilon_i$. 现假设向量组$\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^n$ 线性相关, 则存在不全为零的一组数$c_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m} = \mathbf{0}_V$, 则

$$\tau^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{y}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varepsilon_i = \tau^{-1}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_U$$

若c_i不全为零与ε_i是U的一个基矛盾, 因此$\mathbf{y}_i$线性无关, 由此$\dim V$只能等于$m = \dim U$.

定理 4.3.3. *同构是线性空间空间之间的一种等价关系.*

证: (1). 线性空间V自身之间恒等映射是$V \mapsto V$的同构映射, 因此, 同构关系是自反的.

(2). 若线性空间$V \cong W$, 则存在$V \mapsto W$的一一映射σ, 则 $\sigma^{-}1$ 就是 $W \mapsto V$的同构映射, 因此, 同构关系是对称的.

(3). 若线性空间$U \cong V$, $V \cong W$, 则存在映射σ, τ分别是 $U \mapsto V$和$V \mapsto W$的同构映射, 则 $\tau \circ \sigma$ 是 $U \mapsto W$的同构映射, 因而同构关系是传递的.

如上所证, 同构关系有自反、对称、传递的性质, 所以它是线性空间之间的等价关系.

设$\mathfrak{B} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ 是线性空间V的一个基, $\mathbf{x}$ 是V 的任意向 量, 用$[\mathbf{x}]_{\mathfrak{B}}$表示$\mathbf{x}$在基$\mathfrak{B}$下的坐标, 用$[V]_{\mathfrak{B}}$ 表示V中所有向量在基$\mathfrak{B}$下的坐标构成的集合, 因为关于坐标的加法和数乘满足线性空间的定义, 因此$[V]_{\mathfrak{B}}$ 是线性空间.

定理 4.3.4. *设 $\mathfrak{B}$是线性空间V的基, $[V]_{\mathfrak{B}}$ 是V中所有向量在基$\mathfrak{B}$下的坐标构成的集合, 则 $V \cong [V]_{\mathfrak{B}}$.*

证明略

两个同构的空间虽然术语或记号可能不同, 但都作为线性空间往往可以不加区分, 每一个V中的计算可以等同的出现在$[V]_{\mathcal{B}}$中, 所以, 利用坐标亦可研究向量组的线性相关性.

例 23. *证明$\mathbb{R}[t]_2$中的多项式$1 + 2t^2, 4 + t + 5t^2, 3 + 2t$是线性相关的.*

证: 取基$\mathcal{B}=\{1,t,t^2\}$, 在$\mathcal{B}$下多项式的坐标分别为

$$\begin{bmatrix} 1+2t^2 & 4+t+5t^2 & 3+2t \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

只需证明$\begin{bmatrix} 1+2t^2 & 4+t+5t^2 & 3+2t \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$线性相关. 采用初等变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可解得:

$$5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

事实上

$$5(1+2t^2)-2(4+t+5t^2)+(3+2t)=0$$

定理 4.3.5. *设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 为线性空间V的一组向量, 取基$\mathcal{B}=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 线性相关的充要条件是矩阵$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ 的秩小于k, 即*

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\right)<k \tag{4.3}$$

证: 已知

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}=\mathfrak{B}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\text{线性相关}\\
\xLeftrightarrow[c_1,\ldots,c_k]{\text{不全为零}}\ &\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T=\mathbf{0}\\
\xLeftrightarrow[\mathfrak{B}\text{是基}]{(4.4)\text{代入}}\ &\mathfrak{B}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T=\mathbf{0}\\
\xLeftrightarrow[\text{两边同乘}\mathfrak{B}]{\mathfrak{B}\text{是基}}\ &\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T=\mathbf{0}\\
\xLeftrightarrow[c_1,\ldots,c_k]{\text{不全为零}}\ &\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}}\right)<k
\end{aligned}$$

推论 1. *定理4.3.5中的向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$线性无关的充要条件为*

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\right)=k \tag{4.5}$$

4.3.3 坐标变换

设线性空间V的两个基分别为$\mathcal{B}_1=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}$和$\mathcal{B}_2=\{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n\}$, 则有

$$\begin{array}{ccccccccc}
\eta_1 & = & m_{11}\varepsilon_1 & + & m_{21}\varepsilon_2 & + & \cdots & + & m_{n1}\varepsilon_n\\
\eta_2 & = & m_{12}\varepsilon_1 & + & m_{22}\varepsilon_2 & + & \cdots & + & m_{n2}\varepsilon_n\\
 & \vdots & & & & & & & \\
\eta_n & = & m_{1n}\varepsilon_1 & + & m_{2n}\varepsilon_2 & + & \cdots & + & m_{nn}\varepsilon_n
\end{array}$$

记为

$$\mathcal{B}_2=\mathcal{B}_1\mathbf{M} \tag{4.6}$$

其中

$$\mathbf{M}=\left[\begin{array}{cccc} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{array}\right]$$

称矩阵 $\mathbf{M}$ 为由基$\mathcal{B}_1$ 到 $\mathcal{B}_2$ 的**过渡矩阵**. 过渡矩阵有如下性质:

(1) 过渡矩阵$\mathbf{M}$可逆.

(2) $\forall \mathbf{x}\in V$, 有

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1}=\mathbf{M}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2} \tag{4.7}$$

证: (1) 由定理4.3.5的推论1可知$\operatorname{rank}(\mathbf{M})=n$, 因此$\mathbf{M}$可逆.

(2) 因$\mathbf{x}=\mathcal{B}_1\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1}=\mathcal{B}_2\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2}$, 将式(4.6)代入后有

$$\mathbf{x}=\mathcal{B}_1\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1}=\mathcal{B}_1\mathbf{M}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2}$$

由定理4.2.1知V中任意向量在基$\mathcal{B}_1$下的表示唯一, 有

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1}=\mathbf{M}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2}$$

4.4 欧式空间

对度量大家并不陌生, 如几何中的向量具有长度和夹角等度量性质, 但在更一般的线性空间中到现在只有向量的线性运算, 还没有类似的度量. 为此, 在线性空间中引入**内积**(inner product)概念, 在此基础上给出长度和夹角的定义.

4.4.1 内积

欧式几何空间中, 定义了向量之间的**点积**运算, 即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \tag{4.8}$$

其中 $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ 表示向量 $\vec{a},\vec{b}$的长度, θ 为$\vec{a},\vec{b}$之间的夹角. 根据点积定义有

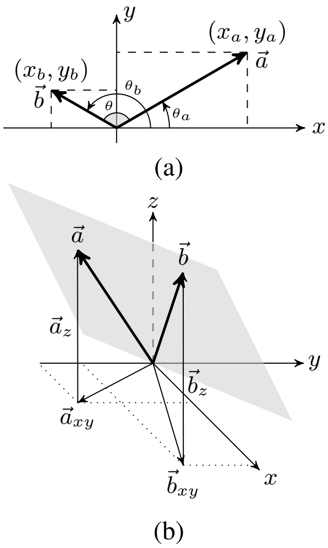


图 4.5: 解析几何中向量点积

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

由式(4.8)可知, 点积满足交换律, 而且点积也成立分配率, 即

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

在解析几何中, 设$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ 根据点积定义有如下关系(如图4.5(a)):

$$\begin{aligned} & \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\theta_b - \theta_a) \\ = \quad & |\vec{a}||\vec{b}| \left(\cos\theta_b \cos\theta_a + \sin\theta_b \sin\theta_a\right) \\ = \quad & x_a x_b + y_a y_b \end{aligned}$$

同样, 对$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$(如图4.5(b)), 将它门分解为$\vec{a} = \vec{a}_{xy} + \vec{a}_z$ 和$\vec{b} = \vec{b}_{xy} + \vec{b}_z$, 利用点积成立分配律, 有

$$\begin{aligned} & \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}_{xy} + \vec{a}_z) \cdot \left(\vec{b}_{xy} + \vec{b}_z\right) \\ = \quad & \vec{a}_{xy} \cdot \vec{b}_{xy} + \vec{a}_z \cdot \vec{b}_z = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \quad \text{(利用向量正交性)} \end{aligned}$$

将上述点积的定义推广在线性空间$\mathbb{R}^n$, 即 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

有

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{4.9}$$

例 24. *设*$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *和* $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *是* $\mathbb{R}^3$ *中的两个向量, 则*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 2 \times (-4) + (-1) \times 2 + 0 \times 3 = -10$$

事实上, 矩阵代数中关于矩阵$\mathbf{A}, \mathbf{B}$乘法的定义, 其结果矩阵中的第i, j个元素就是矩阵$\mathbf{A}$的第i个行向量与矩阵$\mathbf{B}$的第j个列向量的点积.

定义 4.9. *设V是$\mathbb{R}$上的实线性空间, 用符号 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 表示 $V \times V \mapsto \mathbb{R}$ 的映射(其中$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$), 并且$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ 和任意实数c, 该映射满足下列公理:*

(1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$*(对称性).*

(2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$*(线性性).*

(3) $c\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (c\mathbf{x}, \mathbf{y})$*(齐次性).*

(4) $\forall \mathbf{x} \in V$, *有*$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, *且*$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ *当且仅当*$\mathbf{x} = \mathbf{0}$*(非负性).*

*则称映射$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 为线性空间V上的**内积**.*

定义了内积的实线性空间V称为**实欧式空间**(Real Euclidean Space). 若考虑复线性空间V(复数域$\mathbb{C}$上的线性空间), 则$(\mathbf{u},\mathbf{v})$是$V\times V\mapsto\mathbb{C}$的映射, 并且将上述对称性公理(1) 用下列公理代替:

(1') $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}$(Hermit对称性或复对称性).

其中"$\overline{*}$"表示对"$*$"取复共轭. 复线性空间中满足上述公理的映射称为**厄米特内积**(Hermitian Inner Product). 定义了厄米特内积的复线性空间称为**复欧氏空间**(Complex Euclidean Space). 在本节中主要讨论实欧式空间, 但很多结论可推广到复欧式空间. 更一般地, 将定义了内积的线性空间称为**内积空间**(Inner Product Space).

注意: 在实线性空间中, 根据对称性和齐次性公理(3) 有结论 $(\mathbf{x},c\mathbf{y})=(c\mathbf{x},\mathbf{y})$, 但在复线性空间中,根据复对称性和齐次性公理(3) 有$(\mathbf{x},c\mathbf{y})=\overline{(c\mathbf{y},\mathbf{x})}=\bar{c}\,(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\bar{c}\mathbf{x},\mathbf{y})$.

例 25. *在线性空间$\mathbb{R}^n$ 中, 可验证向量点积满足内积的四个公理.*

- *由乘法的可交换性可知,向量点积具有对称性.*
- $\forall\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\sum_{i=1}^{n}x_i\,(y_i+z_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}x_iz_i=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$
- $\forall c\in\mathbb{R}$, $(c\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}cx_iy_i=c\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=c\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$
- $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ge 0$, *并且当且仅当* $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, *有*$\mathbf{x}\cdot\mathbf{0}=0$.

因此, 向量点积满足内积公理.

例 26. *在$\mathbb{R}^2$中将任意两个向量$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1 & y_2\end{bmatrix}^T$ 映射到实数:$2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$. 显然这种映射满足实欧式空间内积的四个公理. 事实上, 用矩阵形式可将它表示成:*

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^T\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{y}$$

通常也称它为加权内积.

例25和26说明在满足内积公理的前提下, 线性空间V中的内积可以有不同的定义.

例 27. *例6中的线性空间$C\,[a,b]$上, $\forall f(t),g(t)\in C\,[a,b]$, 令*

$$(f(t),g(t))\triangleq\int_a^b f(t)g(t)dt$$

易证$(f(t),g(t))$满足内积公理.

例 28. *线性空间*$\mathbb{R}^{m\times n}$ *中, 对任意*$\mathbf{A}=[a_{ij}],\mathbf{B}=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$*, 定义映射*

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})=\operatorname{trace}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\right) \tag{4.10}$$

其中 $\operatorname{trace}(\cdot)$ *是求矩阵(方阵)对角元素之和. 令*$\mathbf{C}=\mathbf{A}^T\mathbf{B}$*, 则*$\mathbf{C}$*的对角元素为*$c_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ki}b_{ki}(i=1,2,\ldots,n)$*.*

$$\operatorname{trace}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ki}b_{ki}$$

将矩阵写成列向量形式$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix}$*, 则*

$$\operatorname{trace}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\right)=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_i)$$

利用例24的结论可证, 映射(4.10)满足内积公理, 所以它是线性空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$*的内积.*

数域F上的欧式空间V的内积具有下列性质:

(1) $\forall\mathbf{x}\in V,(\mathbf{0},\mathbf{x})=(\mathbf{x},\mathbf{0})=0.$

(2) 设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m;\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_n\in V$,

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathbf{b}_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_j)$$

4.4.2 向量的长度、夹角与标准正交基

采用式(4.9)为内积的欧式空间中(后续讨论中无特殊说明,均采用此内积定义), 类似几何向量长度定义, 将

$$\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} \tag{4.11}$$

叫作向量$\mathbf{x}$ 的长度, 也称作向量$\mathbf{x}$的2-范数, 记为$\|\mathbf{x}\|$.
设$\mathbf{x}$是欧式空间V中向量,对任意的常数c有

$$\|c\mathbf{x}\|=\sqrt{(c\mathbf{x},c\mathbf{x})}=|c|\,\|\mathbf{x}\|$$

通常将长度为1的向量称为**单位向量**. 若$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, 则$\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$是单位向量, 将$\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}$乘向量$\mathbf{x}$, 称为将$\mathbf{x}$**单位化**或**标准化**.

定理 4.4.1. *对欧式空间*V*的任意两个向量* $\mathbf{x},\mathbf{y}$*成立下列关系:*

(1) 柯西—许瓦兹(Cauchy–Schwarz)不等式:

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})|\leq\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \tag{4.12}$$

当且仅当存在某个数c*使*$\mathbf{x}=c\mathbf{y}$*时, 不等式中的等号成立.*

(2) 三角不等式:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\| \tag{4.13}$$

证: (1). 当$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 或$\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 时, 不等式(4.12)成立. 设$\mathbf{x}\neq\mathbf{0},\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, t为变数, 由

$$0\leq(\mathbf{x}-t\mathbf{y},\mathbf{x}-t\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{x})+t^2(\mathbf{y},\mathbf{y})-2t(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

令 $t=\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{(\mathbf{y},\mathbf{y})}$, 有

$$\begin{aligned}&0\leq(\mathbf{x},\mathbf{x})-\frac{1}{(\mathbf{y},\mathbf{y})}(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\\ \Rightarrow\quad&(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\leq(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})\\ \Rightarrow\quad&|(\mathbf{x},\mathbf{y})|\leq\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\end{aligned}$$

当$\mathbf{x}-c\mathbf{y}=\mathbf{0}$时, 等号成立. 反之, 若$(\mathbf{x}-c\mathbf{y},\mathbf{x}-c\mathbf{y})=0$, 则$\mathbf{x}-c\mathbf{y}=\mathbf{0}$.

(2). 由

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{y},\mathbf{y})+2(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

利用不等式(4.12)得

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2\leq\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|=(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2$$

根据范数的非负性, 有$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$. 等号成立的充要条件同柯西—许瓦兹不等式.

欧式空间中的任意向量$\mathbf{x},\mathbf{y}$的范数, 还成立下列等式(读者自行证明)

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=2\|\mathbf{y}\|^2+2\|\mathbf{y}\|^2\tag{4.14}$$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=4(\mathbf{x},\mathbf{y})\tag{4.15}$$

相应地, 非零向量$\mathbf{x},\mathbf{y}$间的夹角θ定义为

$$\begin{aligned}&\cos\theta=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\\ &\theta=\cos^{-1}\left(\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right),\quad(0\leq\theta\leq\pi)\end{aligned}\tag{4.16}$$

例 29. *设*$\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^4$, *且*

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1&\sqrt{3}&1&-2\end{bmatrix}^T,\quad\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1/3&0&0&1/3\end{bmatrix}^T$$

则

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{x}|=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}=3,\quad\|\mathbf{y}\|=\sqrt{2}/3\\ &\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}},\quad\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

欧式空间中, 若向量$\mathbf{x},\mathbf{y}$的内积为零, 即

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=0\tag{4.17}$$

则称这两个向量相互**垂直**或**正交**, 记为 $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$. 此时, 两个非零向量正交的概念与几何中向量垂直或正交是一致的, 根据夹角的定义, 此时它们的夹角是$\frac{\pi}{2}$.

定理 4.4.2. *(勾股定理推广) 欧式空间V中两个向量$\mathbf{x},\mathbf{y}$ 正交的充要条件是*

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \tag{4.18}$$

一般将两两正交的一组向量称为正交向量组, 则正交向量组有下列性质:

定理 4.4.3. *欧式空间中两两正交的一组非零向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 必然线性无关.*

证: 假设这组向量线性相关, 则存在不全为零的一组数$c_1, c_2, \dots, c_k$, 使下式成立:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

不妨设$c_i \neq 0 (1 \leq i \leq k)$. 将向量$\mathbf{x}_i$与上式中两边求内积, 再利用前提条件这组向量两两正交有:

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{0}) = \left(\mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{x}_j\right) = c_i (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 0$$

因$\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$,$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) \neq 0$, 只能$c_i = 0$, 这与假设矛盾. 所以, 这组向量必线性无关.

定义 4.10. *n维欧式空间V中, n个两两正交的非零向量组构成空间的**正交基**, 若同时又均是单位向量, 则称为**标准正交基**.*

设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$是欧式空间$V$的基, 为了得到正交基, 对这个基实施下列操作后, 得到正交的向量组: $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

(1) $\eta_1 = \varepsilon_1$.

(2) $\eta_i = \varepsilon_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}\eta_k$, 由 η_i与前面已求向量之间满足正交条件:

$$(\eta_i, \eta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, i-1$$

将η_i的表达式代入上式, 可得:

$$t_{ki} = \frac{(\varepsilon_i, \eta_k)}{(\eta_k, \eta_k)}, \quad (k = 1, 2, \dots, i-1)$$

(3) i从2迭代到n

用矩阵形式将上述过程描述为:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

其中矩阵$\mathbf{T}$为n阶单位上三角阵, $\mathbf{T}$ 非奇异, 由定理4.3.5的推论知 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性无关, 它们构成正交基. 将这一方法称为Gram-Schmidt正交化过程, 以纪念方法的提出者—数学家Jørgen Pedersen Gram和Erhard Schmidt, 该方法适用于任意一组线性无关向量的正交化.

定理 4.4.4. *任何n维欧式空间$V(n \geq 1)$必有正交基.*

证: 对V的任意基实施Gram-Schmidt正交化, 可得到正交基.

例 30. *设线性空间$S = \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, 其中*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求S的正交基.

解: 易证 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 线性无关.

$$\text{(1). 令}\eta_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(2). } \eta_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{(\mathbf{x}_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(3). } \eta_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{(\mathbf{x}_3, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1 - \frac{(\mathbf{x}_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)}\eta_2, \text{求得 } \frac{(\mathbf{x}_3, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1 = \frac{1}{2}, \frac{(\mathbf{x}_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)} = \frac{1}{6},$$

$$\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

η_1, η_2, η_3是线性空间S的正交基.

更进一步将正交基的向量单位化, 可得到标准正交基.

推论 2. *任何n维欧式空间$(n \geq 1)$均存在标准正交基.*

例 31. *设$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 是欧式空间$\mathbb{R}^4$的一组向量, 其中*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求: (1) 生成子空间$\operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$的标准正交基;

(2) 将此标准正交基扩充成$\mathbb{R}^4$的标准正交基.

解: (1) 先确定向量组的线性相关性,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1(-1)+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2(-1)+R_4]{R_2(-2)+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$线性无关, 对它们实施Gram–Schmdit正交化:

$$\eta_1 = \mathbf{x}_1$$
$$\eta_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{(\mathbf{x}_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

标准化: $\eta_1' = \dfrac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2' = \dfrac{\eta_2}{\|\eta_2\|} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

则η_1', η_2' 为$\operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$的标准正交基.

(2) 因 $\dim \mathbf{R}^4 = 4$ 而 $\dim \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 2$, 需再增加两个基向量才能扩充成 $\mathbb{R}^4$. 根据题意扩充的向量与子空间 $\operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ 的基向量正交而且线性无关, 它等价于求下列线性方程组的基础解系, 然后再对它正交标准化, 可得到扩充的标准正交基向量.

$$\begin{bmatrix} (\eta_1')^T \\ (\eta_2')^T \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \mathbf{x}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

即

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} y_1 & & & + & y_3 & & & = & 0 \\ -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 0 \end{array}$$

求得基础解系为:$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, 再将它们标准正交化, 得

$$\eta_3' = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_4' = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

因此 $\eta_1', \eta_2', \eta_3', \eta_4'$为$\mathbb{R}^4$的标准正交基.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为列满秩矩阵, 若将矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ 线性无关的列向量应用Gram–Schmidt方法(包含向量标准化), 可得到$\mathbf{A}$的一种分解形式.

定理 4.4.5. *设$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$为列满秩矩阵, 则$\mathbf{A}$可以分解为 $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, 其中 $\mathbf{Q}$为$m\times n$矩阵, 且$\mathbf{Q}$的列向量组标准正交. $\mathbf{R}$为n阶可逆上三角阵, 且对角元素均大于零.*

通常将这种分解称为矩阵的QR**分解**.

证: 因矩阵$\mathbf{A}$的列向量线性无关, 对它应用Gram–Schmidt方法:

(1) $i=1$: $\mathbf{a}_i'=\mathbf{a}_i, b_i=\sqrt{(\mathbf{a}_i',\mathbf{a}_i')}=\|\mathbf{a}_i'\|, \mathbf{q}_i=\dfrac{1}{b_i}\mathbf{a}_i'$.

(2) $i=i+1$:

$\mathbf{a}_i'=\mathbf{a}_i-\left[\sum_{j=1}^{i-1}t_{ji}\mathbf{q}_j\right]$, 其中 t_{ji} 由条件 $(\mathbf{a}_i',\mathbf{q}_j)=0\,(1\le j<i)$ 确定, 即

$$t_{ji}=(\mathbf{a}_i,\mathbf{q}_j)\,,\quad j=1,2,\ldots,i-1$$

$b_i=\sqrt{(\mathbf{a}_i',\mathbf{a}_i')}=\|\mathbf{a}_i'\|$ 及 $\mathbf{q}_i=\dfrac{1}{b_i}\mathbf{a}_i'$

(3) 若 $i<n$ 重复(2); 否则, 结束 Gram-Schmidt 过程.

其中, 因$\mathbf{a}_i$线性无关, 可得 $\mathbf{a}_i'\neq\mathbf{0}$, 所以有 $b_i=\|\mathbf{a}_i'\|>0\ (i=1,2,\ldots,n)$. 类似式(4.19)将此过程表示为矩阵形式:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & & & \\ & b_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & b_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{(n-1)n}\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

将上述等式中最右的单位上三角阵记为$\mathbf{T}$, 对角阵记为$\mathbf{B}=\mathrm{diag}\,(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, 并令

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n\end{bmatrix}_{m\times n}$$

则有

$$\mathbf{A}=\mathbf{QBT}$$

令$\mathbf{R}=\mathbf{BT}$, 易知$\mathbf{R}$是上三角阵, 且其对角元就是$\mathbf{B}$中对角元. 而$\mathbf{Q}$ 中的列向量是相互正交的单位向量, 即 $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{E}_n$.

例 32. *求矩阵$\mathbf{A}$的QR分解.*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 9\\ 1 & 7\\ -3 & -5\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

解: (1) $b_1=\|\mathbf{a}_1\|=6,\quad \mathbf{q}_1=\dfrac{1}{6}\mathbf{a}_1$.

(2) $\mathbf{a}_2'=\mathbf{a}_2-t_{12}\mathbf{q}_1,\quad t_{12}=(\mathbf{a}_2,\mathbf{q}_1)=2,\quad \mathbf{a}_2'=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 1 & 3\end{bmatrix}^T$,

$b_2=\|\mathbf{a}_2'\|=6,\quad \mathbf{q}_2=\dfrac{1}{6}\mathbf{a}_2'$

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-1\\1&5\\-3&1\\1&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}=\mathbf{BT}=\begin{bmatrix}6&12\\0&6\end{bmatrix}$$

定义 4.11. *设 $\varepsilon_i(i=1,2,\ldots,n)$ 是 n 维线性空间 V 的一组向量, 则称下列矩阵*

$$\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1)&(\varepsilon_1,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\(\varepsilon_2,\varepsilon_1)&(\varepsilon_2,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\varepsilon_n,\varepsilon_1)&(\varepsilon_n,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix}=[(\varepsilon_i,\varepsilon_j)]_{n\times n}\tag{4.20}$$

为向量组 $\varepsilon_i(i=1,2,\ldots,n)$ 的 Gram **矩阵**.

定理 4.4.6. *线性空间 V 的一组向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k$ 线性无关, 则这组向量对应的 Gram 矩阵非奇异.*

证: 设 $c_1,c_2,\ldots,c_k$ 为任意一组数, 令 $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k}c_i\varepsilon_i$, 将 $\varepsilon_i(i=1,2,\ldots,k)$ 分别与 $\mathbf{y}$ 求内积, 则下列等式成立:

$$\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1)&(\varepsilon_1,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_1,\varepsilon_k)\\(\varepsilon_2,\varepsilon_1)&(\varepsilon_2,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_2,\varepsilon_k)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\varepsilon_n,\varepsilon_1)&(\varepsilon_n,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_k,\varepsilon_k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\mathbf{y})\\(\varepsilon_2,\mathbf{y})\\\vdots\\(\varepsilon_k,\mathbf{y})\end{bmatrix}$$

当取 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$, 则上列等式的右端项为向量 $\mathbf{0}$, 而向量 $\varepsilon_i(i=1,2,\ldots,k)$线性无关时, $c_i(i=1,2,\ldots,k)$只能取 0. 而上述矩阵只有零解时, 由方程组解理论可知当且仅当系数矩阵列满秩, 也就是 Gram 矩阵(方阵)是满秩矩阵, 即非奇异.

定理 4.4.7. *设$\mathfrak{B}=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n]$ 是n维欧式空间V的一组标准正交基, 若*

$$\begin{bmatrix}\eta_1&\eta_2&\cdots&\eta_n\end{bmatrix}=\mathfrak{B}\mathbf{M}$$

则$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 是标准正交基的充要条件为 $\mathbf{M}$是正交矩阵, 即$\mathbf{M}^T\mathbf{M}=\mathbf{E}$.

证: 设 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是标准正交基, 则

$$(\eta_i, \eta_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

即 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的 Gram 矩阵等于 $\mathbf{E}_n$,

$$\begin{bmatrix} (\eta_1, \eta_1) & (\eta_1, \eta_2) & \cdots & (\eta_1, \eta_n) \\ (\eta_2, \eta_1) & (\eta_2, \eta_2) & \cdots & (\eta_2, \eta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\eta_n, \eta_1) & (\eta_n, \eta_2) & \cdots & (\eta_n, \eta_n) \end{bmatrix} = \mathbf{E}_n$$

而

$$\eta_i = \mathcal{B}\mathbf{m}_i, \quad \eta_j = \mathcal{B}\mathbf{m}_j$$

其中, $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{m}_j$ 是矩阵 $\mathbf{M}$ 中的第 i 和 j 列. 因 $\mathfrak{B}$是标准正交基, 它对应的 Grame 矩阵也是单位阵, 有

$$\mathbf{E} = [(\eta_i, \eta_j)] = (\mathfrak{B}\mathbf{M})^T \mathfrak{B}\mathbf{M} = \mathbf{M}^T\mathbf{M}$$

反之, 若$\mathbf{M}$是正交矩阵, 满足$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{E}$, 则$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是$V$的基, 且

$$(\eta_i, \eta_j) = (\mathfrak{B}\mathbf{m}_i, \mathfrak{B}\mathbf{m}_j) = (\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

其中$\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j$是矩阵$\mathbf{M}$的第$i, j$列. 因此$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是两两正交的标准基.

4.5 子空间之间关系

4.5.1 子空间的交与和

定义 4.12. *设V_1,V_2是欧式空间V的两个子空间, 将$V_1 \cap V_2$称为子空间V_1和V_2的***交**.

定理 4.5.1. *欧式空间V的任意两个子空间的交仍是V的子空间.*

证: (1) 因$\mathbf{0} \in V_1$ 且 $\mathbf{0} \in V_2$, 所以 $V_1 \cap V_2$非空.

(2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \cap V_2, \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$ 同时 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_2$, 所以 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1 \cap V_2$.

(3) 任意数c和$V_1 \cap V_2$的任意向量$\mathbf{x}$ 的数乘 $c\mathbf{x}$, $c\mathbf{x}_1 \in V_1$ 又 $c\mathbf{x} \in V_2$, 所以 $c\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$.

由定理4.1.1 知 $V_1 \cap V_2$是V的子空间.

定义 4.13. *V_1,V_2是欧式空间V的两个子空间, 定义集合:*

$$V_1 + V_2 = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} \in V_1, \mathbf{y} \in V_2\} \tag{4.21}$$

*称$V_1 + V_2$是子空间V_1与V_2的***和**.

定理 4.5.2. *欧式空间V的任意两个子空间V_1、V_2的和仍是V的子空间.*

证: (1) V_1+V_2非空, 因 $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}\in V_1+V_2$.

(2) 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}$为V_1+V_2的任意两向量, 根据定义它们可表示为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\quad \mathbf{y}=\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2,\quad 其中\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1\in V_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2\in V_2.$$

所以$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\mathbf{x}_1+\mathbf{y}_1)+(\mathbf{x}_2+\mathbf{y}_2)\in V_1+V_2$.

(3) $\forall\mathbf{x}\in V_1+V_2$, c为任意数, 则 $c\mathbf{x}=c\mathbf{x}_1+c\mathbf{x}_2\in V_1+V_2$.

由定理4.1.1知 V_1+V_2是V的子空间.

关于欧式空间V的子空间的交与和还有下列性质:

(1) V的任意有限个子空间的交仍是V的子空间.

(2) V的任意有限个子空间的和仍是V的子空间.

(3) V_1,V_2是V的子空间, 则 $V_1\cap V_2$是V_1+V_2的子空间.

例 33. *设 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m$ 和 $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_k$ 是欧式空间V的两组向量, 令$L_1=\operatorname{span}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)$, $L_2=\operatorname{span}(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_k)$, $L_3=\operatorname{span}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m;\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_k)$, 证明: $L_1+L_2=L_3$.*

证: $\forall\mathbf{b}\in L_1+L_2$, 根据子空间和的定义有: $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$, 其中 $\mathbf{b}_1\in L_1,\mathbf{b}_2\in L_2$, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1&=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbf{x}_i\\ \mathbf{b}_2&=\sum_{i=1}^{k}d_i\mathbf{y}_i\\ \Rightarrow\quad \mathbf{b}&=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbf{x}_i+\sum_{i=1}^{k}d_i\mathbf{y}_i\in L_3\end{aligned}$$

因此 $L_1+L_2\subseteq L_3$.

反之, $\forall\mathbf{b}\in L_3$, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{b}&=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbf{x}_i+\sum_{j=1}^{k}d_j\mathbf{y}_j\\ 令\quad \mathbf{b}_1&=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbf{x}_i,\quad \mathbf{b}_2=\sum_{j=1}^{k}d_j\mathbf{y}_j\\ 显然\quad \mathbf{b}_1&\in L_1,\quad \mathbf{b}_2\in L_2\\ \Rightarrow\quad \mathbf{b}&\in L_1+L_2\end{aligned}$$

因此 $L_3\subseteq L_1+L_2$. 最后有 $L_1+L_2=L_3$.

定理 4.5.3. *(维数公式)设 V_1,V_2是欧式空间空间V的子空间, 则*

$$\dim V_1+V_2=\dim V_1+\dim V_2-\dim V_1\cap V_2 \tag{4.22}$$

证: 设$\dim V_1 = m$, $\dim V_2 = l$, $\dim V_1 \cap V_2 = k$, $Z = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k\}$ 为$V_1 \cap V_2$的基, 从Z开始, 通过从V_1中扩充$m-k$个适当的向量(线性无关) $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{m-k}\}$, 使向量组 $X \cup Z$ 为 V_1的基. 同理由向量组Z开始扩充$l-k$个线性无关的向量组$Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{l-k}\}$, 使向量组$Y \cup Z$构成$V_2$的基. 显然有 $V_1 = \operatorname{span}(X \cup Z)$, $V_2 = \operatorname{span}(Y \cup Z)$, 由例33可知 $V_1 + V_2 = \operatorname{span}(X \cup Y \cup Z)$.

下面证明向量组X, Y, Z张成$V_1 + V_2$的基, 即向量组 $X \cup Y \cup Z$ 线性无关. 考察下列线性组合式

$$c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{m-k}\mathbf{x}_{m-k} + d_1\mathbf{z}_1 + \cdots + d_k\mathbf{z}_k + e_1\mathbf{y}_1 + \cdots + e_{l-k}\mathbf{y}_{l-k} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

令

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{m-k}\mathbf{x}_{m-k} + d_1\mathbf{z}_1 + \cdots + d_k\mathbf{z}_k = -e_1\mathbf{y}_1 - \cdots - e_{l-k}\mathbf{y}_{l-k}$$

由上式可知 $\mathbf{a} \in V_1$ 同时 $\mathbf{a} \in V_2$, 所以 $\mathbf{a} \in V_1 \cap V_2$. 所以 $\mathbf{a}$可由 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k$线性表示, 即

$$\mathbf{a} = f_1\mathbf{z}_1 + f_2\mathbf{z}_2 + \cdots + f_k\mathbf{z}_k$$

于是

$$f_1\mathbf{z}_1 + f_2\mathbf{z}_2 + \cdots + f_k\mathbf{z}_k + e_1\mathbf{y}_1 + \cdots + e_{l-k}\mathbf{y}_{l-k} = \mathbf{0}$$

由 Y, Z是V_2的基可知, $f_1 = f_2 = \cdots = f_k = e_1 = e_2 = \cdots = e_{l-k} = 0$. 同时又根据向量组$X$线性无关(是$V_1$基的一部分), 要使得式(4.23)成立, 只有$c_1 = c_2 = \cdots = c_{m-k}$, 从而向量组 $X \cup Y \cup Z$线性独立, 它是 $V_1 + V_2$的基. 因此, 有

$$\dim V_1 + V_2 = m + l - k = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$$

推论 3. *V_1,V_2 是欧式空间V的子空间, 则*

$$\dim V_1 + V_2 \le \dim V_1 + \dim V_2 \quad (4.24)$$

当且仅当 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ 时等号成立.

推论 4. *$V_1, V_2, \ldots, V_m$ 是欧式空间V的子空间, 则*

$$\dim V_1 + V_2 + \cdots + V_m \le \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m \quad (4.25)$$

例 34. *设 $V_1 = \operatorname{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $V_2 = \operatorname{span}(\beta_1, \beta_2)$, 其中*

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

求子空间 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$的基.

解:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1(-2)+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4(3)+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2(11/3)+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由上式可知 $\dim V_1 = \dim V_2 = 2, \beta_2 = \beta_1 - \alpha_2, \alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_2$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$是 $V_1 + V_2$的基, 即$V_1 + V_2 = \mathrm{span}\,(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$. $\dim(V_1 + V_2) = 3$

由 $\beta_2 = \beta_1 - \alpha_2$ 得 $\beta_1 - \beta_2 = \alpha_2 \in (V_1 \cap V_2)$, 因此 $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$

定义 4.14. *设 V_1, V_2 是欧式空间 V 的子空间, 若$\forall \mathbf{x} \in V_1 + V_2$ 都能唯一地表示成*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in V_1, \quad \mathbf{x}_2 \in V_2 \tag{4.26}$$

*则称 $V_1 + V_2$为两个子空间的**直和**(Direct Sum), 记为 $V_1 \oplus V_2$.*

定理 4.5.4. *V_1,V_2是欧式空间 V 的两个子空间, 则下列结论相互等价:*

(1) $V_1 + V_2$*是直和;*

(2) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$*;*

(3) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$*;*

证: (2)⇔(3)已由维数公式证明.

(1)⇒(2): 设 $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$, 则 $\mathbf{x}$ 可分解成 $\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{0} \in V_1, \mathbf{x} \in V_2$ 或 $\mathbf{x} \in V_1, \mathbf{0} \in V_2$, 由直和分解的唯一性, 可知 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(2)⇒(1): 设向量 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1' + \mathbf{x}_2'$(假设分解不唯一), 其中 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i' \in V_i (i = 1, 2)$, $\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1') + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2') \in V_1 \cap V_2$, 因此 $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \in V_1 \cap V_2$, 有 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i' (i = 1, 2)$,由此证明了分解唯一.

定理 4.5.5. *设V_1是n维欧式空间V的子空间, 则一定存在V的一个子空间V_2, 使得*

$$V = V_1 \oplus V_2$$

*满足上述条件的子空间V_2称为V_1的**补子空间**(Complementary Subspace).*

证: 设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ 为 V_1 的基, 则可扩充 $n - m$ 个向量 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{n-m}$ 使 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-m}$ 为 V的基, 则令 $V_2 = \mathrm{span}\,(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{n-m})$, 有 $V = V_1 + V_2$ 且 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$. 因此 $V = V_1 \oplus V_2$.

例 35. *欧式空间$\mathbb{R}^3$ 中 V_1 为任意过原点的平面, V_1是$\mathbb{R}^3$的一个子空间, 设 $\mathbf{x}$为不在平面 V_1上的向量, 令 $V_2 = \mathrm{span}\,(\mathbf{x})$, 则 $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, 若 $\mathbf{y}$ 是不在平面V_1上的另一向量, 则 $V_2' = \mathrm{span}\,(\mathbf{y})$ 与 V_1的直和也等于$\mathbb{R}^3$. 这说明子空间V_1的补子空间不唯一.(如图4.6)*

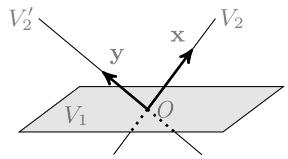


图 4.6: 补空间不唯一

直和概念可以推广到多个子空间的直和.

定义 4.15. *设$V_1, V_2, \ldots, V_m$ 是欧式空间V的子空间, 若对和空间 $V_1+V_2+\cdots+V_m$的任意向量 $\mathbf{x}$ 都能唯一地表示成*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_i \in V_i, (i = 1, 2, \ldots, m)$$

*则称这个和为**直和**, 记为 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ 或$\bigoplus_{i=1}^{m} V_i$.*

定理 4.5.6. *设$V_1, V_2, \ldots, V_m$ 是欧式空间V的子空间, 则下列结论互相等价:*

(1) $V_1 + V_2 + \cdots + V_m$ *是直和;*

(2) *对$i = 1, 2, \ldots, m$ 有* $V_i \cap \left(\bigoplus_{j=1, j\neq i}^{m} V_j \right) = \{\mathbf{0}\}$;

(3) $\dim (V_1 + V_2 + \cdots + V_m) = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m$;

将多个空间的直和写成$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_{m-1}$与$V_m$的直和, 可采用定理4.5.4的类似证明方法归纳证明.

4.5.2 子空间正交

下面讨论子空间之间的正交关系

定义 4.16. *设V_1和V_2是欧式空间V的两个子空间, 若对任意的$\mathbf{x} \in V_1, \mathbf{y} \in V_2$, 恒有*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

则称子空间V_1与V_2是正交的, 记为$V_1 \perp V_2$. 若V的某个非零向量$\mathbf{x}$与V_1的任意向量$\mathbf{y}$, 成立

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

则称向量$\mathbf{x}$与子空间V_1正交, 记为$\mathbf{x} \perp V_1$.

与自身正交的向量只有零向量, 因此

(1) 若 $V_1 \perp V_2$, 则 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.

(2) 若 $\alpha \in V_1$, 且 $\alpha \perp V_1$, 则 $\alpha = \mathbf{0}$.

定理 4.5.7. *若欧式空间V的子空间$V_1, V_2, \ldots, V_m$ 两两正交, 则*

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_m = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$$

证: 当 $k=2$ 时, $V_1 \perp V_2$, 有$V_1 \cap V_2=\{\mathbf{0}\}$, 由定理4.5.4的(2)可知: $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$.

设 $k<m$ 时, $V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$ 成立.

当 $k=m$ 时, 令 $W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_{m-1}$, 设 $\mathbf{x}$ 为 $V_m\cap W$的任意向量, 因 $\mathbf{x}\in W$ 所以它可唯一分解成

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\cdots+\mathbf{x}_{m-1},\quad \mathbf{x}_i\in V_i(i=1,2,\ldots,m-1)$$

同时 $\mathbf{x}\in V_m$, 由 V_m与 $V_i(i=1,2,\ldots,m-1)$正交可知: $\mathbf{x}\perp\mathbf{x}_i$, 由此得 $\mathbf{x}\perp\mathbf{x}$(即 $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$), 只能 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 同样根据定理4.5.4(2)有 $W+V_m=W\oplus V_m=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$.

定义 4.17. *设V_1,V_2是欧式空间V的两个子空间, 若 $V_1\perp V_2$, 且 $V_1+V_2=V$, 则称 V_2 是 V_1 的***正交补**.

定理 4.5.8. *n维欧式空间V的任一子空间W都存在唯一的正交补, 记为$W^\perp$.*

证: 若 $W=\{\mathbf{0}\}$, 则$W^\perp=V$(因$\forall\mathbf{x}\in V,(\mathbf{x},\mathbf{0})=0$). 同理, 若$W=V$ 则$W^\perp=\{\mathbf{0}\}$ 且是唯一的.

若W为V的非平凡子空间设, 设W的一个标准正交基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k(0<k<n$, 即 $W=\operatorname{span}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k)$. 通过基扩充得到$V$的一个标准正交基:

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\ldots,\varepsilon_n$$

则 $W^\perp=\operatorname{span}(\varepsilon_{k+1},\varepsilon_{k+1},\ldots,\varepsilon_n)$.

(唯一性)假设W_1和W_2都是W 的正交补, 即

$$W\oplus W_1=W\oplus W_2=V,\quad W\perp W_1,W\perp W_2$$

对$\forall\mathbf{x}_1\in W_1$, 显然 $\mathbf{x}_1\in V$, 根据 $V=W\oplus W_2$, $\mathbf{x}_1$ 又可分解成

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}+\mathbf{x}_2,\quad \mathbf{x}\in W,\mathbf{x}_2\in W_2$$

根据正交性:

$$0=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x})=(\mathbf{x}+\mathbf{x}_2,\mathbf{x})=(\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{x}_2+\mathbf{x})=(\mathbf{x},\mathbf{x})$$

得$\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即 $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2\in W_2\Rightarrow W_1\subseteq W_2$. 同理可得$W_2\subseteq W_1$. 因此,$W$的正交补是唯一的.

根据定理4.5.8,$V=W\oplus W^\perp$, 则对于V中的任意向量$\mathbf{x}$, 可唯一分解成

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\quad \mathbf{x}_1\in W,\mathbf{x}_2\in W^\perp$$

称向量$\mathbf{x}_1$为$\mathbf{x}$ 在W上的**内投影**(或**正投影**).

例 36. *设W是欧式空间$\mathbb{R}^4$ 的一个子空间, $W=\operatorname{span}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$, 其中*

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -2 & 2\end{bmatrix}^T,\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}3 & -5 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$$

求$W^\perp$ 和向量 $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}-6 & -7 & 8 & 5\end{bmatrix}^T$ 在 W 上的正投影.

解: 设 $W^{\perp}$中的向量为 $\mathbf{x}=\left[\begin{array}{llll}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{array}\right]^T$, 则

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{u}_1^T\mathbf{x}=0\\ \mathbf{u}_2^T\mathbf{x}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}-4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0\\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0\end{array}\right.$$

上述齐次方程的基解为

$$\mathbf{x}_1=\left[\begin{array}{llll}0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]^T, \quad \mathbf{x}_2=\left[\begin{array}{llll}4 & 1 & -7 & 0\end{array}\right]^T$$

则 $W^{\perp}=\operatorname{span}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$. 根据 $V=W\oplus W^{\perp}$ 可知 $\mathfrak{B}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ 是V的基, 下面求 $[\mathbf{z}]_{\mathfrak{B}}$, 求非齐次方程组的解(有唯一解):

$$\left[\begin{array}{llll}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{array}\right][\mathbf{z}]_{\mathfrak{B}}=\left[\begin{array}{llll}-6 & -7 & 8 & 5\end{array}\right]^T$$

求得 $[\mathbf{z}]_{\mathfrak{B}}=\left[\begin{array}{llll}2 & 2 & 3 & -1\end{array}\right]^T$, 即

$$\mathbf{z}=2\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2+3\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$$

则 $\mathbf{z}$在 W上的内投影为$2(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=\left[\begin{array}{llll}-2 & -6 & -2 & 2\end{array}\right]^T$.

4.5.3 最佳逼近问题

设S是n维欧式空间$\mathbb{R}^n$的一个子空间, 对$\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, 往往需要在$S$中寻找一个向量$\hat{\mathbf{x}}$, 使得它能最大程度的逼近$\mathbf{x}$,

习题四

1. 判断下列集合关于指定的运算是否构成线性空间, 若不是线性空间请说明理由(违反了哪条公理).

   (a) 实数域$\mathbb{R}$上定义集合$\left\{x+jy \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$,其中$j=\sqrt{-1}$, 关于数的加法和数乘.

   (b) 有理数数域$\mathbb{Q}$上定义集合$S=\left\{a+b\sqrt{2}\middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$, 关于数的加法和数乘.

   (c) 平面中第一象限中点构成的集合$\left\{\left[\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right] \middle| x,y\in\mathbb{R}\text{且}x\geq 0,y\geq 0\right\}$, 关于向量加法和数乘.

   (d) 实数域$\mathbb{R}$上的正实数集$\mathbb{R}^+$, 关于如下定义的加法$(+)$和数乘$\circ$.
   加法$(+)$定义: 对$\forall x,y\in\mathbb{R}^+$, $x(+)y=xy$;
   数乘$\circ$定义: $\forall k\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^+$, $k\circ x=x^k$;

   (e) 平面中单位元内的点$\left\{\left[\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right]\middle| x^2+y^2\leq 1\right\}$, 关于向量加法和数乘.

   (f) 实数域上集合$\left\{f(x)\middle| f(x+2\pi)=f(x)\right\}$, 关于函数的加法和数乘.

   (g) 定义在实数域上的集合$\left\{\frac{p(x)}{q(x)}\middle| p(x),q(x)\text{是实系数的多项式}\right\}$, 关于有理多项式加法和数乘.

(h) $C[a,b]=\left\{f(x)\middle|f(x)\text{为区间}[a,b]\text{上连续实函数,且}2f(a)=f(b)\right\}$, 函数加法和数乘.

(i) $I[0,1]=\left\{f(x)\middle|\int_0^1 f(x)dx=0\right\}$, 关于函数加法和数乘.

2. 集合$S=\left\{\begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$, 以下关于集合元素之间的"加法"与"数乘"的定义中, 有哪些使S为线性空间, 如果不构成线性空间, 请指出违反了哪条公理.

(a) $\begin{bmatrix} x_1 & y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2\end{bmatrix}$; $a\begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & 0\end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} x_1 & y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 & 0\end{bmatrix}$; $a\begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & ay\end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} x_1 & y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1+y_2\end{bmatrix}$; $a\begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & ay\end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} x_1 & y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |x_1+x_2| & |y_1+y_2|\end{bmatrix}$; $a\begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |ax| & |ay|\end{bmatrix}$;

3. 设 $\mathbb{R}[x]$ 是指所有实系数多项式构成集合, 关于多项式加法和数乘构成线性空间,判断下列集合是否构成 线性子空间: (a) $\left\{a+x^2\middle|a\in\mathbb{R}\right\}$; (b) $\left\{ax^2\middle|a\in\mathbb{R}\right\}$;

4. 判断下列集合是否是$\mathbb{R}^3$的线性子空间.

(a) $\left\{\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\middle| x_1+x_2+x_3=1\right\}$ (b) $\left\{\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\middle| x_1+x_2+x_3=0\right\}$

(c) $\left\{\begin{bmatrix} 3a+1\\ a\\ a-5b\end{bmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ (d) $\left\{\begin{bmatrix} a-3b\\ 0\\ 4b\end{bmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$

5. 判断下列集合是否是$\mathbb{R}^{n\times n}$的线性子空间(关于矩阵加法和数乘).

(a) $\left\{\mathbf{X}\middle|\ \mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times n},\text{且与}\mathbf{A}\text{相似}\right\}$ 其中 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为给定矩阵.

(b) $\left\{\mathbf{X}\middle|\ \mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times n},\mathbf{X}\text{是上三角阵}\right\}$

(c) $\{\mathbf{X}|\ \mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times n},\mathbf{AX}=\mathbf{0}\}$, $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$是固定矩阵.

(d) $\{\mathbf{X}|\ \mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times n},\mathbf{AXB}=\mathbf{0}\}$, 其中 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times k}$是固定矩阵.

6. 证明: 下列向量组是$\mathbb{R}^4$ 的基.

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ -1\\ -2\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix} 2\\ 3\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \varepsilon_3=\begin{bmatrix} 1\\ 3\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\quad \varepsilon_4=\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$$

并求向量$\begin{bmatrix} 7 & 14 & -1 & -2\end{bmatrix}^T$在此基下的坐标.

7. 若α_1,α_2 线性无关, β是不同于α_1,α_2的非零向量, 则 $\alpha_1+\beta$ 和 $\alpha_2+\beta$ 是否线性相关?

8. 设 V是数域F上的n阶对称矩阵的集合.

(a) 证明: 在矩阵加法和数乘下V是线性空间.

(b) 求V得维数及基.

(c) 若V是所有反对称矩阵的集合, 它是线性空间吗? 如果是, 求它的维数.

9. 讨论当a, b取何值时, 向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一线性表示, 此时 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是否为 $\mathbb{R}^3$的基? 为什么?

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

10. 设 S 是线性空间V的一个有限子集, 它具有性质: $\forall \mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x}$ 均可唯一的表示成 S中元素的唯一线性组合, 证明: S 是 V的一个基.

11. 设
$$S_1 = \left\{x+1, x^2+x, x^3+1, x^3+x^2+2x+2, (x^2-1)^2\right\},$$
$$S_2 = \left\{-1+x, 1-x^2, -2+2x+x^3, x^3\right\}$$
求空间$\operatorname{span}(S_1)$ 和 $\operatorname{span}(S_2)$的维数(由$S_i (i = 1, 2)$中元素张成的空间), 并给出他们的一组基.

12. 设多项式空间$\mathbb{R}[x]_n$的一个基为$1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n$ (α为常数). 求多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^2$ 在这个基下的坐标.

13. 利用坐标证明多项式空间$\mathbb{R}[x]_2$中的多项式$1+2x^2, 4+x+5x^2, 3+2x$ 是线性相关的.

14. 设S, T是线性空间V的子集, $\operatorname{span}(S)$表示由S中元素生成的子空间, 试证明下列结论:

(a) 当且仅当$\operatorname{span}(S) = S$时, S是V的子空间.

(b) 若$S \subseteq T$, 则$\operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(T)$.

(c) $\operatorname{span}(S \cap T) \subseteq \operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T)$

15. $\mathbb{R}^3$的两组基分别如下:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$$

求在这两个基下有相同坐标的所有向量.

16. 已知$\mathbb{R}^3$的两个基为:

$$\mathfrak{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

求由$\mathfrak{B}_1$ 到$\mathfrak{B}_2$的过渡矩阵矩阵.

17. 已知$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是$\mathbb{R}^3$ 的一个基, 有

$$\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \quad \beta_2 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \quad \beta_3 = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 5\varepsilon_3$$

(a) 证明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$也是$\mathbb{R}^3$ 的一个基.

(b) 若 $\gamma = \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 5\varepsilon_3$, 求$\gamma$ 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下坐标.

18. 设$\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, 其中$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$. 判定如下关于$(\mathbf{x},\mathbf{y})$的定义中哪些是内积, 哪些不是. 如果不是, 请指出它不符合内积的哪个条件.

    (a) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\,|y_i|$.

    (b) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\right|$.

    (c) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{j=1}^{n}y_j$.

    (d) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2\right)^{1/2}$.

    (e) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2$.

19. 对于实欧式空间空间中的任意向量$\mathbf{x},\mathbf{y}$, 下列结论是否成立, 若成立请证明.

    (a) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ 当且仅当 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ 成立.

    (b) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ 当且仅当对任意实数c, 式 $\|\mathbf{x}+c\mathbf{y}\|\geq\|\mathbf{x}\|$成立.

    (c) 当且仅当$\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|$时, $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y})=0$.

20. 在多项式空间$\mathbb{R}[x]_n$上, 对$\forall f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]_n$, 在 x 的取值区间 $[0,1]$ 上定义:

$$(f,g)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$$

    (a) 证明 (f,g) 是$\mathbb{R}[x]_n$ 在区间 $[0,1]$ 上的内积.

    (b) 当$f(x)=x$,$g(x)=ax+b$时, 求(f,g).

    (c) 当$f(x)=x$时, 求与f正交的非零多项式g.

21. 欧式空间中称$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 为元素$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$ 之间的距离, 证明: $d(\mathbf{x},\mathbf{y})\leq d(\mathbf{x},\mathbf{z})+d(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

22. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$为欧式空间$\mathbb{R}^n$的一个基, 证明下列结论.

    (a) 向量$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$满足$(\mathbf{x},\varepsilon_i)=0(i=1,2,\ldots,n)$, 则$\mathbf{x}=\mathbf{0}$

    (b) 向量$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$满足对$\forall\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ 成立$(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})=(\mathbf{x}_2,\mathbf{y})$, 则$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$.

23. 证明本章中式(4.14).

24. 证明定理4.4.2.

25. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$是欧式空间$\mathbb{R}^n$的$n$个向量, 证明: 它构成$\mathbb{R}^n$ 的一个基的充要条件是它的Gram行列式$\neq 0$, 其中Gram行列式定义为:

$$\begin{bmatrix} (\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{bmatrix},\quad \text{其中 } (\varepsilon_i,\varepsilon_j) \text{ 为}\varepsilon_i\text{与}\varepsilon_j\text{内积.}$$

26. 设$S_1, S_2, \ldots, S_k$ 是线性空间V的k个非平凡子空间, 证明: 必存在V中的一个向量, 它不属于这些子空间中的任何一个.

27. 用Gram-Schmidt法将空间$\mathbf{R}^4$的一个基$\mathfrak{B}$ 标准正交化, 并给出由$\mathfrak{B}$到正交化基之间的过渡矩阵.

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

28. 设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 采用Gram-Schmidt法$\mathbf{A}$表示成$\mathbf{QR}$, 其中$\mathbf{Q}$为正交矩阵, $\mathbb{R}$为上三角阵.

29. 设多项式空间$\mathbb{R}[x]_2$中定义内积:$\forall f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_2$, $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, 选择$1, x, x^2$为基, 采用Gram-Schmidt法构造 $\mathbb{R}[x]_2$的标准正交基.

30. 在$\mathbb{R}^5$中, 向量组

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求子空间$\operatorname{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的标准正交基.

31. 设线性空间V中非零向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \beta$ 线性无关, 子空间 $S_1 = \operatorname{span}(\varepsilon_1 + \beta, \varepsilon_2 + \beta)$, $S_2 = \operatorname{span}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $S_3 = \operatorname{span}(\varepsilon_3 + \beta, \varepsilon_4)$, 求$S_1 \cap S_2, S_2 \cap S_3, S_1 \cap S_3$.

32. 设S_1, S_2, S_3是线性空间V的子空间, 若$S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$, $S_2 \cap S_3 = \{\mathbf{0}\}$, $S_3 \cap S_1 = \{\mathbf{0}\}$, 问$S_1 + S_2 + S_3$是否为直和, 举例说明.

33. 在$\mathbb{R}^3$ 中, 单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$的一个基$\mathfrak{B}$, 则对$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, 在这个基下可表示为$\mathbf{x} = \mathfrak{B}[\mathbf{x}]_{\mathfrak{B}}$, 其中$[\mathbf{x}]_{\mathfrak{B}}$为$\mathbf{x}$在基$\mathfrak{B}$下的坐标. 设$[\mathbf{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

    (a) 令$S_1 = \operatorname{span}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $S_2 = \operatorname{span}(\varepsilon_3)$, 证明: $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

    (b) 采用书中内积定义式(4.9), 任意向量$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, 令 $\mathbf{y} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \varepsilon_3)\,\varepsilon_3$, 是否有$\mathbf{y} \in S_1$? 为什么?

    (c) 若采用向量的坐标定义向量距离, 即 $d_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|[\mathbf{x}]_{\mathfrak{B}} - [\mathbf{y}]_{\mathfrak{B}}\|$, 试举例比较它与习题21中距离定义之间的区别. 若基向量之间正交, 两者区别又如何?

    (d) 因$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, 那么采用怎样的坐标向量的内积定义, 才能使得上述两种距离一致?