

# AI Trainer

Carlos Camino

`www.carlos-camino.de/ai`

Wintersemester 2016/17

## Disclaimer

Diese Folien wurden nicht von Dr. Kreiner erstellt und erheben keinerlei Anspruch auf Richtigkeit oder Vollständigkeit. Sie sollen lediglich als Lernunterstützung dienen.

Hallo!

Mit diesen Folien möchte ich eure Vorbereitung für die Klausur in Analysis für Informatik etwas angenehmer machen. Im Gegensatz zum DS Trainer befindet sich dieser der AI Trainer erst in der Baby-Phase. Deshalb findet ihr hier weder Definitionen noch Sätze aus der Vorlesung, sondern nur zusätzliche Lernhilfen.

Konstruktive Kritik, Ideen und Kommentare sind jederzeit herzlichst willkommen.

Frohes Durchklicken!

Carlos

## Kleine Bitte

Ich mache gerne Fehler (besonders Sprachfehler) und übersehe ständig Sachen. Bitte traut euch, gefundene Fehler und Inkonsistenzen bei mir zu melden. Für jede Fehlermeldung (egal wie klein sie ist) werde ich sehr dankbar sein.

Meldungen über inhaltliche Fehler helfen euren Kommilitoninnen und Kommilitonen, den Stoff besser zu verstehen. Meldungen über Grammatikfehler helfen mir, die Sprache besser zu lernen.

Jedes Komma zählt!

Wichtig!

Der AI Trainer wird sich im Laufe des Semesters ständig ändern!

# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

# Wichtige Zahlenmengen

Wichtige endliche Zahlenmengen sind:

$$\begin{aligned}[n] &= \{1, 2, \dots, n\} \\ [n]_0 &= \{0, 1, \dots, n\} \\ \mathbb{Z}_n &= \{0, 1, \dots, n-1\} = [n-1]_0\end{aligned}$$

Wichtige unendliche Zahlenmengen sind:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{(natürliche Zahlen)} \\ \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} && \text{(natürliche Zahlen mit Null)} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} && \text{(ganze Zahlen)} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} && \text{(rationale Zahlen)} \\ \mathbb{R} &= \{d, d_1 d_2 d_3 \dots \mid d \in \mathbb{Z}, d_1, d_2, d_3, \dots \in \mathbb{Z}_{10}\} && \text{(reelle Zahlen)} \\ \mathbb{C} &= \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} && \text{(komplexe Zahlen)}\end{aligned}$$



Bei der Definition der sechs unendlichen Mengen in der vorherigen Folie habe ich mir das Leben sehr einfach gemacht. Die axiomatischen Definitionen sind etwas komplizierter.

Deutlich komplizierter als für uns nötig ;-)

Seien  $a, b, c$  beliebige reelle Zahlen mit  $a \neq 0, b, c > 0, b, c \neq 1$ . Dann sind folgende drei Aussagen zueinander äquivalent:

$$\log_c b = a \iff c^a = b \iff \sqrt[a]{b} = c$$

$$\begin{array}{llll} \log_2 8 = 3 & \iff & 2^3 = 8 & \iff & \sqrt[3]{8} = 2 \\ \log_3 \frac{1}{9} = -2 & \iff & 3^{-2} = \frac{1}{9} & \iff & \sqrt[{-2}]{\frac{1}{9}} = 3 \\ \log_{\frac{1}{3}} 81 = -4 & \iff & \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81 & \iff & \sqrt[{-4}]{81} = \frac{1}{3} \\ \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} = 2 & \iff & \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} & \iff & \sqrt[2]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \end{array}$$

Für Logarithmen gibt es folgende spezielle Basen:

$$\lg n = \log_{10} n,$$

$$\ln n = \log_e n,$$

$$\text{lb } n = \log_2 n.$$

In der Schule wird  $\log n$  als  $\log_{10} n$  definiert. In der Uni kann  $\log n$  entweder  $\ln n$  bedeuten oder  $\log_b n$  für irgendein  $b$ , was nicht relevant ist.

# Logarithmusregeln

Für Logarithmen gibt es folgende Rechenregeln:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a (n \cdot m) = \log_a n + \log_a m$$

$$\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m$$

$$\log_a n^m = m \cdot \log_a n$$

$$\log_{a^b} n = \frac{1}{b} \cdot \log_a n$$

Mit folgenden Spezialfällen:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a a^n = n, \quad \log_a \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}.$$

# Potenzregeln

Für Potenzen gibt es folgende Rechenregeln:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Mit folgenden Spezialfällen:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 0^n = 0, \quad 1^n = 1, \quad a^{\log_a n} = n.$$

$0^0$  ist, soweit ich weiß, nicht definiert. Manchmal wird es aber trotzdem nach Lust und Laune als 0 oder 1 festgelegt.

# Wurzelregeln

Für Wurzeln gibt es folgende Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Mit den Spezialfällen:

$$\sqrt[1]{a} = a \quad \sqrt[n]{1} = 1 \quad \sqrt[n]{0} = 0 \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$



Wurzelregeln sind eigentlich völlig nutzlos. Am besten ist es, wenn man Wurzeln  $\sqrt[n]{a}$  als Potenzen  $a^{\frac{1}{n}}$  schreibt und mit den Potenzregeln rechnet ;-)

z.B.:

$$(\text{ld } n)^2 < n \iff \text{ld } n < n^{1/2} .$$

1. Wieso gelten für beliebige  $a, b, m, n \in \mathbb{R}^+$  mit  $a, b \neq 1$  folgende Gleichungen?
  - 1.1  $n^{\log_b m} = m^{\log_b n}$ ,
  - 1.2  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ,
  - 1.3  $\log_b(n + m) = \log_b n + \log_b(1 + \frac{m}{n})$ .
2. Was ist  $\sqrt[2/3]{4}$ ?

1. 1.1  $n^{\log_b m} = b^{\log_b(n^{\log_b m})} = b^{(\log_b m) \cdot (\log_b n)} = b^{\log_b(m^{\log_b n})} = m^{\log_b n}.$

1.2 Für ein beliebiges  $c > 0$  mit  $c \neq 1$  gilt:  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\frac{\log_c a}{\log_c b}} = \frac{1}{\log_b a}.$  Am einfachsten wählt man  $c = b$  und erhält:

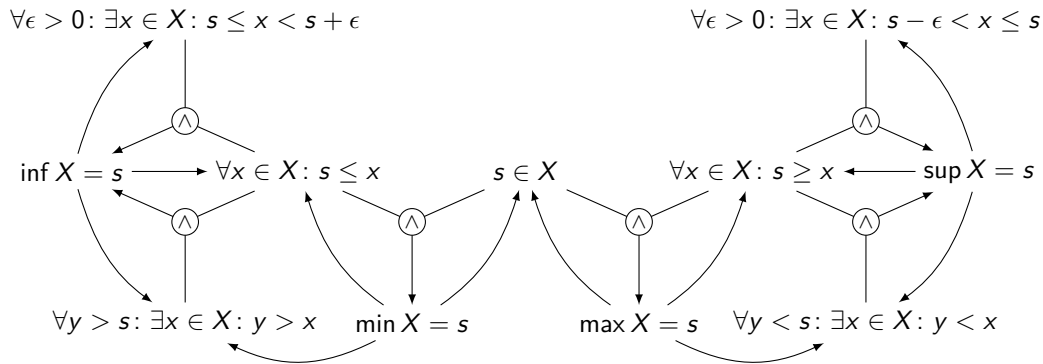
$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

1.3  $\log_b(n + m) = \log_b\left(n \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right)\right) = \log_b n + \log_b\left(1 + \frac{m}{n}\right).$

2.  ${}^{2/3}\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2/3}} = 4^{\frac{3}{2}} = 4^{3 \cdot \frac{1}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8.$

# Implikationsgraph für inf, min, sup und max

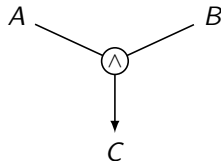
Für einen angeordneten Körper  $K$ , eine nichtleere Teilmenge  $X \subset K$  und ein  $s \in K$  gelten folgende Implikationen.



- Die Pfeile der letzten zwei Implikationsgraphen haben folgende Bedeutungen:



$$A \implies B$$



$$(A \wedge B) \implies C$$

- Als angeordnete Körper kommen bei uns nur  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  infrage!
- Für jede beschränkte Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}$  gilt  $\sup, \inf \in \mathbb{R}$ .

- ▶  $\mathbb{Q}$  besitzt beschränkte Teilmengen, die kein Supremum oder Infimum in  $\mathbb{Q}$  haben. Beispielsweise besitzt die Menge  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$  kein Supremum in  $\mathbb{Q}$ , da das Supremum  $\sqrt{2}$  nicht in  $\mathbb{Q}$  enthalten ist.
- ▶ Aus der  $\epsilon$ -Charakterisierung des Supremums folgt

$$\forall \epsilon > 0: \exists x \in X: \sup X - \epsilon < x \leq \sup X$$

für eine nichtleere Teilmenge  $X \subset K$  eines angeordneten Körpers  $K$ , denn für  $s := \sup X$  sind die Bedingungen  $\forall x \in X: s \geq x$  und  $\sup X = s$  trivialerweise erfüllt.

- ▶ Analog gilt:

$$\forall \epsilon > 0: \exists x \in X: \inf X \leq x < \inf X + \epsilon.$$

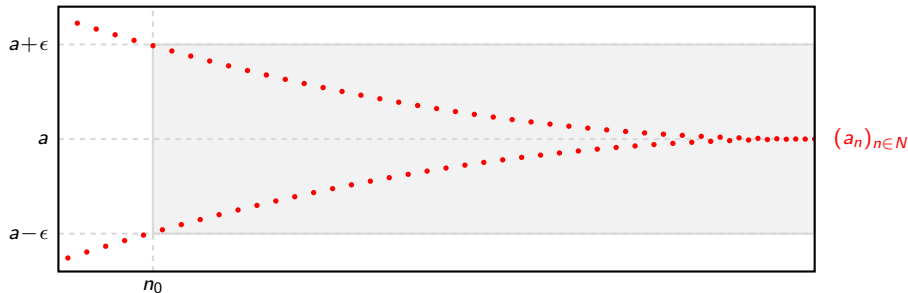
# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

# Grenzwert einer Folge

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \underbrace{|a_n - a|}_{a - \epsilon < a_n < a + \epsilon} < \epsilon$$



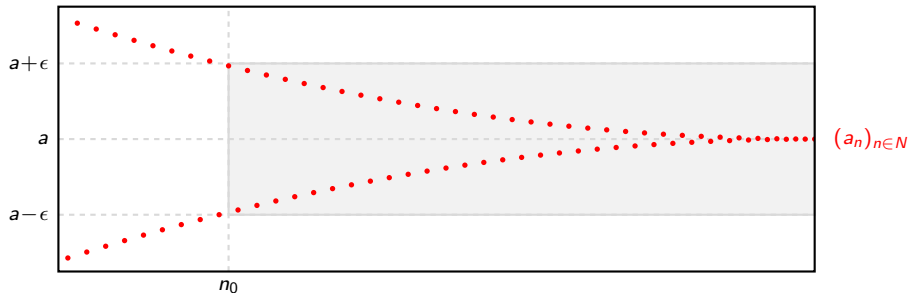
Man schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .



# Grenzwert einer Folge

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \underbrace{|a_n - a|}_{a - \epsilon < a_n < a + \epsilon} < \epsilon$$

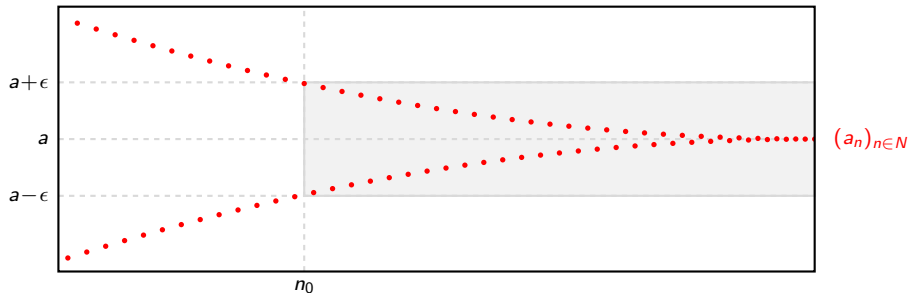


Man schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

# Grenzwert einer Folge

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \underbrace{|a_n - a| < \epsilon}_{a - \epsilon < a_n < a + \epsilon}$$

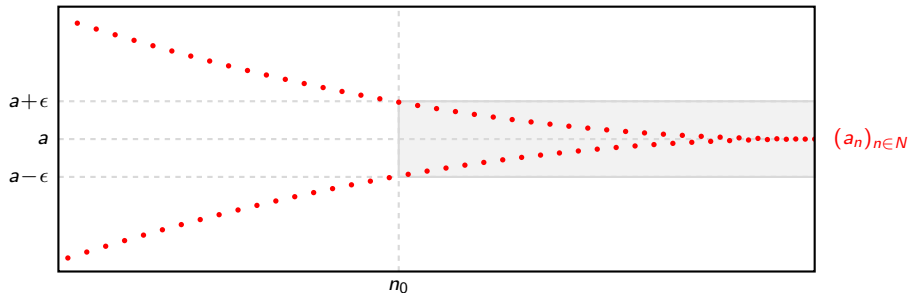


Man schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

# Grenzwert einer Folge

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \underbrace{|a_n - a|}_{a - \epsilon < a_n < a + \epsilon} < \epsilon$$

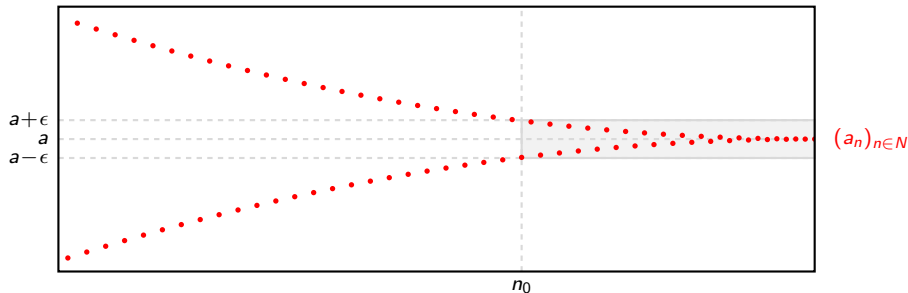


Man schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

# Grenzwert einer Folge

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \underbrace{|a_n - a|}_{a - \epsilon < a_n < a + \epsilon} < \epsilon$$



Man schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

# Beweisen von Konvergenz und Divergenz

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent. Eine *divergente* Folge kann uneigentlich gegen  $\infty$  oder  $-\infty$  konvergieren oder auch nicht. Folgende Aussagen helfen bei Beweisen:

1.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ), falls:

$$\forall \epsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \underbrace{|a_n - a|}_{a - \epsilon < a_n < a + \epsilon} < \epsilon.$$

2.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert uneigentlich gegen  $\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ), falls:

$$\forall K > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: a_n > K.$$

3.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert uneigentlich gegen  $-\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ), falls:

$$\forall K > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \underbrace{-a_n}_{a_n < -K} > K.$$

# Widerlegen von Konvergenz und Divergenz

Durch Negieren der Formeln auf der letzten Folie erhält man:

1.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert, falls:

$$\forall a \in \mathbb{R}: \exists \epsilon > 0: \forall n_0 \in \mathbb{N}: \exists n \geq n_0: \underbrace{|a_n - a| \geq \epsilon}_{a_n \leq a - \epsilon \text{ oder } a_n \geq a + \epsilon}.$$

2.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nicht uneigentlich gegen  $\infty$ , falls:

$$\exists K > 0: \forall n_0 \in \mathbb{N}: \exists n \geq n_0: a_n \leq K.$$

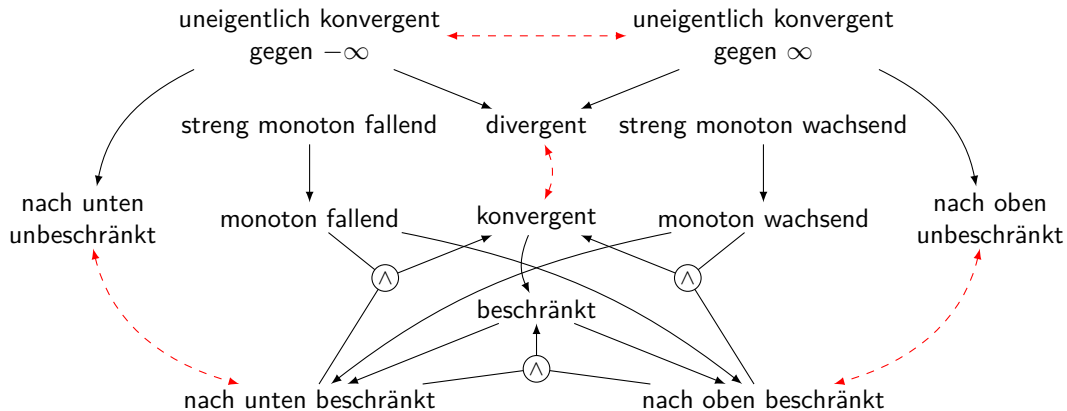
3.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nicht uneigentlich gegen  $-\infty$ , falls:

$$\exists K > 0: \forall n_0 \in \mathbb{N}: \exists n \geq n_0: \underbrace{-a_n < K}_{a_n > -K}.$$

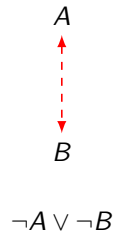
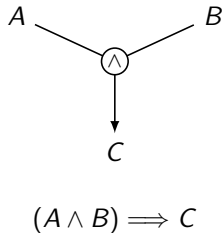
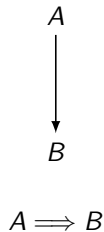
Die Aussagen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  schließen sich gegenseitig aus, d.h. sobald eine von ihnen gilt kann man davon ausgehen, dass die anderen zwei nicht gelten können.

# Implikationsgraph für reelle Zahlenfolgen

Für eine beliebige reelle Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt:



Die Pfeile im letzten Implikationsgraph haben folgende Bedeutungen:



$\neg A \vee \neg B$  heißt, dass die Aussagen  $A$  und  $B$  nicht gleichzeitig gelten können, d.h.  $A$  und  $B$  schließen sich gegenseitig aus.



# Themenübersicht

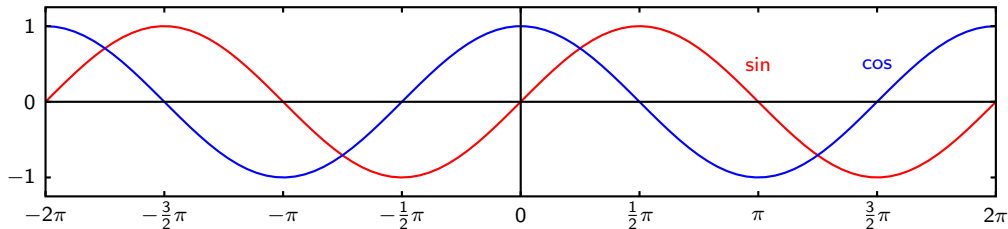
1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
<b>3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen</b>	<b>33</b>
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

# Sinus und Kosinus

Wertetabelle:

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\varphi$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Graphen:



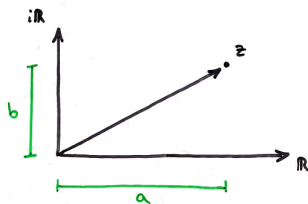
# Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist definiert als

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Die **imaginäre Einheit**  $i$  besitzt die Eigenschaft  $i^2 = -1$ .

Reelle Zahlen lassen sich als Punkte auf einer Zahlengerade veranschaulichen. Eine komplexe Zahl  $z = a + bi$  wird dagegen als Punkt  $(a, b)$  auf der **Gauß'schen Zahlenebene** dargestellt.



$\operatorname{Re}(z) = a$  wird **Realanteil** und  $\operatorname{Im}(z) = b$  **Imaginäranteil** von  $z$  genannt. Wegen  $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$  gilt  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .

# Betrag komplexer Zahlen

Sei  $z \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl mit  $z = a + bi$ .

- ▶  $\bar{z} = a - bi$  ist die zu  $z$  **konjugiert-komplexe** Zahl.
- ▶  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 - (bi)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$  ist der **Betrag** von  $z$ .
- ▶ Bei Summen oder Differenzen im Betrag benutzt man die Dreiecksungleichungen. Für beliebige komplexe Zahlen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gelten die **Dreiecksungleichungen**:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

„umgekehrte Dreiecksungleichung“      „normale Dreiecksungleichung“

egal, ob + oder -

- ▶ Bei Produkten und Quotienten kann man die Beträge einfach reinziehen, d.h.:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \text{und} \qquad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

- ▶ Wegen  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  gilt alles, was für komplexe Zahlen gilt, auch für reelle Zahlen. Die Dreiecksungleichungen sind da keine Ausnahme.
- ▶  $\mathbb{C}$  ist im Gegensatz zu  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  kein angeordneter Körper. Man kann komplexe Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  nicht mit  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  oder  $\geq$  vergleichen.
- ▶ Der Betrag einer komplexen Zahl ist jedoch immer eine (positive) reelle Zahl. Beträge komplexer Zahlen kann man also sehr wohl miteinander vergleichen!

# Elementare Operationen (ohne Division)

Für komplexe Zahlen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $z_1 = a_1 + b_1i$  und  $z_2 = a_2 + b_2i$  sind folgende Operationen definiert.

- ▶ Addition:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

- ▶ Subtraktion:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

- ▶ Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

- ▶ Division:

Dürft ihr gleich selbst herleiten ;-).

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$  und  $z_2 \neq 0$ .  
Was ist die algebraische Form von

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

in Abhängigkeit von  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  und  $b_2$ ?

Sei  $z_3 = a_3 + b_3 i$ . Es muss gelten  $z_1 = z_2 \cdot z_3$ , d.h.:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i) \cdot (a_3 + b_3 i) = \underbrace{(a_2 a_3 - b_2 b_3)}_{=a_1} + \underbrace{(a_2 b_3 + a_3 b_2)}_{=b_1} i$$

Aus dem Gleichungssystem

$$a_2 a_3 - b_2 b_3 = a_1$$

$$a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_1$$

folgen die eindeutigen Werte  $a_3 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$  und  $b_3 = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ . Das ergibt:

$$z_3 = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left( \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) i$$



Die Formel für die Division zweier komplexer Zahlen kann man sich sehr einfach merken. Man muss nur den Bruch  $\frac{z_1}{z_2}$  um  $\overline{z_2}$  erweitern und vereinfachen.

Man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} \\ &= \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left( \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) i.\end{aligned}$$

# Elementare Operationen (Zusammenfassung)

Für komplexe Zahlen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $z_1 = a_1 + b_1 i$  und  $z_2 = a_2 + b_2 i$  sind folgende Operationen definiert.

- Addition:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

- Subtraktion:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

- Multiplikation:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

- Division:

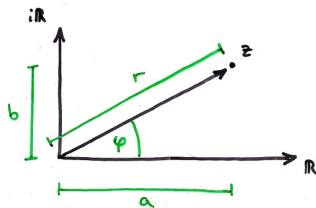
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left( \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) i.$$

# Polarform

Jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  lässt sich eindeutig durch Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  mit  $r, \varphi \in \mathbb{R}$  und  $r \geq 0$  darstellen. Dabei wird  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  die **Länge** und  $\varphi$  der **Winkel** von  $z$  genannt. Der Polarform liegt die **Euler'sche Formel**  $e^{xi} = \cos x + i \sin x$  zugrunde. Aus ihr folgt die Beziehung

$$re^{\varphi i} = a + bi$$

mit  $a = r \cos \varphi$  und  $b = r \sin \varphi$ .



Der Winkel  $\varphi$  wird in **Bogenmaß** (Radian) und nicht in **Gradmaß** (Grad) gemessen. Eine Umdrehung ( $360^\circ$ ) entspricht genau  $2\pi$ .

1. Was ist die algebraische Form folgender komplexen Zahlen?

$$2e^{\pi i}, \quad e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad 3e^{\frac{\pi}{2}i}, \quad 2e^{2\pi i}.$$

2. Was ist die Polarform folgender komplexen Zahlen?

$$1 - i, \quad 2 + 2i, \quad -5, \quad 3i, \quad 3i - 3$$

3. Was ist die algebraische Form von  $e^{\pi i + 1}$ ?

4. Was sind Winkel und Länge von  $e^{(3-2i)i}$ ?

*Hinweis:* Benutze die Wertetabelle auf Folie 34.

1.  $-2, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -1 + i, 3i, 2.$

2.  $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}, 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, 5e^{\pi i}, 3e^{\frac{\pi}{2}i}, 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$

3.  $e^{\pi i+1} = e \cdot e^{\pi i} = e \cdot (-1) = -e.$

4.  $e^{(3-2i)i} = e^{3i-2i^2} = e^{2+3i} = e^2 \cdot e^{3i}.$

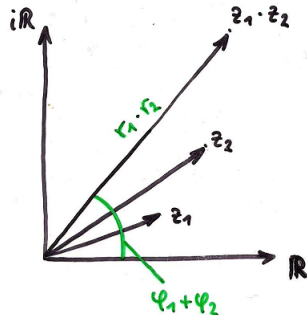
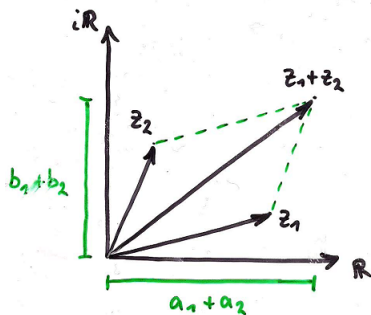
Länge:  $e^2$

Winkel: 3

# Multiplikation in Polarform

Für komplexe Zahlen  $z_1 = r_1 \cdot e^{\varphi_1 i}$  und  $z_2 = r_2 \cdot e^{\varphi_2 i}$  gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i}.$$

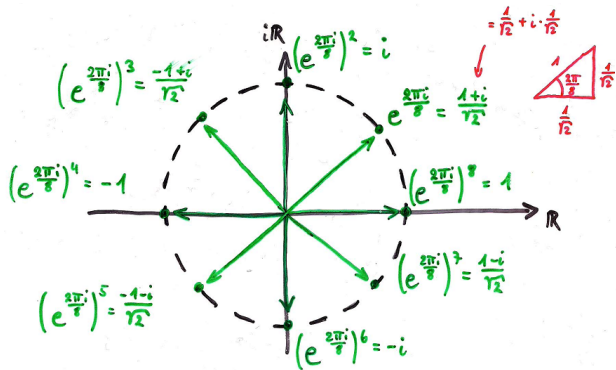


Die Polarform macht nur beim Multiplizieren, Potenzieren, Dividieren oder Radizieren (Wurzelziehen) von komplexen Zahlen Sinn. Für Addition und Subtraktion sollte man die algebraische Form benutzen.



# Beispiel

Die komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{2\pi}{8}i}$  hat Länge 1. Die Zahlen  $z, z^2, z^3, z^4, \dots$  sind alle auf dem sogenannten **komplexen Einheitskreis**:



Gegeben sei die komplexe Zahlenfolge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $z_0 = 0$  und  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ .

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (z_0, z_1, z_2, z_3, \dots)$$

Diagram illustrating the sequence definition:  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 0^2 + c = c$ ,  $z_2 = c^2 + c$ ,  $z_3 = (c^2 + c)^2 + c$ .

Die Menge  $\{c \in \mathbb{C} \mid (z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ ist beschränkt}\}$  wird **Mandelbrotmenge** genannt und ist einfach verdammt schön.

Tolle Webseite zum Rumspielen und Nachlesen:

[www.renatofonseca.net/mandelbrotset.php](http://www.renatofonseca.net/mandelbrotset.php)

Übrigens: Diese Menge hat nichts mit Weihnachtsgebäck zu tun. Sie wurde nach dem Mathematiker **Benoit Mandelbrot** benannt.

# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
<b>4. Reihen</b>	<b>51</b>
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

# Konvergenzkriterien

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe (oder reelle) Zahlenfolge.

- **Nullfolgenkriterium.** Es gilt:

$$a_n \text{ konvergiert nicht gegen Null} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert}$$

- **Majoranten- und Minorantenkriterium.** Sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge mit  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq b_n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergiert} &\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert} &\implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergiert} \end{aligned}$$

Man nennt dann  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  eine **Majorante** von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine **Minorante** von  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . Auf dem nächsten Info-Block sind potentielle Majoranten und Minoranten aufgelistet.

# Konvergenzkriterien

- **Quotientenkriterium.** Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  existiert und  $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: a_n \neq 0$  erfüllt, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert}$$

- **Wurzelkriterium.** Es gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert}$$

- **Leibniz-Kriterium.** Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle, monoton fallende Zahlenfolge ist, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \implies \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ konvergiert}$$

Folgende Reihen konvergieren und können als Majoranten benutzt werden:

- ▶  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  (konvergiert für  $|z| < 1$ ),
- ▶  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ,
- ▶  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  (konvergiert für  $s \in \mathbb{Q}, s \geq 2$ ),
- ▶  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  (konvergiert gegen  $e$ ),
- ▶  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  (konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$  gegen  $e^z$ ) und
- ▶  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

Folgende Reihen divergieren und können als Minoranten benutzt werden:

- ▶  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  (divergiert für  $|z| \geq 1$ ) und
- ▶  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ .

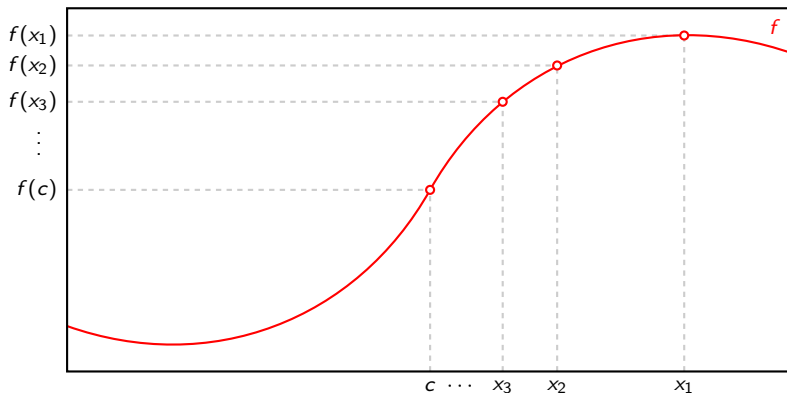
# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
<b>5. Stetigkeit</b>	<b>55</b>
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

# Definition: Folgencharakterisierung von Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig** in  $c \in D$ , falls gilt:

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c).$$

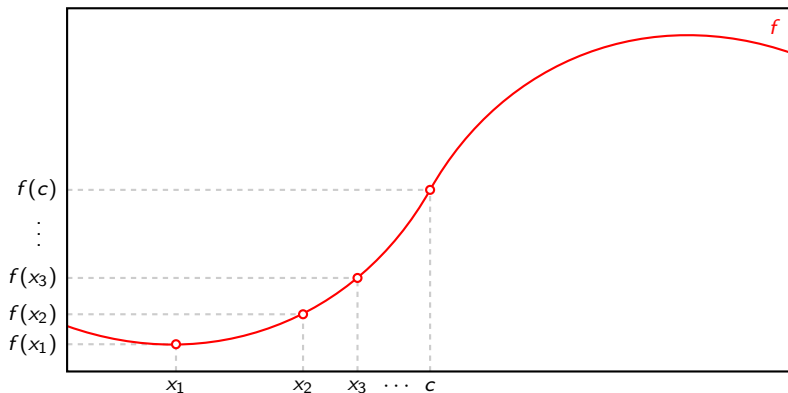




## Definition: Folgencharakterisierung von Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig** in  $c \in D$ , falls gilt:

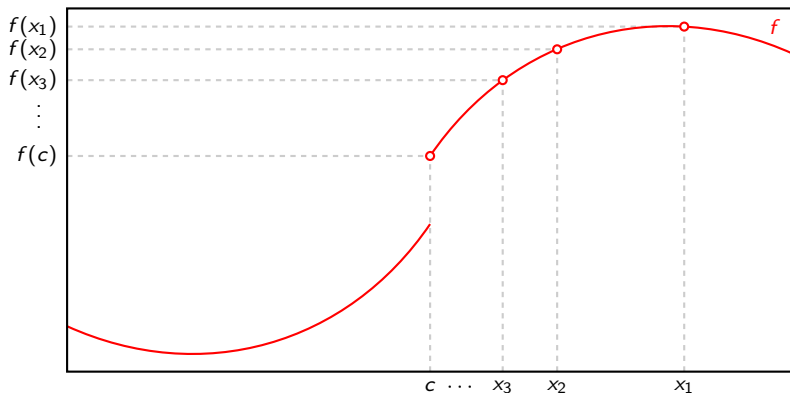
$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c).$$



## Definition: Folgencharakterisierung von Unstetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **unstetig** in  $c \in D$ , falls gilt:

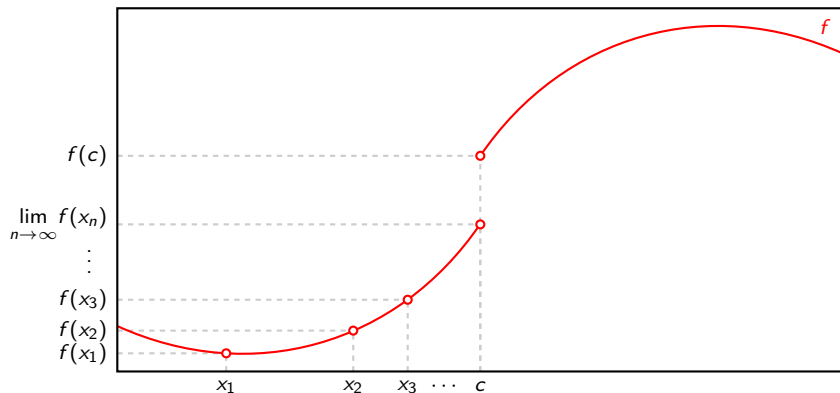
$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(c).$$



## Definition: Folgencharakterisierung von Unstetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **unstetig** in  $c \in D$ , falls gilt:

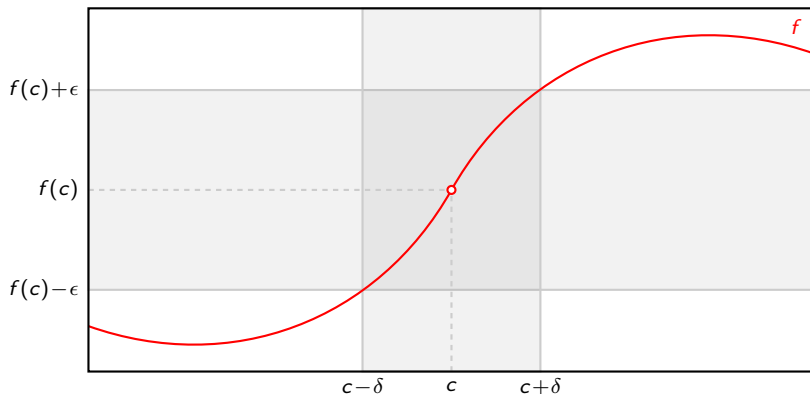
$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(c).$$



## Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $c \in D$ , wenn gilt:

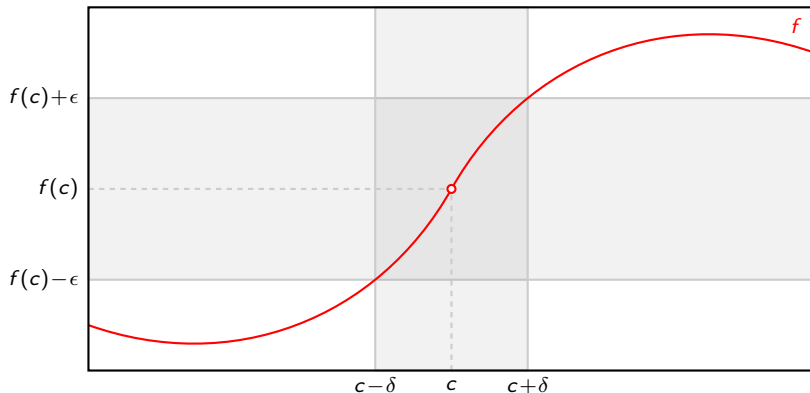
$$\forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$



## Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $c \in D$ , wenn gilt:

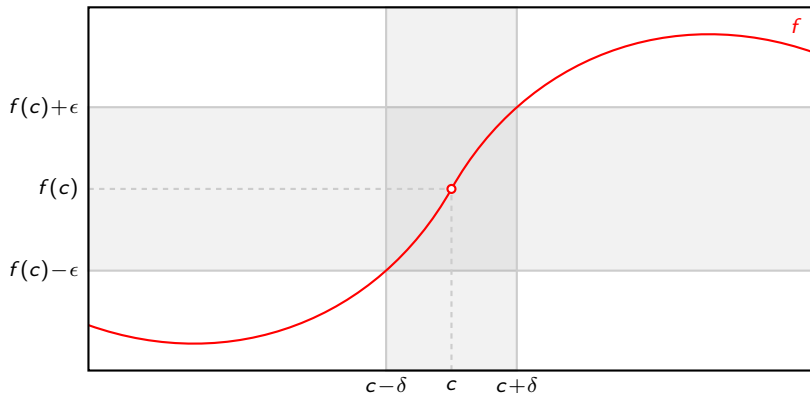
$$\forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$



# Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $c \in D$ , wenn gilt:

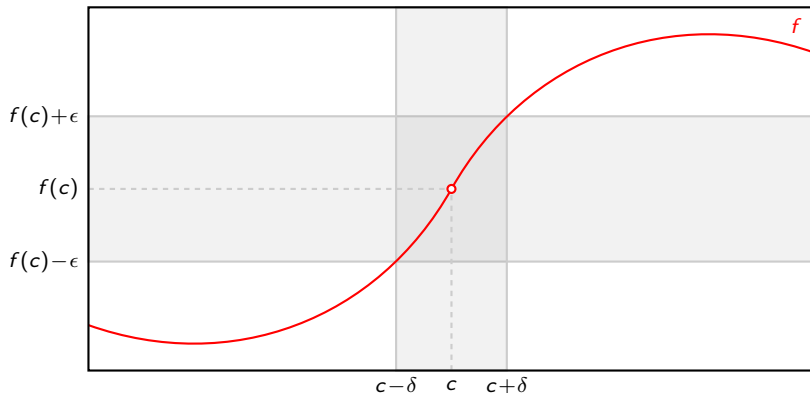
$$\forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$



# Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $c \in D$ , wenn gilt:

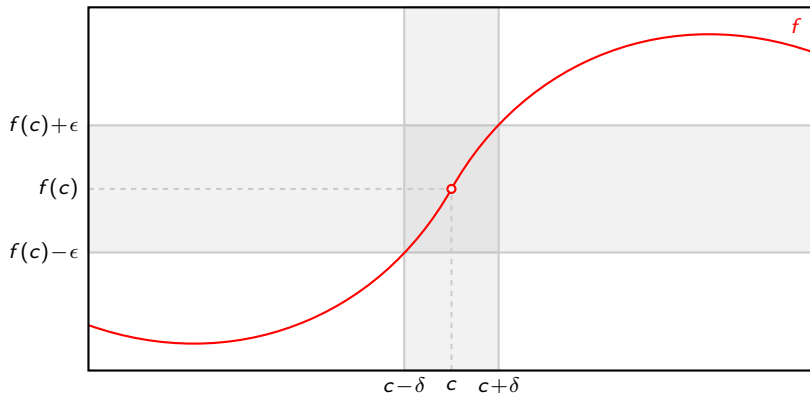
$$\forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$



# Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $c \in D$ , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

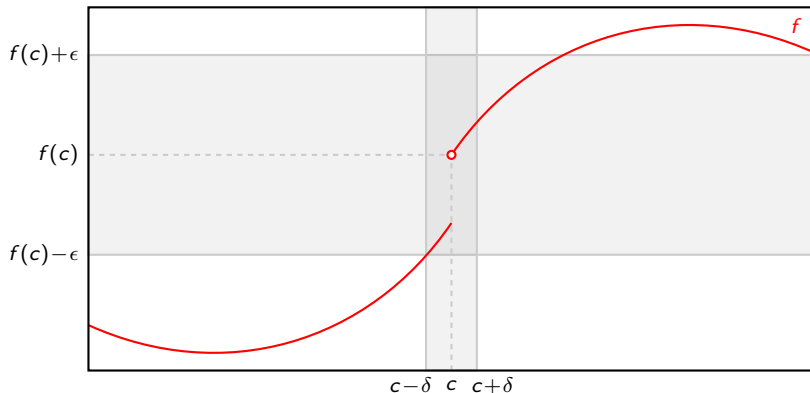




## Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Unstetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann **unstetig** in  $c \in D$ , wenn gilt:

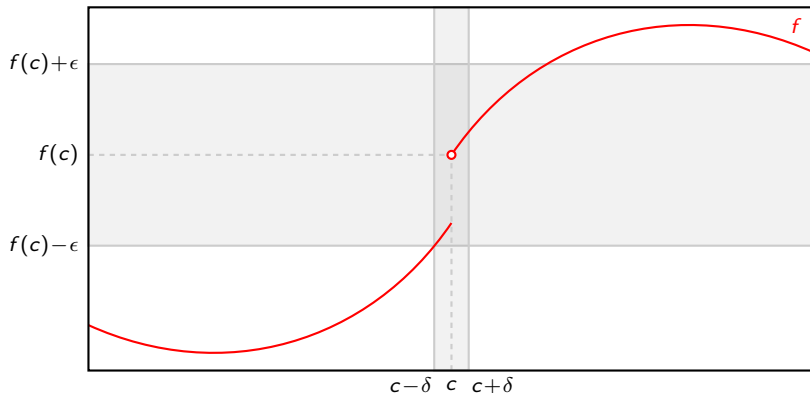
$$\exists \epsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x \in D: |x - c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \epsilon.$$



## Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Unstetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann **unstetig** in  $c \in D$ , wenn gilt:

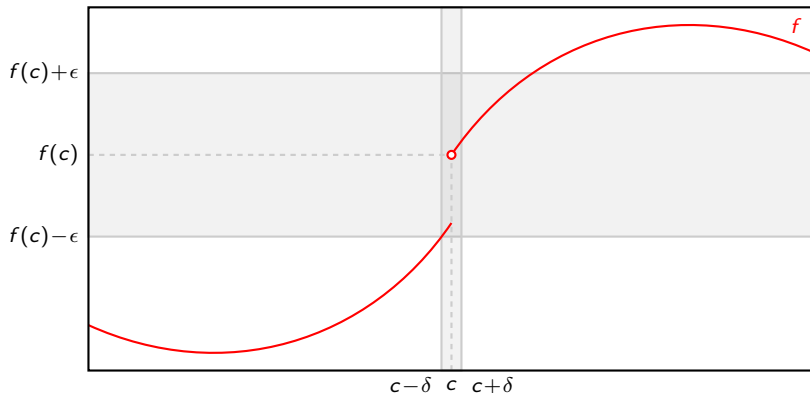
$$\exists \epsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x \in D: |x - c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \epsilon.$$



## Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Unstetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann **unstetig** in  $c \in D$ , wenn gilt:

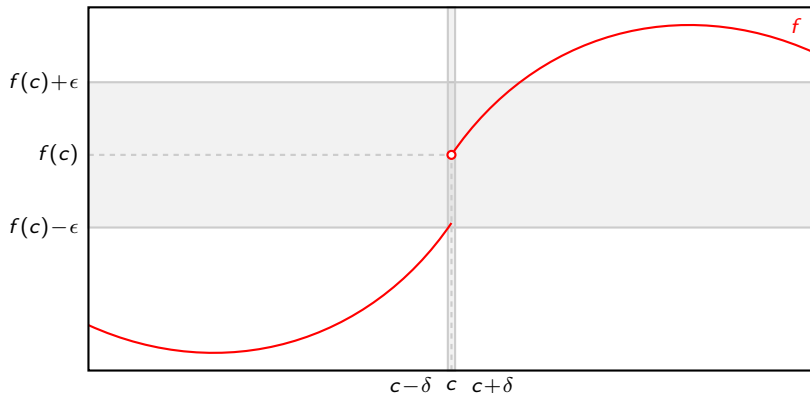
$$\exists \epsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x \in D: |x - c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \epsilon.$$



## Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Unstetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann **unstetig** in  $c \in D$ , wenn gilt:

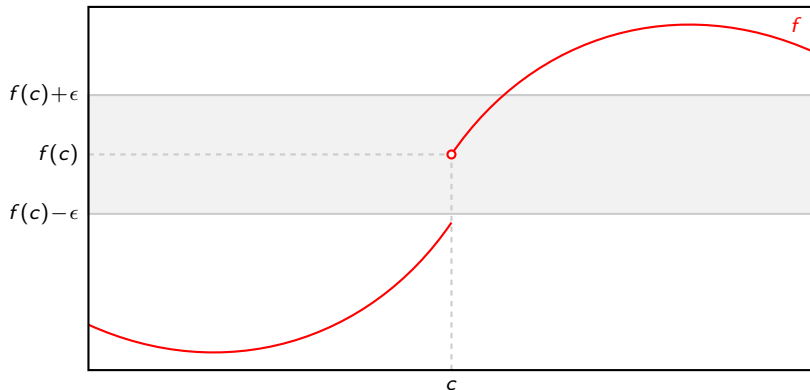
$$\exists \epsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x \in D: |x - c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \epsilon.$$



## Satz: $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung von Unstetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann **unstetig** in  $c \in D$ , wenn gilt:

$$\exists \epsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x \in D: |x - c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \epsilon.$$



Für  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$  genau dann, wenn gilt:

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Um zu zeigen, dass  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  nicht existiert, reicht es zwei Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu finden mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ .

 „ $-\infty = -\infty$ “ und „ $\infty = \infty$ “ sind auch ok!

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  reelle Zahlen mit  $a \leq b$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\forall y \in [\min \{f(a), f(b)\}, \max \{f(a), f(b)\}]: \exists x \in [a, b]: f(x) = y.$$

# Themenübersicht

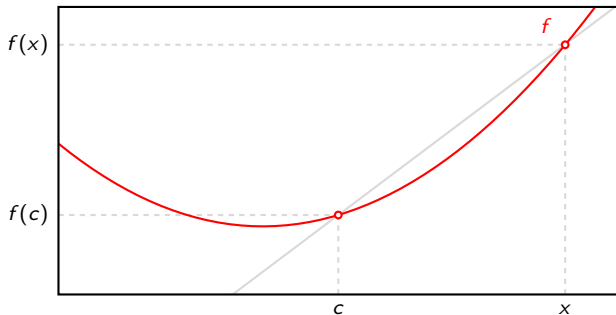
1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
<b>6. Differentiation</b>	<b>72</b>
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161



Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar im Punkt**  $c \in I$ , falls

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

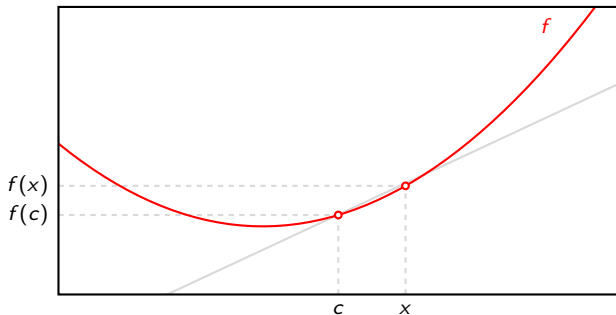
existiert. Graphisch:



Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar im Punkt**  $c \in I$ , falls

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existiert. Graphisch:

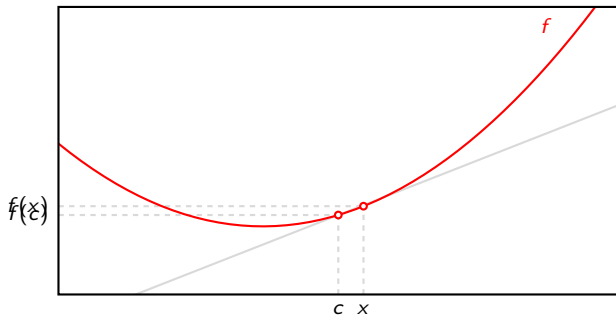


# Ableitung

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar im Punkt**  $c \in I$ , falls

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existiert. Graphisch:

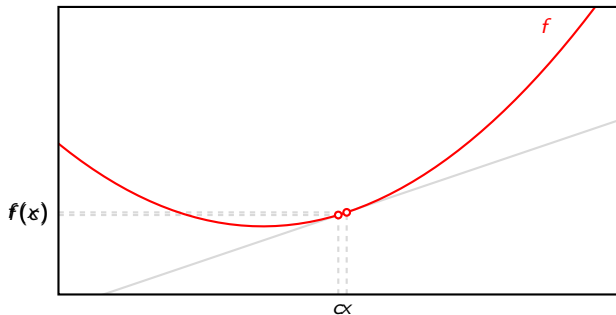


# Ableitung

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar im Punkt**  $c \in I$ , falls

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

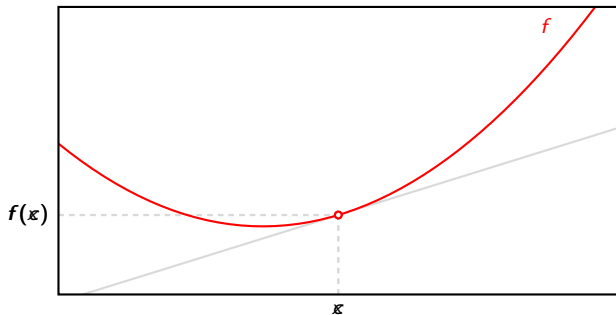
existiert. Graphisch:



Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar im Punkt**  $c \in I$ , falls

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existiert. Graphisch:



# Ableitungsregeln

Für auf ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$  gelten folgende Ableitungsregeln.

$f(x)$	$c$	$x^c$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\ln(x)$
$f'(x)$	0	$cx^{c-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$e^x$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{x}$

► **Summenregel:**

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Beispiel:  $(x^3 + x)' = 3x^2 + 1$ .

► **Faktorregel:**

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Beispiel:  $(5x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$ .

# Ableitungsregeln

## ► Produktregel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

$$\text{Beispiel: } (\sin(x) \cos(x))' = \sin'(x) \cos(x) + \sin(x) \cos'(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2.$$

## ► Quotientenregel:

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

$$\text{Beispiel: } \left( \frac{\ln(x)}{x^2} \right)' = \frac{\ln'(x)x^2 - \ln(x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{x - \ln(x)2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

## ► Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

$$\text{Beispiel: } (\sin(x^2))' = \sin'(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

- ▶ Wir benutzen die übliche Notation  $f'$  für die Ableitung  $\frac{df}{dx}$  und  $f(x)$  für eine Funktion  $f$ .
- ▶ Die Definition von Potenzen ( $a^b = e^{b \ln(a)}$ ) hilft sehr bei Funktionen der Form  $f(x) = g(x)^{h(x)}$ . Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}(x^x)' &= (e^{x \ln x})' \\&= e^{x \ln x} (x \ln x)' \\&= e^{x \ln x} (x' \ln x + x (\ln x)') \\&= e^{x \ln x} (\ln x + 1) \\&= x^x (\ln x + 1).\end{aligned}$$



Wer das Ableiten in der Schule nicht richtig gelernt bzw. wieder vergessen hat, kann das mit den Aufgaben 1-7 in

[www.poenitz-net.de/Mathematik/5.Analysis/5.4.A.Ableitungsregeln.pdf](http://www.poenitz-net.de/Mathematik/5.Analysis/5.4.A.Ableitungsregeln.pdf)

nachholen. Sie sind vom Schwierigkeitsgrad her perfekt für Einsteiger!

## Zusatzaufgaben für Übermotivierte

1. Sei  $f(x) = e^{2x+1}$ . Zeige für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x+1}$ .
2. Sei  $f(x) = (e^x - 1)^2 - 1$ . Zeige für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x} - 2e^x$ .
3. Sei  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ . Zeige für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ .

*Infos:*

- Benutze vollständige Induktion.
- Für die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  einer Funktion  $f$  gilt:  $f^{(0)} = f$  und  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ .

1. Sei  $f(x) = e^{2x+1}$ . Zeige für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x+1}$ .

IA:  $f^{(0)}(x) = 2^0 e^{2x+1} = e^{2x+1} = f(x)$ .

IS: Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig mit  $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x+1}$ . Dann folgt:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \stackrel{\text{IV}}{=} (2^n e^{2x+1})' = 2^n (2x+1)' e^{2x+1} = 2^{n+1} e^{2x+1}.$$

2. Sei  $f(x) = (e^x - 1)^2 - 1$ . Zeige für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x} - 2e^x$ .

IA:  $f^{(0)}(x) = 2^0 e^{2x} - 2e^x = e^{2x} - 2e^x = (e^x - 1)^2 - 1 = f(x)$ .

IS: Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig mit  $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x} - 2e^x$ . Dann folgt:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \stackrel{\text{IV}}{=} (2^n e^{2x} - 2e^x)' = 2^n e^{2x} (2x)' - 2e^x = 2^{n+1} e^{2x} - 2e^x.$$

3. Sei  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ . Zeige für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ .

IA:  $f^{(0)}(x) = (-1)^0 \cdot \frac{0!}{(x+1)^{0+1}} = \frac{1}{x+1} = f(x)$ .

IS: Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig mit  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left( f^{(n)}(x) \right)' \stackrel{\text{IV}}{=} \left( (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \right)' \\ &= \left( (-1)^n \cdot n! \cdot (x+1)^{-(n+1)} \right)' \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot (-(n+1)) \cdot (x+1)^{-(n+2)} \cdot (x+1)' \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot (-1) \cdot (n+1) \cdot (x+1)^{-(n+2)} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}. \end{aligned}$$

# Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Für eine beliebige Funktion  $f: A \rightarrow B$  gilt:

- $f$  injektiv  $\iff$  Für jedes  $y \in B$  gibt es höchstens ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$ .
- $f$  surjektiv  $\iff$  Für jedes  $y \in B$  gibt es mindestens ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$ .
- $f$  bijektiv  $\iff$  Für jedes  $y \in B$  gibt es genau ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$ .
- $\iff$   $f$  injektiv und surjektiv.

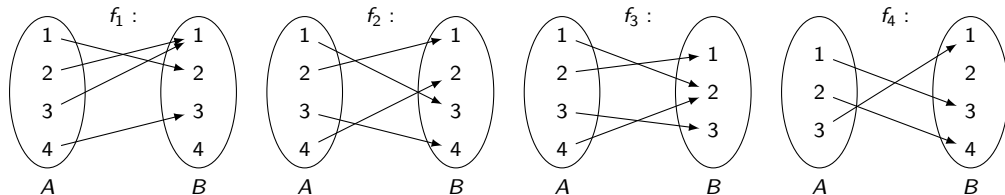
Falls  $f$  differenzierbar ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \text{ für alle inneren Punkte } x \in A &\implies f \text{ injektiv} \\ f'(x) < 0 \text{ für alle inneren Punkte } x \in A &\implies f \text{ injektiv} \end{aligned}$$

falls  $f$  stetig ist, dann kann man oft die Surjektivität mit dem Zwischenwertsatz beweisen.

# Einfache Beispiele

Seien  $f_1, f_2, f_3, f_4: A \rightarrow B$  folgende Funktionen.



- $f_1$  ist weder injektiv noch surjektiv.
- $f_2$  ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.
- $f_3$  ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- $f_4$  ist injektiv, aber nicht surjektiv.

- ▶ Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$  ist nicht injektiv, weil es zwei  $x \in \mathbb{R}$  gibt mit  $f(x) = 1$ , nämlich  $x = -1$  und  $x = 1$ . Sie ist auch nicht surjektiv, weil es kein  $x \in \mathbb{R}$  gibt mit  $f(x) = -1$ .
- ▶ Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 2x + 5$  ist bijektiv, weil es für jedes  $y \in \mathbb{R}$  genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = y$  gibt, nämlich  $x = \frac{y-5}{2}$ . Dies folgt aus der Äquivalenz

$$2x + 5 = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{y - 5}{2}.$$



Welche Eigenschaften besitzen folgende Funktionen  $f_1, f_2, f_3, f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ?

- ▶  $f_1(x) = |x|$ .
- ▶  $f_2(x) = \sin x$ .
- ▶  $f_3(x) = e^x$ .
- ▶  $f_4(x) = x^3$ .

Begründe deine Antworten ganz kurz!

- ▶  $f_1$  ist nicht injektiv, da  $|-1| = 1 = |1|$ . Wegen  $|x| \geq 0$  ist  $f_1$  auch nicht surjektiv, da es kein  $x \in \mathbb{R}$  gibt mit  $|x| = -1$ .
- ▶  $f_2$  ist nicht injektiv, da  $\sin(0) = 0 = \sin(2\pi)$ . Wegen  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ist  $f_2$  auch nicht surjektiv, da es kein  $x \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\sin x = 2$ .
- ▶  $f_3$  ist injektiv, denn für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $(e^x)' = e^x > 0$ .  $f_3$  ist nicht surjektiv, da es kein  $x \in \mathbb{R}$  gibt mit  $e^x = 0$ .
- ▶  $f_4$  ist bijektiv, weil es für jedes  $y \in \mathbb{R}$  genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x^3 = y$  gibt, nämlich

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{falls } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Ist  $f: A \rightarrow B$  bijektiv, dann besitzt sie eine eindeutige Umkehrfunktion  $f^{-1}: B \rightarrow A$  mit

$$f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a$$

für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$ . Daraus folgt:

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad (\forall a \in A) \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b \quad (\forall b \in B).$$

Merkt euch bitte diese 3 Eigenschaften oder schreibt sie euch auf!

Es gilt  $(f^{-1})^{-1} = f$ , d.h. wenn  $f^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $f$  ist, dann ist  $f$  automatisch die Umkehrfunktion von  $f^{-1}$ . Man sagt auch, dass  $f$  und  $f^{-1}$  **invers** zueinander sind.

Die Umkehrfunktion von  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $f(x) = e^x$  ist  $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f^{-1}(x) = \ln x$ .

Es gilt

$$e^a = b \iff \ln b = a,$$

$\ln(e^a) = a$  und  $e^{\ln b} = b$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  und alle  $b \in \mathbb{R}^+$ .

# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
<b>7. Differentialrechnung und Anwendung</b>	<b>94</b>
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

# Satz von l'Hospital

Seien  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  und  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0$  ( $\forall x \in (a, b)$ ) und entweder

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty.$$

Falls  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert gilt, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

# Taylor-Polynom und -Reihe

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $c \in I$ .

1. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $f$   $n$ -mal stetig differenzierbar. Dann ist

$$T_n f(x; c) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

das  $n$ -te Taylor-Polynom von  $f$  in  $c$ .

2. Sei  $f$  unendlich oft stetig differenzierbar. Dann ist

$$T_\infty f(x; c) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

die Taylor-Reihe von  $f$ .



# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
<b>8. Integration</b>	<b>97</b>
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Eine differenzierbare Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Stammfunktion** von  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , falls  $F' = f$  gilt.

Seien  $a, c \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq -1$ . Einige spezielle Stammfunktionen sind folgende.

$f(x)$	$c$	$x^a$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\ln x$
$F(x)$	$cx$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\ln  x $	$e^x$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$x \ln x - x$

# Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $c \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann gelten folgende Regeln.

1. Linearität:

$$\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx.$$

2. Additivität:

$$\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

3. Monotonie:

$$\text{Wenn } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b], \text{ dann } \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

4. Zerlegbarkeit:

$$\text{Wenn } c \in (a, b), \text{ dann } \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt:

1. Die Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

ist immer eine Stammfunktion von  $f$ .

2. Für jede Stammfunktion  $F$  von  $f$  gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_{x=a}^b.$$

*Info:*

Wir werden immer wieder die Notationen  $[F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a)$  und  $[F(x)]_{x=a} = F(a)$  benutzen.

# Partielle Integration

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = [f(x) \cdot g(x)]_{x=a}^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Beispiel:

$$\int_1^2 \ln x \cdot x \, dx = \int_1^2 \ln x \cdot \frac{1}{2} x^2 \, dx - \int_1^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \ln x \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=1}^2 - \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=1}^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

$\uparrow$   
 $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{2} x^2$

# Partielle Integration für Stammfunktionen

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\int f'(x) \cdot g(x) \, dx$  eine beliebige Stammfunktion von  $f'(x) \cdot g(x)$ . Dann ist

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

eine Stammfunktion von  $f(x) \cdot g'(x)$ .

Beispiel: Eine Stammfunktion von  $\ln x \cdot x$  ist:

$$\int \ln x \cdot x \, dx = \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x \, dx = \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \left( \ln x - \frac{1}{2} \right).$$

$\uparrow$   
 $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{2}x^2$

# Substitutionsregel

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy.$$

Wie kommt man intuitiv auf  $\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy$ ?

1. Ersetze überall  $g(x)$  durch  $y$ .
2. Schreibe  $\int_a^b \dots \, dx$  in  $\int_a^b \ddots_{y'} \, dy$  um und kürze alle übrigen  $x$  weg.
3. Wende  $g$  auf beide Grenzen  $a$  und  $b$  an.

Beispiel:

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3+1} \, dx = \int_0^1 x^2 e^y \frac{1}{3x^2} \, dy = \int_1^2 \frac{1}{3} e^y \, dy = \left[ \frac{1}{3} e^y \right]_{y=1}^2 = \frac{1}{3} (e^2 - e).$$

$\uparrow$   
 $y = x^3 + 1, y' = 3x^2$

# Substitutionsregel für Stammfunktionen

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\int f(y) \, dy$  eine beliebige Stammfunktion von  $f(y)$ . Dann ist

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \left[ \int f(y) \, dy \right]_{y=g(x)}$$

eine Stammfunktion von  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ .

Wie kommt man intuitiv auf  $\int f(y) \, dy$ ?

1. Ersetze überall  $g(x)$  durch  $y$ .
2. Schreibe  $\int \dots \, dx$  in  $\int \frac{\dots}{y'} \, dy$  um und kürze alle übrigen  $x$  weg.

Beispiel: Eine Stammfunktion für  $x^2 e^{x^3+1}$  ist:

$$\int x^2 e^{x^3+1} \, dx = \int x^2 e^y \frac{1}{3x^2} \, dy = \int \frac{1}{3} e^y \, dy = \left[ \frac{1}{3} e^y \right]_{y=x^3+1} = \frac{1}{3} e^{x^3+1}.$$

$\uparrow$   
 $y = x^3 + 1, y' = 3x^2$



# Typische Stammfunktionen

Hier sind nochmal einige Herleitungen von typischen Stammfunktionen.

- ▶ Stammfunktionen der Form  $\int f(x) \cdot f'(x) \, dx$  oder  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$  lassen sich mithilfe der Substitutionsregel mit  $y = f(x)$  berechnen. Man erhält:

$$\int f(x) \cdot f'(x) \, dx = \left[ \int y \, dy \right]_{y=f(x)} = \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=f(x)} = \frac{1}{2} f(x)^2,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \left[ \int \frac{1}{y} \, dy \right]_{y=f(x)} = [\ln |y|]_{y=f(x)} = \ln |f(x)|.$$

Ich vermute, dass ihr diese zwei Formeln direkt anwenden dürft, aber ich kann es leider nicht garantieren. Die erste Formel haben wir für  $f(x) = \sin(x)$  in der Übung hergeleitet und die zweite steht im Skript. Sicherheitshalber würde ich sie jedesmal neu herleiten. Gehen ja beide ganz schnell und man muss sich nur „Substitutionsregel mit  $y = f(x)$ “ merken :-)

# Typische Stammfunktionen

- Für Polynome gilt:

$$\int a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \, dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x.$$

- Für Stammfunktionen der Form  $\int \frac{c}{(x-b)^a} \, dx$  gilt:

$$\int \frac{c}{(x-b)^a} \, dx = \begin{cases} c \ln|x-b| & \text{falls } a = 1 \\ \frac{c(x-b)^{1-a}}{1-a} & \text{falls } a \neq 1. \end{cases}$$

- Für Stammfunktionen der Form  $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$  mit Polynomen  $p$  und  $q$  mit  $\deg(p) < \deg(q)$  liefert die **Partialbruchzerlegung** (siehe ab Folie 117) eine Darstellung der Form

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = \int \frac{c_1}{(x-b_1)^{a_1}} \, dx + \dots + \int \frac{c_n}{(x-b_n)^{a_n}} \, dx.$$

# Typische Stammfunktionen

- Für Stammfunktionen der Form  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$  mit Polynomen  $p$  und  $q$  mit  $\deg(p) \geq \deg(q)$  liefert die **Polynomdivision** (siehe ab Folie 109) eine Darstellung der Form

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

für zwei Polynome  $r$  und  $s$  mit  $\deg(r) < \deg(q)$ , so dass man mit Partialbruchzerlegung den Ausdruck  $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$  vereinfachen kann.

- Bei Stammfunktionen der Form  $\int \sqrt{x^2 + a} dx$ ,  $\int \sqrt{x^2 - a} dx$  oder  $\int \sqrt{a - x^2} dx$  für ein  $a > 0$  könnt ihr eine **trigonometrische Substitution** durchführen. YouTube und Google erklären euch gerne wie das geht.

Wer das Integrieren in der Schule nicht richtig gelernt bzw. wieder vergessen hat, kann das mit den Aufgaben 1-10 in

[www.poenitz-net.de/Mathematik/5.Analysis/5.5.A.Integralrechnung.pdf](http://www.poenitz-net.de/Mathematik/5.Analysis/5.5.A.Integralrechnung.pdf)

nachholen. Sie sind vom Schwierigkeitsgrad her perfekt für Einsteiger!

Für gegebene Polynome  $p, q \in K[x]$  über einem Körper  $K$  liefert die **Polynomdivision** von  $p$  durch  $q$  eindeutige Polynome  $r$  und  $s$  mit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad (\forall x \in K \setminus q^{-1}(0))$$

und  $0 \leq \deg(r) < \deg(q)$ .

- ▶ **Körper** sind z.B.  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Z}_n$  für  $n \in \mathbb{P}$  ( $n$  prim). Keine Körper sind dagegen  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}_n$  für  $n \notin \mathbb{P}$  ( $n$  nicht prim).

- ▶  $K[x]$  ist die Menge aller Polynome über  $K$ . Beispielsweise gilt für  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ :

$$\mathbb{Z}_2[x] = \{0, 1, x, x + 1, x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1, x^3, \dots\}$$

- ▶ Für eine Funktion  $f: D \rightarrow W$  und ein Element  $y \in W$  der Zielmenge ist

$$f^{-1}(y) = \{x \in D \mid f(x) = y\}$$

Die **Urbildmenge** von  $y$  in  $f$ . Entsprechend ist  $f^{-1}(0)$  die Menge aller Nullstellen von  $f$ . Beispielsweise gilt für  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(x) = x^2 - 1$ :  $f^{-1}(0) = \{-1, 1\}$ .

- ▶ Der **Grad**  $\deg(p)$  eines Polynoms  $p$  ist der höchste Exponent von  $x$  in  $p(x)$ , z.B.:

$$\deg(3x^4 - 2x^3 + x - 5) = 4.$$

## Beispiel

Für  $p(x) = 3x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 8x - 1$  und  $q(x) = x^2 - 3x + 1$  gilt:

$$\begin{array}{r} (3x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 8x - 1) : (x^2 - 3x + 1) = 3x^2 + 2x - 3. \\ \underline{-(3x^4 - 9x^3 + 3x^2)} \phantom{+ 8x - 1} \\ 2x^3 - 9x^2 + 8x \phantom{- 1} \\ \underline{-(2x^3 - 6x^2 + 2x)} \phantom{- 1} \\ -3x^2 + 6x - 1 \\ \underline{-(-3x^2 + 9x - 3)} \\ -3x + 2 \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\frac{3x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 8x - 1}{x^2 - 3x + 1} = 3x^2 + 2x - 3 + \frac{-3x + 2}{x^2 - 3x + 1},$$

d.h.  $r(x) = -3x + 2$  und  $s(x) = 3x^2 + 2x - 3$ .

# Faktorisierung von Polynomen

Analog zur Faktorisierung ganzer Zahlen, wie z.B. in

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2,$$

können auch Polynome faktorisiert werden.

Das Ziel der **Faktorisierung** von Polynomen ist es zu einem gegebenen Polynom  $p \in K[x]$  über einem Körper  $K$  Polynome  $p_1, \dots, p_n \in K[x]$  zu finden mit

$$p = p_1 \cdot \dots \cdot p_n.$$

Eine hilfreiche Aussage hierfür ist:

$$\begin{aligned} x_i \text{ ist Nullstelle von } p. & \iff (x - x_i) \text{ ist ein Faktor von } p. \\ & \iff \text{Es gibt ein Polynom } p' \text{ mit } p(x) = (x - x_i) \cdot p'(x). \end{aligned}$$

Das heißt, dass Polynome  $p_i$  mit  $\deg(p_i) = 1$  sehr leicht abgespaltet werden können, indem man eine Nullstelle  $x_i$  von  $p$  durch „scharfes Hinschauen“ (d.h. durch Ausprobieren) errät und dann  $p$  mit Polynomdivision durch  $(x - x_i)$  teilt.



- ▶ Die Faktorisierung von Polynomen über einem Körper ist, wie die Primfaktorzerlegung ganzer Zahlen, eindeutig.
- ▶ Für Polynome  $p_1, \dots, p_n$  über einem Ring (z.B.  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}_n$ ) gilt immer:

$$\deg(p_1 + \dots + p_n) \leq \max \{ \deg(p_1), \dots, \deg(p_n) \},$$

$$\deg(p_1 \cdot \dots \cdot p_n) \leq \deg(p_1) + \dots + \deg(p_n).$$

- ▶ Weil Körper nullteilerfrei sind, gilt für Polynome  $p_1, \dots, p_n$  über einem Körper (z.B.  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Z}_n$  für  $n$  prim) sogar:

$$\deg(p_1 \cdot \dots \cdot p_n) = \deg(p_1) + \dots + \deg(p_n).$$

- ▶ Eine Faktorisierung

$$p = p_1 \cdot \dots \cdot p_n$$

heißt **vollständig**, falls keines der Polynome  $p_1, \dots, p_n$  sich weiter faktorisieren lässt.

# Beispiel

Sei  $p$  ein Polynom über  $\mathbb{R}$  mit

$$p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12.$$

Aus  $p(x) = 2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$  und

The diagram shows the polynomial division process for  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ . A red bracket on the left labeled "Polynomdivision" groups the three steps. Green arrows indicate the flow from the original polynomial to the first division, then to the second, and finally to the third. Red text on the right identifies each root found.

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \qquad \leadsto x=1 \text{ Nullstelle} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = \underline{x^2 - 5x + 6} \quad \leadsto x=2 \text{ Nullstelle} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ (x^2 - 5x + 6) : (x-2) = x-3 \quad \leadsto x=3 \text{ Nullstelle} \end{array}$$

folgt die vollständige Faktorisierung von  $p$ :

$$p(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3).$$

Wie sieht die vollständige Faktorisierung der folgenden Polynome  $p$  aus?

1.  $p(x) = 2x^3 + 10x^2 + 6x - 18$  mit  $p \in \mathbb{R}[x]$ ,
2.  $p(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$  mit  $p \in \mathbb{R}[x]$ ,
3.  $p(x) = x^4 - 1$  mit  $p \in \mathbb{R}[x]$ ,
4.  $p(x) = x^4 - 1$  mit  $p \in \mathbb{C}[x]$ .

1.  $p(x) = 2(x - 1)(x + 3)^2$ .
2.  $p(x) = 3(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ .
3.  $p(x) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ .
4.  $p(x) = (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1)$ .

Seien  $p$  und  $q$  zwei Polynome mit  $\deg(p) < \deg(q)$ . Das Ziel der **Partialbruchzerlegung** ist es, die gebrochen rationale Funktion  $\frac{p(x)}{q(x)}$  als Summe von Brüchen der Form

$$\frac{c_i}{(x - b_i)^{a_i}}$$

mit Konstanten  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$  darzustellen.

Es gilt:

$$\frac{5x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x - 2} = \frac{3}{x - 2} + \frac{2}{x + 1} + \frac{-1}{(x + 1)^2}.$$

# Satz über die Existenz von Partialbruchzerlegungen

Seien  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl,  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  Polynome mit  $0 \leq \deg(p) < \deg(q) = n$ . Dann existieren Konstanten  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  und  $b_1, \dots, b_n \in q^{-1}(0)$  und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  mit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(x - b_i)^{a_i}} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)).$$

*Erinnerung:*  $q^{-1}(0)$  ist die Menge aller Nullstellen von  $q$ .

# Beweis (für Interessierte)

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach  $n$ .

## Induktionsanfang.

Für  $n = 1$  existieren  $p_0, q_0, q_1 \in \mathbb{C}$  mit  $q_1 \neq 0$ ,  $p(x) = p_0$  und  $q(x) = q_1x + q_0$ . Dann ist  $q^{-1}(0) = \left\{-\frac{q_0}{q_1}\right\}$  und für  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = -\frac{q_0}{q_1}$  und  $c_1 = \frac{p_0}{q_1}$  gilt:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0}{q_1x + q_0} = \frac{\frac{p_0}{q_1}}{x + \frac{q_0}{q_1}} = \frac{c_1}{(x - b_1)^{a_1}} = \sum_{i=1}^1 \frac{c_i}{(x - b_i)^{a_i}} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)).$$



## Induktionsschritt.

Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig.

Angenommen für beliebige Polynome  $p', q' \in \mathbb{C}[x]$  mit  $0 \leq \deg(p) < \deg(q) = n$  existieren Konstanten  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  und  $b_1, \dots, b_n \in q^{-1}(0)$  und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  mit

$$\frac{p'(x)}{q'(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(x - b_i)^{a_i}} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)).$$

Seien nun  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  zwei Polynome mit  $0 \leq \deg(p) < \deg(q) = n + 1$ ,  $x_i \in \mathbb{C}$  eine beliebige Nullstelle von  $q$  und  $m_i \in \mathbb{N}$  ihre Vielfachheit.

## Beweis (für Interessierte)

$\Rightarrow$  Es gibt ein Polynom  $r$  mit  $r(x_i) \neq 0$  und  $q(x) = (x - x_i)^{m_i} r(x)$ , d.h.:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x) - \frac{p(x_i)}{r(x_i)} r(x)}{(x - x_i)^{m_i} r(x)} + \frac{\frac{p(x_i)}{r(x_i)}}{(x - x_i)^{m_i}} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)).$$

Für den Grad von  $r$  gilt:

$$\deg(r) = \deg(q) - m_i \leq n.$$

$\Rightarrow s(x) = p(x) - \frac{p(x_i)}{r(x_i)} r(x)$  ist ein Polynom mit  $s(x_i) = 0$ , d.h. es gibt ein Polynom  $p' \neq 0$  mit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - x_i)p'(x)}{(x - x_i)^{m_i} r(x)} + \frac{\frac{p(x_i)}{r(x_i)}}{(x - x_i)^{m_i}} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)).$$

Für den Grad von  $p'$  gilt:

$$0 \leq \deg(p') = \deg(s) - 1 \leq \max \{ \deg(p), \deg(r) \} - 1 \leq n - 1$$

## Beweis (für Interessierte)

⇒ Setzt man  $q'(x) = (x - x_i)^{m_i-1}r(x)$ , so erhält man

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p'(x)}{q'(x)} + \frac{\frac{p(x_i)}{r(x_i)}}{(x - x_i)^{m_i}} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)).$$

Für den Grad von  $q'$  gilt:

$$\deg(q') = \deg(q) - 1 = n.$$

⇒ Wegen  $0 \leq \deg(p') < \deg(q') = n$  existieren nach Annahme Konstanten  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  und  $b_1, \dots, b_n \in q^{-1}(0)$  und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  mit

$$\frac{p'(x)}{q'(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(x - b_i)^{a_i}} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)).$$

## Beweis (für Interessierte)

Wähle  $c_{n+1} = m_i$ ,  $b_{n+1} = x_i$  und  $c_{n+1} = \frac{p(x_i)}{r(x_i)}$ . Dann gilt:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(x - b_i)^{a_i}} + \frac{c_{n+1}}{(x - b_{n+1})^{c_{n+1}}} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i}{(x - b_i)^{a_i}} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)).$$

□

# Rezept: Partialbruchzerlegung

**Gegeben:** Zwei Polynome  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  mit  $\deg(p) < \deg(q)$  und  $q$  normiert.

**Gesucht:** Die Partialbruchzerlegung von  $\frac{p(x)}{q(x)}$ .

**Algorithmus:**

1. **Faktoriere den Nenner.** D.h. bringe  $q(x)$  in die Form

$$q(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{m_k}$$

über, wobei  $x_1, \dots, x_k$  die Nullstellen (engl. *roots*) von  $q$  und  $m_1, \dots, m_k$  ihre Vielfachheiten (engl. *multiplicities*) sind.

2. **Stelle die allgemeine Partialbruchzerlegung auf.** Diese lautet:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(x - x_i)^j}.$$

wobei die  $c_{i,j}$  noch unbekannte Konstanten sind.

## Rezept: Partialbruchzerlegung

3. **Ermittle die Konstanten.** Finde konkrete Werte für die Konstanten  $c_{i,j}$ , so dass gilt:

$$p(x) = q(x) \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(x - x_i)^j}.$$

4. **Stelle die spezielle Partialbruchzerlegung auf.** Setze die Werte der  $c_{i,j}$  in die allgemeine Partialbruchzerlegung ein.

- ▶ Ein Polynom  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  heißt **normiert**, falls der Leitkoeffizient 1 ist, d.h.  $a_n = 1$ .
- ▶ Falls  $q$  nicht normiert ist, dann kann man den Bruch  $\frac{p(x)}{q(x)}$  mit dem Kehrwert des Leitkoeffizients von  $q$  erweitern, z.B.:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{2x^2 - x + 3} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x + \frac{1}{2}}{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}.$$

- ▶ Beachte, dass die Faktorisierung bei Schritt 1 über  $\mathbb{C}$  ist, d.h. einige Nullstellen  $x_i$  dürfen auch einen Imaginärteil  $\text{Im}(x_i) \neq 0$  haben.
- ▶ Die Konstanten  $c_{i,j}$  kann man bei Schritt 2. auch umbenennen, z.B. auf  $A, B, C, \dots$

## Beispiel

Seien  $p(x) = 2x^2 + 2x + 3$  und  $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ .

1. Faktorisierung von  $q$ :

$$q(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 1).$$

2. Allgemeine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1}.$$

3. Konstanten:

$$A = -\frac{3}{2}, B = \frac{7}{3}, C = \frac{7}{6}.$$

4. Spezielle Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{-\frac{3}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{7}{3}}{x + 2} + \frac{\frac{7}{6}}{x - 1}.$$

(Schön. Und wie kommt man auf die Konstanten?)



# Beispiel

Durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{2x^2+2x+3}{\cancel{x^3+2x^2-x-2}} = \frac{A(x+2)(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)(x+2)}{\cancel{(x+1)(x+2)(x-1)}}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x+3 = A(x^2+x-2) + B(x^2-1) + C(x^2+3x+2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+3C)x + (-2A-B+2C)$$

$$\leadsto \left. \begin{array}{l} A+B+C = 2 \\ A+3C = 2 \\ -2A-B+2C = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Gauß-Elimination liefert:} \\ A = -\frac{3}{2}, B = \frac{7}{3}, C = \frac{7}{6} \end{array}$$

# Beispiel

Trick: Nullstellen einsetzen

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{\cancel{x^3 + 2x^2 - x - 2}} = \frac{A(x+2)(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)(x+2)}{\cancel{(x+1)(x+2)(x-1)}}$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$2(-1)^2 + 2(-1) + 3 = A(-1+2)(-1-1) + \underbrace{B(-1+1)(-1-1)}_{=0} + \underbrace{C(-1+1)(-1+2)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow 3 = A(-2)$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{3}{2}$$

## Beispiel

$$\boxed{x = -2}$$

$$2(-2)^2 + 2(-2) + 3 = \underbrace{A(-2+2)(-2-1)}_{=0} + B(-2+1)(-2-1) + \underbrace{C(-2+1)(-2+2)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow 7 = B \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{7}{3} //$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = \underbrace{A(1+2)(1-1)}_{=0} + \underbrace{B(1+1)(1-1)}_{=0} + C(1+1)(1+2)$$

$$\Leftrightarrow 7 = C \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{7}{6} //$$

Der Trick mit dem Einsetzen der Nullstellen liefert nur so viele Konstanten, wie es verschiedene Nullstellen gibt. Hat  $q$  beispielsweise nur einfache Nullstellen, dann kann man sie alle mit diesem Trick bestimmen. Ansonsten kann man damit nur einige Konstanten bestimmen und muss danach Koeffizientenvergleich für die restlichen anwenden.

## Beispiel

Gegeben seien die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 9x + 7$  und  $q(x) = (x - 1)^2(x - 2)$ . Die allgemeine Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 2}$$

Man könnte mit Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen lösen oder zuerst  $B$  und  $C$  durch Einsetzen der Nullstellen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 2$  in

$$3x^2 - 9x + 7 = (x - 1)(x - 2)A + (x - 2)B + (x - 1)^2C$$

berechnen und dann  $A$  durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Die Qual der Wahl gebührt euch ;-)

Welche Werte haben die Konstanten in folgenden Partialbruchzerlegungen?

$$1. \frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$2. \frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$3. \frac{7x+11}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$4. \frac{3x-5}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$5. \frac{8x+12}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$6. \frac{x+11}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

1.  $A = 3$  und  $B = -2$ .
2.  $A = 2$  und  $B = -1$ .
3.  $A = 5$  und  $B = 2$ .
4.  $A = 2$  und  $B = 1$ .
5.  $A = 4$  und  $B = 4$ .
6.  $A = 1$ ,  $B = -3$  und  $C = 2$ .

# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
<b>9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor</b>	<b>136</b>
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161





# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
<b>10. Kurven</b>	<b>138</b>
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine  $n$ -dimensionale **parametrisierte Kurve**  $\gamma$  ist eine Funktion  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\gamma_i$  nennt man die  $i$ -te **Komponentenfunktion** von  $\gamma$ .

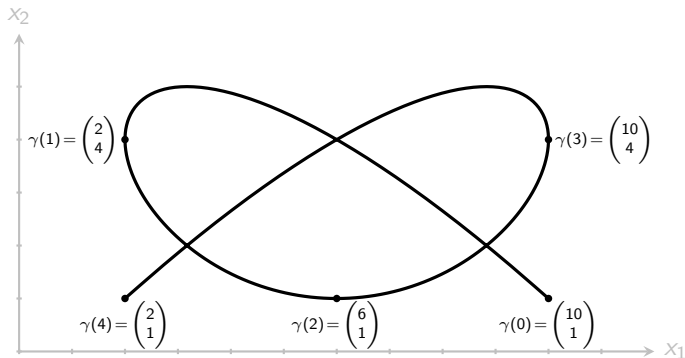
Für  $n = 2$  ist  $\gamma$  eine **ebene Kurve**, für  $n = 3$  eine **Raumkurve** und für  $n = 1$  eine langweilige Kurve.

## Beispiel 1: eine Breze

Beispiel einer ebenen Kurve ist  $\gamma: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2(t-1)^2(4-t) + 2 \\ t(t-2)^2(4-t) + 1 \end{pmatrix}.$$

Spur:

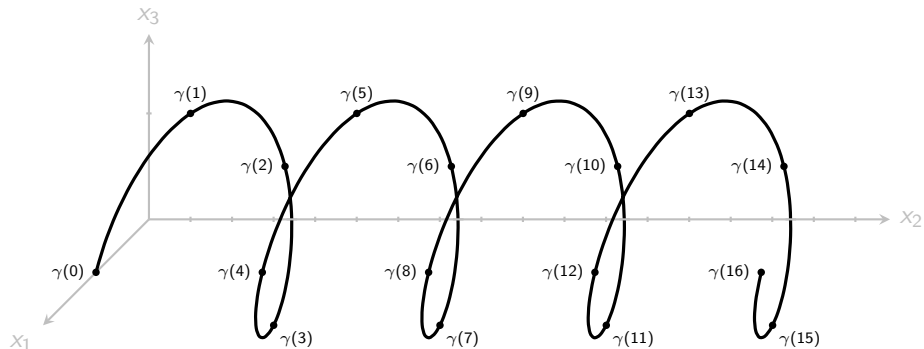


## Beispiel 2: eine Helix

Beispiel einer Raumkurve ist  $\gamma: [0, 16] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Spur:

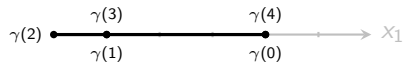


## Beispiel 3: ein Witz

Beispiel einer langweiligen Kurve ist  $\gamma: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^1$  mit:

$$\gamma(t) = ((t - 2)^2).$$

Spur:



Deswegen sind eindimensionale Kurven langweilig.

- Für die **Euklidische Norm**  $\|x\|_2$  eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

- Die Zahl 2 kommt daher, dass die Euklidische Norm ein Spezialfall der sogenannten **p-Norm** (für  $p = 2$ ) ist.
- Weil die Euklidische Norm die natürlichste aller  $p$ -Normen ist, schreibt man auch oft nur  $\|x\|$  statt  $\|x\|_2$ .

## Für Interessierte: Wozu überhaupt andere $p$ -Normen?

Für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und ein beliebiges  $p \geq 1$  ist die  $p$ -Norm definiert als

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad \text{bzw.} \quad \|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = \max \{|x_i| \mid i \in [n]\}.$$

Die Euklidische Norm stellt den „direkten“ Abstand vom Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$  zum Ursprung  $(0, \dots, 0)$  dar. Manchmal existiert allerdings der direkte Weg nicht oder es ist nicht relevant, ob der betrachtete Weg der direkte ist.

Ein Beispiel bei dem die 2-Norm nicht anwendbar ist, weil keine direkten Wege existieren, sind  $n$ -dimensionale **Gittergraphen**. Dort haben zwei Knoten  $a = (a_1, \dots, a_n)$  und  $b = (b_1, \dots, b_n)$  die Distanz

$$d(a, b) = \|a - b\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

Siehe auch: **Manhattan-Metrik**.



## Für Interessierte: Wozu überhaupt andere $p$ -Normen?

Ein Beispiel, bei dem die 2-Norm zwar anwendbar, aber nicht erforderlich ist, sind sogenannte **Splines** (zu Deutsch: *Polynomzüge*). Splines sind parametrisierte Kurven, deren Form von Kontrollpunkten  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^d$  bestimmt wird. Bei Zeichenprogrammen, die die gezeichneten Striche als Splines darstellen, wählt man beispielsweise  $d = 2$  und definiert  $P_i = (x_i, y_i)$  als denjenigen Punkt auf der Zeichenebene, auf dem sich der Stift nach  $i$  Zeiteinheiten befindet.

Für zwei gegebene Splines mit Kontrollpunkten  $P = (P_1, \dots, P_n)$  und  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$  kann man mit

$$d(P, Q) = \sqrt[p_2]{\sum_{i=1}^n \|P_i - Q_i\|_{p_1}^{p_2}}$$

ein Maß für den Unterschied zwischen ihnen definieren. D.h. man benutzt eine  $p_1$ -Norm, um den Unterschied zwischen zwei Punkten darzustellen und eine  $p_2$ -Norm für den Unterschied beider Kurven.

## Für Interessierte: Wozu überhaupt andere $p$ -Normen?

Mit  $d(P, Q)$  kann man erkennen, ob die zwei Kurven ähnlich (d.h.  $d(P, Q)$  klein) oder sehr unterschiedlich (d.h.  $d(P, Q)$  groß) sind. Damit lassen sich unter Anderem Methoden implementieren, die die Anzahl an Kontrollpunkten reduzieren, d.h. Kontrollpunkte so löschen, dass die Form der Kurve minimal verändert wird.

Für  $p_1 = 2$  und  $p_2 = \infty$  erhält man beispielsweise

$$d(P, Q) = \max \{ \|P_i - Q_i\|_2 \mid i \in [n] \}.$$

Diese Wahl ist zwar unintuitiv, aber sie liefert gute Ergebnisse und kann sehr effizient implementiert werden.

Ansonsten habe ich zu Kurven nicht viel mehr zu sagen als das was im Skript steht. :-)

# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
<b>11. Mehrdimensionale Differentialrechnung</b>	<b>148</b>
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Für jede stetig differenzierbare Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

der **Gradient** von  $f$  in  $x \in M$ . Ist  $f$  zweimal stetig, so heißt

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \cdots & \partial_{1n} f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f(x) & \cdots & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}$$

mit  $\partial_{ij} f(x) = \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$  die **Hesse-Matrix** von  $f$  in  $x \in M$ .

# Mehrdimensionale Extrempunkte

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $c \in M$ . Dann gilt:

$f$ hat ein lokales Minimum in $c$	$\implies$	$\nabla^2 f(c)$ positiv semidefinit,
$f$ hat ein lokales Maximum in $c$	$\implies$	$\nabla^2 f(c)$ negativ semidefinit,
$\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ positiv definit	$\implies$	$f$ hat ein isoliertes lokales Minimum in $c$ ,
$\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ negativ definit	$\implies$	$f$ hat ein isoliertes lokales Maximum in $c$ ,
$\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ indefinit	$\implies$	$f$ hat ein Sattelpunkt in $c$ .

*Info:* Falls  $\nabla f(c) = 0$ , dann nennt man  $c$  einen kritischen Punkt.

# Achtung!

Achtet bitte auf die Richtung der Pfeile! Beispielsweise muss  $f$  nicht notwendigerweise ein lokales Minimum in  $c$  haben, falls  $\nabla^2 f(c)$  positiv semidefinit ist.

Wenn aber  $\nabla^2 f(c)$  nicht positiv semidefinit ist, dann hat  $f$  garantiert kein lokales Minimum in  $c$ .

Erinnerung aus DS:  $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ .

- Für eine  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  heißt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

das **charakteristische Polynom** von  $A$ , wobei  $I_n$  die  $(n \times n)$ -**Einheitsmatrix** ist. Die Nullstellen von  $\chi_A$  nennt man **Eigenwerte** von  $A$ .

- Die Matrix  $A - \lambda I_n$  ist nichts anderes als  $A$  mit „ $-\lambda$ “ bei jedem Element der Hauptdiagonale.
- Für  $n = 2$  und  $n = 3$  gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$



- ▶ Für ein allgemeines  $n \in \mathbb{N}$  liefert der **Laplacesche Entwicklungssatz** eine Berechnungsmethode für die Determinante einer quadratischen Matrix. Prof. Google und Dr. YouTube helfen euch dabei, das sehr schnell wieder auffrischen!
- ▶ Für eine quadratische symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt:

$A$ <b>positiv semidefinit</b>	$\iff$	Für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ gilt $\lambda \geq 0$ ,
$A$ <b>negativ semidefinit</b>	$\iff$	Für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ gilt $\lambda \leq 0$ ,
$A$ <b>positiv definit</b>	$\iff$	Für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ gilt $\lambda > 0$ ,
$A$ <b>negativ definit</b>	$\iff$	Für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ gilt $\lambda < 0$ ,
$A$ <b>indefinit</b>	$\iff$	$A$ hat sowohl positive als auch negative Eigenwerte.

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 9 - \lambda & 6 \\ 6 & -7 - \lambda \end{pmatrix} = (9 - \lambda)(-7 - \lambda) - 6^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 99.$$

$\chi_A$  hat die Nullstellen  $-9$  und  $11$ , d.h.  $A$  ist indefinit.

Sei  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^y$ .

1. Bestimme alle kritischen Punkte von  $f$ .
2. Untersuche, ob die kritischen Punkte von  $f$  lokale Maxima, lokale Minima oder Sattelpunkte sind.

*Hinweise:*

- ▶  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besagt, dass  $f(x, y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  definiert ist.
- ▶ Eine Potenz  $a^b$  mit  $a > 0$  ist definiert als  $a^b = e^{b \ln(a)}$ .

Sei  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^y$ .

1. Für den Gradienten von  $f$  gilt:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 x^y \\ \partial_2 x^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ \ln(x)e^{y \ln(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ \ln(x)x^y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ kritisch} &\iff yx^{y-1} = 0 \wedge \ln(x)x^y = 0 \\ &\iff (y = 0 \vee x^{y-1} = 0) \wedge (\ln(x) = 0 \vee x^y = 0) \\ &\iff (y = 0 \vee x = 0) \wedge (x = 1 \vee x = 0). \end{aligned}$$

Wegen  $x > 0$  ist  $(1, 0)$  der einzige kritische Punkt von  $f$ .

2. Für die Hesse-Matrix von  $f$  gilt:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{11} x^y & \partial_{12} x^y \\ \partial_{21} x^y & \partial_{22} x^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & (y \ln(x) + 1)x^{y-1} \\ (y \ln(x) + 1)x^{y-1} & \ln(x)^2 x^y \end{pmatrix}$$

und somit

$$\nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

besitzt  $\nabla^2 f(1, 0)$  die Eigenwerte  $-1$  und  $1$  und ist nach den Erinnerungen ab Folie 152 indefinit. Somit hat  $f$  nach Folie 150 einen Sattelpunkt an der Stelle  $(1, 0)$ .

# Themenübersicht

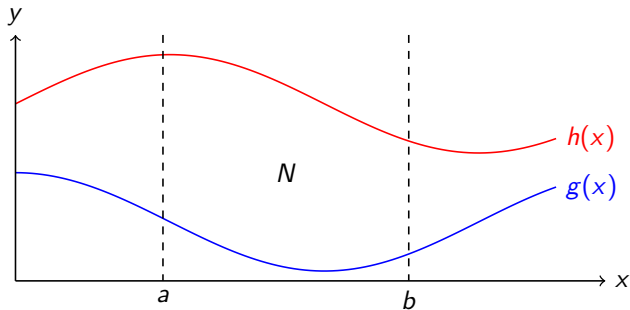
1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
<b>12. Mehrdimensionale Integralrechnung</b>	<b>158</b>
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

# Zweidimensionale Integrale

Eine Menge der Form

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

heißt **Normalbereich**.



Für  $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$  gilt:

$$\iint_N f(x, y) d(x, y) := \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Das Ergebnis des Integrals ist das Volumen eines Körpers mit Grundfläche  $N$  und Höhe  $f(x, y)$ .



# Themenübersicht

1. Reelle Zahlen	7
2. Reelle Folgen und Grenzwertbegriff	23
3. Komplexe und mehrdimensionale Folgen	33
4. Reihen	51
5. Stetigkeit	55
6. Differentiation	72
7. Differentialrechnung und Anwendung	94
8. Integration	97
9. Mehr zu Integralen: Uneigentliche Integrale; Satz von Taylor	136
10. Kurven	138
11. Mehrdimensionale Differentialrechnung	148
12. Mehrdimensionale Integralrechnung	158
13. Gewöhnliche Differentialgleichungen	161

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Für eine gegebene Gleichung, in der  $t$ ,  $y(t)$  und Ableitungen von  $y(t)$  vorkommen, suchen wir entweder eine oder alle möglichen Funktionen  $y(t)$ , die diese Gleichung erfüllen.

Auf den nächsten Folien werden Methoden für bestimmte Klassen von Differentialgleichungen vorgestellt.

Für uns sind folgende 6 Methoden wichtig.

Differentialgleichung	Parameter	Folie
$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$	$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	164
$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0$	$a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	169
$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = f(t)$	$a, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	172
$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$	$a, b \in \mathbb{R}$	176
$y''(t) + ay'(t) + by(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$	$a, b, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, b, a_n \neq 0$	180
$y''(t) + ay'(t) + by(t) = e^{\alpha t}(a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t))$	$a, b, \alpha, \beta, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, b \neq 0$	184

# Methode 1 („Trennung der Variablen“)

**Gegeben:** Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$$

für  $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$  und Funktionen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lösungsmethode:** Jede allgemeine Lösung erfüllt die Gleichung

$$G(y(t)) = F(t) + c \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R},$$

wobei  $F(t) = \int f(t) \, dt$  und  $G(t) = \int \frac{1}{g(t)} \, dt$  beliebige Stammfunktionen von  $f(t)$  und  $\frac{1}{g(t)}$  sind.

Die spezielle Lösung für  $y(t_0) = y_0$  erfüllt die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(u)} \, du = \int_{t_0}^t f(s) \, ds.$$

In beiden Fällen hofft man, dass die entstehende Gleichung nach  $y(t)$  gelöst werden kann.

**Aufgabe:** Finde alle Lösungen zu

$$y'(t) = \frac{t+3}{y(t)}.$$

**Lösung:** Es gilt  $y'(t) = (t+3) \cdot \frac{1}{y(t)}$ , d.h.  $f(t) = t+3$  und  $g(y(t)) = \frac{1}{y(t)}$ .

Eine Stammfunktion von  $f(t)$  ist

$$F(t) = \int f(t) \, dt = \int t+3 \, dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t.$$

Eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g(t)}$  ist

$$G(t) = \int \frac{1}{g(t)} \, dt = \int t \, dt = \frac{1}{2}t^2.$$

Wegen

$$\begin{aligned} G(y(t)) = F(t) + c &\iff \frac{1}{2}(y(t))^2 = \frac{1}{2}t^2 + 3t + c \\ &\iff (y(t))^2 = t^2 + 6t + 2c \\ &\iff |y(t)| = \sqrt{t^2 + 6t + 2c} \\ &\iff y(t) = \pm \sqrt{t^2 + 6t + 2c} \end{aligned}$$

hat jede allgemeine Lösung eine der Formen

$$y(t) = \sqrt{t^2 + 6t + 2c} \quad \text{oder} \quad y(t) = -\sqrt{t^2 + 6t + 2c} \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R}.$$

## Noch ein Beispiel

**Aufgabe:** Finde die spezielle Lösung zu

$$y'(t) = \frac{t+3}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 3.$$

**Lösung:** Es gilt  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 3$  und  $y'(t) = (t+3) \cdot \frac{1}{y(t)}$ , d.h.  $f(t) = t+3$  und  $g(y(t)) = \frac{1}{y(t)}$ .

Aus dem Beispiel davor haben wir noch die Stammfunktionen

$$F(t) = \int f(t) \, dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t \quad \text{und} \quad G(t) = \int t \, dt = \frac{1}{2}t^2.$$

## Noch ein Beispiel

Wegen

$$\begin{aligned}\int_3^{y(t)} \frac{1}{g(u)} du &= \int_0^t f(s) ds && \Longleftrightarrow G(y(t)) - G(3) = F(t) - F(0) \\ &&& \Longleftrightarrow \frac{1}{2}y(t)^2 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}t^2 + 3t - 0 \\ &&& \Longleftrightarrow y(t)^2 = t^2 + 6t + 9 \\ &&& \Longleftrightarrow |y(t)| = \sqrt{t^2 + 6t + 9} \\ &&& \Longleftrightarrow y(t) = \pm\sqrt{t^2 + 6t + 9} = \pm(t + 3)\end{aligned}$$

kann  $y(t)$  sowohl  $t + 3$  als auch  $-t - 3$  sein. Wegen  $y(0) = 3$  scheidet  $-t - 3$  aus und wir erhalten

$$y(t) = t + 3$$

als einzige spezielle Lösung.



**Gegeben:** Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0$$

mit einer Funktion  $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lösungsmethode:**

1. Bestimme eine beliebige Stammfunktion  $A(t) = \int a(t) \, dt$  von  $a(t)$ .
2. Allgemeine Lösung:

$$y(t) = ce^{-A(t)} \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spezielle Lösung für  $y(t_0) = y_0$ :

$$y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)}.$$

**Aufgabe:** Finde alle Lösungen zu

$$y'(t) - \frac{y(t)}{t+1} = 0.$$

**Lösung:** Es gilt  $y'(t) - \frac{1}{t+1} \cdot y(t) = 0$ , d.h.  $a(t) = -\frac{1}{t+1}$ .

1. Eine Stammfunktion von  $a(t)$  ist

$$A(t) = \int a(t) \, dt = \int -\frac{1}{t+1} \, dt = -\ln|t+1|.$$

2. Die allgemeine Lösung lautet also:

$$y(t) = ce^{-A(t)} = ce^{\ln|t+1|} = c|t+1| \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R}.$$

## Noch ein Beispiel

**Aufgabe:** Finde die spezielle Lösung zu

$$y'(t) - \frac{y(t)}{t+1} = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 2.$$

**Lösung:** Es gilt  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$  und  $y'(t) - \frac{1}{t+1} \cdot y(t) = 0$ , d.h.  $a(t) = -\frac{1}{t+1}$ .

1. Aus dem Beispiel davor haben wir

$$A(t) = -\ln|t+1|.$$

2. Die spezielle Lösung lautet dann:

$$y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)} = 2e^{\ln|0+1| - (-\ln|t+1|)} = 2e^{\ln|t+1|} = 2|t+1|.$$

## Methode 3

**Gegeben:** Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = f(t)$$

mit Funktionen  $a, f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lösungsmethode:**

1. Bestimme eine beliebige Stammfunktion  $A(t) = \int a(t) \, dt$  von  $a(t)$ .
2. Allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-A(t)} \cdot (c + B(t)) \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R},$$

wobei  $B(t) = \int e^{A(t)} \cdot f(t) \, dt$  eine beliebige Stammfunktion von  $e^{A(t)} \cdot f(t)$  ist.

Spezielle Lösung für  $y(t_0) = y_0$ :

$$y(t) = e^{A(t_0)-A(t)} \cdot \left( y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(s)-A(t_0)} \cdot f(s) \, ds \right).$$

## Beispiel

**Aufgabe:** Finde alle Lösungen zu

$$y'(t) - \cos(t) \cdot y(t) = \cos(t).$$

**Lösung:** Es gilt  $a(t) = -\cos(t)$  und  $f(t) = \cos(t)$ .

1. Eine Stammfunktion von  $a(t)$  ist

$$A(t) = \int a(t) \, dt = \int -\cos(t) \, dt = -\sin(t).$$

2. Eine Stammfunktion von  $e^{A(t)} \cdot f(t)$  ist

$$B(t) = \int e^{A(t)} \cdot f(t) \, dt = \int e^{-\sin(t)} \cdot \cos(t) \, dt = -e^{-\sin(t)}.$$

Dann lautet die allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-A(t)} \cdot (c + B(t)) = e^{\sin(t)} \cdot (c - e^{-\sin(t)}) = ce^{\sin(t)} - 1 \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R}.$$

## Noch ein Beispiel

**Aufgabe:** Finde die spezielle Lösung zu

$$y'(t) - \cos(t) \cdot y(t) = \cos(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 2.$$

**Lösung:** Es gilt  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$  und  $a(t) = -\cos(t)$  und  $f(t) = \cos(t)$ .

1. Aus dem Beispiel davor haben wir

$$A(t) = -\sin(t).$$

## Noch ein Beispiel

2. Die spezielle Lösung lautet dann:

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{A(0)-A(t)} \cdot \left( 2 + \int_0^t e^{A(s)-A(0)} \cdot f(s) \, ds \right) \\&= e^{-\sin(0)-(-\sin(t))} \cdot \left( 2 + \int_0^t e^{-\sin(s)-(-\sin(0))} \cdot \cos(s) \, ds \right) \\&= e^{\sin(t)} \cdot \left( 2 + \int_0^t e^{-\sin(s)} \cdot \cos(s) \, ds \right) \\&= e^{\sin(t)} \cdot \left( 2 + \left[ -e^{-\sin(s)} \right]_{s=0}^t \right) \\&= e^{\sin(t)} \cdot \left( 3 - e^{-\sin(t)} \right) \\&= 3e^{\sin(t)} - 1.\end{aligned}$$

**Gegeben:** Homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

mit konstanten Koeffizienten  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Lösungsmethode falls  $a^2 > 4b$ :**

1. Bestimme beide Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , d.h.

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

2. Die allgemeine Lösung für  $y(t)$  lautet dann:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$



**Lösungsmethode falls  $a^2 = 4b$ :**

1. Bestimme die eindeutige Lösung  $\lambda$  der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , d.h.

$$\lambda_0 = -\frac{a}{2}.$$

2. Die allgemeine Lösung für  $y(t)$  lautet dann:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_0 t} \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Lösungsmethode falls  $a^2 < 4b$ :**

1. Bestimme  $\alpha$  und  $\beta$ , so dass beide Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  von den Formen  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  und  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$  sind, d.h.

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

2. Die allgemeine Lösung für  $y(t)$  lautet dann:

$$y(t) = (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))e^{\alpha t} \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sucht man die spezielle Lösung für Anfangsbedingungen  $y(t_0) = y_0$  und  $y'(t_1) = y_1$ , dann setzt man  $t = t_0$  und  $t = t_1$  in die allgemeine Lösung ein und bestimmt  $c_1$  und  $c_2$ .

**Aufgabe:** Finde alle Lösungen zu

$$y''(t) - y(t) = 0.$$

**Lösung:** Es gilt  $a = 0$  und  $b = -1$ , d.h.  $a^2 > 4b$ .

1. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 1$ .
2. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Gegeben:** Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = a_nt^n + \dots + a_1t + a_0.$$

mit konstanten Koeffizienten  $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  ( $b, a_n \neq 0$ ).

**Lösungsmethode:**

1. Bestimme die allgemeine Lösung  $y_h(t)$  von

$$y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0.$$

2. Stelle ein Polynom

$$y_p(t) = b_nt^n + \dots + b_1t + b_0$$

mit Parametern  $b_0, b_1, \dots, b_n$  auf.

3. Setze  $y_p(t)$ ,  $y_p'(t)$  und  $y_p''(t)$  in

$$y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = p(t)$$

ein und ermittle die Werte von  $b_0, b_1, \dots, b_n$  durch Koeffizientenvergleich.

4. Die allgemeine Lösung für  $y(t)$  lautet dann:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sucht man die spezielle Lösung für Anfangsbedingungen  $y(t_0) = y_0$  und  $y'(t_1) = y_1$ , dann setzt man  $t = t_0$  und  $t = t_1$  in die allgemeine Lösung ein und bestimmt  $c_1$  und  $c_2$ .

**Aufgabe:** Finde alle Lösungen zu

$$y''(t) - y(t) = t - 2.$$

**Lösung:** Es sind  $a = 0$ ,  $b = -1$  und  $p(t) = t - 2$  Polynom mit Grad 1.

1. Die allgemeine Lösung von  $y_h''(t) - y_h(t) = 0$  ist

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(Siehe Folie 179.)

2. Wegen  $n = \deg(p) = 1$  gilt:  $y_p(t) = a_1 t + a_0$ .

3. Mit  $y_p'(t) = a_1$  und  $y_p''(t) = 0$  erhält man:

$$\begin{aligned}y''(t) - y(t) &= t - 2 &\iff 0 - (a_1 t + a_0) &= t - 2 \\&&\iff -a_1 t - a_0 &= t - 2 \\&&\iff a_1 = -1, a_0 &= 2.\end{aligned}$$

D.h.  $y_p(t) = -t + 2$ .

4. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - t + 2 \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Gegeben:** Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = e^{\alpha t}(a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t)).$$

mit konstanten Koeffizienten  $a, b, \alpha, \beta, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  ( $b \neq 0$ ).

**Lösungsmethode:**

1. Bestimme die allgemeine Lösung  $y_h(t)$  von

$$y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0.$$

2. Stelle  $y_p(t) = e^{\alpha t}(b_1 \cos(\beta t) + b_2 \sin(\beta t))$  in Abhängigkeit von Parametern  $b_1, b_2$  auf.
3. Setze  $y_p(t)$ ,  $y_p'(t)$  und  $y_p''(t)$  in

$$y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = e^{\alpha t}(a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t))$$

ein und ermittle die Werte von  $b_1$  und  $b_2$ .



4. Die allgemeine Lösung für  $y(t)$  lautet dann:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sucht man die spezielle Lösung für Anfangsbedingungen  $y(t_0) = y_0$  und  $y'(t_1) = y_1$ , dann setzt man  $t = t_0$  und  $t = t_1$  in die allgemeine Lösung ein und bestimmt  $c_1$  und  $c_2$ .

**Aufgabe:** Finde alle Lösungen zu

$$y''(t) - y(t) = \sin(t).$$

**Lösung:** Es gilt  $a = 0$ ,  $b = -1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $a_1 = 0$  und  $a_2 = 1$ .

1. Die allgemeine Lösung von  $y_h''(t) - y_h(t) = 0$  ist

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(Siehe Folie 179.)

2. Es gilt:

$$y_p(t) = b_1 \cos(t) + b_2 \sin(t).$$

3. Mit  $y_p'(t) = -b_1 \sin(t) + b_2 \cos(t)$  und  $y_p''(t) = -b_1 \cos(t) - b_2 \sin(t)$  erhält man:

$$\begin{aligned} y''(t) - y(t) = \sin(t) &\iff -b_1 \cos(t) - b_2 \sin(t) - (b_1 \cos(t) + b_2 \sin(t)) = \sin(t) \\ &\iff -2b_1 \cos(t) - 2b_2 \sin(t) = \sin(t) \\ &\iff b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D.h.  $y_p(t) = -\frac{1}{2} \sin(t)$ .

4. Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \frac{1}{2} \sin(t) \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wie kann man eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$y''(t) + ay'(t) = f(t)$$

lösen?

Weil sie inhomogen ist und Ordnung 2 hat, kommen Methoden 1-4 nicht infrage. Weil Methoden 5 und 6  $b \neq 0$  fordern, kann man sie auch nicht benutzen.

Eine Möglichkeit ist  $z(t) = y'(t)$  zu setzen, die Differentialgleichung

$$z'(t) + az(t) = f(t)$$

mit Methode 3 lösen und die Menge aller Stammfunktionen von  $z(t)$  als allgemeine Lösung von  $y(t)$  angeben.

# Lineare Systeme von Differentialgleichungen

**Gegeben:** Eine Gleichung der Form

$$y'(t) = Ay(t)$$

für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Lösungsmethode:**

1. Berechne die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  von  $A$ , d.h. die Nullstellen von  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ .  
(Hier habe ich  $k$  statt  $n$  benutzt, weil es nicht immer genau  $n$  Eigenwerte sind.)
2. Berechne die zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_k$ . Für alle  $i = 1, \dots, k$  soll gelten:

$$(A - \lambda_i I_n)v_i = 0.$$

3. Die allgemeine Lösung für  $y(t)$  lautet dann:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_k e^{\lambda_k t} v_k \quad \text{für} \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe:** Finde alle Lösungen zu  $y'(t) = Ay(t)$  für  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) + 2y_2(t) \\ -y_1(t) + 4y_2(t) \end{pmatrix}.$$

**Lösung:**

1. Nach Folie 152 gilt:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot (-1) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Somit sind  $\lambda_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = 3$  und  $\lambda_2 = \frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = 2$  die Eigenwerte von  $A$ .

2. Für die zugehörigen Eigenvektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$  gilt:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

d.h.:

$$\begin{array}{rclcl} -2v_{11} & + & 2v_{12} & = & 0 \\ -v_{11} & + & v_{12} & = & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rclcl} -v_{11} & + & 2v_{12} & = & 0 \\ -v_{11} & + & 2v_{12} & = & 0 \end{array} .$$

Mögliche Lösungen für die zwei Gleichungssysteme sind  $v_{11} = 1$ ,  $v_{12} = 1$ ,  $v_{21} = 2$  und  $v_{22} = 1$ , d.h.:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$



3. Die allgemeine Lösung für  $y(t)$  lautet dann:

$$y(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Du hast es geschafft!

AI ❤️ dich sehr :-)