Goldene Formelsammlung

must know:
- Zahlenmengen

Binomische Formeln:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
	$(a+b) * (a-b) = a^2 - b^2$
Mitternachtsformel	für $ax^2 + bx + c$: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Funktionenfolgen	
Indexshift Lk regel	
Limes substitutionsregel	

blatt 01:

Injektiv, surjektiv, bijektiv	Def 1.2 Tipp: Injektivität: z.Z: f(u) = f(v) ⇒ u = v
unendlich Abzählbar (|N)	Def. 1.6
Unendlich Überabzählbar(|R)	Wenn nicht unendlich Abzählbar
Endlich	Eine Menge mit endlich vielen Elementen

blatt 02:

Obere Schranke	M ⊂ |R. U ist obere Schranke wenn x<= u für alle xeM.
Maximum	Obere Schranke die in M enthalten ist.
Supremum	Kleinste obere Schranke sup(∅)=-∞, sup(M)=∞ falls M nach oben unbeschränkt Rechenregeln für Suprema 1. sup(X+Y)=sup(X)+sup(Y) 2. λ > 0 ⇒ sup(λX) = λ sup(X) 3. X,Y ⊂[0,∞) ⇒ sup(X·Y)=sup(X)·sup(Y) 4. X⊂Y ⇒ sup(X)≤sup(Y)
Infimum	Größte untere Schranke inf(X)=-inf(-X) Rechenregeln für Infima 1. inf(X+Y)=inf(X)+inf(Y) 2. λ > 0 ⇒ inf(λX) = λ inf(X) 3. X,Y ⊂[0,∞) ⇒ sup(X·Y)=inf(X)inf(Y) 4. X⊂Y ⇒ inf(X)≥inf(Y)
Umgebung	Sei x∈|R. Ein offenes Intervall (a,b) heißt Umgebung falls x ∈ (a,b)
Intervall	“zusammenhängende”/”lückenlose” Teilmenge: Menge aller Zahlen zB ε |R, die alle “zwischen” den Grenzen der ™ liegen, also x $\varepsilon\,(a,b)$ mit a<x<b oder a>x>b
Offene Menge	Eine Menge A ⊂ R heißt offen falls für jedes x ∈ A eine Umgebung Ix von x existiert, so dass Ix ∈ A. Bsp: abgeschlossenes Intervall I = [0,1]: $\forall x \varepsilon$ I: $0 \leq x \leq 1$
Abgeschlossen	Eine Menge A ⊂ R heißt Abgeschlossen falls R\A offen ist. Bsp: abgeschlossenes Intervall I = [0,1], R\I $= (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ ist offen
Beispiele	1. R ist offen und ∅ abgeschlossen 2. ∅ ist offen und R abgeschlossen 3. Eine Vereinigung offener Mengen ist offen 4. Jede endliche Menge ist abgeschlossen 5. Für a < b ist das Intervall [a,b) weder offen noch

	abgeschlossen 6. Q ist weder offen noch abgeschlossen

blatt 03:

Hinreichende Bedingung	Wenn A hinreichend für B ist schreibt man: A⇒B A= "Es hat geregnet" und B= "Die Straße ist nass" Wenn es geregnet hat, dann ist die Straße nass.
Notwendige Bedingung	Wenn A notwendig für B ist, dann schreibt man: B⇒A A= "Der Vogel ist schwarz" und B= "Der Vogel ist ein Rabe" Wenn der Vogel ein Rabe ist, dann ist es auch ein schwarzer Vogel.
Dreiecksungleichung	∀ a,b ∈ |R |a+b| ≤ |a| + |b|
Umgekehrte Dreiecksungleichung	∀ a,b ∈ |R |a-b|≥ |a| - |b|
Komplexe Zahlen	**Komplexe Zahlen.** $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Für $z = a + bi$ gilt: • Konjugierte: $\overline{z} = a - bi$. • Betrag: $\lvert z\rvert = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. • $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert$ und $\left\lvert \frac{z_1}{z_2} \right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$. Für $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ gilt: • Addition: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, • Subtraktion: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, • Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, • Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + \left(\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) i$. $\frac{1}{z} =$ ... Formel in T3.2

blatt 04 (Folgen und Stetigkeit)

Grenzwert einer Folge	Grenzwert (a_n) konvergiert gegen a ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$), falls $\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in N: \forall n \geq n_0: \|a_n - a\| < \varepsilon$. Wenn kein solches a existiert, dann divergiert sie. Rechenregeln für Grenzwerte Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann: 1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n * b_n = a * b$ 3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / b_n = a / b$ ($b \neq 0$) 4. $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$ 5. FAKTORREGEL
Einschließungskriterium	**Seien** (x_n) und (y_n) Folgen mit $x_n \to x$ und $y_n \to x$ und $x_n \leq y_n \; \forall n$, **dann** geht (w_n) mit $x_n \leq w_n \leq y_n$ gegen $w_n \to x$.
Beschränktheit	(a_n) ist nach oben beschränkt, falls $\exists C \in R: \forall n \in N: a_n < C$ nach unten beschränkt, falls $\exists C \in R: \forall n \in N: a_n > C$ und beschränkt, falls $\exists C > 0: \forall n \in N: \|a_n\| < C$ (nach unten und oben beschränkt) Bolzano-Weierstrass: (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) hat mindestens einen HFP
Stetigkeit	Folgenkriterium $f : D \to R$ stetig in c $\Leftrightarrow \forall (xn)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ ε - δ -Kriterium $D \subseteq R, f : D \to R, c \in D \Rightarrow f$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \forall x \in D: \|x - c\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(c)\| < \varepsilon$ Stetigkeit Rechenregeln Wenn f(x), g(x) stetig an einem Punkt c, dann: • f(x) + g(x) sind stetig in c • f(x) - g(x) sind stetig in c • f(x) * g(x) sind stetig in c • f(x) / g(x) sind stetig in c , $g(x) \neq 0$

	Komposition stetiger Funktionen Seien f: $D_f \to R$, g: $D_g \to R$ mit $f(D_f) \subseteq D_g$ Ist f stetig in x und g stetig in f(x), so ist g o f: $D_f \to R$ stetig in x. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ Special Zeug - polynome immer stetig und rationale Funktionen von Polynomen

blatt 05:

Limes Superior, Limes Inferior	Limes Superior $\overline{x}_n = \sup_{k \geq n} x_k$ (monoton fallend) $\lim\limits_{n\to\infty} sup\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \inf \sup_{k\geq n} x_k$ Limes Inferior $\underline{x}_n = \inf_{k\geq n} x_k$ (monoton wachsend) $\lim\limits_{n\to\infty} inf\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \sup \inf_{k\geq n} x$
Induktionsaufbau	Behauptung (Aufgabenstellung "Zu zeigen:..." Induktionsanfang: Zeige dass Beh. für n=1 gilt Induktionsvoraussetzung: Es gelte Beh. für ein beliebiges aber festes n. Induktionsschritt: Zeige dass Beh. auch für n+1 gilt. Reduktionsschritt auf n bringen und IV einsetzen. Damit gilt IV ☐
Monotonie	Monoton wachsend $\forall\ x_n \leq x_{n+1}$ Streng monoton wachsend $\forall\ x_n < x_{n+1}$ Monoton fallend $\forall\ x_n \geq x_{n+1}$ Streng monoton fallend $\forall\ x_n > x_{n+1}$
Konvergenz-Spezial	• Sei $(x_n)_n$ beschränkte Folge. Dann: wenn $(x_n)_n$ konvergiert ⇔ $(x_n)_n$ hat genau einen Häufungspunkt ⇔ $\lim \sup_{n\to\infty} x_n = \lim \inf_{n\to\infty} x_n$ • Sei $(x_n)_n$ monoton fallend oder wachsend ⇒ $(x_n)_n$ hat höchstens ein Häufungspunkt
Häufungspunkt	1. Falls (n_k) streng monoton wachsend

	oder fallend, dann (a_{nk}) Teilfolge von (a_n) 2. Eine Zahl a heißt Häufungspunkt von (a_n) wenn $\exists$ Teilfolge (a_{nk}) von (a_n) , die gegen a konvergiert

Blatt 06

Reihen Definition	Folge (a_n), Reihe $s_n = \sum a_n$
Bekannte Reihen	Harmonische Reihe: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert Allgemeine Harmonische Reihe: S = $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$, konvergiert für a > 1 Alternierende Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ln(2)$, konvergiert laut Leibniz-Kriterium Geometrische Reihe: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 z^k = \frac{a_0}{1-z}$, konvergiert für $\|z\| < 1$, divergiert für $\|z\| \geq 1$
Kriterien für Divergenz	Trivialkriterium/Nullfolgenkriterium Wenn $(a_k)_k$ divergiert oder $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ ist, dann ist die Reihe divergent. Minorantenkriterium: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k$. Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
Kriterien für Konvergenz	Majorantenkriterium: Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ mit konvergenter Majorante $\sum_{k=0}^{n} b_k$ (d.h. $\|a_k\| \leq b_k$). Dann (s_n) konvergent und $\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Absolute Konvergenz Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|$ konvergiert.

	Leibniz-Kriterium Wenn die Reihe die Form $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ (alternierend) hat und wenn (b_k) eine nichtnegative monoton fallende Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe. Quotientenkriterium Gegeben Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. kleiner als ein q welches < 1 $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert \begin{cases} < 1 & \text{Die Reihe konvergiert} \\ = 1 & \text{Keine Aussage über die Konvergenz ist möglich} \\ > 1 & \text{Die Reihe divergiert} \end{cases}$
Minoranten (Reihen, die divergieren und als bekannte Minoranten benutzt werden können:)	- $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ (divergiert für $\lvert z\rvert \geq 1$) - $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
Majoranten (Reihen, die konvergieren und als bekannte Minoranten benutzt werden können:)	- $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ (für $\lvert z\rvert < 1$) - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ (konv. für a > 1), - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ - $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ (für alle $z \,\varepsilon\, C$). - $ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ (für $x \,\varepsilon\, (-1, 1]$).
Summenregel für Reihen	Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen. Dann gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$
Cauchy Produkt	Sind $(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $(b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen, so ist deren Cauchy-Produkt $(a_n)*(b_n) = (c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$,

	mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k * b_{n-k}$ wiederum eine absolut konvergente Reihe.
Exponentialfunktion	Die Exponentialfunktion ist stetig auf C. exp(z)= $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ $\overline{exp(z)} = exp(\overline{z}) = exp(z)$ $exp(z) * exp(w) = exp(z + w)$ Zentrale Eigenschaft der exp-Fkt! (einzige stetige Fkt mit dieser Eigenschaft) $exp(ix) = e^{ix} = cos(x) + i * sin(x)$ $exp(x)^y = exp(xy) = (e^x)^y = e^{xy}$ $(cos(x) + i\ sin(x))^y = exp(x)^y$ $= exp(xy) = cos(xy) + i\ sin(xy)$
Logarithmus	- $ln(x) = log_e x = y\ (e^y = x)$ - $ln(exp(x)) = x = exp(ln(x))$ - $ln(x^k) = k * ln(x)$ - $exp(ln(x^k)) = exp(k * ln(x))$ $= exp(ln(x))^k = x^k$ - ln(1) = 0 - ln(e)=1 - ln(x)+ln(y)=ln(x*y) - ln(x)-ln(y)=ln(x/y) - $x^a = exp(a * ln(x))$

Blatt 07:

komplexe Zahlen	- $z = x + i * y$ - $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ - $\overline{z} = x - i * y$ - $\lvert z\rvert^2 = z * \overline{z}$ - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ - $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$
Einheitskreis	- $\{z : \lvert z\rvert = 1\}$, - Menge der Winkel: $\{x : \ 0 < x < 2\pi\}$
Sinus und Cosinus (aber fancy)	- $sin(x) := \frac{exp(ix) - exp(-ix)}{2i}$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ - $cos(x) := \frac{exp(ix) + exp(-ix)}{2}$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

blatt 08

Zwischenwertsatz	Sei $f:[a,b] \rightarrow R$ stetig und entweder f(a)<y<f(b) oder f(b)<y<f(a) Dann gibt es x $\in$ (a,b) mit f(x) = y
Fixpunkt	Funktion f(x)=x. Funktion hat einen Schnittpunkt mit der geraden x.
Grenzwertverhalt von exp(x) ln(x) sqrt(x)	- $\lim\limits_{x\rightarrow 0} exp(x) = 1$ - $\lim\limits_{x\rightarrow\infty} exp(x) = \infty$ - $\lim\limits_{x\rightarrow -\infty} exp(x) = 0$ - $\lim\limits_{x\rightarrow o} ln(x) =- \infty$ - $\lim\limits_{x\rightarrow o} ln(x) = \infty$ - $\lim\limits_{x\rightarrow -\infty} ln(x) = \infty$ - $\lim\limits_{x\rightarrow o} \sqrt{x} = 0$ - $\lim\limits_{x\rightarrow\infty} \sqrt{x} = \infty$ - $\lim\limits_{x\rightarrow -\infty} \sqrt{x} = i\infty$
Landau Regeln	- $f(x) \in o(g(x)): \lim\limits_{x\rightarrow a} \lvert\frac{f(x)}{g(x)}\rvert = 0$ - $f(x) \in O(g(x)): \lim\limits_{x\rightarrow a} sup\lvert\frac{f(x)}{g(x)}\rvert < \infty$

blatt 09:

Differenzierbarkeit	Differenzierbarkeit impliziert stetigkeit. Andersrum nicht immer der Fall siehe f(x)=|x|.
Ableitung: Rechenregeln	- f, g diff'bar in x, a ε |R, dann: - $a * f, f * g$ diff'bar in x - $(a * f)'(x) = a * f'(x)$ - $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	f, g diff'bar in x, dann: $(f * g)'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
Quotientenregel	f,g diff'bar in x, $g(x) \neq 0$, dann: $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $(g \circ g)'(x) = g'(f(x)) * f'(x)$
Ableitung von Umkehrfunktionen	$f : [a, b] \to [c, d]$ bijektiv, in $[a, b]$ diff'bar mit $f'(y) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ in $x = f(y)$ diff'bar und $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}y)}$. $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},\ mit\ g := f^{-1}$
Spezielle Ableitungen	- $f(x) = \sqrt[n]{x},\ f'(x) = \frac{1}{n*\sqrt[n]{x}}$, - $f(x) = sin(x),\ f'(x) = cos(x)$ - $f(x) = cos(x),\ f'(x) =- sin(x)$ - $f(x) = \frac{1}{x},\ f'(x) =- \frac{1}{x^2}$ - $f(x) = a * e^x,\ f'(x) = a * e^x$ - $f(x) = arccos(x),\ f'(x) =- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ - $f(x) = x^x,\ f'(x) = e^x * (1 + ln(x))$ - $f(x) = a^x,\ f'(x) = a^x ln(a)$ - $f(x) = a * ln(x),\ f'(x) = \frac{a}{x}$
Punktweise Konvergenz	Funktionsfolgen (f_n) konvergiert **punktweise** gegen f falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f \forall x \varepsilon [a, b]$ Reihen Sei I ⊆ R_n. Konvergiert die aus einer Funktionenfolge R gebildete Reihe f(x) = $\sum_{k=0}^{\infty}$ $f_k(x)$ für alle x ∈ I, so ist die Reihe punktwiese konvergent.

Gleichmäßige Konvergenz	Funktionsfolgen (f_n) konvergiert **gleichmäßig** gegen f falls $\lim\limits_{n\to\infty} sup_{x\varepsilon[a,\,b]}\ \lvert f_n(x) - f(x)\rvert\ \to_{n\to\infty} 0$ Reihen Gilt $\lvert f_k(x)\rvert \leq a_k\ und\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x) < \infty$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent

blatt 10:

Konkav	$f''(x) < 0$
Konvex	$f''(x) > 0$
Herangehensweise um Extrema zu bestimmen	$f : (a, b) \to R$ 1. Bestimme die Nullstellen von f' in (a,b). 2. Bestimmen ob Nullstellen lokale Minima oder Maxima sind anhand f''(x)<0 Maximum oder f''(x)>0 Minimum Wenn f''(x)=0 dann Sattelpunkt 3. Bestimmen ob sie globale Extrema sind. f(a) und f(b), bzw $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to b} f(x)$ gegen die Randpunkte wenn der y Wert nicht größer kleiner der Extrempunkte ist dann sind E Falls Funktion abgeschlossen dann gibt es weiter extrema an den Rändern.
Kurvendiskussion: Specials	f(x) $f'(x) = 0$ -> Nullstellenkandidaten $f''(x) = 0$ -> Wendepunkte
Jensens Ungleichung	$f : (a, b) \to \|R$ sei konvex, $n \geq 2,\ x_1, ..., x_n\ \varepsilon(a, b)$ und $p_1, ..., p_n > 0$ und $\sum_{i=1}^{n} p_n = 1$. Dann gilt $f(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$.

Regel von l'Hospital	Zu berechnen: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Problem: geht f oder g "schneller" gegen a? Regel: $f, g : [a, b] \to$ |R, diff'bar mit $g'(x) \neq 0$. Sei $x_0 = a \; oder \; x_0 = b$, (a=-∞ oder b=∞ mögl.) falls $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. L' Hospital Umformungen: https://www.mathebibel.de/regel-von-lhospital
Satz von Rolle	$f : [a, b] \to$ |R stetig auf [a,b], und diff'bar auf (a,b). Falls $f(a) = f(b)$, dann $\exists x_0 \; \varepsilon \; (a, b) \; mit \, f'(x_0) = 0$.
Mittelwertsatz	$f : [a, \; b] \; \to \|R$ stetig und diff'bar auf (a,b) $\Rightarrow \; \exists \, z \varepsilon (a, b) : \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z)$