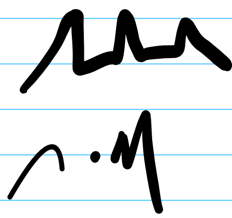
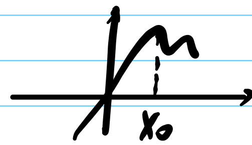
函数在一点连续



✓

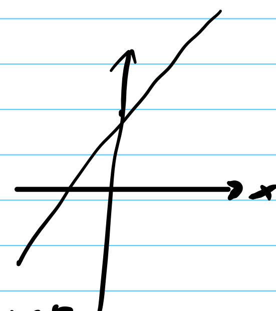
✗

定义 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$



① x_0处$f(x)$有定义
② $x\to x_0$时$f(x)$有极限
③ 极限=定义

例: $f(x)=2x+1$ 在 $x=2$时



$\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$ 右: $2\times2+1=5$

★例: $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $x=0$处连续吗

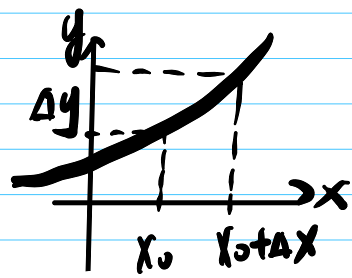
$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0=0$

是连续

正　负　0

$\Delta x = x - x_0$　增量(可以减少)

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



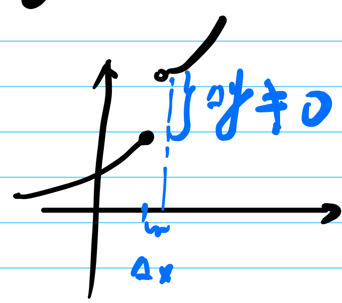
$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

新定义：当 $x \to x_0$ 时 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to x_0} \big(\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta y}\big) = 0$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$



$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

注：f 在 x_0 处有极限是 f 在 x_0 处连续的必要条件

$a \to b$　　a 是 b 的充分

b 是 a 的必要

★例: $f(x)=xD(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{有理}\\ 0, & x\text{无理}\end{cases}$

$f(0)=0\cdot D(x)=0$

$|f(x)-f(0)|=|xD(x)|<\varepsilon$

$\Downarrow$

$\exists\delta$, $|x-0|<\delta$ 吗? 如何找 δ

放缩: $|x|\,|D(x)|^{0\sim1}<|x|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ 当 $\delta=\varepsilon$ 时成立

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

右逼近：$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

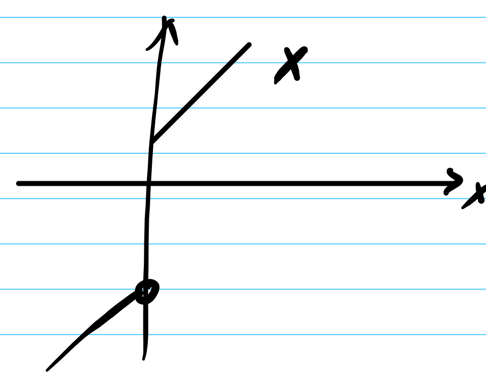
左逼近：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

某点连续 $\Leftrightarrow$ 左连续&右连续

如 $y=|x|$. $x=0$ 连续吗？

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0 \end{cases}$$

例：$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases}$



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-2) = -2$$

手 $f(0)=2$

右连续，左不连续

间断点及其分类

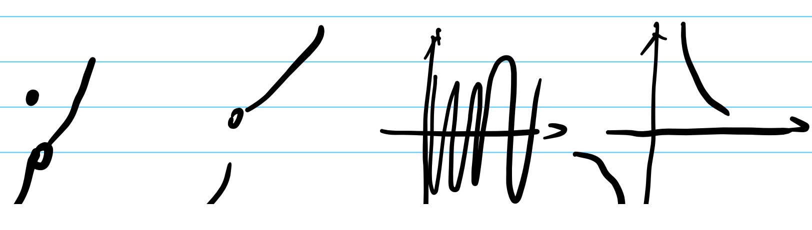
连续　1. x_0处有定义　2. 此处极限

　　　3. 极限=定义值

间断点：1、2、3有一个不满足

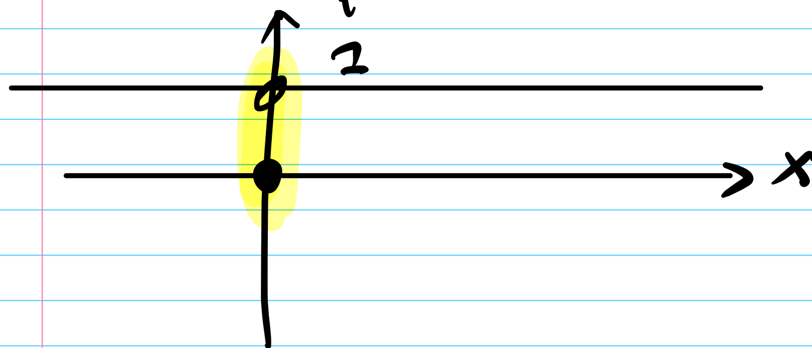
第一类：左右极限都存在 $\begin{cases}\text{可去}\\ \text{跳跃}\end{cases}$

第二类：左右极限至少有一侧不存在 $\begin{cases}\text{振荡}\\ \text{无穷}\end{cases}$

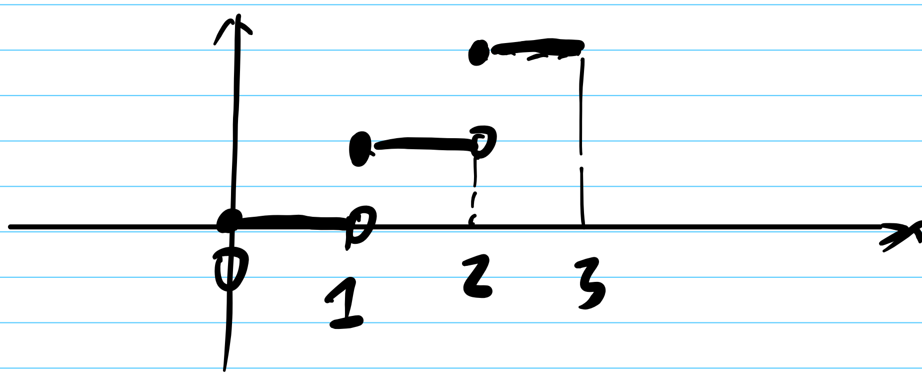


可去: $f(x)=|\mathrm{sgn}\,x|$ $\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

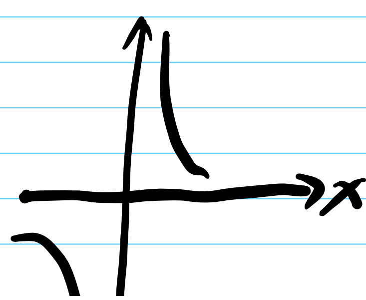
$=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$



跳跃: $f(x)=[x]$

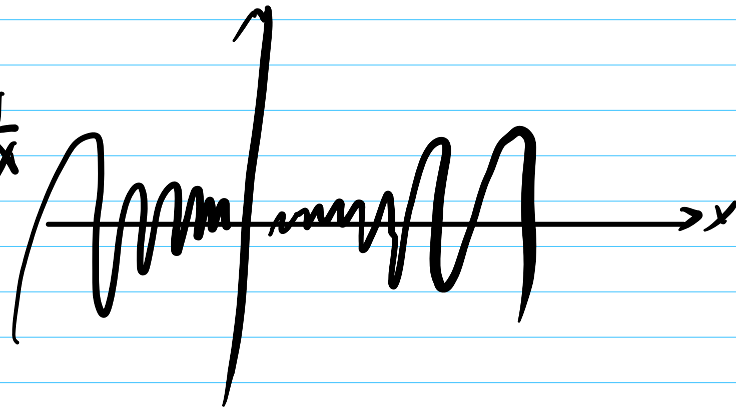


无穷: $y=\frac{1}{x}$ $x\to 0$



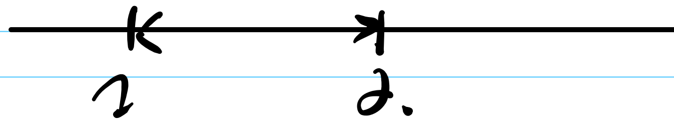
左右极限皆不存在

振荡：$y = \sin\frac{1}{x}$



区间上的连续函数:

$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续.



① $x=1$ 左端点 右连续

② $x=2$ 右端点 左连续

若在 $[a,b]$ 上有限个第一类间断点
可积函数

连续函数的性质

f, g 在 x_0 连续则 $f \pm g$ $f \cdot g$ f/g 也在 x_0 连续

利用：极限的四则运算为基础

多次用

多项式也连续

$g \circ f = g(f(x))$

若 g 在 u_0 连续 f 在 x_0 连续且 $f(x_0)=u_0$

则 $g \circ f$ 在 x_0 连续