Lehrstuhl für Mathematische Physik
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Esolution
Sticker mit SRID hier einkleben

**Hinweise zur Personalisierung:**
- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

# Analysis für Informatik

**Klausur:** MA0902 / Klausur **Datum:** Freitag, 21. Februar 2020
**Prüfer:** Prof. Dr. Silke Rolles **Uhrzeit:** 08:00 – 09:30

| | A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5 | A 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | | | | | | |

## Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **8 Seiten** mit insgesamt **6 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 40 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bitte schreiben Sie alle Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Es wird nur das korrigiert, was in den Kästchen steht.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.



Hörsaal verlassen von ________ bis ________ / Vorzeitige Abgabe um ________

# Aufgabe 1 **(14 Punkte)**

Bei dieser Aufgabe wird nur das Ergebnis bewertet.

0 1 2 a) Betrachten Sie die Menge $M := \{\frac{n}{n+2} : n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}\}$. Bestimmen Sie:

$\sup M = 1$ $\qquad$ $\min M = \frac{1}{3}$

0 1 b) Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+7x^2)}{3x^2} = \frac{7}{3}$$

0 1 c) Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} n^7 \sin(3^{-n}) = 0$$

0 1 d) Bestimmen Sie die folgende Menge $M$:

$$M = \left\{ a \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sin(na) + 5\cos(n^2 a)}{n^2} \text{ konvergiert absolut} \right\}.$$

$M = \mathbb{R}$

0 1 2 e) Bestimmen Sie die folgende Menge $M$:

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n 3^n x^n \text{ konvergiert} \right\}.$$

Bestimmen Sie im Konvergenzfall den Wert der Reihe $S(x)$.

$M = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ $\qquad$ $S(x) = \frac{3x}{(1-3x)^2}$

0 1 f) Bestimmen Sie $A = \{z \in \mathbb{C} : z = |z|^2\}$.

$A = \{0, 1\}$

0 1 2 g) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(3x^2 y)$. Bestimmen Sie:

$\partial_x f(x,y) = 6xy\cos(3x^2 y)$ $\qquad$ $\partial_y \partial_y f(x,y) = -9x^4 \sin(3x^2 y).$

0 1 2 3 h) Es sei

$$f(x) = (2x^2 - 3x + 7)\ln(\ln(x^2)) + (3x-2)^4 \ln x - (53x+2)(2x^2+4)(\ln x)^2.$$

Finden Sie eine Funktion $g$ der Form $g(x) = ax^b(\ln x)^c$ oder $g(x) = ax^b \ln(\ln x)$ mit geeigneten Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ sodass

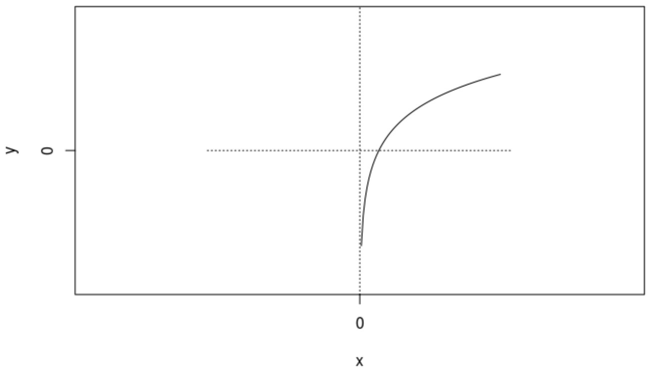
$$f(x) \simeq g(x) \quad \text{für } x \to \infty,$$

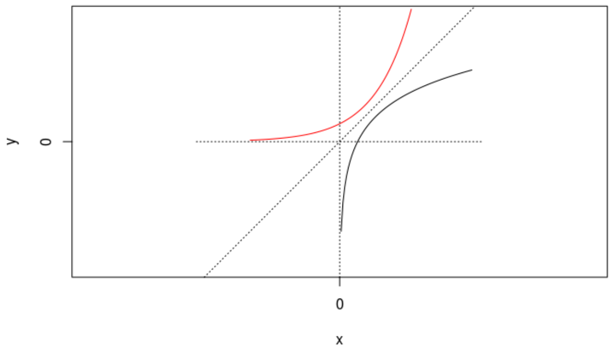
d.h. $f(x)$ und $g(x)$ asymptotisch gleich für $x \to \infty$.

$g(x) = 81x^4 \ln x,$

i) Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion der im Bild dargestellten Funktion:

0
1




**Zusätzlicher Platz für Rechnungen (wird nicht bewertet).**

## Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

a) Geben Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe von $e^x$ um 0 an. Bei dieser Teilaufgabe wird nur das Ergebnis bewertet.

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

b) Geben Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechung an.

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $(a, b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

## Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Finden Sie alle $a \in \mathbb{R}$ sodass für $x \to \infty$ gilt:

$$f(x) = (2x^7 - x^2)e^x + x^5 e^{-x} + e^{2x} = o(x^a e^{2x}).$$

Beweisen Sie Ihre Antwort. Geben Sie explizit die Menge der gesuchten $a$ an.

Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^7 - x^2)e^x + x^5 e^{-x} + e^{2x}}{x^a e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \left((2x^{7-a} - x^{2-a})e^{-x} + x^{5-a}e^{-3x} + x^{-a}\right).$$

Für $b < 0$ gilt $\lim_{x\to\infty} x^b = 0$. Da die Exponentialfunktion schneller gegen unendlich geht als jedes Polynom, folgt $\lim_{x\to\infty} x^b e^{-x} = 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$ und insbesondere

$$\lim_{x\to\infty} (2x^{7-a} - x^{2-a})e^{-x} = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Analog gilt $\lim_{x\to\infty} x^{5-a}e^{-3x} = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Schließlich ist $\lim_{x\to\infty} x^{-a} = 0$ genau dann, wenn $a > 0$.

## Aufgabe 4 **(7 Punkte)**

Bei dieser Aufgabe sind alle Zwischenschritte zu begründen.

a) Berechnen Sie das folgende Integral: $\displaystyle\int_0^4 te^{-5t}\,\mathrm{d}t$.

0 1 2 3 4

Partielle Integration mit $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-5t}$, $u'(t) = 1$, $v(t) = -\frac{1}{5}e^{-5t}$ liefert

$$\int_0^4 te^{-5t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{5}te^{-5t}\right]_0^4 + \frac{1}{5}\int_0^4 e^{-5t}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{4}{5}e^{-20} + \left[-\frac{1}{25}e^{-5t}\right]_0^4 = -\frac{4}{5}e^{-20} - \frac{1}{25}e^{-20} + \frac{1}{25} = \frac{1}{25} - \frac{21}{25}e^{-20}.$$

b) Entscheiden Sie, ob das folgende unbestimmte Integral konvergiert. Im Konvergenzfall berechnen Sie seinen Wert.

$$\int_0^\infty \min\left(x^2, \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

0 1 2 3

Sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) := \min(x^2, \frac{1}{x^2}) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (1,\infty) \end{cases}$. Offensichtlich ist $f$ stetig auf dem Definitionsbereich. Es gilt

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \lim_{\alpha\to\infty}\int_1^\alpha \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3} + \lim_{\alpha\to\infty} -\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

## Aufgabe 5 **(8 Punkte)**

Bei dieser Aufgabe sind alle Zwischenschritte zu begründen.

0 1 2 3 4

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

Um den Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$ zu bestimmen, machen wir den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Einsetzen liefert

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$
$$\iff \lambda = 3 \text{ oder } \lambda = -1.$$

Damit sind alle Lösungen der Differentialgleichung $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$ von der Form $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x}. \tag{1}$$

0
1
2
3
4

Sie dürfen bei dieser Aufgabe verwenden, dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x) = 0$$

gegeben sind durch $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = ce^{-x}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Lösungen von (1) durch die Methode der Variation der Konstanten.

Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (1) durch die Methode der Variation der Konstanten. Sei $y(x) = c(x)e^{-x}$. Dann lässt sich die inhomogene Differentialgleichung so schreiben:

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x},$$

also ist

$$c'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Durch Ausintegrieren folgt, dass

$$c(x) = \ln(1+e^x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Somit sind alle Lösungen der Differentialgleichung (1) gegeben durch

$$y(x) = e^{-x}[\ln(1+e^x) + c_1], \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

## Aufgabe 6 (4 Punkte)

0
1
2
3
4

Bei dieser Aufgabe sind alle Zwischenschritte zu begründen. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen nichtnegativer reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konvergiert } \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert.}$$

Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und $b/2 > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - b| < \frac{b}{2} \iff 0 < \frac{b}{2} \leq b_n \leq \frac{3b}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Da alle $a_n$ nichtnegativ sind, gilt für alle $n \geq n_0$, dass

$$\frac{a_n b}{2} \leq a_n b_n \leq \frac{3a_n b}{2}$$

und somit erhält man, dass

$$0 < \frac{b}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \frac{3b}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (*)$$

$\Longrightarrow$: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent, so folgt aus der zweiten Ungleichung in $(*)$, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
$\Longleftarrow$: Umgekehrt: ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so folgt aus der letzten Ungleichung in $(*)$, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.