Zusammenfassung Analysis für Informatik WS 21 22 von - nicht bekannt

Analysis für Informatik [MA0902] (Technische Universität München)

Analysis für Info, 20/21

Nils Harmsen

28. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

Vorsicht

Dieses Ding ist höchst inoffiziell und wahrscheinlich komplett falsch. Insbesondere die Nummerierung der Sätze etc. ist verschieden, da ich tendenziell einige Dinge (die z.B. aus DS bekannt sein sollten) auslasse. Verlasst euch auf keinen Fall auf dieses Dokument!

Bei Fehlern freue ich mich trotzdem über eine Mitteilung, z.B. per E-Mail an `harmsen@cs.tum.edu`.

Im Folgenden werden *Definitionen*, *Lemmata* und *Sätze* besonders hervorgehoben, indem sie rot, grün bzw. blau umrandet werden. Weiterhin werden Übungen auch gesondert durch einen Strich an der linken Seite hervorgehoben.

Dieses Skript basiert auf den Vorlesungen von Prof. Berger und auf Skripten, die man sonst so im Internet findet.

1 Mengen

Anmerkung (Mengenschreibweisen). *Im Folgenden verwenden wir folgende drei Möglichkeiten, Mengen zu beschreiben:*

1. *Alle Elemente einer Menge explizit schreiben:* $A = \{1, 2, 3\}$
2. *Eine Beschreibung aller Elemente angeben:* $A = \{$*Alle ganzen Zahlen zwischen 1 und 3 inklusive*$\}$
3. *Mit Hilfe einer Bedingung:* $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 3\}$

Anmerkung (Wichtige Mengen). *Wichtige Mengen für Analysis sind die folgenden:*

- $\emptyset$ *- die leere Menge*
- $\mathbb{Z}$ *- die Menge der ganzen Zahlen*
- $\mathbb{R}$ *- die Menge der reellen Zahlen*
- $\mathbb{Q}$ *- die Menge der rationalen Zahlen*
- $\mathbb{N}$ *- die Menge der natürlichen Zahlen*

Anmerkung (Natürliche Zahlen). *Die Menge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *beginnt bereits bei* 0. *Für die Menge der natürlichen Zahlen größer 0 schreibt der Dozent* $\mathbb{N}_{>0}$

Definition 1.1 (Teilmenge). *Eine Menge B heißt* Teilmenge *einer Menge A, wenn* $\forall x \in B : x \in A$.

Anmerkung (Mengenoperationen). *Wie aus DS bekannt sind u.a. folgenden Operationen auf zwei Mengen A, B definiert:*

- $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- $A \times B := \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
- $\mathcal{P}(A) := \{C | C \subseteq A\}$

Anmerkung (Abbildungen). *Eine* Abbildung *(oder Funktion) ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge* genau ein *Element der anderen Menge zuordnet. Man schreibt $f : A \to B$ für eine Funktion von A nach B.*

Definition 1.2 (Injektivität, Surjektivität). *Eine Funktion $f : A \to B$ heißt:*

- injektiv *falls* $\forall x \neq y \in A : f(x) \neq f(y)$
- surjektiv *falls* $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$
- bijektiv *falls f injektiv und surjektiv ist*

Anmerkung (Kardinalitäten). *Zwei Mengen A, B haben die selbe* Kardinalität, *falls es eine Bijektion von A nach B gibt. Die Kardinalität von A ist größer/gleich der Kardinalität von B, falls es eine surjektive Funktion von A nach B gibt.*

Axiom 1.3 (Auswahlaxiom). *Eine Surjektion von A in B existiert genau dann, wenn eine Injektion von B in A existiert.*

Satz 1.4. *Für zwei beliebigen Mengen A, B gilt immer $|A| \leq |B| \vee |A| \geq |B|$*

Satz 1.5 (Cantor-Bernstein). *Wenn $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|$, dann $|A| = |B|$.*

Definition 1.6 (abzählbar unendlich). *Wenn A eine* abzählbar unendliche Menge, *dann $|A| = \aleph_0$, insbesondere $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 < |\mathbb{R}|$ (siehe Cantor, bekannt aus DS)*

2 Reelle Zahlen und Vektoren

Definition 2.1 (Körper). *Ein* Körper $(F, +, \cdot)$ *ist eine Menge* F *mit zwei (binären) Operationen* $+, \cdot$, *wobei:*

1. $\forall x, y, z : (x + y) + z = x + (y + z)$
2. $\forall x, y : x + y = y + x$
3. $\exists 0 \forall n : n + 0 = 0 + n = n$
4. $\forall n \exists y : n + y = y + n = 0$
5. $\forall x, y, z : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
6. $\forall x, y : x \cdot y = y \cdot x$
7. $\exists 1 \forall n \neq 0 : n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
8. $\forall n \neq 0 \exists y : n \cdot y = y \cdot n = 1$
9. $\forall x, y, z : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Ein Körper heißt angeordnet, *wenn es eine Ordnungsrelation* $>$ *gibt, so dass*

1. $\forall x$ *gilt nur eine der folgenden Aussagen:*
   a) $x > 0$
   b) $x < 0$
   c) $x = 0$
2. *falls* $x, y > 0$, *dann auch* $x + y > 0$ *und* $x \cdot y > 0$
3. $x > y$ *gdw.* $x - y > 0$

Demnach sind $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *keine Körper,* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *(mit der normalen Addition bzw. Multiplikation) sehr wohl.* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *sind sogar angeordnet.*

Anmerkung (Intevalle). $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *und* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Definition 2.2 (obere Schranke, untere Schranke). *Eine Zahl* x *heißt* obere Schranke *einer Teilmenge* A, *wenn* $\forall y \in A : x \geq y$. A *heißt nach* oben beschränkt, *falls es eine obere Schranke für* A *gibt.*

Die untere Schrank ist analog definiert. A *heißt dann nach* unten beschränkt.

Definition 2.3 (Maximum, Minimum). x *heißt* Maximum *von* A, *wenn* $x \in A$ *und* x *eine obere Schranke von* A *ist.*

Definition 2.4 (Supremum). *x heißt Supremum einer Teilmenge von A, falls $x = min\{y|y ist\ Obere\ Schranke\ von A\}$ Wir schreiben dafür dann $\sup A$. $\sup\emptyset = -\infty$. Wenn A nicht nach oben beschränkt, dann ist $\sup A = \infty$.*

Definition 2.5 (Vollständige Körper). *Ein angeordneter Körper heißt* vollständig, *wenn jede nicht leere, nach oben beschränkte, Teilmenge ein Supremum hat. $\mathbb{Q}$ ist z.B. nicht vollständig.*

Axiom 2.6 (Vollständigkeitsaxiom). $\mathbb{R}$ *ist* vollständig.

Übung 1 (*unvollständig!*)

Zeige: $\mathbb{Q}$ *ist* nicht *vollständig.*

ENDE VL1, ANFANG VL2

Satz 2.7 (Eigenschaften des Supremums). *Seien A und B beschränkte und nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann:*

1. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, *wenn* $A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$
2. *Wenn* $\lambda \geq 0$, *dann* $\sup(\lambda \cdot A) = \lambda \sup A$
3. *Falls* $A, B \subseteq [0, \infty)$, *dann* $sup\{x \cdot y | x \in A, y \in B\} = supA \cdot supB$
4. *Fall* $A \subseteq B$, *dann* $supA \leq \sup B$.

Wenn wir das Infimum *als* $\inf A := -\sup\{-x | x \in A\}$, *dann gelten auch diese Regeln, wobei sich das $\leq$ in 4. zu $\geq$ umdreht.*

Definition 2.8 (Umgebung). *Sei $x \in \mathbb{R}$, dann heißt ein offenes Intervall (a, b)* Umgebung *von x, wenn $x \in (a, b)$*

Definition 2.9 (offene Mengen). *$A \subseteq \mathbb{R}$ heißt* offen, *wenn $\forall x \in A \exists I_x : I_x \subseteq A$, wobei I_x eine Umgebung von x ist.*

Definition 2.10 (abgeschlossene Mengen). *Eine Menge A heißt* abgeschlossen, *wenn $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.*

Beispiele zu diesen Defs.:

1. $\mathbb{R}$ ist offen, dabei ist $\emptyset$ abgeschlossen.
2. $\emptyset$ ist offen, dabei ist $\mathbb{R}$ abgeschlossen.
3. Jedes offene Intervall ist offen.
4. Jede Vereinigung offener Mengen ist offen.

5. Jedes abgeschlossene Intervall ist abgeschlossen.

6. Jede endliche Menge ist abgeschlossen.

7. Für $a < b$ ist $[a,b) := \{x|a \leq x < b\}$. Dieses Intervall ist weder offen, noch abgeschlossen.

8. $\mathbb{Q}$ ist weder offen, noch abgeschlossen.

Übung 2 (*Abgeschlossen offen*)

1. *Beweise alle obigen Aussagen.*

2. *Beweise, dass $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ die einzigen Mengen sind, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind.*

Definition 2.11 (Vektorraum $\mathbb{R}^n$)**.** $\mathbb{R}^n := \{(x_1,\dots,x_n)|x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$

Mit den Vektoren kann man folgendes machen:

$(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

Für $\gamma \in \mathbb{R} : \gamma(x_1,\dots,x_n) = (\gamma x_1,\dots,\gamma x_n)$.

$(x_1,\dots,x_n) \cdot (y_1,\dots,y_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \in \mathbb{R}$

Eigenschaften des Skalarproduktes:

1. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$

2. $\forall \gamma \in \mathbb{R} : (\gamma \overline{x})\overline{y} = \overline{x}(\gamma \overline{y}) = \gamma(\overline{x} \cdot \overline{y})$

3. $\forall \overline{x,y,z} : \overline{x}(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{xy} + \overline{xz}$

4. $\forall \overline{x} : \overline{x} \cdot \overline{x} \geq 0$ *und sogar positiv, falls* $\overline{x} \neq \overline{0}$

Übung 3 (*Skalarprodukteigenschaften*)

Diese Aussagen zeigen.

Lemma 2.12 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Wir definieren erst noch:* $||\overline{x}|| := \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}}$

$|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}||$

Beweis:

Seien $\overline{x} \neq \overline{0}, \overline{y} \neq \overline{0}$. Dann sei $\overline{z} = \overline{x}\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x} \cdot \overline{x}}, \overline{w} = \overline{y} - \overline{z}$.

Dann ist $\overline{x} \cdot \overline{w} = \overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{x}\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 0$

Nun betrachte: $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{w} = \overline{x} \cdot \overline{z} = (\overline{x} \cdot \overline{y})^2 = (\overline{x} \cdot \overline{z})^2$ und zusätzlich $\overline{y} \cdot \overline{y} = (\overline{z} + \overline{w})(\overline{z} \cdot \overline{w}) = \overline{z} \cdot \overline{z} + \overline{w} \cdot \overline{w} + 2\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z} \cdot \overline{z} + \overline{w} \cdot \overline{w}$

Wir rechnen jetzt: $(\overline{x}\cdot\overline{x})(\overline{y}\cdot\overline{y}) = (\overline{x}\cdot\overline{x})(\overline{z}\cdot\overline{z}+\overline{w}\cdot\overline{w}) = (\frac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x}\cdot\overline{x}})^2(\overline{x}\cdot\overline{x})^2 + (\overline{x}\cdot\overline{x})(\overline{w}\cdot\overline{w}) \geq (\frac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x}\cdot\overline{x}})^2(\overline{x}\cdot\overline{x})^2 = (\overline{x}\cdot\overline{y})^2$

D.h. $(\overline{x}\cdot\overline{y})^2 \leq (\overline{x}\cdot\overline{x})(\overline{y}\cdot\overline{y})$ woraus mit Wurzelziehen die zu zeigende Ungleichung folgt. $\square$

Lemma 2.13 (Dreiecksungleichung)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$
Man veranschauliche sich den Namen grafisch.

Beweis:
$||x+y||^2 = (\overline{x}+\overline{y})(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{x}\cdot\overline{x} + \overline{y}\cdot\overline{y} + 2\overline{x}\cdot\overline{y} \leq (\overline{x}+\overline{y}) = \overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{y}\cdot\overline{y}+2||\overline{x}||||\overline{y}|| = ||\overline{x}||^2 + ||\overline{y}^2|| + 2||\overline{x}||||\overline{y}|| = (||\overline{x}+\overline{y}||)^2 \Rightarrow ||\overline{x}+\overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{y}||$ $\square$

Lemma 2.14 (Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel)**.** *Seien* $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$, *dann ist:* $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:
Seien $\overline{z}, \overline{w} \in R^2$ gegeben durch:
$\overline{z} = (\sqrt{x}, \sqrt{y}), \overline{w} = (\sqrt{y}, \sqrt{x})$
Dann folgt aus Cauchy-Schwarz: $2\sqrt{x}\sqrt{y} = \overline{z}\cdot\overline{w} \leq ||\overline{z}||||\overline{w}|| \leq x+y \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ $\square$

Definition 2.15 (Komplexe Zahlen)**.** *Eine komplexe Zahl ist ein Paar* $z = (x, y), x, y \in \mathbb{R}$ *wobei* x, y *dann als* $Re(z)$ *bzw.* $Im(z)$ *bezeichnet werden.*
Man schreibt auch: $z = x + iy$, *wobei* $i := \sqrt{-1}$ *die* imaginäre Einheit *heißt.*
Addition erfolgt Koordinatenweise: $(x_1 + iy_i) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
Multiplikation: $(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
Für die Menge der komplexen Zahlen schreibt man $\mathbb{C}$. *Dies ist ein Körper.*
Für $z \in \mathbb{C}$ *sei der Betrag* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Übung 4 (*Körper (komplex)*)

Zeigen: $\mathbb{C}$ *ist Körper.*

ENDE VL2 - ANFANG VL3

3 Folgen

3.1 Folgen, Konvergenz

Definition 3.1 (Folge)**.** *Sei* M *eine Menge. Eine* Folge *mit Werten in* M *ist eine Abbildung* $\mathbb{N}^+ \to M$. *Wir schreiben* $x_1, x_2, x_3, \ldots$. *Folgen können* explizit *(z.B.* $x_n = 2^n$*) oder* rekursiv *(z.B.* $x_0 = 1, x_{n+1} = 2x_n$*) gegeben sein.*

Beispiele:

1. $x_n = n$ ist $1, 2, 3, \dots$

2. $x_n = n^2$ ist $1, 4, 9, \dots$

3. $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ - bei der Rechnung mit Computern wird hier das Folgeelement schnell sehr falsch (aufgrund der Rundung).

Definition 3.2 (Monotonie von Folgen)**.** *Eine Folge heißt* monoton wachsend, *wenn* $\forall n : x_n \leq x_{n+1}$ *gilt. Eine Folge heißt* streng *monoton wachsend, wenn sogar* $\forall n : x_n < x_{n+1}$ *gilt.*

Analog ist (streng) monoton fallend *definiert.*

Definition 3.3 (Grenzwert einer Folge)**.** *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge. Eine Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *heißt dann* Grenzwert *(bzw. Limes) dieser Folge, wenn es für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$*gibt, so dass* $|x_n - x| < \epsilon$ *für alle* $n \geq N$ *gilt.*

Man sagt dann, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* x konvergiert*. Kurz schreibt man dann*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

oder auch $x = lim_{n\to\infty} x_n$

Anmerkung (Intuition zu Grenzwerten)**.** $x = lim_{n\to\infty} x_n$ *heißt, dass für (sehr) große* n x_n *unendlich nahe an* x *ist. Insbesondere wird jeder beliebige (positive) Abstand* ϵ *zu* x *ab irgendeinem* n *konsequent unterschritten. D.h. dass wir immer irgendwann für ein hinreichend großes* n $x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ *erhalten, was sich gerade in Definition 3.3 übersetzen lässt.*

Das kann man sich z.B. anhand der Zahlengerade verdeutlichen - eventuell TikZe ich hier irgendwann mal was rein...

Anmerkung (Beispiele zu konvergenten Folgen)**.**

1. *Die Folge* $x_n = \frac{1}{n}$ *konvergiert gegen 0. Für jedes* $\epsilon > 0$ *lässt sich* N *größer als* $\frac{1}{\epsilon}$ *wählen. Dann gilt für* $n > N$*:* $|x_n - 0| = x_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$*, womit die Aussage gilt.*

2. *Die Folge* $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *konvergiert gegen 0. Sei wieder* $\epsilon > 0$*, dann wähle* $N > \frac{1}{\epsilon^2}$*. Wenn* $n > N$*, dann* $|x_n - 0| = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2}}} = \epsilon$*.*

3. *Die Folge* $x_n = (-1)^n$ *konvergiert nicht. Für* $\epsilon \leq 1$ *gilt für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *(also für jede Zahl, die überhaupt als Grenzwert in Frage käme!), dass* $|1 - x| \geq \epsilon$ *oder* $|(-1) - x| \geq \epsilon$*, womit* x *nicht den Anforderungen aus Definition 3.3 genügt, womit kein Grenzwert existiert.*

Satz 3.4 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Jede reelle Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis:
Seien x, y beides Grenzwerte von (x_n). Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N mit $|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq 2\epsilon : \forall n \geq N \Rightarrow x = y$ □

Lemma 3.5. *Seien $(x_n), (y_n)$ konvergente Folgen mit Grenzwert x bzw. y. Dann gilt:*
Wenn $x_n \leq y_n \forall n$ dann $x \leq y$.

Übung 5 (*Konvergenz*)
Zeige Lemma 3.5.

Anmerkung (Collatz-Problem (oder: Konvergenz ist nicht ganz trivial))**.** [1] *Es kann (sehr) schwierig sein, zu zeigen, ob eine gegebene, rekursiv definierte, Folge (x_n) konvergiert.*
Das COLLATZ*-Problem ist ein berühmtes Beispiel dafür.*
Betrachte folgende Folge:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2} & \text{wenn } x_n \text{ gerade} \\ 3x_n + 1 & \text{wenn } x_n \text{ ungerade und verschieden von } 1 \\ 1 & \text{wenn } x_n = 1 \end{cases}$$

Die COLLATZ*-Vermutung lautet dann: Für jedes $x_1 \in \mathbb{N}$ konvergiert diese Folge gegen 1.*
Diese Vermutung wurde bislang weder gezeigt, noch widerlegt.

Satz 3.6 (Einschließung)**.** *Seien $(x_n), (y_n)$ konvergente Folgen mit Grenzwert x. Weiterhin sei $x_n \leq y_n \forall n$.*
Wenn dann (z_n) eine weitere Folge ist mit $x_n \leq z_n \leq y_n \forall n$, dann gilt $z_n \to x$.

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$, sei N_1 so gewählt, dass $\forall n > N_1 : |x_n - x| < \epsilon$ und N_2 so, dass $\forall n > N_2 : |y_n - x| < \epsilon$. Dann sei $N = max(N_1, N_2)$. Sei $n > N$, dann ist $|x_n - x| < \epsilon, |y_n - x| < \epsilon$, also sind $x_n, y_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$. z_n ist auch in diesem Intervall, womit x auch von z_n der Grenzwert ist. □

ENDE VL3, ANFANG VL4

Definition* (Divergenz)**.** *Eine Folge (x_n) heißt divergent, falls sie keinen Grenzwert hat, also nicht konvergiert.*

Definition 3.7. *Wir sagen, x_n geht gegen $+\infty$, falls es zu jedem $c > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq c \, \forall n \geq N$ gibt. Wenn $(-x_n)$ gegen $+\infty$ geht, geht (x_n) gegen $-\infty$.*
Man sagt dann x_n divergiert (oder auch (eigentlich inkorrekt) konvergiert) gegen (minus) unendlich.
Eine Folge (x_n) heißt beschränkt, wenn $\exists k \in \mathbb{R} : |x_n| \leq k \forall n$

[1] dieses Jahr nicht in der VL drangekommen :(

Satz 3.8. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis:
Sei (x_n) eine Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$, dann $\exists N$, so dass für alle $n > N : |x_n - x| < 1$. Wir wählen $k = max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |x| + 1\}$. Diese Menge ist endlich. Eine endliche Teilmenge der reellen Zahlen hat immer ein Maximum.

Jetzt ist dann noch zu zeigen, dass $\forall n |x_n| \leq k$:

1. Wenn $n \leq N$, dann ist k das Maximum einer Menge, die x_n als Element enthält $\Rightarrow |x_n| \leq k$
2. Wenn $n > N$, dann ist $|x_n - x| < 1$ (aus unserer Wahl von N). Weiterhin ist $k \geq |x| + 1$.

   Daraus folgt (mit der Dreiecksungleichung), dass $|x_n| = |x + (x_n - x)| \leq |x| + |x_n - x| \leq |x| + 1 \leq k$

□

Anmerkung. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Aber: Nicht jede beschränkte Folge konvergiert.

Betrachte z.B. $x_n = (-1)^n$. Die Folge ist nach oben beschränkt durch $k = 1$ und nach unten beschränkt durch $k' = -1$, jedoch konvergiert sie, wie gezeigt, nicht.

Satz 3.9 (Rechenregeln für Grenzwerte)**.** *Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen mit $x_n \to a$ und $y_n \to b$, dann $x_n + y_n \to a + b, x_n - y_n \to a - b, x_n \cdot y_n \to a \cdot b$ und $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$.*

Beweis:

1. +: Sei $\epsilon > 0$ und N so groß, dass für alle $n > N$ $|x_n - x| < \epsilon/2$ und $|y_n - y| < \epsilon/2$. Dann gilt für alle $n > N$ $|(x_n + y_n) - x - y| < \epsilon$.
2. $\cdot$: Sei $\epsilon > 0$ aber auch $\epsilon < \frac{1}{3}$. Sei N so groß, dass für alle $n > N$ gilt:
   a) $|x_n - a| < \epsilon$
   b) $|y_n - b| < \epsilon$
   c) $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{3(|b|+\epsilon)}$
   d) $|y_n - b| < \frac{\epsilon}{3(|a|+\epsilon)}$

   Sei $n > N$.

   $|z_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |(a + x_n - a) \cdot (b + y_n - b) - a \cdot b| = |a \cdot b + a(y_n - b) + (x_n - a)b + (x_n - a)(y_n - b) - a \cdot b| \leq |a(y_n - b)| + |b(x_n - a)| + |(x_n - a)(y_n - b)| = |a||y_n - b| + |b||x_n - a| + |x_n - a||y_n - b| < |a| \cdot \frac{\epsilon}{3(|a|+\epsilon)} + |b| \frac{\epsilon}{3(|b|+\epsilon)} + \epsilon^2 \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

   Falls $\epsilon \geq \frac{1}{3}$, dann existiert ein N, so dass $\forall n > N$ gilt, dass $|z_n - ab| < \frac{1}{6}$. Dann ist wieder der Fall mit $\epsilon < \frac{1}{3}$ anwendbar.
3. ::

a) falls $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y, y \neq 0, \forall n: y_n \neq 0, \frac{1}{y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{y}$

Wir müssen also zeigen, dass wenn n groß wird, $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}|$ klein wird.

$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}|$ ist $|\frac{y-y_n}{y\cdot y_n}|$.

Sei $\epsilon > 0$, nun müssen wir ein N finden, so dass $\forall n > N: |\frac{y-y_n}{y\cdot y_n}| < \epsilon$. Dafür wählen wir N so groß, dass: $\forall n > N$ folgendes gilt

i. $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$

ii. $|y_n - y| < \epsilon \cdot \frac{|y^2|}{2}$

Für $n > N$: $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}| = |\frac{y_n - y}{y\cdot y_n} \leq |\frac{\epsilon\cdot|y^2|/2}{|y|\cdot\frac{|y|}{2}} = \epsilon$

b) aus (a) folgt, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{x\to\infty} x_n \frac{1}{y_n} = \lim\limits_{x\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

$\square$

Übung 6

Beweis der Regel für die Subtraktion.

ENDE VL4 - ANFANG VL5

Satz 3.10. *Jede monoton wachsende und beschränkte Folge ist konvergent und es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n$ *wobei* $\sup_n x_n := \sup(M)$ *mit* $M := \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Analog für monoton fallende und beschränkte Folgen.

Beweis:
Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $s - \epsilon < x_N$ (denn sonst wäre $s - \epsilon$ eine obere Schranke von M), wobei s die kleinste obere Schranke sei. Für $n \geq N$ gilt $s - \epsilon < x_N \leq x_n \leq s$, da die Folge monoton wachsend ist und s eine obere Schranke. Dann gilt also $x_n \to s$. $\square$

3.2 Limes superior/inferior, Häufungspunkt

Definition 3.11 (Häufungspunkt).

- *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Dann ist* x *ein* Häufungspunkt *von* A, *wenn* $\forall\epsilon\exists y \in A\setminus\{x\} : |x-y| < \epsilon$.
- *Sei* (x_n) *eine Folge. Dann heißt* x Häufungspunkt *von* (x_n), *wenn*
  1. *x ist ein Häufungspunkt der Menge aller Folgeglieder* oder
  2. *x kommt in der Folge unendlich oft vor.*

Beispiele:

1. $x_n = (-1)^n$, dann sind -1 und 1 Häufungspunkte, da sie unendlich oft vorkommen. Diese Folge hat keine weiteren Häufungspunkte [Beweis: Übung].
2. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, dann ist x der einzige Häufungspunkt.

3. Wähle eine Folge, so dass alle Zahlen in $[0,1]$ Häufungspunkte sind. Konkrete Beispiele:
   a) $x_n = \sin n$, dann sind sogar alle Zahlen in $[-1,1]$ Häufungspunkte. Problem: Diese Aussage ist schwierig zu zeigen.
   b) Betrachte die Folge $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \ldots$ Dies ist eine Folge, die alle Zahlen der Art $\frac{j}{2^k}$ enthält und alle Zahlen in $[0,1]$ als Häufungspunkt besitzt, da für alle $x \in [0,1]$ die ganze Binärentwicklung von x enthalten ist.

Satz 3.12 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.*

Beweis:
Sei (x_n) eine beschränkte Folge. Sei $y_n = sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Da (x_n) beschränkt ist, ist y_n immer endlich.

(y_n) ist monoton fallend, da (y_{n+1}) das Supremum der Menge $\{x_{n+1}, \ldots\}$ ist, die eine Teilmenge der Menge $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ ist, woraus $y_{n+1} \leq y_n$ folgt.

Damit ist (y_n) beschränkt (weil (x_n) beschränkt ist) und monoton fallend, also konvergiert (y_n).

Sei jetzt $y = lim(y_n)$. y heißt $\limsup$ von (x_n).

Wir zeigen nun noch, dass y ein Häufungspunkt von (x_n) ist, also zeigen wir, dass für alle $\epsilon > 0 \exists n$, so dass $|y - x_n| < \epsilon$.

$y = \lim y_n \Rightarrow \exists m : |y - y_m| < \frac{\epsilon}{2}$.

$y_m = \sup\{x_m, x_{m+1} \ldots\} \Rightarrow \exists n \geq m : |x_n - y_m| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |x_n - y| \leq |x_n - y_m| + |y - y_m| < \epsilon$ □

Analog zu $\limsup$ ist auch $\liminf$ definiert. Insbesondere ist $\liminf(x_n) = -\limsup(-x_n)$.

ENDE VL5 - ANFANG VL 6

Mit diesen Definitionen sieht man, dass $-\infty \leq \liminf \leq \limsup \leq +\infty$.

Warum aber ist der $\liminf(x_n)$ einer Folge immer kleiner oder gleich dem $\limsup(x_n)$? Schreiben wir $a_n = sup\{x_n, x_{n+1} \ldots\}, b_n = \inf\{x_n, x_{n+1} \ldots\}$ dann ist $a_n \geq b_n$, womit auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, was gerade die Aussage war.

Falls eine Folge beschränkt ist, dann sind beide Werte endlich. Falls eine Folge nach oben unbeschränkt ist, ist $\limsup = +\infty$. Falls eine Folge nach unten unbeschränkt ist, ist $\liminf = -\infty$.

Lemma 3.13. *Alle Häufungspunkte einer Folge (x_n) sind zwischen $\limsup(x_n)$ und $\liminf(x_n)$.*

Beweis:
Sei x ein Häufungspunkt. Dann $\exists (x_{n_k})$,die gegen x konvergiert.

$\forall k : \inf\{\ldots\} \leq x_{n_k} \leq \sup\{(x_{n_k}, x_{_{k+1}}, \ldots\})$. Daraus folgt, dass $\liminf x_n \leq x \leq \limsup x_n = \liminf\{\ldots\} \leq \lim x_{n_k} \leq \limsup\{\ldots\}$. □

Dafür haben wir folgendes genutzt:

Lemma 3.14. *x ist eine Häufungspunkt einer Folge (x_n) genau dann wenn es eine gegen x konvergierende Teilfolge (x_{n_k}) gibt.*

Beweis:
$\Rightarrow$: Sei x ein Häufungspunkt. Dann kommt x entweder unendlich oft in der Folge vor, dann gibt es offensichtlich eine entsprechende Teilfolge. Sonst ist x ein Häufungspunkt der Menge aller Folgeglieder, dann $\forall\epsilon\exists n_\epsilon$ so dass $|x_{n_\epsilon} - x| < \epsilon$. Eine Teilfoge davon muss wachsende Indizes haben, womit wir eine geeignete Teilfolge gefunden haben.

$\Leftarrow$: Sei (x_{n_k}) eine Teilfolge, sei $x = \lim x_{n_k}$. $\forall\epsilon\exists K : \forall k > K : |x_{n_k} - x| < \epsilon \Rightarrow$: x ist ein Häufungspunkt □

Lemma 3.15.
1. *Die Folge (x_n) konvergiert gdw. $-\infty < \limsup x_n = \liminf x_n < \infty$ ist.*
2. *Die Folge (x_n) divergiert gegen ∞ gdw. $\liminf x_n = \limsup x_n = \infty$.*
3. *Die Folge (x_n) divergiert gegen $-\infty$ gdw. $-\infty = \liminf x_n = \limsup x_n$.*

Beweis:
1. - $\Rightarrow$: (x_n) konvergiert. Sei $x = \lim x_n$. Sei $\epsilon > 0$, dann existiert ein N, so dass $\forall n > N : |x_n - x| < \epsilon \Rightarrow x_n - \epsilon < x_n < x_n + \epsilon \Rightarrow \forall n > N\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subseteq [x - \epsilon, x + \epsilon]$.

     $\Rightarrow \forall n > N : sup\{x_n, \dots\} \leq x + \epsilon, \inf\{x_n, \dots\} \geq x - \epsilon$

     $\Rightarrow \limsup x_n = \lim \sup\{x_n, \dots\} \leq x + \epsilon, \lim \inf\{x_n, \dots\} \geq x - \epsilon$

     $\Rightarrow 2\epsilon \geq \limsup x_n - \liminf x_n$, also muss $\limsup x_n = \liminf x_n = x$
   - $\Leftarrow$: $\liminf x_n = \limsup x_n$. Schreibe $x = \limsup x_n = \liminf x_n$. Sei $\epsilon > 0$, dann $\exists N$ so dass $\forall n > N$:

     a) $|\sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} - x| < \epsilon$

     b) $|\inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} - x| < \epsilon$

     $\Rightarrow x_n \leq \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} < x + \epsilon$ und $x_n \geq \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} > x - \epsilon$, also muss $|x_n - x| < \epsilon \Rightarrow \lim x_n = x$.
2. - $\Rightarrow$: $\liminf x_n = +\infty$ heißt: $\forall M\exists N : \forall n > N : \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} > M$, dann ist insbesondere auch $x_n > M$, womit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
   - $\Leftarrow$: $\forall M\exists N : \forall n > N : x_n > M$, dann ist für alle $k \geq n$: $x_k > M$ (wenn wir $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ schreiben) $\sup A_n, \inf A_n > M \Rightarrow \forall M\exists N : \forall n > N : \inf A_n \geq M$ und $\sup A_n \geq M$ also ist $\liminf x_n = \limsup x_n = +\infty$
3. Analog.

□

Satz 3.16 (Cauchy-Kriterium für Konvergenz)**.** *Sei (x_n) eine Folge. (x_n) konvergiert gdw. $\forall\epsilon > 0\exists N : \forall n, m > N : |x_m - x_n| < \epsilon$*

Beweis:
$\Rightarrow$: (x_n) konvergiert. Sei $x = \lim x_n$. Sei $\epsilon > 0$, dann $\exists N$ so dass $\forall n > N : |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$, so dass für $n, m > N$: $|x_n - x_m| < |x_n - x| + |x_m - x| < \epsilon$

$\Leftarrow$: Nehme an, dass (x_n) das Cauchy Kriterium erfüllt. Sei N so groß, dass $\forall n, m > N : |x_n - x_m| < \epsilon$. Schreibe A_n für $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Für $n > N$ erfüllt jedes Element x_m aus A_n $x_n - \epsilon < x_m < x_n + \epsilon$. Daraus folgt, dass $\inf A_n \geq x_n - \epsilon, \sup A_n \leq x_n + \epsilon \Rightarrow |\sup A_n - \inf A_n| \leq 2\epsilon \Rightarrow \limsup x_n - \liminf x_n = \limsup A_n - \liminf A_n \leq 2\epsilon$. Da ϵ beliebig erhalten wir $\limsup x_n = \liminf x_n$, woraus die Konvergenz folgt. $\square$

ENDE VL 6 - ANFANG VL 7

4 Reihen

Definition 4.1. *Sei (a_n) eine Folge. Die Folge $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ heißt Folge der Partialsummen von (a_n).*

Falls diese Folge konvergiert, dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. Sonst heißt die Reihe divergent.

Einige Beispiele:

1. Die geometrische Reihe. Sei $c \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n$. Die Partialsummen sind gegeben durch $s_n = 1 + c + c^2 + \dots + c^n = \frac{1-c^n}{c}$ (mit $c \neq 1$).

   Wann konvergiert diese Reihe?

   Wenn $|c| < 1$, dann $c^n \to 0$, also $s_n \to \frac{1-c^n}{1-c} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-c}$ Wenn $|c| > 1$, dann divergiert c^n, also divergiert s^n.

   Für die Reihe heißt das: Für $|c| < 1$ konvergiert diese gegen $\frac{1}{1-c}$, sonst ist sie divergent.

2. Die harmonische Reihe. $a_n = \frac{1}{n}$ Frage: konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

   Antwort: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. $S_{2^n} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots = 1 + \sum\limits_{j=1}^{n} [\sum\limits_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k}] \geq 1 + \sum\limits_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j}$.

   Daraus sehen wir: $s_{2^n} \geq 1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2}$, was gegen unendlich läuft, womit die Reihe divergiert.

3. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Konvergiert die entsprechende Reihe?

Antwort: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Damit konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ gegen 1.

Satz 4.2 (Notwendige Bedingung für Konvergenz)**.** *Falls* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, dann* $\lim a_n = 0$.

Übung 7

Beweis der Aussage.

Satz 4.3. *Ist* $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *mit* $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$ *so ist* (s_n) *konvergent gdw.* (s_n) *beschränkt ist.*

Definition 4.4 (Majorante)**.** *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$. *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *heißt* Majorante *für* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *falls* $\forall k : b_k \in \mathbb{R}$ *und* $b_k \geq |a_k|$

Satz 4.5 (Majorantenkriterium)**.** *Seien* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k, \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *Reihen. Falls die Zweite eine Majorante der Ersten ist und sie konvergiert, dann konvergiert auch die Erste.*

Beweis:

Seien $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Wir wissen, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, also konvergiert (t_n). Deswegen muss t_n das Cauchy-Kriterium erfüllen, also muss $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : |T_n - T_m| < \epsilon$.

O.B.d.A.: $m > n$: $|s_n - s_m| = |\sum\limits_{k=0}^{m} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k| = |\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |b_k| = T_m - T_n < \epsilon$. Also erfüllt auch (s_n) das Cauchy-Kriterium, also konvergiert sie, womit wir die zu zeigende Aussage erhalten. □

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n^2}$

$a_n \leq 2\frac{1}{n(n+1)}$ für alle n. Mit dem Majorantenkriterium und unserer vorherigen Beobachtung sehen wir, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Ohne Beweis: Der Grenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$.

Anmerkung (Folgerung aus dem Majorantenkriterium)**.** *Falls* $\sum b_n$ *eine Majorante von* $\sum a_n$ *ist und* $\sum a_n$ *divergiert, dann divergiert auch* $\sum b_n$.

Noch ein Beispiel :)

$a_n = n^\alpha$, $\alpha > 0$. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

Antwort: Für $\alpha \leq 1$ ist n^{-1} eine divergente Minorante, womit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Für $\alpha > 1$: $a_k = k^{-\alpha}$. Wir finden eine Majorante. Für alle k: Sei n_k so gewählt, dass $2^{n_k} \leq k < 2^{n_k+1}$, also z.B. $n_k = \lfloor \log_2 k \rfloor$. Dann wählen wir $b_k = [2^{n_k}]^{-\alpha}$. Behauptung: b_k ist eine Majorante. Da $2^{n_k} \leq k \Rightarrow (2^{n_k})^{-\alpha} \leq k^{-\alpha}$.

Falls also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, dann auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} [\sum\limits_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} b_k] = \sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^j \cdot (2^j)^{-\alpha} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)j} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} [2^{(1-\alpha)}]^j$ was eine geometrische Reihe ist, deren Konvergenz wir sahen.

Daraus folgt also, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \begin{cases} \text{konvergent für } \alpha > 1 \\ \text{divegent sonst} \end{cases}$

Satz 4.6 (Quotientkriterium). *Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Dann:*

1. *die Reihe konvergiert wenn es ein $q < 1$ gibt, so dass $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$*
2. *die Reihe divergiert wenn es ein $q > 1$ gibt, so dass $\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq q$*

Beispiele für den Fall $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$:

1. $a_n = \frac{1}{n}$ - divergent
2. $a_n = \frac{1}{n^2}$ - konvergent

Wenn dieser Grenzwert also 1 ist, können wir keine Aussage treffen.

Beweis:
Zunächst den zweiten Teil.

Falls $\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ dann $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Wir haben schon gesehen, dass die Reihe nur konvergieren kann, wenn die Folge gegen 0 konvergiert. Das ist hier offensichtlich nicht der Fall, die Folge divergiert ja sogar.

Nun der erste Teil: $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, dann $\exists q < 1$ und N so dass $\forall n > N : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Dann $\forall n > N+1 : a_{n+1} < q|a_n| < q^2|a_{n-1}| \ldots$

Per Induktion für $n > N+1$ kriegen wir, dass $|a_n| < q^{n-N} \cdot a_N$.

Sei $c = \max\{a_0, \frac{a_1}{q}, \frac{a_2}{q^2}, \ldots \frac{a_{N+1}}{q^{N+1}}\}$. Dann $\forall n : |a_n| \leq cq^n$. Dann ist $b_n = c \cdot q^n$ eine konvergente Majorante, womit die Aussage folgt. □

ENDE VL 7 - ANFANG VL 8

Beispiel: Die Exponentreihe: Sei $z \in \mathbb{C}$, dann ist die Exponentreihe von z: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Behauptung: Diese Reihe konvergiert. Wir benutzen das Quotientkriterium und zwar $\limsup \frac{|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}|}{|\frac{z^n}{n!}|} = \limsup |\frac{z^{n+1}/z}{(n+1)!/n!}| = \limsup |\frac{z}{n+1}| = 0 < 1$ womit die Reihe für $z \neq 0$ konvergiert.

Für $z = 0$: Dann ist für $n \geq 1 : \frac{z^n}{n!} = 0$, womit die Folge offensichtlich auch konvergiert.

Definition 4.7 (Exponentialfunktion)**.** *Die Exponentialfunktion* $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist definiert durch* $exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Tatsachen:

1. $exp(0) = 1$ da $exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \cdots = 1$

2. $exp(1) = e = \lim_{n\to 0}(1 + \frac{1}{n})^n$

Definition 4.8. *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe. Sie heißt* absolut konvergent, *falls* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* bedingt konvergent, *falls die Reihe zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.*

Anmerkung. $|a_n|$ *ist eine Majorante für* a_n*.*

Also gibt es für eine Reihe drei Möglichkeiten:

1. *Absolute Konvergenz*

2. *Bedingte Konvergenz*

3. *Divergenz*

Anmerkung. *Das Quotientkriterium garantiert absolute Konvergenz. Also konvergier z.B. die Exponentialreihe absolut.*

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$

Behauptung: Diese Reihe konvergiert bedingt.

Beweis: Die Reihe konvergiert nicht absolut, weil die harmonische Reihe nicht konvergiert. Dafür müssen wir also noch zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, wofür wir das Cauchy-Kriterium nutzen, also zeigen wir, dass:

$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : |\sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k}| < \epsilon$ Um das zu zeigen benutzen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.9. *Für alle $m > n$ gilt:* $|\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k}| \leq \frac{1}{n}$

$|\sum\limits_{k=n}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k}|$ o.B.d.A.: Sei n gerade. $= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \dots$
Zwei Behauptungen:

1. Das ist immer positiv.
2. Die Summe ist immer $\leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow |\sum\limits_{k=n}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k}| \leq \frac{1}{n}$, also konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
Was ist denn jetzt der Grenzwert dieser Summe? Sie konvergiert gegen $\ln 2$.
Wir haben mit der alternierende harmonischen Reihe gearbeitet, aber wir haben insbesondere Folgendes gesehen:

Lemma 4.10. *Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Reihe positiver Zahlen. (also $\forall n : a_n \geq a_{n+1} > 0$), dann $\forall m > n : |\sum\limits_{k=n}^{m} (-1)^{k+1} \cdot a_k| \leq a_n$*

Satz 4.11 (Leibnizkriterium)**.** *Sei (a_n) eine monoton fallende Reihe positiver Zahlen und nehme an, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.*

Beweis:
Gegeben $\epsilon > 0$ existiert N, so dass $\forall n > N : 0 \geq a_n < \epsilon$. Dann: Für alle $m > n > N$: $|\sum\limits_{k=n}^{m} (-1)^{k+1} a_K| \leq a_n < \epsilon$. Mit dem Cauchy-Kriterium folgt die Konvergenz der Reihe $\sum (-1)^{n+1} a_n$. □

ENDE VL 8 - ANFANG VL 9

Satz 4.12 (Umordnungssatz)**.** *Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation, d.h. eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ und sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ auch absolut konvergent und es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*

Beweis:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ist absolut konvergent.

   Sei $M := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Für alle n sei $m(n) = \max\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$

   Dann ist $\forall n : \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leq \sum\limits_{k=1}^{m(n)} |a_k|$ also konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| \leq M$

Übung 8

Zeig: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = M$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Sei $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\epsilon > 0$ und N so groß, dass $\sum_{k=1}^{N} |a_k| > M - \epsilon$.

Dann ist $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \epsilon$.

Deswegen ist $|\sum_{n=1}^{N} a_n - s| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \epsilon$.

Sei $K = \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(n)\}$

Für $n \geq K$ ist die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(k)\}$

Sei nun $S' = \sum_{n=1}^{\infty} a_{(\sigma(n))}$. Wir wollen zeigen, dass $S' = S$. Dafür werden wir jetzt $|S - S'|$ abschätzen.

Sei $n > K$ so groß, dass $|\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - S'| < \epsilon$.

$|S' - S| \leq |S' - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| + |\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{N} a_k| + |\sum_{k=1}^{N} a_k - S|$

Wir wollen jetzt noch diese Differenzen abschätzen. $|S' - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| < \epsilon$ ist sehr einfach zu sehen. $|\sum_{k=1}^{N} a_k - S| < \epsilon$ ebenfalls.

Bleibt noch $|\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{N} a_k|$ Wir wissen, dass $n > K \Rightarrow \{1, 2, .., N\} \subseteq \{(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} \Rightarrow$
$|\sum_{j \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \setminus \{1, \ldots, N\}} a_j| \leq \sum_{j \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \setminus \{1, \ldots, N\}} |a_j| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \epsilon$.

Wir haben also gezeigt, dass $|S - S'| < 3\epsilon$. Da ϵ beliebig klein ist $S = S'$.

□

Was passiert, wenn die Reihe bedingt konvergent ist?

Satz 4.13. *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bedingt konvergent und* $x \in \mathbb{R}$, *dann* $\exists \sigma$ *(mit* σ *Permutation), so dass* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$.

Es gibt auch eine Permutation σ, *so dass* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$ *gegen* $\infty, -\infty$ *konvergiert*

Beispiel: Sei $a_n = (-1)^{n+1}/n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert gegen eine reelle Zahl (genauer: $\ln 2$). Wir zeigen jetzt eine Umordnung, womit sie gegen ∞ divergiert.

Die Ursprüngliche Reihe ist $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$. Wir wollen jetzt eine Umordnung finden, dass sie folgendermaßen aussieht: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \dots \frac{1}{15} - \frac{1}{6} \dots$

Es findet sich immer wieder eine Gruppierung von positiven Glieder, die aufsummiert $\geq \frac{1}{4}$ sind. Der nächste negative Term läuft jedoch gegen 0. Also addieren wir immer mehr als ein Viertel, subtrahieren aber deutlich weniger, weswegen die Summe gegen unendlich geht.

Satz 4.14 (Doppelreihensatz)**.** *Seien a_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$ komplexe Zahlen. Falls $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$, dann konvergiert auch $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ und $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ij} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{k,(n-k)}$.*

Der Beweis erfolgt analog zum Umordnungssatz.

Anmerkung (Cauchys-Produktformel)**.** *Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, sei $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$*

Erklärung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n b_k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$

4.1 Exponentfunktion

Erinnerung: $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Was ist $\exp(z) \cdot \exp(w)$? Mit Cauchys-Produktformel $\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^n \cdot w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\binom{n}{k} z^k w^{n-k})] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w)$

Also ist z.B. auch $\forall n \in \mathbb{N} : \exp(n) = \exp(1)^n = e^n$

Satz 4.15 (Eigenschaft von exp)**.** *Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

1. $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
2. $\exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\exp(n) = e^n$
4. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
5. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist monoton wachsend.*
6. $\forall z \in \mathbb{C} : |\exp(z)| \leq \exp(|z|)$

Beweis: 1. $\exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(-z+z) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

2. a) Für $x > 0$: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Es sind offensichtlich alle Glieder der Summe positiv.

   b) Für $x = 0$: $\exp(0) = 1$

   c) Für $x < 0$: $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$, wobei $\exp(-x)$ positiv ist, damit auch $\exp(x)$.

3. haben wir bereits.

4. Algebra.

5. Wir müssen zeigen, dass falls $x > y, x, y \in \mathbb{R}$, dann $\exp(x) > \exp(y)$.

   $\exp(x), \exp(y) > 0$, deswegen reicht es zu zeigen, dass $\frac{\exp(x)}{\exp(y)} > 1$, das ist $\exp(x - y) > 1$.

6. $|\exp(z)| = |\sum \frac{z^n}{n!}| \leq \sum \frac{|z^n|}{n!} = \exp(|z|)$

$\square$

ENDE VL 9 - BEGINN VL 10

5 Funktionen

Im Folgenden sei $f : D \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ bzw. $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 5.1 (Isolierter Punkt)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, sei $x \in D$.*
x heißt isoliert (oder isolierter Punkt), falls es keine Folge (a_n) in $D \setminus \{x\}$ die gegen x konvergiert.

Beispiele:

1. $D = \mathbb{R}$: Dann hat D keine isolierten Punkte.

2. $D = \{0\} \cup \{x | x \geq 1\}$: Dann ist 0 ein isolierter Punkt in D.

3. $D = \mathbb{Z}$: Dann sind alle Punkte isoliert.

Definition 5.2 (Grenzwert einer Funktion)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ und sei $x \in D$ nicht isoliert. a heißt Grenzwert von f in x falls für alle gegen x konvergente Folge (a_n) in $D \setminus \{x\}$ der Grenzwert von $f(a_n) = a$ ist.*

Definition 5.3 (Stetige Funktion)**.** *Eine Funktion f mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt* stetig *in $x \in D$, wenn für jede Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x$ gilt: $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ oder x isoliert ist. f heißt stetig in D, wenn f für alle $x \in D$ stetig in x ist.*

Beispiele:

1. Jede Funktion von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ ist in jedem Punkt stetig.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ ist überall außer in 0 stetig.

Lemma 5.4 ($\epsilon\delta$-Kriterium für Stetigkeit)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, sei $f : D \to \mathbb{C}$. Sei $x_0 \in D$ ein nicht isolierter Punkt.*

a ist der Grenzwert von f in x_0 gdw. $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$.

Beweis:
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ $f : D \to \mathbb{C}$, $x_0 \in D$ nicht isoliert.

1. Nehmen wir an, dass das $\epsilon\delta$-Kriterium hält. Sei (a_n) eine gegen x_0 konvergente Folge in $D \setminus \{x_0\}$.

   Dann $\exists N \forall n > N : |a_n - x_0| < \delta$ Dann $\forall n > N : |f(a_n) - a| < \epsilon$ wodurch $\lim f(a_n) = a$ also gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

2. Nehmen wir an, dass das $\epsilon\delta$-Kriterium nicht hält, also dass $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x : x \neq x_0, |x - x_0| < \delta, |f(x) - a| \geq \epsilon$. Jetzt müssen wir zeigen, dass dann auch die Folgedefinition nicht hält, also dass es eine Folge (a_n) in $D \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert, aber $f(a_n)$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert.

   Sei $\epsilon > 0$ nun wie oben gewählt. Für alle n sei $a_n \in D$ eine Zahl, so dass $a_n \neq x_0, |a_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(a_n) - a| > \epsilon$.

   Die Folge (a_n) konvergiert gegen x_0 aber die Folge $f(a_n)$ konvergiert *nicht* gegen $f(x_0)$

□

Satz 5.5 (Rechenregeln für Stetigkeit)**.** *Seien f, g Funktionen mit Definitionsbereich D. Sind f und g stetig in einem nicht isolierten $x_0 \in D$, sei a der Grenzwert von f in x_0, b analog für g.*

Dann: $a + b = \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x), a - b = \lim_{x \to x_0} f(x) - g(x), a \cdot b = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ und falls $b \neq 0 : \frac{a}{b} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Beweis: (+) Sei (a_n) eine gegen x_0 konvergente Folge in $D \setminus \{x_0\}$, dann $\lim_{n \to \infty} (g(a_n) + f(a_n)) = \lim_{n \to \infty} g(a_n) + \lim_{n \to \infty} f(a_n) = b + a$. Da (a_n) bis auf den Grenzwert beliebig war, sehen wir, dass $a + b = \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x)$.

Auch für die restlichen Operationen erfolgt der Beweis analog anhand der Rechenregeln für Grenzwerte. □

Aus diesem Satz sehen wir, dass Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und rationale Funktionen $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit p, q Polynomen, stetig auf ihrem Definitionsbereich sind.

Satz 5.6 (Komposition stetiger Funktionen). *Seien $D, F \subseteq \mathbb{C}$, sei $f : D \to F, g : F \to \mathbb{C}$. Sei $x_0 \in D, y_0 \in F$.*

Nehme an, dass f stetig in x_0, g stetig in y_0 und $f(x_0) = y_0$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Übung 9

Zeige diese Aussage.

Satz 5.7. $\exp$ *ist stetig auf ganz* $\mathbb{C}$.

Beweis:
Wir müssen zeigen, dass $\forall z \in \mathbb{C} : \exp$ in z stetig ist.

1. $\exp$ ist in 0 stetig: Sei $w \in \mathbb{C}, |w| < \frac{1}{2}$. $|\exp(w) - \exp(0)| = |\exp(w) - 1| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} - 1| = |1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} - 1| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{w^n}{n!}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |w|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |w|^n - 1 = \frac{1}{1-|w|} - 1 = \frac{|w|}{1-|w|} \leq 2|w|$

   Sei (w_n) eine gegen 0 konvergente Folge. Also $\exists N \forall n > N : |w_n| < \frac{1}{2}$. Für $n > N$ $|\exp(w_n) - \exp(0)| \leq 2|w_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   Also ist $\exp$ stetig in 0.

2. Sei $z \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass $\exp$ auch in z stetig ist. Sei (w_n) eine gegen z konvergente Folge. Sei $z_n = w_n - z$, $z_n \to 0$.

   $\exp w_n - \exp z = \exp(z + z_n) - \exp z = \exp(z) \cdot \exp(z_n) - \exp z = \exp(z) \cdot (\exp(z_n) - 1) \to 0$

   Also ist $\exp$ in z stetig.

$\square$

ENDE VL 11 - ANFANG VL 12

Definition 5.8 (Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert). *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. f habe im Punkt $x_0 \in D$ den linksseitigen Grenzwert a, falls:*

1. *Es gibt mindestens eine Folge (a_n), so dass $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, \forall n : a_n \in D, \forall n : a_n < x_0$*
2. *Für alle diese Folgen (a_n) gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$*

Der rechtsseitige Grenzwert ist selbstredend analog definiert.

Wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert gleich sind, existiert auch der normale Grenzwert.

5.1 Fixpunktiteration

Frage: Wie erhalte ich (eine Annäherung) für $\sqrt{2}$?

Sei f eine stetige Funktion. x heißt dann *Fixpunkt* von f, falls $f(x) = x$.

Sei x_0 beliebig. Wir definieren rekursiv $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{k+1} = f(x_k)$.

Falls die Folge (x_k) konvergiert, dann ist der Grenzwert $x = \lim_{x_k}$ ein Fixpunkt von f.

Warum? $f(x) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x$, da f stetig.

Wie können wir jetzt dieses Verfahren nutzen?

Wir finden eine Funktion f so dass

1. $\sqrt{2}$ ist ein Fixpunkt von f.
2. f ist leicht zu berechnen (sonst ist haben wir wenig gewonnen)
3. die Folge (x_k) konvergiert.

Versuch 1: $f(x) = \frac{2}{x}$. $\sqrt{2}$ ist ein Fixpunkt, die Funktion ist einfach zu berechnen, aber die Folge (x_k) konvergiert nicht.

Versuch 2: $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ f ist wieder halbwegs leicht zu rechnen, $\sqrt{2}$ ist ein Fixpunkt und die Folge (x_k) konvergiert (sogar schnell).

6 Trigonometrische Funktionen

Aus der Schule kennen wir sin und cos, die dort geometrisch (i.e. anhand von Seitenverhältnissen im Dreieck) definiert wurden.

Wir betrachten jetzt aber eine andere (äquivalente) Definition.

Definition 6.1. $\sin(x) := \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$

$\cos(x) := \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$

Damit sind $\sin, \cos$ übrigens auch für komplexe Zahlen definiert. Für reelle x ist diese Definition äquivalent zur Schuldefinition.

Satz 6.2. sin *und* cos *haben eine Periode, d.h.* $\exists \rho \in \mathbb{R}^+ : \forall x : \sin(x) = \sin(x + \rho), \cos(x) = \cos(x + \rho)$.

Diese Periode ist $\rho = 2\pi$.

Anmerkung. *Analytisch lässt sich* π *gerade als die Hälfte der Periode vom Sinus (bzw. Cosinus) definieren, wir erhalten hier das Ergebnis aber aus der Schulvariante.*

Lemma 6.3. $\forall x : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Anmerkung. *Falls* $x \in R$: $-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1$

Reihendarstellung von $\sin, \cos$:
$\cos x = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n+(-ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$
ENDE VL 11 - ANFANG VL 12

Anmerkung (Eulersche Formel)**.** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Warum? $\cos x + i \sin x = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} + i \cdot \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i} = \exp(ix)$
Daraus folgt z.B., dass $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

6.1 Polarkoordinaten

Sei $z \neq 0 \in \mathbb{C}$, wir können z als einen Punkt auf der Ebene betrachten, insbesondere können wir z entweder anhand seiner Koordinaten betrachten (also gerade die Darstellung $z = a + i \cdot b$) oder anhand eines Winkels und eines Radius charakterisieren (z.B. als $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$). Diese zweite Schreibweise nennt man *Polarkoordinatenschreibweise von z.*

7 Konsequenzen der Stetigkeit

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und sei y zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Muss es dann ein $c \in [a, b]$ geben, so dass $f(c) = y$?
Nein.
Gegenbeispiel: $a = 0, b = 1, f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$
Für $y = \frac{1}{2}$ existiert dann kein c.
Aber wir können das mit Stetigkeit beheben.

Satz 7.1 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, sei y zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann $\exists c \in [a, b] : f(c) = y$.*

Beweis:
O.B.d.A.: Sei $f(a) \leq y \leq f(b)$.
Dann sei $A := \{x \in [a, b] | f(x) \leq y\}$. Wir sehen, dass $A \subseteq [a, b], a \in A$. Folglich ist A nicht leer und begrenzt, also hat A ein Supremum zwischen a und b. Wir schreiben $c = \sup A$ und behaupten, dass $f(c) = y$. Das müssen wir jetzt nur noch zeigen.
Wir zeigen dies folgendermaßen:

1. $f(c) \leq y$: Beweis: Sei $\epsilon > 0, \delta > 0$ so klein, dass $\forall x : |x - c| < \delta, |f(x) - f(c)| < \epsilon$ $c = \sup A \Rightarrow \exists x \in A | |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$. $x \in A \Rightarrow f(x) \leq y$, $f(c) = f(x) + (f(c) - f(x)) \leq y + \epsilon$ und das gilt für alle $\epsilon > 0 \Rightarrow f(c) \leq y$.

2. $f(c) \geq y$:

a) Wenn $c = b$, dann trivial.

b) Wenn $c < b$: Sei $b_n = c + \frac{1}{n}$ eine Folge, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ und $\forall n : b_n \notin A \Rightarrow \forall n : f(b_n) \geq y$. Aus der Stetigkeit wissen wir, dass $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq y$.

Damit haben wir die Gleichheit gesehen. □

Definition 7.2 (Maximum/Minimum von Funktionen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. $x \in D$ heißt Maximum von f falls $\forall y \in D : f(y) \leq f(x)$. Das Minimum von f ist analog definiert.*

Anmerkung. *1. Es gibt Funktionen, die weder Minimum noch Maximum haben.*

2. Falls ein Maximum (oder ein Minimum) existiert, dann muss dieses nicht eindeutig sein.

Beispiele:

1. Funktion ohne Maximum und Minimum: $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$

   Man sieht relativ schnell, dass diese Funktion nicht beschränkt ist.

2. Funktion ohne eindeutiges Maximum/Minimum $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$. Dann ist jedes $x \in [0, 1]$ ein Maximum und ein Minimum.

Satz 7.3. *Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.*

Beweis:
Wir beweisen den Satz nur für das Maximum, der Beweis fürs Minimum ist analog.

Schritt 1: f ist nach oben beschränkt. Nehme zum Widerspruch an, das dies nicht der Fall ist. Dann $\exists x_n \in [a, b]$ so dass $f(x_n) \to \infty$. Mit Bolzano-Weierstrass existiert dann eine konvergente Teilmenge (x_{n_k}). Sei $x = \lim x_{n_k}$. Dann $\infty \neq f(x) = \lim f(x_{n_k}) = \infty$. Das ist ein Widerspruch, also ist f nach oben beschränkt.

Schritt 2: Sei $M := \sup\{f(x)|x \in [a, b]\} < \infty$. Dann $\exists (x_n)|f(x_n) \to M$. Wieder mit Bolzano-Weierstrass existiert eine konvergente Teilmenge (x_{n_k}). Sei x_0 der Grenzwert davon. Dann ist $f(x_0) = \lim f(x_{n_k}) = M$. Dann ist x_0 ein Maximum von f, weil alle $x \in [a, b] : f(x_0) = M \geq f(x)$. □

Übung 10

1. Zeige: Es gibt ein offenes Intervall (a, b) so dass $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kein Maximum hat.

2. Überlege: Warum funktioniert der Beweis für ein solches offenes Intervall nicht nicht?

ENDE VL 12 - BEGINN VL 13

Lassen sich Satz 7.1 und Satz 7.3 auch für Funktionen in $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern?

Kurze (unpräzise) Antwort: Satz 7.3 ja, Satz 7.1 nein.

Lange Antwort: Zunächst müssen wir natürlich Stetigkeit verallgemeinern, dann müssen wir noch ein hochdimensionales Analog für abgeschlossene Intervalle finden. Dann müssen wir noch Satz 7.3 damit beweisen.

Definition 7.4. *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Wir sagen, dass (a_n) gegen a konvergiert, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass $\forall n > N : ||a_n - a|| < \epsilon$.*

Äquivalent sind:

1. $||a_n - a||| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. *Konvergenz in jeder Koordinate: Für $1 \leq i \leq d$ sei $a_n^{(i)}$ die i-te Koordinate von a_n, sei $a^{(i)}$ die i-te Koordinate von a.*
   $\forall i : a_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^{(i)}$

Übung 11

Zeigen der Äquivalenz dieser Definitionen.

Definition 7.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$, sei $f : D \to \mathbb{R}^m$. Sei $x_0 \in D$.*

f heißt stetig in x_0 falls für jede gegen x_0 konvergente Folge (a_n) in D, $f(a_n) \to f(x_0)$

oder äquivalent: f ist stetig in x_0 wenn für alles $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in D : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$

Übung 12

Auch hier kann man sich wieder am Zeigen der Äquivalenz probieren.

Anmerkung. *Wir können auch den Grenzwrt einer Funktion in mehereren Dimensionen definieren. Wir nehmen die Definition für den eindimensionalen Fall und nutzen dann $||$ statt $|$.*

7.1 Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen in $\mathbb{R}^d$

Definition 7.6. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$. G heißt* offen, *falls für alle $x_0 \in G \exists \epsilon > 0 | B_\epsilon(x_0) \subseteq G$ wobei $B_\epsilon(x_0) := \{x : \ ||x - x_0|| < \epsilon\}$*

Beispiele: $\mathbb{R}^d$ ist offen, $\emptyset$ ist offen, $B_r(x_0)$ ist offen für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d, r > 0$

Definition 7.7. *Eine Menge $F \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^d \setminus F$ offen ist.*

Beispiele: $\mathbb{R}^d$, $\emptyset$ sind abgeschlossen.

$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d | \ ||x - x_0|| \leq r\}$ ist abgeschlossen.

Übung 13

1. *Offene Interrvalle in* $\mathbb{R}^1$ *sind offen.*
2. *Abgeschlossene Intervalle in* $\mathbb{R}^1$ *sind abgeschlossen.*
3. $\emptyset$ *und* $\mathbb{R}^d$ *sind die einzigen Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.*

Satz 7.8. *Eine Menge* $F \subseteq \mathbb{R}^d$ *ist abgeschlossen gdw. jede konvergente Folge in* F *einen Grenzwert in* F *hat.*

Definition 7.9. $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *heißt kompakt, wenn alle Folgen in* K *eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in* K *besitzen.*

Definition 7.10. $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *heißt beschränkt, wenn es* $M \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass* $||x|| < M$ *für alle* $x \in A$

Satz 7.11. $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *ist kompakt gdw.* K *abgeschlossen und beschränkt ist.*

Satz 7.12. *Sei* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *kompakt, sei* $f : K \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann hat* f *sowohl ein Maximum, als auch ein Minimum.*

Beweis:

1. f ist beschränkt: Nehme zum Widerspruch an, dass f nicht beschränkt ist. Dann $\exists (x_n) \in K : f(x_n) \to \infty$. Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge und sei $x = \lim(x_{n_k}) \in K$, dann $f(x) = \lim f(x_{n_k}) \Rightarrow f(x_{n_k}) \neq \infty$. Was ein Widerspruch ist, also ist f beschränkt.
2. f hat ein Maximum: Sei $M := \sup f$, sei (x_n) in K, so dass $f(x_n) \to M$ sei (x_{n_k}) wieder eine konvergente Teilfolge. Sei $x_0 = \lim(x_{n_k}) \in K$, dann erhalten wir mit der Stetigkeit von f, dass $f(x_0) = M \Rightarrow x_0$ ist ein Maximum.

$\square$

ENDE VL 13 - BEGINN VL 14

Satz 7.13. *Sei* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *kompakt, sei* $f : K \to \mathbb{R}^m$ *stetig. Dann ist* $f(K) := \{f(x) | x \in K\}$ *kompakt.*

Beweis (zu Satz 7.11)**:**
$\Rightarrow$: Sei A kompakt. Es ist zu zeigen, dass A abgeschlossen und beschränkt ist.

1. A ist abgeschlossen: Sei (a_n) eine konvergente Folge in A, wir müssen zeigen, dass dann $a := \lim a_n \in A$. Da A kompakt ist, wissen wir, dass (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) besitzt, die gegen einen Punkt in A konvergiert. Da (a_n) aber auch konvergent ist, stimmen diese Grenzwerte überein, womit $a \in A$. Damit ist die Abgeschlossenheit gezeigt.

2. A ist beschränkt: Nehmen wir zum Widerspruch an, dass A nicht beschränkt ist. Dann existiert für alle n ein $a \in a_n$, so dass $||a_n|| > n$. Dann hat (a_n) keine konvergente Teilfolge, womit A nicht mehr kompakt ist.

$\Leftarrow$: Sei A abgeschlossen und beschränkt. Es ist zu zeigen, dass A dann auch kompakt ist.

Also müssen wir zeigen, dass jede Folge (a_n) in A eine Teilfolge (a_{n_k}) mit Grenzwert in A besitzt.

Sei (a_n) eine Folge in A. A ist beschränkt, also gibt es ein M so dass $||x|| < M \forall x \in A$. Insbesondere ist es also der Fall, dass $\forall n : ||a_n|| \leq M \Rightarrow \forall n \forall 1 \leq i \leq d |a_n^{(i)}| \leq M$.

Mit Bolzano-Weierstrass wissen wir, dass eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt, so dass $(a_{n_k}^{(1)})$ konvergiert, davon gibt es auch eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})$, so dass die zweite Koordinate konvergiert. Weiterhin konvergiert die erste Koordinate. Wir können diese Konstruktion beliebig fortführen.

Irgendwann bekommen wir eine Teilfolge, die wir (a_{n_h}) nennen wollen, in der alle Koordinaten konvergieren. Wenn alle Koordinaten konvergieren, haben wir auch Konvergenz in $\mathbb{R}^d$ gegen einen Grenzwert a, (a_{n_h}) ist eine Folge in A, da A abgeschlossen ist, ist auch $a \in A$.

Das heißt, die Folge (a_n) hat eine Teilfolge mit Grenzwert in A. Da (a_n) beliebig war, erhalten wir so die Kompaktheit. □

Beweis (zu Satz 7.13)**:**
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, sei $f : K \to \mathbb{R}^m$ stetig. Sei $A := f(K) := \{f(x)|x \in K\}$.

Wir müssen zeigen, dass A kompakt ist.

Sei (a_n) eine Folge in A. $\forall n \exists x_n \in K : f(x_n) = a_n$.

K ist kompakt, also existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) die gegen irgendein $x \in K$ konvergiert. Dann ist (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n) in A, die - dank der Stetigkeit von f - gegen $f(x) \in A$ konvergiert. Das heißt, dass A kompakt ist. □

Anmerkung. *Wir wissen jetzt also, dass stetige Bilder kompakter Mengen auch kompakt sind. Wie schaut das mit anderen Mengen aus?*

1. *A ist offen, f ist stetig, aber $f(A)$ ist nicht offen: $A = (-1, 1)$ ist offen, $f(x) = x^2$ ist stetig, aber $f(A) = [0, 1)$, was nicht offen ist.*

2. *B ist abgeschlossen, f ist stetig, aber $f(B)$ ist nicht abgeschlossen: $B = [1, \infty)$ ist abgeschlossen, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber $f(B) = (0, 1]$ ist nicht abgeschlossen.*

Übung 14

Sei $f : A \to B$, sei $C \subseteq B$. Das Umkehrbild von C durch f ist definiert durch $f^{-1}(C) := \{x \in A | f(x) \in C\}$.

Zeige:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, dann ist $f^{-1}(G)$ offen.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen, dann ist $f^{-1}(G)$ abgeschlossen.

Finde ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig ist, und eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$, so dass $f^{-1}(K)$ nicht kompakt ist.

7.2 Umkehrfunktionen

Definition 7.14 (Umkehrfunktion)**.** *Sei $f : A \to B$ bijektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ folgendermaßen definiert:*

Für alle $y \in B$ existiert ein $x \in A$, so dass $f(x) = y$. Dieses x ist eindeutig. Dann ist $f^{-1}(y) = x$.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ist bijektiv und $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ist nicht bijektiv, also gibt es keine Umkehrfunktion.

Satz 7.15. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion ist ebenfalls stetig und streng monoton.*

Beweis:

O.B.d.A.: f ist streng monoton wachsend.

1. f ist bijektiv:
   a) f ist injektiv: d.h. für $x \neq y \in I$ müssen wir $f(x) \neq f(y)$ zeigen.

      O.B.d.A.: $y > x \Rightarrow$ da f streng monoton wachsend $f(y) > f(x)$.

   b) f ist surjektiv: Sei $y \in f(I)$. Aus der Definition von $f(I)$ existiert dann ein x so dass $f(x) = y$. Damit haben wir die Surjektivität gezeigt.

   Bevor wir Tatsachen über f^{-1} beweisen, zeigen wir, dass $A = f(I)$ ein Intervall ist, d.h. für $a < b \in A$ und $a < c < b$, dann ist auch $c \in A$. Sei $x = f^{-1}(a), y = f^{-1}(b)$ dann $f(x) = a, f(y) = b$. Mit der Stetigkeit von f folgt $\exists z \in [x, y] : f(z) = c \Rightarrow c \in f(I) = A$ mit dem Zwischenwertsatz.

2. Jetzt ist noch zu zeigen, dass f^{-1} streng monoton wachsend und stetig ist.
   a) f^{-1} ist streng monoton wachsend: Sei $a < b$, sei $x = f^{-1}(a)$ und $y = f^{-1}(b)$. Wir sehen direkt, dass $x \neq y$. Wir wollen jetzt noch zeigen, dass nicht $x > y$ gilt.

      Wenn $x > y$ wäre, dann wäre $f(x) > f(y)$ also $a > b$ was nicht unsere initiale Annahme war. Also muss $x < y$ sein.

   b) f^{-1} ist stetig: Sei $a \in I$. Wir zeigen, dass f^{-1} in a stetig ist. Sei $(a_n) \to a$ in A, sei $x = f^{-1}(a)$.

      Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(a_n) \to x$.

      Wir schreiben $x_n = f^{-1}(a_n)$.

      Es ist jetzt noch zu zeigen, dass jede konvergente Teilfolge von (x_n) gegen x konvergiert.

      Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge, sei $\overline{x} = \lim x_{n_k}$. Wir müssen zeigen, dass $x = \overline{x}$.

      $f(\overline{x}) = f(\lim x_{n_k}) = \lim f(x_{n_k}) = \lim a_{n_k} = \lim a_n = a$.

      Wir haben gezeigt, dass $f(\overline{x}) = f(x)$, da f injektiv ist, ist also $x = \overline{x}$.

$\square$

ENDE VL 14 - ANFANG VL 15

Beispielhafte Umkehrfunktionen:

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ hat die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Aus den Eigenschaften von exp wissen wir:
   - $\ln(1) = 0$
   - $\ln(e) = 1$
   - ln ist stetig
   - $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
   - $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
2. Für die trigonometrischen Funktionen sin und cos ist problematisch, dass es sich bei ihnen - im Gegensatz zu exp nicht um Bijektionen handelt. Dafür müssen wir den Definitionsbereich von sin (bzw. cos) so einschränken, dass nur eine Periode enthalten ist. Die daraus resultierenden Umkehrfunktionen heißen arcsin bzw. arccos.

8 Differentiation

Definition 8.1 (Landau-Symbole)**.** *Seien f, g Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $a \in \mathbb{R}$ (oder $a = \pm\infty$).*

Wir schreiben $f = o(g)$ für $x \to a$ wenn $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $f = O(g)$ für $x \to a$ wenn $\nexists a_n : a_n \to a$ und $|\frac{f(a_n)}{g(a_n)}| \to \infty$

Definition 8.2. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $x_0 \in D$.*

x_0 heißt innerer Punkt von D wenn $\exists \epsilon > 0 : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \in D$.

Beispiel: Sei $D = [0, 1)$. Dann sind alle Punkte in D außer 0 innere Punkte.

Definition 8.3. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein innerer Punkt und $f : D \to \mathbb{C}$.*

f ist in x_0 mit Ableitung a differenzierbar, wenn $f(x) - a(x - x_0) - f(x_0) = o(x - x_0)$ wenn $x \to x_0$.

Äquivalent: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$

Wir schreiben $f'(x)$ für die (erste) Ableitung von f an der Stelle x. Ebenfalls möglich ist $\frac{df}{dx}$

Definition 8.4. *Sei $f : D \to \mathbb{C}$.*

Wenn f differenzierbar ist $\forall x \in D$, heißt f in D differenzierbar.

Satz 8.5. *Sei $f : D \to \mathbb{C}$, $x_0 \in D$ ein innerer Punkt. Nehme an, dass f in x_0 differenzierbar ist.*

Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis:
Wir wissen, dass $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$. Dann ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} x - x_0 = a \cdot 0 = 0$

Also ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ also ist f in x_0 stetig. $\square$

Einige Beispiele:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:
   Für alle x_0 ist $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = a$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
   $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2x_0h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Diese Funktion ist nicht überall differenzierbar.
   Sei $x_0 = 0$. Man sieht leicht, dass $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. Also existiert der Grenzwert nicht für $x_0 = 0$, womit f dort nicht differenzierbar ist. Für $x_0 \neq 0$ ist f jedoch sehr wohl differenzierbar mit $f'(x_0) = \begin{cases} +1 & x_0 > 0 \\ -1 & x_0 < 0 \end{cases}$.

Ein esoterisches Beispiel für eine Funktion, die überall stetig aber nirgends differenzierbar ist ist die sogenannte WEIERSTRASS-Funktion.

Definition 8.6. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, sei $x_0 \in D$.*
a ist die linksseitige Ableitung von f in x_0 wenn der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten a ist, rechtsseitig analog.

Beispiel: Betrachten wir wieder die Betragsfunktion und $x_0 = 0$. Die linksseitige Ableitung ist dort -1, die rechtsseitige 1

Wie sieht die Ableitung von exp aus?[2]

$\exp'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$. Wir können davon ausgehen, dass $|h| < \frac{1}{2}$. Dann ist $\frac{e^h-1}{h} = \frac{1}{h} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1 + \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}$

Wie sieht diese Summe aus? $|\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}| \leq \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |h|^n = h \cdot \frac{1}{1-|h|} \leq 2 \cdot |h| \to 0 \Rightarrow \exp'(0) = 1$

Betrachten wir jetzt ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$. $\exp(x_0 + h) = \exp(x_0) \cdot \exp(h)$.

$\exp'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \exp(x_0) \cdot \frac{e^{h-1}}{h} = \exp\exp(x_0)$

exp ist ihre eigene Ableitung!

ENDE VL 15 - ANFANG VL 16

[2] ok, das kennt man hoffentlich eh aus der Schule :)

8.1 Ableitungsregeln

Seien im Folgenden $f, g : D \to \mathbb{C}$. Sei x_0 ein innerer Punkt in D und seien f, g in x_0 differenzierbar.

Satz 8.7. *$f + g$ ist in x_0 differenzierbar. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

Beweis:
$(f+g)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(_x0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$ □

Satz 8.8. *$f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar. $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g‘(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$*

Beweis:
$(f \cdot g)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

Schreiben wir $h = x - x_0$ also $x = x_0 + h$ und $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0), \Delta g = g(x_0+h) - g(x_0)$:
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(f(x_0)+\Delta f)\cdot(g(x_0)+\Delta g)-f(x_0)g(x_0))}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (f(x_0)g(x_0) + f(x_0)\Delta g + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0)g(x_0)) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x_0)\Delta g + g(x_0)\Delta f + \Delta f \Delta g) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0)(g(x_0+h)-g(x_0))}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x_0)(f(x_0+h)-f(x_0))}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \frac{(f(x_0+h)-f(x_0))(g(x_0+h)-g(x_0))}{h} = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$ □

Aus der Schule wissen wir, dass die Ableitung einer Funktion der Form $f(x) = x^n$ gegeben ist durch $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Das zeigen wir jetzt per Induktion!

Beweis:
Induktion über $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsbasis: $n = 1$: $(x)' = 1 = 1 \cdot x^0$.
Induktionsschritt: Sei n beliebig fixiert.
Induktionsannahme: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
Induktionsbehauptung: $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$
Induktionsbeweis: $(x^{n+1})' = x \cdot (x^n)' + x^n \cdot (x)' = n \cdot (x^{n-1}) \cdot x + x^n = (n+1)(x^n)$ □

Beliebige Polynome können wir mit den beiden vorherigen Regeln ableiten - und zwar genau so, wie in der Schule[3]!

Übung 15

Wie sieht die Regel für die Subtraktion aus?

Satz 8.9. *Zusätzlich zu vorher müssen wir jetzt noch annehmen, dass $g(x_0) \neq 0$. $\frac{f}{g}$ ist in x_0 differenzierbar, $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$*

[3] hat man uns zur Abwechslung mal nicht ganz betrogen...

Beweis:
Für den Beweis berechnen wir zunächst $(\frac{1}{g})'$ - dann können wir die Produktregel nutzen.
$(\frac{1}{g})' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h} = \frac{1}{g(x_0)^2} \cdot -g'(x_0)$
$(\frac{f}{g})'(x_0) = (f \cdot \frac{1}{g})'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{(-g'(x_0))}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$ □

Damit erhalten wir auch die Ableitungen von sin und cos, wobei wir dann durch rechnen $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$ erhalten.

Satz 8.10. *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : I \to J, g : J \to \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in I$ ein innerer Punkt. Wir nehmen an, dass $y_0 = f(x_0)$ ein innerer Punkt in J ist. Dann nehmen wir noch an, dass f in x_0 differenzierbar ist und g in y_0.*
Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(y_0)$.

Der Beweis erfolgt wieder nach ähnlichem Schema wie oben.
ENDE VL 16 - ANFANG VL 17

Satz 8.11 (Ableitung von Umkehrfunktionen)**.** *Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine bijektive Funktion. Sei g die Umkehrfunktion von f.*
Sei x_0 ein innerer Punkt in $[a, b]$, sei $y_0 = f(x_0)$. Nehme an, dass f in x_0 differenzierbar ist, wobei $f'(x_0) \neq 0$.
Dann ist g in y_0 differenzierbar mit Ableitung $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beweis:
Wir wollen zeigen, dass $\lim\limits_{y\to y_0} \frac{g(y).g(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$, also dass für jede Folge (y_n) in dem Definitionsbereich von g, die gegen y_0 konvergiert gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(y_n)-g(y_0)}{y_n-y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Wir schreiben $x_n = g(y_n)$. Da g die Umkehrfunktion von f ist gilt $\forall n : f(x_n) = y_n$. g ist in y_0 stetig, also konvergiert die Folge x_n gegen x_0.
D.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(y_n)-g(y_0)}{y_n-y_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ □
Beispielsweise ist ln die Umkehrfunktion von exp. Folglich ist $\ln(x)' = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$.
Analog kann man auch für die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen vorgehen.

8.2 Differentiation von Reihen und Folgen

Stimmt es, dass wenn $f_n \to f$ und die f_n alle differenzierbar sind, dann $f' = \lim f_n'$?
Nein - aber warum (und was stimmt wirklich)...
Gegenbeispiel: Eine Folge von Funktionen (f_n) derart, dass für $f = \lim f_n : f' \neq \lim f_n'$.
Wir definieren dafür $f_n(x) = \begin{cases} f_n(\frac{1}{n}) + x - \frac{1}{n} & x > \frac{1}{n} \\ x^3 \cdot \frac{n^2}{3} & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(-\frac{1}{n}) + x + \frac{1}{n} & x < -\frac{1}{n} \end{cases}$

$f_n(x) \to f(x)$ aber die Ableitung ist $f_n'(0) = 0$, dabei ist $(x)' = 1$. Damit ist dies ein Gegenbeispiel.

Definition 8.12. *Sei (f_n) eine Folge von Funktionen, sei f eine Funktion.*
f heißt punktweiser Grenzwert von (f_n) wenn $\forall x : f(x) = \lim f_n(x)$.

Definition 8.13. *f ist der gleichmäßige Grenzwert von (f_n), wenn für alle $\epsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Übung 16

Falls f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert f_n auch punktweise gegen f.
Sei $D = [0, 1)$ und seien $f_n : D\mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$.
Dann haben wir punktweise, aber keine gleichmäßige Konvergenz.

Satz 8.14. *Sei (f_n) eine Folge von Funktionen, sei f eine Funktion. Nehme an, dass*

1. *f_n konvergiert punktweise gegen f*
2. *die Funktionenfolge f_n' konvergiert gleichmäßig*

Dann ist f differenzierbar und $f' = \lim f_n'$.
Das gleiche gilt auch für Reihen: Falls $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konvergiert gleichmäßig ist f differenzierbar mit $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Der Beweis würde Integralrechnung benötigen - die haben wir aber noch nicht behandelt.
ENDE VL 17 - ANFANG VL 18

9 Anwendungen der Ableitung

Definition 9.1 (Extrema von Funktionen)**.** *Sei $I = [a, b], a < b$, sei $f : I \to \mathbb{R}$.*
Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt globales Maximum von f in I falls $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in I$.
x_0 heißt globales Minimum, wenn $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in I$.
x_0 heißt lokales Maximum, wenn $\exists \epsilon > 0 : f(x_0) \geq f(x) \forall x \in I : x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$.
x_0 heißt lokales Minimum, wenn $\exists \epsilon > 0 : f(x_0) \leq f(x) \forall x \in I : x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$.
x_0 heißt Extremum, wenn es eines der obigen ist.

Übung 17

Zeige: Jedes globale Extremum ist auch ein lokales Extremum.

Lemma 9.2. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sei x_0 ein innerer Punkt in I.*

Wenn x_0 ein lokales Extremum ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis:
Sei x_0 ein lokales Minimum.

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, gleichzeitig ist aber auch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

Also muss $f'(x_0) = 0$ sein.

Der Beweis für das Maximum erfolgt analog. □

Anmerkung. *Wir benötigen hier die Differenzierbarkeit nicht für ganz I sondern nur für x_0.*

Die beispielhafte Beantwortung der Frage nach dem Maximum von $f(x) = 2x - x^2$ im Intervall $[-100, 100]$ ist, erfolgt so wie in der Schule: Ableiten ($f'(x) = 2 - 2x$) und dann die Nullstellen davon und die Intervallgrenzen betrachten (also $-100, 1, 100$). Zu berechnen ist dann f von jedem dieser Wert und dann sehen wir, dass das Maximum bei 1 liegt.

Satz 9.3 (Satz von Rolle)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ überall stetig und differenzierbar in allen inneren Punkten, nehme an, dass $f(a) = f(b)$.*

Dann $\exists x \in [a, b] | f'(x) = 0$.

Beweis:

1. $f(x)$ ist konstant. Dann ist $f'(x)$ trivial 0.
2. $\exists x \in [a, b] | f(x) > f(a)$. Sei x_0 das globale Maximum von f (dieses existiert, da f stetig und $[a, b]$ kompakt), dann $f(x_0) \geq f(x) > f(a)$, womit $x_0 \neq a, x_0 \neq b$. Also ist x_0 ein innerer Punkt, womit wir unser vorheriges Lemma problemlos nutzen können und die Existenz einer Nullstelle der Ableitung erhalten.
3. Analog

□

Satz 9.4 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ überall stetig und differenzierbar.*

Dann $\exists x_0 \in (a, b)$ derart, dass $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis:
Sei $g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. g ist offensichtlich stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b).

$g(b) = f(b) - (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g(a)$ also existiert kraft des Satz von Rolle ein $x_0 \in (a, b)$ mit $g'(x_0) = 0$.

$f(x) = g(x) + (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ also ist $f'(x_0) = g'(x_0) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Satz 9.5 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)**.** *Sei f differenzierbar in $[a, b]$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $f'(b) \geq f'(a)$.*

Dann existiert für alle $f'(a) \leq c \leq f'(b)$ ein $x \in [a, b]$, so dass $f'(x) = c$.

Beweis:
Nehme an, dass $f'(a) < c < f'(b)$ (sonst trivial). Sei $h > 0$.

Wir definieren: $g_h : [a, b-h] \to \mathbb{R}$, $g_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

g_h ist stetig, $\lim\limits_{h\to 0} g_h(a) = f'(a)$, $\lim\limits_{h\to 0} g_h(b-h) = f'(b)$.

Also existiert ein h, dass klein genug ist damit $g_h(a) < c < g_h(b-h)$, also $\exists z \in [a, b-h] | g_h(z) = c$.

$g_h(z) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \Rightarrow \exists x_0 \in [z, z+h] | f'(x_0) = \frac{f(z+h)-f(z)}{z+h-z} = c$. □

Satz 9.6. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, differenzierbare Funktion.*

Dann gilt

1. *$f' > 0$ in $(a, b) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend.*
2. *$f' < 0$ in $(a, b) \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend.*
3. *$f' \geq 0$ in $(a, b) \Rightarrow f$ ist monoton wachsend.*
4. *$f' \leq 0$ in $(a, b) \Rightarrow f$ ist monoton fallend.*

Anmerkung. *Es kann passieren, dass f streng monoton wachsend ist aber Punkte in dem Intervall existieren, in denen die Ableitung 0 ist.*

Ein Beispiel dafür ist $f(x) = x^3$ in $x = 0$.

Beweis:
Nehme an, dass $f' > 0$ im ganzen Intervall. Sei $y > x$, sei $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z)$ für irgendein $z \in (x, y)$.

$f(y) - f(x) = f'(x) \cdot (y - x) > 0$

Die übrigen Fälle folgen analog. □

9.1 Kriteria für Extrema

Sei f differenzierbar, sei x_0 ein Punkt so dass $f'(x_0) = 0$.

Frage: Ist x_0 ein Maximum, ein Minimum oder keines davon?

Satz 9.7. *Sei f eine in einer Umgebung vom Punkt x_0 differenzierbare Funktion derart, dass $f'(x_0) = 0$.*

Dann:

1. *Wenn $f'(x) \geq 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) \leq 0$ für $x > x_0$, dann ist x_0 ein Maximum.*
2. *Wenn $f'(x) \leq 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) \geq 0$ für $x > x_0$, dann ist x_0 ein Minimum.*

Satz 9.8 (Starker Mittelwertsatz). *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.*
Wir nehmen an, dass

1. *f, g in $[a, b]$ stetig*
2. *f, g in (a, b) differenzierbar*
3. *$g(a) \neq g(b)$*

Dann existiert $c \in (a, b)$ so dass $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Beweis:
Wir definieren eine (neue) Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$.
F ist in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar.
$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = f(a)$
$F(a) = f(a) = F(b)$
Mit dem Satz von Rolle: $\exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$.
Um aus dieser Tatsache Profit ziehen zu können, müssen wir uns noch näher mit F' beschäftigen.
$F'(x) = f'(x) - g'(x) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
$f'(c) = g'(c) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
Also auch $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$. $\square$

Satz 9.9 (l' Hospital).

1. *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*
   Sei $x_0 = a$ oder $x_0 = b$, wir nehmen an, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
   Nehme weiterhin an, dass $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.
   Dann existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
2. *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*
   Nehme an, dass $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$.
   Nehme weiterhin an, dass $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.
   Dann existiert $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis:
Wir zeigen nur den ersten Fall.
Sei $L = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Die Existenz des Grenzwertes bedingt auch die Existenz einer Umgebung von x_0 so dass $g'(x) \neq 0$ für alle x in der Umgebung.

Für jedes x in dieser Umgebung existiert $z = z(x)$ so dass $x < z < x_0$ so dass $f'(z)(g(x) - g(x_0)) = g'(z)(f(x) - f(x_0))$. Da $g'(x) \neq 0$ gilt dann auch $\frac{f'(z)}{g'(z)}(g(x) - g(x_0)) = f(x) - f(x_0)$ - auch $g(x) - g(x_0)$ ist ungleich 0, womit $\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Also ist $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(z(x))}{g'(z(x))} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ □

9.2 Konvexität

Definition 9.10. *Sei I ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$.*

f heißt konvex, wenn $\forall x, y \in I$ und $0 < \alpha < 1$, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$.

Ist $-f$ konvex, so heißt f konkav.

Wenn echte Ungleichheit für $x \neq y$ gilt, so heißt f streng konvex (oder konkav).

ENDE VL 19 - ANFANG VL 20

Satz 9.11. *Sei I ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

Falls f' monoton wachsend ist, ist f konvex.

Falls f' streng monoton wachsend ist, ist f streng konvex.

Anmerkung. *Aus diesem Satz folgt auch die Konvexität von x,* exp...

Beweis:

Seien $x, y \in I$, nehme an $y > x$. Sei $0 < \alpha < 1$, sei $\beta = 1 - \alpha$. Sei $z = \alpha x + \beta y$.

Zu zeigen ist, dass $f(z) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Es gibt ein w_1 mit $x < w_1 < z$ und $f(z) - f(x) = (z - x) \cdot f'(w_1)$ (Mittelwertsatz).

Weiterhin gibt es auch w_2, $z < w_2 < y$ so dass $f(y) - f(z) = (y - z) f'(w_2)$. Wir sehen, dass $w_1 < w_2$. Da f' monoton wächst, muss auch $f'(w_1) \leq f'(w_2)$ gelten!

$(z - x) = \beta(y - x)$ und $(y - z) = \alpha(y - x)$.

Dann sehen wir $\alpha f(x) + \beta f(y) - f(z) = \alpha(f(x) - f(z)) + \beta(f(y) - f(z)) = \beta(f(y) - f(z)) - \alpha(f(z) - f(x)) = \beta(y - z) f'(w_2) - \alpha(z - x) f'(w_1) = \beta\alpha(y - x) f'(w_2) - \alpha\beta(y - x) f'(w_1) = \alpha\beta(y - x)(f'(w_2) - f'(w_1)) \geq 0$. □

Anmerkung. *Falls f' monoton fällt, ist f konkav.*

Übung 18

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in jedem innerem Punkt von I differenzierbar. Zeigen Sie:
Wenn f konvex ist, ist f' monoton wachsend.

Definition 9.12. *f heißt in einem Punkt x_0 zweimal differenzierbar, wenn f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar ist und f' in x_0 differenzierbar ist. f ist in einer Menge M zweimal differenzierbar, wenn dies für alle $x \in M$ gilt.*

Die zweite Ableitung ist dann die Ableitung der Ableitung.

So kann man auch die dritte, vierte... Ableitung definieren.

Lemma 9.13. *Falls $f'' \geq 0$ ist f konvex, falls $f'' > 0$ ist f streng konvex.*

Analog Konkavität.

Satz 9.14 (Jensens Ungleichung). *Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $x_1, \dots, x_n \in I$, seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}_0^+$ so dass $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$.*

Dann ist $f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \dots p_nf(x_n)$.

Beweis:
Induktion nach n. □

Lemma 9.15. *Seien $x_1 \dots x_n > 0$, seien $p_1 \dots p_n \geq 0$. Dann:*
$\prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} p_kx_k$.

Beweis:
ln ist konkav. Aus Jensens Ungleichung folgt:
$\sum\limits_{k=1}^{n} p_l \ln(x_k) \leq \ln(\sum\limits_{k=1}^{n} p_kx_k) \Rightarrow e^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_l \ln(x_k)} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} p_kx_k$ was sich schreiben lässt als:
$\prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} p_kx_k$ □

10 Integralrechnung

Ziel ist die Beantwortung folgender Frage: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wie groß ist die Fläche unter dem Graphen von f?

Einerseits müssen wir das (gut) definieren und andererseits wollen wir einen Weg finden, das zu rechnen.

ENDE VL 20 - ANFANG VL 21

Wir beginnen jetzt damit, einige einfache Sonderfälle zu betrachten.

Der einfachste Fall sind natürlich konstante Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f = c \forall x \in [a, b]$. Dann ist die Fläche $c \cdot (b - a)$ - das schreiben wir jetzt als $\int\limits_a^b f dx = c(b - a)$. Schon jetzt wird klar: Falls $c < 0$, dann ist das Integral auch kleiner 0! (d.h., dass die Fläche unter der x-Achse liegt).

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine endliche Folgen $x_0 = a, \dots, x_n = b$ mit $x_0 < x_1 \dots < x_n$ und Werte $c_1, \dots, c_n$ so dass für alle $1 \leq k \leq n$ und alle $x_{k-1} < x < x_k : f(x) = c_k$. Für eine solche Funktion gilt dann: $\int\limits_a^b f dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$.

Eine mögliche Idee ist es jetzt, allgemeine Funktionen mit Treppenfunktionen zu approximieren!

Definition 10.1 (Ober-, Unterintegral). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
Wir definieren:

- *das* Oberintegral *von f sei:*
  $\int_a^{\bar{b}} f dx := \inf\{\int_a^b g dx | g$ *ist eine Treppenfunktion und* $g \geq f\}$.
- *das* Unterintegral *von f sei:*
  $\int_{\bar{a}}^b f dx := \sup\{\int_a^b g dx | g$ *ist eine Treppenfunktion und* $g \leq f\}$.

Es ist offensichtlich, dass $\int_{\bar{a}}^b f dx \leq \int_a^b f dx \leq \int_a^{\bar{b}} f dx$.

Falls $\int_{\bar{a}}^b f dx = \int_a^{\bar{b}} f dx$, kennen wir also auch das exakte Integral!

Definition 10.2. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
Wenn $\int_a^{\bar{b}} f dx = \int_{\bar{a}}^b f dx$, dann heißt f integrierbar *und $\int_a^b f dx = \int_a^{\bar{b}} f dx = \int_{\bar{a}}^b f dx$.*
Sonst heißt f unintegrierbar.

Einige Beispiele & Tatsachen:

1. Unbeschränkte Funktionen sind nicht integrierbar.
2. Die Dirichlet-Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ ist rational} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ ist unintegrierbar. Das liegt darin begründet, dass das Oberintegral 1 ist und das Unterintegral 0 (da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$).
3. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar. Beweis: O.B.d.A. f ist monoton wachsend, also $\forall x : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Sei $M := \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$. Dann ist für alle x: $|f(x)| \leq M$.

   Sei n beliebig. Wir definieren $x_1 = a, x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), x_n = b$.

   Wir definieren weiterhin g, h: Sei $x \in [a,b]$, sei k so gewählt, dass $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. Dann ist $g(x) := f(x_{k-1})$ und $h(x) := f(x_k)$ und $g(a) := h(a) := f(a)$. Damit sind g und h Treppenfunktionen, für alle $x \in [a,b]$ gilt: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Insbesondere gilt damit auch: $\int_a^{\bar{b}} f dx \leq \int_a^b h(x) dx$ und $\int_{\bar{a}}^b f dx \geq \int_a^b h(x) dx$.

   Also ist $\int_a^{\bar{b}} f dx - \int_{\bar{a}}^b f dx \leq \int_a^b h dx - \int_a^b g dx = \frac{b-a}{n}(\sum_{k=1}^n f(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$ was wir durch große n beliebig nahe an 0 bringen können.

Satz 10.3. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.*

Bevor wir den Satz beweisen können, brauchen wir noch mehr Wissen über Stetigkeit.

Definition 10.4 (gleichmäßige Stetigkeit)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \to \mathbb{R}$.*
f heißt gleichmäßig stetig, *wenn* $\forall \epsilon \exists \delta : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Lemma 10.5.

1. *Falls f gleichmäßig stetig ist, ist f stetig.*
2. *Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f auch gleichmäßig stetig.*

Beweis:

1. trivial
2. zum Widerspruch nehmen wir an, dass f stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist. D.h. $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta : |x_\delta - y_\delta| < \delta$ aber $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \epsilon$.

   Die Folge $(x_{\frac{1}{n}})$ ist in $[a, b]$ und deshalb existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{\frac{1}{n_k}})$. Sei x deren Grenzwert.

   $\lim\limits_{k\to\infty} y_{\frac{1}{n_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{\frac{1}{n_k}} + \lim\limits_{k\to\infty} y_{\frac{1}{n_k}} - x_{\frac{1}{n_k}} = x + 0.$

   Da f stetig wissen wir auch, dass $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{\frac{1}{n_k}}) = x$ und $\lim\limits_{k\to\infty} |f(y_{\frac{1}{n_k}}) - f(x)| \geq \lim\limits_{k\to\infty} \inf |f(y_{\frac{1}{n_k}}) - f(x_{\frac{1}{n_k}})| - \lim\limits_{k\to\infty} \inf |f(x_{\frac{1}{n_k}}) - f(x)| \geq 0$ also konvergiert $f(y_{\frac{1}{n_k}}) \not\to f(x)$ - Widerspruch.

□

Jetzt können wir uns dem Satz widmen:

Beweis:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $\epsilon > 0, \delta > 0$ so dass $\forall x, y : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Sei $x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ derart, dass $\forall k : x_k - x_{k-1} < \delta$.
Seien $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = h(a) = f(a)$. Sei k im Folgenden so, dass $x_{k-1} < x \leq x_k$. Dann ist $g(x) := \inf\{f(y) : x_{k-1} < y \leq x_k\}$ und $h(x) := \sup\{f(y) : x_{k-1} < y \leq x_k\}$
Dann $\forall x : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und $h(x) - g(x) \leq \epsilon$.

h und g sind Treppenfunktionen, insbesondere ist also $\int\limits_a^{\bar{b}} f dx \leq \int\limits_a^b h dx$ und $\int\limits_{\bar{a}}^b f dx \leq \int\limits_a^b g dx$ also ist $\int\limits_a^{\bar{b}} f dx - \int\limits_{\bar{a}}^b f dx \leq \int\limits_a^b h dx - \int\limits_a^b g dx = \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) h(x_k)) - \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) g(x_k) = \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})[h(x_k) - g(x_k)] \leq \epsilon(b - a)$

Da wir ϵ beliebig klein machen können, ist f integrierbar. □

Satz 10.6 (Eigenschaften des Integrales). *1. Das Integral ist* linear, *d.h.* $\{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f$ *ist integrierbar* $\}$ *ist ein Vektorraum und* $f \to \int_a^b f dx$ *ist eine lineare Funktion.*

2. Das Integral ist monoton, *d.h. seien* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar, nehme an, dass* $\forall x \in [a,b] : g(x) \geq f(x)$. *Dann* $\int_a^b g dx \geq \int_a^b f dx$.

3. Das Integral ist zerlegbar, *d.h. sei* $a < c < b$, *dann ist* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar, wenn* $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ *und* $f : [c,b] \to \mathbb{R}$ *beide integrierbar sind. Insbesondere ist* $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_b^c f dx$

Beweis:
Wir zeigen nur die Monotonie.

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, nehme an, dass $\forall x \in [a,b] : g(x) \geq f(x)$.

Dann ist $\int_a^b f dx = \int_a^{\bar{b}} f dx = \inf\{\int_a^b h dx : | h$ ist eine Treppenfunktion und $h \geq f\}$. Schreiben wir diese Menge als A.

Außerdem ist $\int_a^b g dx = \int_a^{\bar{b}} = \inf\{\int_a^b u dx : | u$ ist eine Treppenfunktion und $u \geq g\}$. Diese Menge nenne wir B.

$B \subseteq A \Rightarrow \inf B \geq \inf A \Rightarrow \int_a^b g dx \geq \int_a^b f dx$ □

Definition 10.7. *Sei* $a < b$ *und* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar.*

Dann definieren wir $\int_b^a f dx := -\int_a^b f dx$.

ENDE VL 22 - ANFANG VL 23

Satz 10.8 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung). *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann definieren wir* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *als* $F(x) := \int_a^x f(x) dx$.

Dann ist F *in* $[a,b]$ *stetig und in* (a,b) *differenzierbar und* $\forall x \in (a,b) : F'(x) = f(x)$.

Beweis:
Sei $x \in (a,b)$, wir müssen zeigen, dass F in x differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$.

Also ist zu zeigen: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Sei zunächst $\delta > h > 0$ so dass $x + h \leq b$, dann $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f dx + \int_a^x f dx = \int_x^{x+h} f dx$.

Sei $\alpha := \sup\{f(t) : t \in [x, x+h]\}, \beta := \inf\{f(t) : t \in [x, x+h]\}$.
Dann ist $\beta h \leq \int\limits_{x}^{x+h} f dx \leq \alpha h \Rightarrow \beta \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq \alpha$.
Sei $\epsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ so dass für alle $t \in (x-\delta, x+\delta) : |f(t) - f(x)| < \epsilon$.
Dann $\beta > f(x) - \epsilon, \alpha < f(x) + \epsilon$ also mit der Ungleichung von oben: $f(x) - \epsilon < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x) + \epsilon$.
Wir können ϵ beliebig klein machen, und kommen beliebig nahe an $f(x)$.
Für $-\delta < h < 0$ kann man genauso vorgehen. $\square$

Definition 10.9 (Stammfunktion)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ (wobei I ein beliebiges Intervall ist).*
Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion *von f wenn für jeden inneren Punkt $x \in I : F'(x) = f(x)$.*

Lemma 10.10 (Tatsachen über Stammfunktionen)**.**

1. *Wenn F eine Stammfunktion von f ist, so ist $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von f (d.h. die Stammfunktion ist nicht eindeutig)*
2. *Falls F und G beide Stammfunktionen von f sind, so unterscheiden sie sich nur um ein konstantes, d.h. $\exists c \in \mathbb{R} F + c = G$.*
3. *Für $a < b \in I$: Wenn f stetig, dann $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Beispiele:

1. $f(x) = x^n$. Was ist $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$?. $(x^{n+1})' = (n+1)x^n \Rightarrow (\frac{x^{n+1}}{n+1})' = x^n$ also ist $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von x^n, also ist $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$.

   Damit haben wir auch Polynome „erledigt“.

2. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow$ für $b > a > 0, \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{x}dx = \ln b - \ln a$.

10.1 Integrationsmethoden

Diese Fälle waren ziemlich leicht. Das ist aber nicht immer der Fall. Also brauchen wir wohl ein paar Methoden, um auch die schwierigen Fälle zu erlegen.
Notation: Sei $f : I \to \mathbb{R}$, I ein Intervall. Wir schreiben $\int f dx = F + c$ dafür, dass F eine Stammfunktion von f ist. Dabei heißt $\int f dx$ das unbestimmte Integral von f.

Lemma 10.11 (Partielle Integration)**.** *Seien f, g stetig differenzierbar.*
Dann $\int\limits_{a}^{b} f(x) \cdot g'(x)dx = (f(b)g(b)) - (f(a)g(a)) - \int\limits_{a}^{b} f'(x) \cdot g(x)dx$.

Ein Beispiel:

$\int_a^b \ln x dx$ setze $f(x) = \ln x, g(x) = x$.

$\int_a^b \ln x dx = \ln b \cdot b - \ln a \cdot a - \int_a^b \frac{1}{x} \cdot x dx = \ln b \cdot b - \ln a \cdot a - (b - a)$.

Folglich ist $x \ln x - x$ eine Stammfunktion vom Logarithmus.

Beweis:
Wir müssen noch zeigen, dass $F(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ in der Tat eine Stammfunktion von $f(x) \cdot g'(x)$ ist.

Das können wir sehr einfach zeigen, in dem wir F' berechnen!

$F' = (f \cdot g)' - (f'g) = f'g + g'f - f'g = g'f$. □

Lemma 10.12 (Integration durch Substitution)**.** *Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b). Sei $I = [g(a), g(b)]$.*

$F : I \to \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$.

Dann: $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$

Beweis:

$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b (F(g(x)))'dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ □

Beispiel: Seien $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$.

Wir wollen wissen, was $\int_a^b \tan x dx$ ist.

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-\cos'(x)}{\cos(x)}$. Schreiben wir $g(x) = \cos(x), f(x) = -\frac{1}{x}$. Somit erhalten wir $\tan x = f(g(x)) \cdot g'(x)$ also $\int_a^b \tan x dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_{\cos a}^{\cos b} \frac{-1}{x} dx = -(\ln(\cos b) - \ln(\cos a))$

Eine Stammfunktion von tan ist also $-\ln(\cos(x))$.
ENDE VL 23 - ANFANG VL 24

10.2 uneigentliche Integrale

Bislang können wir nur beschränkte Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen integrieren. Wir wollen jetzt sowohl unbeschränkte Funktionen als auch (halb)offene Intervalle betrachten.

Definition 10.13 (Integration auf unendlichen Intervallen). *Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$.*
Wir nennen f integrierbar als uneigentliches Integral, wenn

1. *f für alle $b > a$ auf $[a,b]$ integrierbar ist und*
2. *$\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ existiert*

Dann ist $\int\limits_a^\infty f(x)dx := \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

Beispiel:

1. Sei $a > 0$, $\alpha > 0$. Ist $x^{-\alpha}$ integrierbar auf $[a,\infty)$? Falls ja, was ist dann $\int\limits_a^\infty f(x)dx$?

   Für $b > a$ wissen wir, dass $\int\limits_a^b x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \ln b - \ln a & \alpha = 1 \\ (1-\alpha)(a^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}) & \alpha \neq 1 \end{cases}$

   a) $\alpha < 1$: $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b x^{-\alpha}dx = (1-\alpha) \lim\limits_{b\to\infty} a^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}$ - der Grenzwert existiert nicht.

   b) $\alpha > 1$: $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b x^{-\alpha}dx = (1-\alpha) \lim\limits_{b\to\infty} a^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}$ - hier existiert der Grenzwert und ist $(\alpha - 1) \cdot a^{1-\alpha}$

   c) $\alpha = 1$: $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b x^{-\alpha}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b - \ln a$ - auch dieser Grenzwert existiert nicht.

Satz 10.14. *Seien $f, g : [a,\infty)$ derart, dass $\forall b > a$ gilt, dass f und g in $[a,b]$ integrierbar sind.*
Wir nehmen weiterhin an, dass

1. *g in $[a,\infty)$ integrierbar und*
2. *$\forall x \in [a,\infty)$ gilt $|f(x)| \leq g(x)$*

So ist auch f in $[a,\infty)$ integrierbar.

Beispiel:
$f(x) := \frac{\sin(x)}{x^2}$ ist in $[1,\infty)$ integrierbar, da $\frac{1}{x^2}$ integrierbar und $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$.
Komplizierter ist $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ - hier bringt uns der Satz nicht viel weiter, das $\frac{1}{x}$ nicht (bis ins unendliche) integrierbar ist.
Wir versuchen es erstmal mit einer partiellen Integration, so ist
$\int\limits_1^b \frac{1}{x} \sin x dx = \frac{1}{b} \cdot -(\cos(b)) - \frac{1}{1} \cdot (-\cos(1)) - \int\limits_1^b \frac{1}{x^2} \cdot \cos x dx = \frac{\cos b}{b} - \cos 1 - \int\limits_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx$
Der Grenzwert davon existiert!

Definition 10.15. *Sei $a < b$, $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, f heißt uneigentlich integrierbar in $[a,b]$, wenn*

1. *$\forall b > c > a$: f in $[c,b]$ integrierbar ist und*
2. *$\lim\limits_{c \searrow a} \int\limits_c^b f(x)dx$ existiert.*

Dann ist $\int\limits_a^b f(x)dx := \lim\limits_{c \searrow a} \int\limits_c^b f(x)dx$

Wir schauen uns wieder $x^{-\alpha}$ an, dieses mal auf $(0,b]$.

1. $\alpha < 1$: $\lim\limits_{c \searrow 0} \int\limits_c^b x^{-\alpha}dx = (1-\alpha)(b^{1-\alpha} - \lim\limits_{c \searrow 0} c^{1-\alpha}) = (1-\alpha)b^{1-\alpha}$ also integrierbar.
2. $\alpha \geq 1$: der Grenzwert existiert nicht.

Definition 10.16. *Sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, weiterhin $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. So heißt f als uneigentliches Integral in (a,b) integrierbar, wenn für $a < c < b$ f in $(a,c]$ und in $[c,b)$ integrierbar ist, dabei ist dann $\int\limits_a^b f(x)dx := \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$*

ENDE VL 24 - ANFANG VL 25

11 Potenzreihen

Dieses Thema ist nicht klausurrelevant.

Definition 11.1. *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a_0, a_1, \ldots$ eine reelle Folge. Die Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Koeffizienten (a_n) ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$*

Z.B. ist jedes Polynom eine Potenzreihe. Auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist natürlich eine solche, sie konvergiert für alle x gegen e^x (das war nämlich exp).

Solche Potenzreihen spielen in der weiterführenden Analysis eine wichtige Rolle.

Satz 11.2. *Sei $\sum a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe, sei $\mathcal{R} := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.*

Dann

1. *Die Potenzreihe konvergiert für alle x derart, dass $|(x-x_0)| < \mathcal{R}$.*
2. *Die Potenzreihe divergiert für alle x derart, dass $|(x-x_0)| > \mathcal{R}$*
3. *Für $x_0 - \mathcal{R} < a < b < x_0 + \mathcal{R}$ konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig in $[a,b]$.*

Beweis:
Wir fangen mit dem 3. Fall an:
$x_0 - \mathcal{R} < a < b < x_0 + \mathcal{R}$. Sei $\mathcal{R}' < \mathcal{R}$ so dass $|b - x_0|, |a - x_0| < \mathcal{R}'$.
$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \cdot \mathcal{R}' = \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} < 1$. Somit existiert eine Konstante c so dass für alle n gilt $|a_n| \cdot \mathcal{R}' \leq c \cdot (\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}})^n$
Für alle $x \in [a, b]$ ist $|x - x_0| < \mathcal{R}'$. Also ist für alle n und alle $m > n$ und $x \in [a, b]$ ist $|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(x-x_0)^n| \leq D \cdot (\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}})^n$ (wobei D eine Konstante ist) was für n gegen unendlich gegen 0 konvergiert, womit wir wissen, dass auf $[a, b]$ die Potenzreihe die Cauchy-Bedingung womit wir die (gleichmäßige) Konvergenz erhalten.
Fall 1 folgt daraus direkt.
Fall 2: Sei $|x - x_0| > \mathcal{R}$. Dann ist $\limsup |a_n(x - x_0)^n| = \infty$. (Folgt mit Betrachtung der Teilfolgen) □

$\mathcal{R}$ nennt man durchaus auch Konvergenzradius der Reihe.

Satz 11.3. *1. Sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $0 < \mathcal{R} \leq \infty$*, sei* $f : (x_0 - \mathcal{R}, x_0 + \mathcal{R}) \to \mathbb{R}$ *die Summe der Potenzreihe.*

So ist f *stetig und differenzierbar und* $f' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ *hat den selben Konvergenzradius.*

2. $F = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ *ist eine Stammfunktion von* f *und hat den selben Konvergenzradius.*

Lemma 11.4. *Sei* $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *mit Konvergenzradius* $\mathcal{R} > 0$ *dann ist* $\forall n$ *:* $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$*.*

Über diesen Ansatz erhalten wir dann verschieden schon bekannte Ableitungen, aber insbesondere auch Reihendarstellungen für z.B. den sin.
Daraus resultierte eine spannende Frage: Welche Funktionen lassen sich als Potenzreihe darstellen?
Diese werden wir aber nicht mehr hier beantworten. Einige Stichworte werden hier aber genannt.
Die Darstellung $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ heißt Taylor-Reihe.
Eine Funktion f heißt analytisch falls es eine Darstellung als Taylorreihe gibt.

Nachwort

An dieser Stelle vielen Dank an alle Leute, die mir Feedback zum Skript gegeben haben und insbesondere an Rafi, der sau viele dumme Fehler gefunden hat :) - wenn ihr wollt, hören wir uns alle nach der Datenbankenklausur ;).

List of Theorems