Skript-info - Lecture

Analysis für Informatik [MA0902] (Technische Universität München)

Vorlesungsnotizen

Analysis für Informatik (MA0902)

Silke Rolles[1]

January 20, 2020

[1]Zentrum Mathematik, Bereich M5, Technische Universität München, D-85747 Garching bei München, Germany. e-mail: srolles@ma.tum.de

Contents

Vorwort

Diese Aufzeichnungen sind ausschließlich für die Studierenden der Vorlesung *Analysis für Informatik* MA0902 an der TUM bestimmt. Es handelt sich um die Vorlesungsvorbereitung der Dozentin, die den Studenten der Vorlesung zur Verfügung gestellt wird. Die Weitergabe oder Verbreitung ist nicht erlaubt. Den Aufzeichnungen liegen die folgenden Bücher und Skripten zugrunde.

References

[Bor08] F. Bornemann. *Konkrete Analysis für Studierende der Informatik*. Springer, 2008.

[Bro] M. Brokate. Analysis für Informatik, Vorlesungsskript, WS 2012/13.

[Gan] N. Gantert. Analysis für Informatik, Vorlesungsskript, WS 2015/16.

[Obe09] M. Oberguggenberger, M. und Ostermann. *Analysis für Informatiker*. Springer, 2009.

Viele Passagen sind sehr nahe an diesen Quellen, jedoch nicht speziell gekennzeichnet. Diese Notizen ersetzen kein Lehrbuch. Ich danke Dr. Diana Conache für einige Grafiken.

Motivation. Endliche Mengen können sehr groß sein. Manchmal ist es praktisch, eine diskrete Struktur durch eine kontinuierliche Struktur zu ersetzen.

In der Vorlesung sollen wichtige Techniken aus der Analysis bereitgestellt werden:

- Approximation
- Differential- und Integralrechnung in einer und mehreren Veränderlichen
- Wichtige Funktionenklassen und ihre Eigenschaften
- Differentialgleichungen

1 Reelle Zahlen

1.1 Zahlenmengen im Überblick

Quantoren.

- $\forall x$ bedeutet *für alle* x. Vorl.1
- $\exists x$ bedeutet *es existiert ein* x.

Notation für Zahlenmengen.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ reelle Zahlen; $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Körper.

Lemma 1.1 *$\sqrt{2}$ ist nicht rational.*

Beweis. Angenommen, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dann gäbe es $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ teilerfremd mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Dann wäre $2 = \frac{a^2}{b^2}$ mit a^2 und b^2 teilerfremd. Das ist ein Widerspruch. ■

Definition 1.2 *Eine Menge A heißt abzählbar, falls es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. (D.h. für alle $a \in A$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = a$.)*

Lemma 1.3 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

Beweis. Man kann eine Abzählung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit Hilfe eines Diagonalarguments angeben (Übung).

Angenommen, $\mathbb{R}$ wäre abzählbar. Dann wäre auch das Intervall $[0, 1]$ abzählbar und es gäbe somit eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$. Seien

$$\begin{aligned} f(1) =& 0.d_{11}d_{12}d_{13}\ldots \\ f(2) =& 0.d_{21}d_{22}d_{23}\ldots \\ f(3) =& 0.d_{31}d_{32}d_{33}\ldots \end{aligned}$$

die entsprechenden Dezimaldarstellungen. Definiere $x = 0.d_1d_2d_3\ldots \in [0, 1]$ durch

$$d_i = \begin{cases} 2 & \text{falls } d_{ii} = 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $d_i \neq d_{ii}$ und daher $x \neq f(i)$ für alle i. Damit wäre f nicht surjektiv, was einen Widerspruch ergibt. ■

Anordnung. Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen ist *angeordnet*. D.h. es gibt ein Prädikat $a > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt *genau eine* der drei Aussagen

$$a = 0, \quad a > 0 \quad \text{oder} \quad -a > 0.$$

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt:

$$a + b > 0 \quad \text{und} \quad a \cdot b > 0.$$

Schreibweisen.

- $a > b$ steht für $a - b > 0$
- $a < b$ steht für $b - a > 0$
- $a \geq b$ steht für $a > b$ oder $a = b$
- $a \leq b$ steht für $a < b$ oder $a = b$

Komplexe Zahlen. Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Setze

$$i = (0, 1) = \text{imaginäre Einheit.}$$

Dann lässt sich jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ darstellen als

$$z = x + iy.$$

Dabei heißt x *Realteil* und y *Imaginärteil* von z.

Es gelten folgende Rechenregeln in $\mathbb{C}$:

- Addition:
$$x + iy + (x' + iy') = x + x' + i(y + y').$$
- Multiplikation: $i^2 = -1$,
$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$$

Lemma 1.4 $\mathbb{C}$ *kann nicht angeordnet werden.*

Beweis. Angenommen, $\mathbb{C}$ wäre angeordnet. Sei $a \in \mathbb{C}$.

- Falls $a > 0$, so ist nach Eigenschaft (b) der Anordnung $a \cdot a > 0$.
- Falls $-a > 0$, so folgt analog $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$.

Damit folgt

$$a^2 > 0 \quad \text{für alle } a \neq 0. \tag{1.1}$$

Insbesondere gilt

$$1 = 1 \cdot 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 > -1 = i^2.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (1.1) für $a = i$. ■

1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

Notation für Intervalle. Für $a \leq b$ schreiben wir

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall; $[a,b)$ ist analog definiert.

Definition 1.5 *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt* nach oben beschränkt*, falls ein $s_0 \in \mathbb{R}$ existiert, sodass*

$$a \leq s_0 \quad \textit{für alle } a \in M$$

gilt. Die Zahl s_0 heißt obere Schranke von M*.*

Beispiel 1.6
- *Sei $M = (0,1)$. Jedes $s_0 \geq 1$ ist eine obere Schranke. $s_0 = 1$ ist die kleinste obere Schranke. Es gibt keine obere Schranke, die in M liegt.*
- *Sei $M = [0,1]$. Jedes $s_0 \geq 1$ ist eine obere Schranke. $s_0 = 1 \in M$ ist die kleinste obere Schranke.*

Die Menge $\mathbb{R}$ erfüllt das *Supremumsaxiom*:

> Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke $\sup M \in \mathbb{R}$, das *Supremum* von M.

Daraus folgt:

> Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine größte untere Schranke $\inf M \in \mathbb{R}$, das *Infimum* von M.

Falls $\sup M \in M$, heißt $\sup M$ auch *Maximum* von M. Falls $\inf M \in M$, heißt $\inf M$ auch *Minimum* von M.

Beispiel 1.7 $\sup\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$

Konventionen.

- $\sup M = \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt
- $\sup \emptyset = -\infty$
- $\inf M = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt
- $-\infty < a < \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$

Bemerkung 1.8 *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen erfüllt das Supremumsaxiom nicht. Z.B. hat*

$$M = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$$

keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$. *In* $\mathbb{R}$ *gilt*

$$\sup M = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Satz 1.9 $\mathbb{R}$ *ist* archimedisch, *d.h. für alle* $a \in \mathbb{R}$ *existiert* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $a < n$. *Insbesondere gibt es keine unendlich großen Zahlen in* $\mathbb{R}$. Vorl.2

Beweis. Angenommen, es gilt nicht:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad a < n.$$

Dann gilt

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a \geq n.$$

Also ist $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Sei $s = \sup \mathbb{N}$. Da s die kleinste obere Schranke ist, ist $s - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, d.h.

$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad s - 1 < n \\ \implies \quad & s < n + 1 \quad \text{und} \quad n + 1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Somit ist s keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Widerspruch. ∎

Folgerung. Sei $a > 0$. Dann ist $\frac{1}{a} > 0$. Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{a} < n \quad \implies \quad \frac{1}{n} < a.$$

Somit gibt es keine unendlich kleinen Zahlen in $\mathbb{R}$.

Satz 1.10 *Die rationalen Zahlen sind dicht in* $\mathbb{R}$. *D.h. für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *existiert* $r \in \mathbb{Q}$ *mit*

$$a < r < b.$$

Folgerung. Jedes $a \in \mathbb{R}$ kann beliebig gut durch Brüche approximiert werden: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$a - 10^{-n} < r < a \quad \implies \quad a \in (r, r + 10^{-n}).$$

Dezimaldarstellung. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Dezimaldarstellung von a ist von der Gestalt

$$\pm d_0.d_1d_2d_3\dots$$

mit $d_0 \in \mathbb{N}_0$, $d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Jede abbrechende Dezimalzahl lässt sich als rationale Zahl schreiben:

$$\pm d_0.d_1\dots d_n = \pm\frac{p_n}{10^n},$$

wobei $p_n \in \mathbb{N}_0$ die Dezimalziffern $d_0d_1\dots d_n$ besitzt. Z.B. gilt

$$1.37 = \frac{137}{100} \in \mathbb{Q}.$$

- Zur positiven Dezimalzahl $d_0.d_1d_2d_3\dots$ gehört die reelle Zahl

$$\sup\{r_n \in \mathbb{Q} : r_n = d_0.d_1d_2d_3\dots d_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

- Sei $a \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$p_n = \max\{p \in \mathbb{N}_0 : p \leq 10^n a\}.$$

  Das Maximum existiert, weil die Menge nach oben beschränkt ist. Schreibe $\frac{p_n}{10^n}$ als $d_0.d_1d_2d_3\dots d_n$. Das liefert die Dezimaldarstellung $d_0.d_1\dots$ von a. Z.B. ergibt sich für $a = \frac{137}{100}$

$$\begin{aligned}
p_0 &= \max\left\{p \in \mathbb{N}_0 : p \leq \frac{137}{100}\right\} = 1, \quad \frac{p_0}{10^0} = 1,\\
p_1 &= \max\left\{p \in \mathbb{N}_0 : p \leq \frac{137}{10}\right\} = 13, \quad \frac{p_1}{10^1} = 1.3,\\
p_2 &= \max\{p \in \mathbb{N}_0 : p \leq 137\} = 137, \quad \frac{p_2}{10^2} = 1.37,\\
p_3 &= \max\{p \in \mathbb{N}_0 : p \leq 1370\} = 1370, \quad \frac{p_3}{10^3} = 1.370 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Dies liefert eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und den durch die beschriebene Entwicklung entstandenen Dezimalzahlen.

Berechenbare Zahlen. Sei

$$B = \{a = \pm d_0.d_1d_2\dots \in \mathbb{R} : \exists \text{ Programm } P_a \text{ mit } P_a(n) = \pm d_0.d_1d_2\dots d_n \forall n\}.$$

Lemma 1.11 *$B \subsetneq \mathbb{R}$ ist abzählbar. Wenn man eine Zahl gleichverteilt aus $[0, 1]$ zieht, ist sie mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht in B.*

Beweis. Für eine gegebene Maschine ist ein Programm eine endliche Folge von Zeichen eines endlichen Alphabets. Somit gibt es nur abzählbar viele Programme. Also ist B abzählbar. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, folgt $B \subsetneq \mathbb{R}$. Jede abzählbare Menge hat unter der (kontinuierlichen) Gleichverteilung Wahrscheinlichkeit 0. ■

1.3 Wichtige Ungleichungen

Definiere die Betragsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

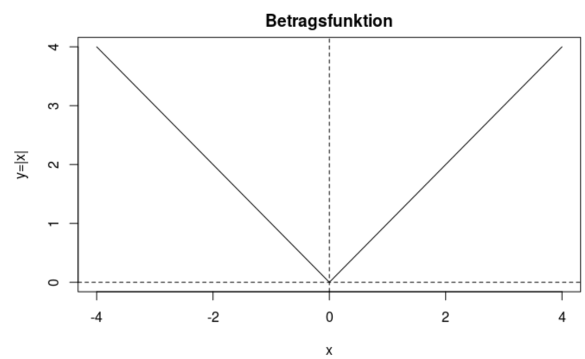


Figure 1: Betragsfunktion $x \mapsto |x|$

Satz 1.12 (Dreiecksungleichung) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $xy \geq 0$, d.h. für x, y mit gleichen Vorzeichen. Allgemeiner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle x_i das gleiche Vorzeichen haben.

Satz 1.13 (Umgekehrte Dreiecksungleichung) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|x + y| \geq ||x| - |y||$$

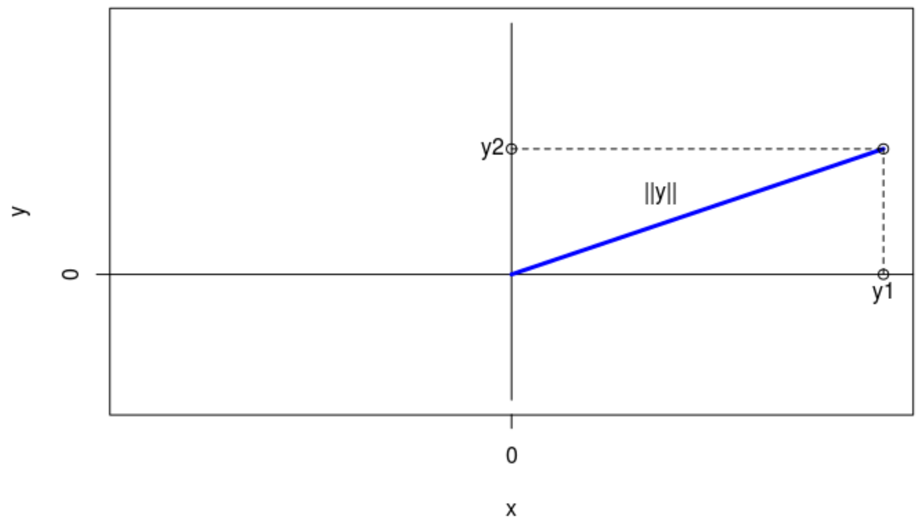
mit Gleichheit genau dann, wenn $xy \leq 0$, d.h. für x, y mit verschiedenen Vorzeichen.

Für $n \geq 2$ betrachten wir

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \quad \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Die *Länge* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

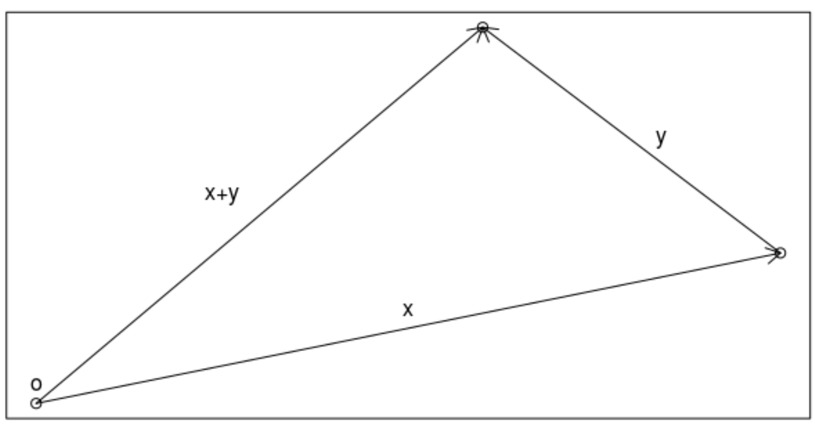
$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$



Satz 1.14 (Dreiecksungleichung im $\mathbb{R}^n$) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Der Beweis verwendet die Cauchy-Schwarz Ungleichung.



Das *Skalarprodukt* von $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist definiert durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Damit ergibt sich

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

Satz 1.15 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$, $y = 0$ oder $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. *Spezialfall:* $\|x\| = 0$
Dann ist $x = 0$ und die Ungleichung gilt mit Gleichheit. Analog für $\|y\| = 0$.

Im folgenden sei $\|x\| > 0$ und $\|y\| > 0$. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \tag{1.2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle $x_i y_i$ das gleiche Vorzeichen haben.

Setze

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|}, \quad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|}.$$

Es gilt

$$0 \leq (a_i - b_i)^2 = a_i^2 - 2a_i b_i + b_i^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_i b_i \leq \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2) \tag{1.3}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$a_i = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad |x_i| = \frac{\|x\|}{\|y\|}|y_i|. \tag{1.4}$$

Aufsummieren von (1.3) liefert

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2).$$

Einsetzen der Definitionen von a_i und b_i ergibt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|x\|}\frac{|y_i|}{\|y\|} &\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{y_i^2}{\|y\|^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\|x\|^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{\|y\|^2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|\|y\|.$$

Zusammen mit (1.2) folgt die behauptete Ungleichung.

Gleichheit gilt genau dann, wenn (1.4) gilt und alle $x_i y_i$ das gleiche Vorzeichen besitzen. Dies ist äquivalent zu

$$x_i = \lambda y_i \quad \forall i \tag{1.5}$$

"$\Longrightarrow$": Aus (1.4) folgt (1.5) mit

$$\lambda = \sigma \frac{\|x\|}{\|y\|} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{cases} 1 & \text{falls alle } x_i y_i \geq 0, \\ -1 & \text{falls alle } x_i y_i \leq 0 \end{cases}$$

"$\Longleftarrow$": $x_i y_i = \lambda y_i^2$ hat für alle i dasselbe Vorzeichen wie λ. Ausserdem folgt aus (1.5)

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda^2 \|y\|^2 \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| = \frac{\|x\|}{\|y\|}.$$

(1.5) impliziert (1.4).

■

2 Folgen

2.1 Konvergenz

Definition 2.1 *Eine Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *komplexer Zahlen ist eine Abbildung* $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$. *Man schreibt auch* $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Vorl.3

Manchmal nehmen wir als Indexmenge $\mathbb{N}$ statt $\mathbb{N}_0$.

Folgen entstehen z.B. durch Rekursionen.

Beispiel 2.2 *Sei* $q \in \mathbb{R}$. *Setze*

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = q a_n \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die gleiche Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *kann man explizit durch*

$$a_n = q^n, n \in \mathbb{N}_0,$$

beschreiben.

Oft interessiert man sich für das *asymptotische Verhalten* einer Folge. Im Beispiel hängt dies von q ab. Z.B.

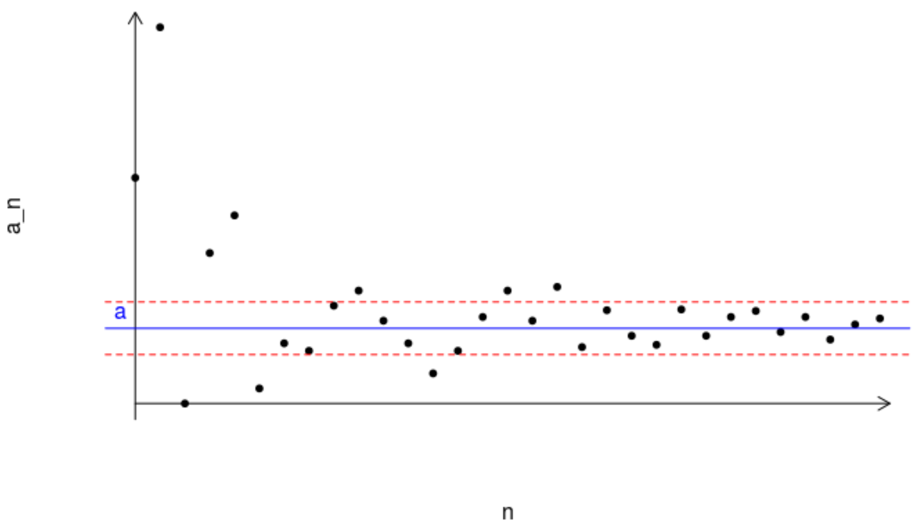
- $q = 2$: $a_n = 2^n$ strebt nach ∞
- $q = \frac{1}{2}$: $a_n = \frac{1}{2^n}$ strebt nach 0
- $q = -1$: $a_n = (-1)^n$ nimmt abwechselnd die Werte -1 und 1 an.

Definition 2.3 *Eine komplexe Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert *gegen* $a \in \mathbb{C}$, *falls für jede Genauigkeit* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass für alle* $n \geq n_0$ *gilt:*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Kurzschreibweise: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$
Man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{oder} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$



Beispiel 2.4 $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. *D.h.*

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$$

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
Beweis. *Sei* $\varepsilon > 0$. *Dann ist* $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$. *Da* $\mathbb{R}$ *archimedisch ist, existiert* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Für alle $n \geq n_0$ *gilt:*

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

■

Wie kommt man auf diesen Beweis?
Sei $\varepsilon > 0$. *Suche* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sodass gilt*

$$\forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \geq n_0 \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Beispiel 2.5 $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$
Behauptung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert nicht. Solche Folgen heißen* divergent.
Beweis. *Konvergenz bedeutet:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

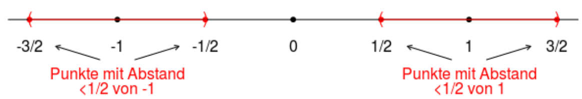
Für Divergenz müssen wir zeigen:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad |a_n - a| \geq \varepsilon \tag{2.1}$$

Es gilt:

$$|a_n - a| = |1 - a| \quad \textit{oder} \quad |a_n - a| = |-1 - a|.$$

Jedes $a \in \mathbb{R}$ *hat von 1 oder -1 einen Abstand* $\geq \frac{1}{2}$. *Somit gilt* (2.1) *für* $\varepsilon = \frac{1}{2}$.



■

Rechenregeln für Grenzwerte.

Satz 2.6 *Falls* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, *so gilt auch*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

(b) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *falls* $b \neq 0$

Spezialfall von (d): $a_n = 1$ für alle n. Dann ist $a = 1$ und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}, \text{ falls } b \neq 0.$$

Beispiel 2.7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 3n - 7}{2n^2 + 1}$$

Intuituion für große n: Zähler $\approx 4n^2$, *Nenner* $\approx 2n^2$,

$$\textit{Bruch} \approx \frac{4n^2}{2n^2} = 2.$$

Formal:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n-7}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}.$$
Wir wissen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. *Aus (b) folgt* $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$. *Aus (c) folgt* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. *Aus (b) folgt* $\lim_{n\to\infty} \frac{-7}{n^2} = 0$. *Damit ergibt sich aus (d)*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n-7}{2n^2+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Beispiel 2.8
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4n^2+2}{8n^5-1} = 0$$
Ähnliches Argument; Bruch durch n^5 *kürzen.*

Definition 2.9 *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert *gegen* $+\infty$*, falls*
$$\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq K.$$
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert *gegen* $-\infty$*, falls*
$$\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq -K.$$
Man sagt auch: Die Folge konvergiert uneigentlich.

Nicht jede divergente Folge konvergiert uneigentlich, z.B. $(-1)^n$.

Beispiele für uneigentliche Konvergenz.

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$
- $\lim_{n\to\infty}(n^3 - n) = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es folgende Möglichkeiten:

- Konvergenz gegen $a \in \mathbb{R}$
- uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$ oder ∞
- keines von beiden

Definition 2.10 *Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Zahlen* $\neq 0$ *heißen* asymptotisch gleich*, falls*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1.$$
Man schreibt: $a_n \simeq b_n$ *für* $n \to \infty$.

Beispiel 2.11

- $n+1 \simeq n$, *denn*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$
- $n^2+7n+13 \simeq n^2$, *denn*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7n+13}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{7}{n}+\frac{13}{n^2}\right) = 1.$$
- $n^5+3n^4+17n^3-2n^2+3n+\pi \simeq n^5$

Bei der Konvergenz und der asymptotischen Gleichheit kommt es nur auf die großen Folgenglieder an. Endlich viele Folgenglieder spielen keine Rolle.

Satz 2.12 *Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist beschränkt. D.h.*
$$\exists C>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad |a_n| \le C.$$
Die Umkehrung gilt nicht: Eine beschränkte Folge muss nicht konvergieren. Z.B. $a_n = (-1)^n$.

Satz 2.13 *Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \le b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, dann gilt $a \le b$.*

Satz 2.14 (Einschließungsregel) *Es gelte $a_n \le b_n \le c_n$ für alle bis auf endlich viele n. Falls $\alpha\in\mathbb{R}$ existiert mit*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \lim_{n\to\infty} c_n,$$
dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

Beweis. Sei $\varepsilon>0$. Nach Voraussetzung gilt
$$\exists n_1\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge n_1 \quad |a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\exists n_2\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge n_2 \quad |c_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Sei $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$ und $n\ge n_0$. Dann gilt
$$|b_n-\alpha| \le |b_n-a_n| + |a_n-\alpha| < |b_n-a_n| + \frac{\varepsilon}{3}.$$
Weiter gilt
$$|b_n-a_n| = b_n-a_n \le c_n-a_n = |c_n-a_n| \le |c_n-\alpha| + |\alpha-a_n| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}.$$
Einsetzen liefert für alle $n\ge n_0$
$$|b_n-\alpha| < \varepsilon.$$

■

Beispiel 2.15

$$b_n = \frac{1}{n + \sqrt{n} + 5}, n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$0 \le b_n \le \frac{1}{n}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *folgt aus dem Einschließungssatz:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

2.2 Monotone Folgen

Definition 2.16 *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen heißt* monoton wachsend*, falls* Vorl.4

$$a_n \le a_{n+1} \quad \textit{für alle } n,$$

und monoton fallend*, falls*

$$a_n \ge a_{n+1} \quad \textit{für alle } n.$$

Gilt sogar $a_n < a_{n+1}$ *bzw.* $a_n > a_{n+1}$ *für alle* n*, dann heißt die Folge* streng monoton wachsend *bzw.* streng monoton fallend*.*

Satz 2.17 *Für jede monoton wachsende Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Für jede monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Insbesondere ist jede beschränkte monotone Folge konvergent und jede unbeschränkte monotone Folge ist uneigentlich konvergent gegen $\pm\infty$*.*

Beweis für monoton wachsende Folgen. *Fall 1:* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
Dann existiert

$$s = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da s die kleinste obere Schranke der a_n ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_{n_0} > s - \varepsilon.$$

(Wenn es so ein n_0 nicht gäbe, wäre $a_n \le s - \varepsilon$ für alle n. Damit wäre $s - \varepsilon$ eine kleinere obere Schranke. Widerspruch.) Wegen der Monotonie gilt:

$$\begin{aligned} & s - \varepsilon < a_{n_0} \le a_{n_0+1} \le a_{n_0+2} \le \cdots \le s \\ \Longrightarrow\ & \forall n \ge n_0 \quad -\varepsilon < a_n - s \le 0 \\ \Longrightarrow\ & \forall n \ge n_0 \quad |a_n - s| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.
Fall 2: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.
Wegen $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ ist die Folge nach *oben* unbeschränkt. Damit gilt

$$\forall K \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_{n_0} > K$$

Aus der Monotonie folgt

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > K \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

■

Die Eulersche Zahl. Für unsere erste Anwendung des Satzes stellen wir zunächst einige Hilfsmittel zusammen.

Satz 2.18 (Bernoulli Ungleichung) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion. ■

Satz 2.19 (Binomische Formel) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Satz 2.20 (Formel für die geometrische Summe) *Für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{j=0}^{n} q^j &= \sum_{j=0}^{n} (q^j - q^{j+1}) \\ &= (q^0 - q^1) + (q^1 - q^2) + (q^2 - q^3) + \cdots + (q^n - q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}\end{aligned}$$

Die entstandene Summe nennt man eine *Teleskopsumme*. Da $q \neq 1$, können wir durch $1-q$ dividieren und erhalten so die Behauptung. ■

Hier ist eine Anwendung von Satz 2.17:

Satz 2.21 *Die Folge*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N},$$

konvergiert. Der Grenzwert

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

heißt Eulersche Zahl *(Euler, 1728). Es gilt* $e \approx 2.718\ldots$*.*

Beweis. *Behauptung 1:* Die Folge ist monoton wachsend. Zu zeigen:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \quad \forall n \geq 2.$$

Sei $n \geq 2$. Es gilt:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

Dabei ist

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Einsetzen liefert

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1}$$

Da $n \geq 2$ ist, gilt $-\frac{1}{n^2} \geq -\frac{1}{4}$. Mit Hilfe der Bernoulli Ungleichung folgt:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1.$$

Damit folgt Behauptung 1.
Behauptung 2: Die Folge ist nach oben beschränkt, d.h.

$$\exists c \quad \forall n \quad a_n \leq c.$$

Anwenden der binomischen Formel liefert

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Wir schätzen die einzelnen Summanden ab:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq \frac{1}{k!}.$$

Weiter gilt für alle $k \geq 1$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \geq 2^{k-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Einsetzen liefert

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i};$$

für das letzte Gleichheitszeichen haben wir $i = k - 1$ gesetzt. Die letzte Summe ist eine geometrische Summe mit

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Damit folgt Behauptung 2:

$$a_n \leq 3 \quad \forall n.$$

Somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. ■

Numerische Berechnungen ergeben

$$a_{100} = 2.70481.$$

Monotonie und unsere obere Schranke liefern

$$a_{100} \leq a_n \leq 3 \quad \forall n \geq 100.$$

Satz 2.13 liefert

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \in [a_{100}, 3] \quad \Longrightarrow \quad e \in [2.7, 3]$$

Harmonische Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Sei C_n die mittlere Anzahl von Vergleichen, die Quicksort zum Sortieren von n zufällig angeordneten Zahlen benötigt. Dann gilt

$$C_n = 2(n+1)H_n - 2n.$$

Für $n = 2^k$ erhalten wir

$$\begin{aligned} H_{2^k} =& 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\ &+ \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ \geq& 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\ &+ \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ =& 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

Da die Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$H_n \geq 1 + \frac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor,$$

wobei

$$\lfloor x \rfloor = \text{größte ganze Zahl } \leq x,$$

z.B. $\lfloor 1.3 \rfloor = 1$. Die Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und wegen (2.2) unbeschränkt. Satz 2.17 liefert

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \infty.$$

Die Divergenz ist sehr langsam. Man kann zeigen

$$\min\{n : H_n \geq 100\} \approx 1.5 \cdot 10^{43}.$$

3 Reihen

3.1 Definition und Beispiele

Die harmonischen Zahlen

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n \in \mathbb{N},$$

sind ein Beispiel für eine Reihe.

Definition 3.1 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt unendliche Reihe. *s_n heißt n-te Partialsumme. Symbol für die Reihe ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent, *sonst* divergent. *Der Grenzwert*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

heißt Wert oder Summe der Reihe. Man schreibt:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Falls $a_n \in \mathbb{R}$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, so schreibt man

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty.$$

Vorl.5

Harmonische Reihe.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Dies folgt aus der Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n$$

Geometrische Reihe. Betrachte für $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

mit $z^0 = 1$. Für $z \neq 1$ sind die Partialsummen gegeben durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Lemma 3.2 *Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{3.1}$$

Für reelle $q \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty. \tag{3.2}$$

Für $q = -1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Beweis. *Fall $|z| < 1$:* Wir zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0. \tag{3.3}$$

Für $z = 0$ ist das wahr. Sei $0 < |z| < 1$. Dann ist $\frac{1}{|z|} > 1$ und wir schreiben

$$\frac{1}{|z|} = 1 + x$$

für ein $x > 0$. Mit Hilfe der Bernoulli Ungleichung erhalten wir

$$\frac{1}{|z|^{n+1}} = (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \geq nx.$$

Es folgt

$$0 \leq |z|^{n+1} \leq \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Die Einschließungsregel liefert

$$\lim_{n\to\infty} |z^{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |z|^{n+1} = 0.$$

Das bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |z^{n+1} - 0| = ||z^{n+1}| - 0| < \varepsilon$$

Damit folgt (3.3) und daraus (3.1).
Fall $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$: Dann ist $q^k \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und daher

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \geq n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit ergibt sich (3.2).
Fall $q = -1$: Wir betrachten die Partialsummen:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^n.$$

Insbesondere gilt:

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 1, \ldots$$

Diese Folge ist divergent. ∎

Wert der geometrischen Reihe für verschiedene q mit $|q| < 1$.

q	$\frac{999}{1000}$	$\frac{99}{100}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100}$
$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$	$\frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000$	$\frac{1}{\frac{1}{100}} = 100$	$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$	$\frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{100}{99}$	$\frac{1}{\frac{101}{100}} = \frac{100}{101}$

Eine Teleskopreihe.

Lemma 3.3

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \tag{3.4}$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} s_n =& \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ =& \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ =& 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. ∎

3.2 Konvergenzkriterien

Wenn man von einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endlich viele Terme weglässt, ändern sich weder das Konvergenzverhalten, noch der Grenzwert. Bei der zugehörigen Reihe ändert sich das Konvergenzverhalten nicht, jedoch der Wert der Reihe. D.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konvergiert für alle } n \in \mathbb{N}$$

Z.B. gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Lemma 3.4 (Notwendige Konvergenzbedingung)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Beweis. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, d.h. $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1}) = s - s = 0. \tag{3.5}$$

■

Bemerkung 3.5 *Die Bedingung* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ *ist* notwendig, *aber* nicht hinreichend *für die Konvergenz der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. *Z.B. gilt für die harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty, \quad \textit{aber} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Satz 3.6 *Falls* $a_k \geq 0$ *für alle* k, *dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ konvergiert} \iff \textit{Die Reihe } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ ist beschränkt.}$$

Beweis. Sei $a_k \geq 0$ für alle k. Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Daher ist die Konvergenz von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent zur Beschränktheit. ■

Satz 3.7 *Für* $k \in \mathbb{N}$ *seien* $a_k \in \mathbb{C}$ *und* $b_k \in \mathbb{R}$ *mit*

$$|a_k| \leq b_k \quad \forall k.$$

Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *eine* Majorante *für* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *eine* Minorante *für die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

(a) Majorantenkriterium: *Wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und es gilt*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

(b) Minorantenkriterium: *Wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *divergiert, dann divergiert auch* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis.

(b) Wäre $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, dann wäre $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ nach Teil (a) konvergent.

■

Beachte:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ divergent} \quad \iff \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$$

Satz 3.8 *Die Folgen* $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *seien asymptotisch gleich, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1. \tag{3.6}$$

Dann sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *entweder beide konvergent oder beide divergent.*

Beweis. Wegen (3.6)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \frac{1}{2}$$
$$\iff \quad -\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} - 1 < \frac{1}{2} \quad \iff \quad \frac{1}{2}b_n < a_n < \frac{3}{2}b_n$$

Fall $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent: Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
Fall $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent: Nach dem Minorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. ∎

Anwendung 3.9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *ist konvergent.*

Beweis.
$$\frac{1}{k^2} \simeq \frac{1}{k(k+1)}, \text{ denn } \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k(k+1)}} = \frac{k(k+1)}{k^2} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \to 1$$
für $k \to \infty$. Alternativ folgt die Konvergenz mit Hilfe des Majorantenkriteriums:

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k} \quad \forall k \geq 2$$

∎

Anwendung 3.10
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} = \infty$$
Das folgt aus
$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \simeq \frac{1}{k}$$
und der Divergenz der harmonischen Reihe. Alternativ folgt die Divergenz aus dem Minorantenkriterium:
$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2k \cdot 2k}} \geq \frac{1}{2k} \quad \forall k \geq 1$$

Satz 3.11 (Quotientenkriterium) *Sei $a_k \neq 0$ für alle bis auf endlich viele k. Falls der Grenzwert* Vorl.6
$$q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$
existiert, dann gilt

- $q < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert*
- $q > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergiert*

- *Für $q = 1$ ist keine Aussage möglich.*

Betrachte die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} < 1.$$

Wegen

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = 1$$

ist mit dem Quotientenkriterium keine Aussage möglich. Die schwächere Voraussetzung

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \forall k$$

ist nicht hinreichend für die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiel 3.12 (Exponentialreihe)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, z \in \mathbb{C}$$

Setze

$$a_k = \frac{z^k}{k!}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \frac{|z|}{k+1} \to 0$$

für $k \to \infty$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Exponentialreihe für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 3.13 *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend mit $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die* alternierende Reihe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

Für

$$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

gilt

$$|s - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

Das ist eine Schranke für den Approximationsfehler der Reihe durch ihre Partialsummen.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$s_{n+1} - s_{n-1} = (-1)^{n+1} a_{n+1} + (-1)^n a_n = (-1)^n (a_n - a_{n+1})$$

Dabei ist $a_n - a_{n+1} \geq 0$, da die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fällt. Es folgt:

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2n-1} \geq 0 \quad &\text{und} \quad s_{2n} - s_{2n-2} \leq 0 \\ s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \quad &\text{und} \quad s_{2n} \leq s_{2n-2} \end{aligned}$$

Beachte: $a_n \geq 0$ für alle n, da eine monoton fallende Folge gegen ihr Infimum konvergiert, welches nach Voraussetzung 0 ist. Damit ergibt sich

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2n+1} = s_{2n} - \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} \leq s_{2n} \leq s_{2n-2} \leq \cdots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0. \tag{3.7}$$

Insbesondere gilt

- $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend und durch s_0 nach oben beschränkt.
- $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend und durch s_1 nach unten beschränkt.

Daher sind beide Folgen konvergent. Ihre Grenzwerte sind gleich, denn

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Sei $\tilde{s}$ der gemeinsame Grenzwert. Wegen der Monotonie liegt $\tilde{s}$ stets zwischen s_n und s_{n+1}. Es folgt

$$0 \leq |\tilde{s} - s_n| \leq |s_n - s_{n+1}| = a_{n+1} \to 0 \tag{3.8}$$

für $n \to \infty$. Aus der Einschließungsregel folgt

$$\lim_{n\to\infty} |\tilde{s} - s_n| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \tilde{s}.$$

(3.8) ist die gewünschte Abschätzung für den Approximationsfehler. ■

Beispiel 3.14 (Leibnizreihe)

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \textit{ ist konvergent.}$$

Denn:

$$a_k = \frac{1}{2k+1} \textit{ ist monoton fallend mit } \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0.$$

Wegen (3.7) *gilt*

$$0.78514\ldots = s_{1001} \leq s \leq s_{1000} = 0.78564\ldots$$

Es folgt $s = 0.785\ldots$. Angenommen, wir wollen s mit einer Genauigkeit von 10^{-m} bestimmen. Wegen

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

liefert s_n die gewünschte Approximation, falls

$$10^{-m} \geq a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3} \quad \Longrightarrow \quad 2n+3 \geq 10^m \quad \Longrightarrow \quad n \geq \frac{1}{2}(10^m - 3).$$

Die Komplexität wächst exponentiell schnell in der Anzahl m der Ziffern. Für 10 Ziffern braucht man $\approx 5 \cdot 10^9$ Summanden.

Beachte: Wenn wir in der Leibnizreihe nur die Terme mit geraden oder nur die Terme mit ungeraden Indizes aufsummieren, erhalten wir divergente Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k+1} = \infty \quad \textit{gerade Indizes}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2(2k+1)+1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k+3} = -\infty \quad \textit{ungerade Indizes}$$

Praktische Tipps zur Untersuchung der Konvergenz von Reihen.

- Wichtige Reihen und ihr Konvergenzverhalten kennen (z.B. geometrische Reihe, harmonische Reihe, Exponentialreihe etc.)
- Ist $a_n > 0$ und gibt es $b_n > 0$ mit $a_n \simeq b_n$, sodass das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bekannt ist?
- Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Das ist notwendig für Konvergenz.
- Ist eine bekannte Reihe konvergente Majorante oder divergente Minorante?
- Ist das Quotientenkriterium anwendbar?
- Liegt eine alternierende Reihe vor?

Beispiel 3.15

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$$

Denn:

$$\sqrt{k} \leq k \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$$

Da die harmonische Reihe divergiert, folgt die Divergenz aus dem Minorantenkriterium.

Beispiel 3.16
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad \textit{konvergiert}$$
Denn: Die Reihe ist alternierend *mit*
$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 0.$$
Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist monoton fallend mit* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Beispiel 3.17
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{-k}}{1-3^{-k}} \quad \textit{konvergiert}$$
Denn: Vorl.7
$$\frac{3^{-k}}{1-3^{-k}} \simeq 3^{-k}, \quad \textit{da} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{3^{-k}}{\frac{3^{-k}}{1-3^{-k}}} = \lim_{k\to\infty}(1-3^{-k}) = 1$$
Wegen
$$3^{-k} > 0, \quad \frac{3^{-k}}{1-3^{-k}} > 0 \quad \forall k \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} < \infty$$
folgt die behauptete Konvergenz.

Alternativ kann man mit dem Majorantenkriterium *argumentieren: Für alle* $k \geq 1$ *gilt* $1 - 3^{-k} \geq 1 - 3^{-1} = 2/3$. *Damit folgt*
$$\frac{3^{-k}}{1-3^{-k}} \leq \frac{3}{2} 3^{-k}$$
und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2} 3^{-k}$ *konvergiert. Damit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium.*

Alternativ kann man mit dem Quotientenkriterium *argumentieren:*
$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3^{-k-1}}{1-3^{-k-1}}}{\frac{3^{-k}}{1-3^{-k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1-3^{-k}}{1-3^{-k-1}} = \frac{1}{3} < 1$$
Damit folgt die Konvergenz aus dem Quotientenkriterium.

Definition 3.18 *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, *wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

Bemerkung 3.19 *Nach dem Majorantenkriterium ist jede absolut konvergente Reihe konvergent. Die Umkehrung gilt nicht. Z.B. ist die Leibnizreihe konvergent, aber* nicht absolut konvergent*:*
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \infty.$$

3.3 Rechenregeln

Satz 3.20 *Sind* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent, so konvergiert auch* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ *und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.\end{aligned}$$

■

Vorsicht beim Ändern der Reihenfolge, in der die a_k aufsummiert werden:

Satz 3.21 (Umordnungssatz) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann absolut, wenn für jede Bijektion* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *die umgeordnete Reihe gegen ein und denselben Wert konvergiert:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Die Reihe auf der linken Seite ist die gemäß σ *umgeordnete Reihe.*

Riemann hat 1866 festgestellt: Durch Umordnung kann man jede konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe gegen jede beliebige reelle Zahl konvergieren lassen.

Beispiel 3.22 (Alternierende Reihe)

$$s = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

Die Folge $a_k = \frac{1}{k+1}$ *ist monoton fallend mit* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. *Nach Satz 3.13 konvergiert die Reihe. Sie ist aber nicht absolut konvergent. Satz 3.13 liefert*

$$|s - s_1| \le a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|s - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right| = \left|s - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad s > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Insbesondere folgt $s > 0$. *Es gilt*

$$s_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \to s \quad \text{für } n \to \infty.$$

Betrachte die umgeordnete Reihe

$$\begin{aligned} r_n =& 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2n} \\ =& \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2k} \right). \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k-1}.$$

Es folgt

$$r_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} s_{2n-1} \to \frac{1}{2} s \neq s \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Vorsicht beim Umordnen!

Multiplikation von Reihen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\sum_{l=0}^{m} b_l \right) =& (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_m) \\ =& a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + \cdots a_0 b_m \\ &+ a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots a_1 b_m \\ &+ a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_2 b_m \\ &+ \cdots \\ &+ a_n b_0 + a_n b_1 + a_n b_2 + \cdots a_n b_m. \end{aligned}$$

Sortiere um. Terme mit der gleichen Indexsumme werden zusammengefasst. Die Summe aller Terme mit Indexsumme $k = l + (k - l)$ ist gegeben durch

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}.$$

Satz 3.23 *Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit*

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

absolut konvergent und es gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ bezeichnet man als Cauchy-Produkt *von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.*

3.4 Die Exponentialfunktion

Setze für $z \in \mathbb{C}$
$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Satz 3.24 (Funktionalgleichung) *Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:*
$$\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z).$$

Beweis. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Exponentialreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut. Satz 3.23 liefert
$$\begin{aligned}\exp(w)\exp(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{z^l}{l!}\frac{w^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}z^l w^{k-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} z^l w^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w+z)^k}{k!} = \exp(w+z).\end{aligned}$$

Dabei haben wir die binomische Formel verwendet. ■

Satz 3.25 (Eigenschaften der Exponentialfunktion) *(a)* $\exp(0) = 1$

(b) $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$

(c) $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$

(d) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(e) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*

(f) $|\exp(z)| \leq \exp(|z|)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$

Beweis.

(a) $\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} = 1$

(bc) Aus der Funktionalgleichung folgt für alle $z \in \mathbb{C}$
$$1 = \exp(0) = \exp(-z+z) = \exp(-z)\exp(z).$$

Daraus folgt $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.

(d) Für $x = 0$ stimmt die Behauptung nach Teil (a). Sei $x > 0$. Dann gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^0}{0!} = 1 > 0. \tag{3.9}$$

Mit (c) folgt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0.$$

(e) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann ist $y - x > 0$ und damit wegen (3.9)

$$1 < \exp(y - x) = \exp(y)\exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)}$$

Dabei haben wir die Funktionalgleichung und Teil (c) verwendet. Wegen $\exp(x) > 0$ folgt

$$\exp(x) < \exp(y).$$

Somit ist exp streng monoton wachsend.

(f) Es gilt

$$|\exp(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \exp(|z|),$$

da die Dreiecksungleichung für die Partialsummen gilt.

■

Man kann zeigen, dass Vorl.8

$$\exp(1) = e = \text{Eulersche Zahl} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gilt. Aus der Funktionalgleichung und Satz 3.25(c) folgt für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$\exp(k) = \exp(1)^k = e^k.$$

Z.B. gilt

$$\exp(2) = \exp(1)\exp(1) = e^2, \quad \exp(-1) = \frac{1}{\exp(1)} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Man schreibt auch e^z anstelle von $\exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Damit können wir die Funktionalgleichung wie folgt schreiben:

$$e^{w+z} = e^w e^z \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

4 Stetigkeit

4.1 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 4.1 *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten konvergieren.*

Definition 4.2 *Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ mit Definitionsbereich D heißt* im Punkt $x \in D$ stetig, *falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Man schreibt auch

$$\lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

Die Funktion f heißt stetig, *wenn f in allen Punkten $x \in D$ stetig ist.*

Beispiel 4.3 *Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und f linear interpoliert auf allen Intervallen $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, d.h. f ist linear auf $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ mit

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n.$$

Dann ist f nach Konstruktion stetig in allen $x \in (0,1] = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 1\}$. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

existiert nicht. Daher ist f nicht stetig in 0, *egal welchen Wert $f(0)$ hat. Man sagt auch: f ist* unstetig in 0.

Lemma 4.4 *Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{C}$ stetig.*

Beweis. *Stetigkeit in $z = 0$:* Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |e^z - 1| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \leq |z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{k-1}}{(k-1)!} = |z| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|z|^j}{j!} \\ &= |z|e^{|z|} \leq |z|e^1 = e|z|, \end{aligned}$$

da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ monoton wächst. Somit gilt für $|z| \leq 1$

$$0 \leq |e^z - 1| \leq e|z|.$$

Für jede komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ folgt mit Hilfe der Einschließungsregel

$$\lim_{n\to\infty} |e^{z_n} - 1| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} e^{z_n} = 1 = e^0$$

Stetigkeit in $z \in \mathbb{C}$: Für $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ gilt $\lim_{n\to\infty}(z_n - z) = 0$. Es gilt:

$$|e^{z_n} - e^z| = |e^{z_n - z} e^z - e^z| = |e^{z_n - z} - 1| \cdot |e^z|.$$

Da die Exponentialfunktion in 0 stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} |e^{z_n - z} - 1| = 0.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} |e^{z_n} - e^z| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} e^{z_n} = e^z$$

■

Definition 4.5 *Seien $g : D_1 \to D_2$, $f : D_2 \to D_3$ Funktionen. Die* Komposition *oder* Hintereinanderausführung *von f und g ist definiert durch*

$$f \circ g : D_1 \to D_3, x \mapsto f(g(x)).$$

Satz 4.6 *Die Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis. Wir betrachten $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Da g stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Da f stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(x)).$$

■

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich die Stetigkeit vieler Funktionen zeigen. *Vorsicht:* Die Verknüpfung muss zulässig sein.

Beispiele von stetigen Funktionen. Betrachte $f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich D.

- $d = 1$
  - $D = \mathbb{R}$, $f(x) = c =$ konstant
  - $D = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$
  - $D = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$
- $d = 2$

- $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x + y$
  Um die Stetigkeit nachzuweisen, sei $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Es folgt
  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y = f(x, y).$$
- $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xy$
- $D = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

Insbesondere sind Summen und Produkte stetiger Funktionen stetig.

Lemma 4.7 *Polynome sind stetig. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,*
$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$
stetig.

Beweis. Konstanten sind stetig, $z \mapsto z$ ist stetig. Also sind auch Summen und Produkte davon stetig.

- $z \mapsto a_1$ stetig, $z \mapsto z$ ist stetig $\quad\Rightarrow\quad z \mapsto a_1 z$ stetig
- $z \mapsto a_0$ stetig $\quad\Rightarrow\quad z \mapsto a_0 + a_1 z$ stetig
- $z \mapsto a_2$ stetig, $z \mapsto z$ ist stetig $\quad\Rightarrow\quad z \mapsto a_2 z^2$ stetig
- $\Rightarrow\quad z \mapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ stetig

■

Korollar 4.8 *Rationale Funktionen $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ mit Polynomen p und q sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.*

Jede Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ mit $q \geq 2$ besteht aus Komponentenfunktionen $f_i : D \to \mathbb{R}$:
$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)).$$
Es gilt: f ist in $x \in D$ stetig. $\iff$ Alle f_i sind in $x \in D$ stetig.

Beispiel 4.9 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (3x + 7, y^{25} - 4xy + x^3, 3 - x^2 y^2)$ ist stetig.*

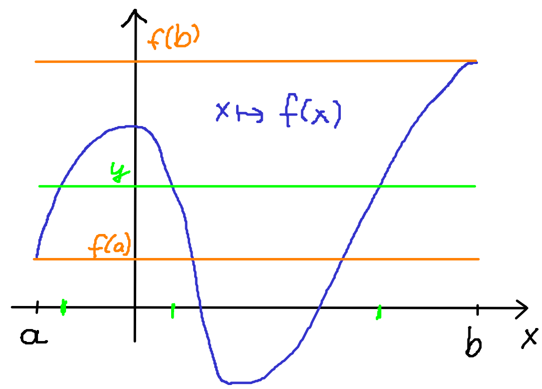


Figure 2: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist *stetig*. Jeder Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird im Intervall $[a, b]$ angenommen.

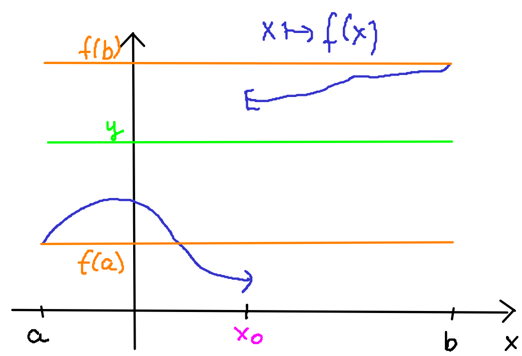


Figure 3: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist in x_0 unstetig; f hat in x_0 eine Sprungstelle. Es gibt $y \in [f(a), f(b)]$, die nicht als Funktionswert angenommen werden.

4.2 Zwischenwertsatz

Satz 4.10 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $y \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d.h. $f(a) < y < f(b)$ oder $f(a) > y > f(b)$. Dann gibt es ein $x \in (a, b)$, d.h. $a < x < b$, mit* Vorl.9

$$f(x) = y.$$

Mit anderen Worten: Eine auf $[a, b]$ stetige Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis. Sei o.B.d.A. $f(a) < y < f(b)$. Betrachte

$$M = \{t \in [a, b] : f(t) \le y\}.$$

Dann gilt:

- $f(a) \leq y \quad \Rightarrow \quad a \in M \quad \Rightarrow \quad M \neq \emptyset$
- $M \subseteq [a,b] \quad \Rightarrow \quad M$ nach oben beschränkt

Also existiert

$$x := \sup M.$$

Wegen $M \subseteq [a,b]$ gilt: $x \in [a,b]$.
Behauptung: $f(x) = y$
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann gilt:

- $f(x_n) \leq y$, da $x_n \in M$
- $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, da f stetig.

Es folgt

$$f(x) \leq y.$$

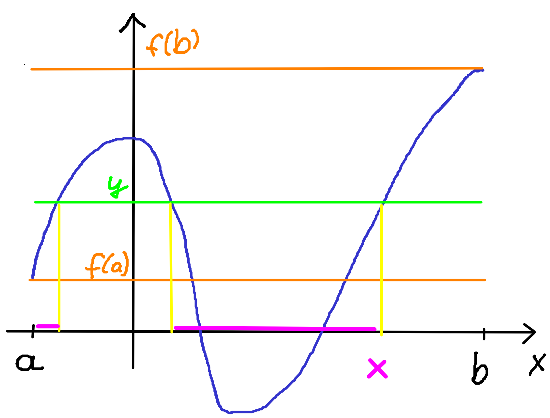
Wegen $f(x) \leq y < f(b)$ ist $x < b$, also $x + \frac{1}{n} \in [a,b]$ für alle n hinreichend groß. Nach Definition von x und M ist

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) > y \quad \forall n \text{ mit } x + \frac{1}{n} \in [a,b].$$

Da f stetig in x ist, folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(x + \frac{1}{n}\right) \geq y.$$

Damit folgt $f(x) = y$.



$\blacksquare$

Definition 4.11 *Man schreibt*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. *Analog definiert man* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *für* $a, b \in \{-\infty, \infty\}$.

Anwendung 4.12 (Existenz der n-ten Wurzel) Behauptung: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y > 0$ existiert genau ein $x > 0$ mit*

$$x^n = y.$$

Man schreibt

$$x := y^{1/n} = \sqrt[n]{y}.$$

Beweis. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $y > 0$. Wir betrachten die Funktion*

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n.$$

Da f streng monoton wächst, gibt es höchstens ein $x > 0$ mit $x^n = y$. Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ existiert $b > 0$, sodass

$$0 = f(0) < y < f(b).$$

Wir wenden den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ an. Dieser liefert:

$$x = \sup\{t \in [0, b] : t^n \leq y\}$$

erfüllt die Gleichung $x^n = y$. Da die Funktion $t \mapsto t^n$ streng monoton wächst, gilt

$$x = \sup\{t \geq 0 : t^n \leq y\}.$$

■

Beispiel 4.13 *Besitzt die Gleichung $\cos x = x$ eine Lösung in $[0, \frac{\pi}{2}]$?*
Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos x - x.$$

Es gilt:

$$\cos x = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0.$$

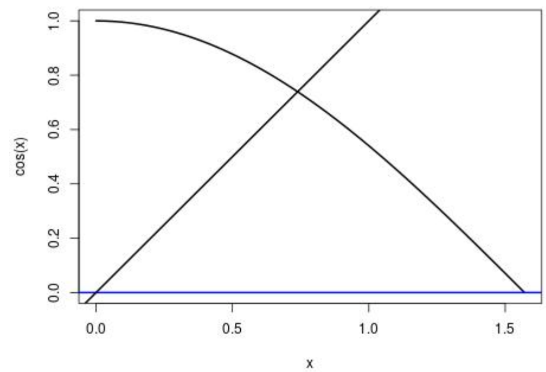
Die Funktion f ist stetig mit

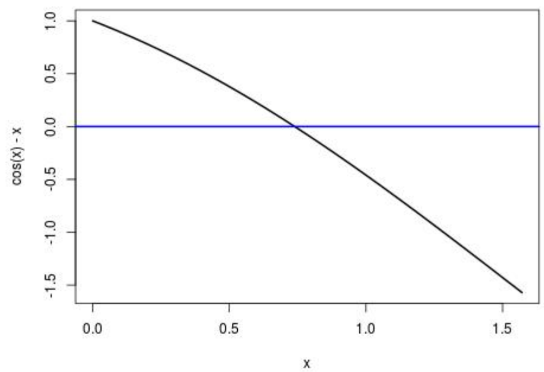
$$f(0) = \cos 0 = 1 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Insbesondere liegt 0 zwischen $f(0)$ und $f(\frac{\pi}{2})$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt:

$$\exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mit} \quad f(x) = 0.$$

Auf dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ sind die Funktionen $x \mapsto \cos x$ und $x \mapsto -x$ streng monoton fallend. Daher ist f streng monoton fallend. Daher existiert genau ein *$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit $f(x) = 0$.*





4.3 Häufungspunkte

Definition 4.14 *Sei* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine streng monoton wachsende Folge in* $\mathbb{N}$, *d.h.* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *Dann heißt* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine* Teilfolge *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $a^* \in \mathbb{R}^d$ *heißt* Häufungspunkt *der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}^d$, *wenn es eine Teilfolge* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a^*$ *gibt.*

Z.B. sind

$$(a_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$$

Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 4.15 *Ist die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *dann existiert genau ein Häufungspunkt, nämlich* a.

Beispiel 4.16 $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, *hat die Teilfolgen*

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, n \in \mathbb{N}, \quad \textit{und} \quad a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1, n \in \mathbb{N}.$$

Somit hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die Häufungspunkte -1 und 1.*

Bemerkung 4.17 *Nicht jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Betrachte z.B. $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, also divergent. Die Folge $(a_n = n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungspunkt. ■

Satz 4.18 (Bolzano-Weierstrass) *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. D.h.

$$\exists c > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \le c$$

Somit ist

$$a_n \in I_1 = [b_1, c_1] \quad \forall n$$

mit $b_1 = -c$, $c_1 = c$.

- Setze $n_1 = 1$. Es gilt: $a_{n_1} \in I_1$. Teile I_1 in zwei gleich große Hälften:
$$\left[b_1, \frac{b_1 + c_1}{2}\right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{b_1 + c_1}{2}, c_1\right].$$
Wähle als $I_2 = [b_2, c_2]$ eine Hälfte, welche unendlich viele Punkte der Restfolge $(a_n)_{n \geq n_1}$ enthält. Wähle $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \in I_2$.

- Gegeben n_k und $I_k = [b_k, c_k]$ konstruieren wir nach demselben Verfahren $n_{k+1} > n_k$ und I_{k+1} mit $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1} = [b_{k+1}, c_{k+1}]$.

Dann gilt für alle k
$$b_k \leq a_{n_k} \leq c_k \quad \text{und} \quad 0 \leq c_k - b_k = \frac{1}{2^{k-1}}(c_1 - b_1) \to 0$$
für $k \to \infty$. Die Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und durch c_1 nach oben beschränkt, also konvergent:
$$\lim_{k \to \infty} b_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} b_k =: b^*.$$
Die Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend und durch b_1 nach unten beschränkt, also konvergent:
$$\lim_{k \to \infty} c_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} c_k =: c^*.$$
Für die Grenzwerte gilt:
$$c^* - b^* = \lim_{k \to \infty} (c_k - b_k) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b^* = c^*.$$
Aus der Einschließungsregel folgt
$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = b^* = c^*.$$
Damit haben wir eine konvergente Teilfolge konstruiert. ■

Bemerkung 4.19 *Der Satz von Bolzano-Weierstrass gilt auch für Folgen mit Werten in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Dabei heißt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}^d$ beschränkt, falls*
$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_{n,i}^2} \leq M$$

Beweis. Die einzelnen Komponenten $(x_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ sind beschränkte Folgen für alle $1 \leq i \leq d$, denn
$$M \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_{n,i}^2} = \sqrt{x_{n,i}^2} = |x_{n,i}|.$$
Insbesondere existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k,1})_{k \in \mathbb{N}}$. Weiter existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_l},2})_{l \in \mathbb{N}}$. Usw. ■

4.4 Existenz von Maxima und Minima

Definition 4.20 *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in D$ heißt* Vorl.10

- Minimumstelle *und $f(x)$* Minimum *von f auf D, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in D$.*
- Maximumstelle *und $f(x)$* Maximum *von f auf D, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $y \in D$.*

Viele Optimierungsprobleme lassen sich so formulieren, dass man für eine Funktion f ein Minimum oder ein Maximum sucht.

Beachte: Nicht jede Funktion besitzt ein Minimum und ein Maximum.

Beispiel 4.21
- *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ besitzt weder Minimum noch Maximum.*
- *$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ besitzt weder Minimum noch Maximum. Wir wissen nur*

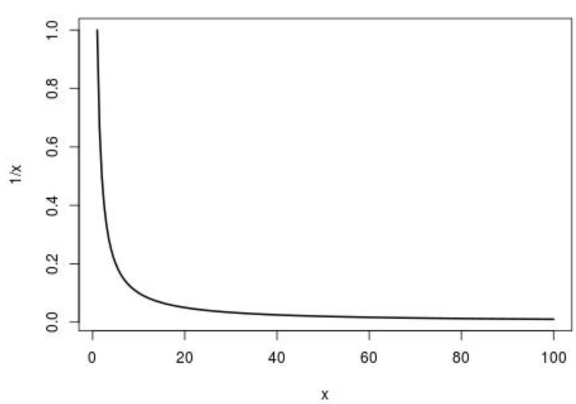
$$\inf_{x \in (a,b)} f(x) = a, \qquad \sup_{x \in (a,b)} f(x) = b.$$

- *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ nimmt in a ihr Minimum und in b ihr Maximum an.*

Beispiel 4.22 *Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ besitzt weder Minimum noch Maximum. Das gleiche gilt für $f : (\varepsilon, M) \to \mathbb{R}$ für alle $0 < \varepsilon < M < \infty$. Die Funktion*

$$f : [\varepsilon, M] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

nimmt ihr Maximum in ε und ihr Minimum in M an.



Definition 4.23 *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt* abgeschlossen*, falls der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A wieder in A liegt. D.h.*

$$x_n \in A \quad \forall n \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \Longrightarrow \quad x \in A$$

$K \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt kompakt*, falls K abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beispiel 4.24 • $[0,1]$ *ist abgeschlossen, da für alle* $0 \leq x_n \leq 1$ *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *gilt* $0 \leq x \leq 1$. *Da* $[0,1]$ *beschränkt ist, ist die Menge kompakt.*

- $[0,\infty)$ *ist abgeschlossen, aber unbeschränkt, also nicht kompakt.*
- $(0,1]$ *und* $(0,1)$ *sind nicht abgeschlossen, denn* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *ist nicht enthalten. Diese Mengen sind nicht kompakt.*

Zur Erinnerung: Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}$.

- Falls $\inf K \in K$, so heißt $\inf K$ *Minimum* von K.
- Falls $\sup K \in K$, so heißt $\sup K$ *Maximum* von K.

Lemma 4.25 *Eine kompakte Menge* $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ *besitzt ein Maximum und ein Minimum.*

Beweis. Da K kompakt ist, ist K beschränkt. Daher gibt es eine untere Schranke für K. Somit existiert $\inf K \in \mathbb{R}$.
Behauptung: $\inf K \in K$
Nach Definition des Infimums wissen wir

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K \quad \text{mit} \quad \inf K \leq x_n < \inf K + \frac{1}{n}$$
$$\Longrightarrow \quad 0 \leq x_n - \inf K = |x_n - \inf K| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Aus der Einschließungsregel folgt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - \inf K) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \inf K.$$

Da K abgeschlossen ist, folgt $\inf K \in K$. Somit gilt $\inf K = \min K$ und wir haben gezeigt, dass K ein Minimum besitzt. Analog zeigt man die Existenz des Maximums. ■

Satz 4.26 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *ist kompakt.* $\Longleftrightarrow$ *Jede Folge aus* K *besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in* K.

Beweis.

"$\Longrightarrow$": Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in K$ für alle n. Da K beschränkt ist, ist die Folge beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Da K abgeschlossen ist, gilt $x \in K$.

"$\Longleftarrow$": K ist abgeschlossen: Sei $x_n \in K$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Nach Voraussetzung existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^* \in K$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $x = x^*$. Somit ist $x \in K$ und K abgeschlossen.

Angenommen K ist nicht beschränkt, oBdA nach oben unbeschränkt. Dann existiert eine Folge $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{k\to\infty} x_n = \infty$. Für jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$. Insbesondere besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Dies ist ein Widerspruch. Also ist K beschränkt und somit kompakt.

$\blacksquare$

Satz 4.27 *Sei $f : K \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ stetig. Falls K kompakt ist, ist auch*

$$f(K) = \{f(x) : x \in K\} = \textit{Bild von } K \textit{ unter } f$$

kompakt. D.h. stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt. Insbesondere ist $f([a,b])$ für stetiges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kompakt und besitzt somit Minimum und Maximum.

Beweis. Wir wenden Satz 4.26 an.
Zu zeigen: Jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(K)$ besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $f(K)$.
Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(K)$. Dann

$$\exists x_n \in K \quad \text{sodass} \quad f(x_n) = y_n$$

Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x \in K$. Es folgt

$$\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x) \in f(K)$$

Beim letzten Gleichheitszeichen haben wir die Stetigkeit von f verwendet. $\blacksquare$

Satz 4.28 (Satz von Maximum und Minimum) *Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ nimmt auf K ihr Maximum und Minimum an. D.h. es existieren $\underline{x}, \overline{x} \in K$ sodass*

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x}) \quad \forall x \in K$$

Man schreibt:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \mathrm{argmin}_{x\in K} f(x), \quad f(\underline{x}) = \min_{x\in K} f(x), \\ \overline{x} &= \mathrm{argmax}_{x\in K} f(x), \quad f(\overline{x}) = \max_{x\in K} f(x). \end{aligned}$$

Beachte: $\underline{x}$ und $\overline{x}$ müssen nicht eindeutig sein. Z.B. nimmt $f(x) = \text{const}$ in jedem Punkt Minimum und Maximum an.

Beweis von Satz 4.28. Da f stetig ist und K kompakt, ist $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Nach Lemma 4.25 besitzt $f(K)$ Minimum und Maximum. D.h. es existieren $\underline{x}, \overline{x} \in K$ mit

$$f(\underline{x}) = \min_{x\in K} f(x), \quad f(\overline{x}) = \max_{x\in K} f(x).$$

$\blacksquare$

5 Wichtige Funktionen

5.1 Umkehrfunktion

Definition 5.1 *$f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to B \subseteq \mathbb{R}^q$ heißt* bijektiv*, falls für alle $y \in B$ genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert. Die Funktion*

$$f^{-1} : B \to D, y \mapsto x$$

heißt Umkehrfunktion *von f.*

Beispiel 5.2 *$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv. Wir bestimmen die Umkehrabbildung:*

$$x^2 = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), y \mapsto \sqrt{y}$$

Beachte:

- *$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ ist nicht bijektiv, da z.B. $f(-1) = 1 = f(1)$*
- *$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht bijektiv, da es z.B. kein $x \geq 0$ mit $f(x) = x^2 = -1$ gibt.*

Satz 5.3 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist $f : I \to f(I)$ bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend. Es gilt:*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I, \tag{5.1}$$
$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in f(I). \tag{5.2}$$

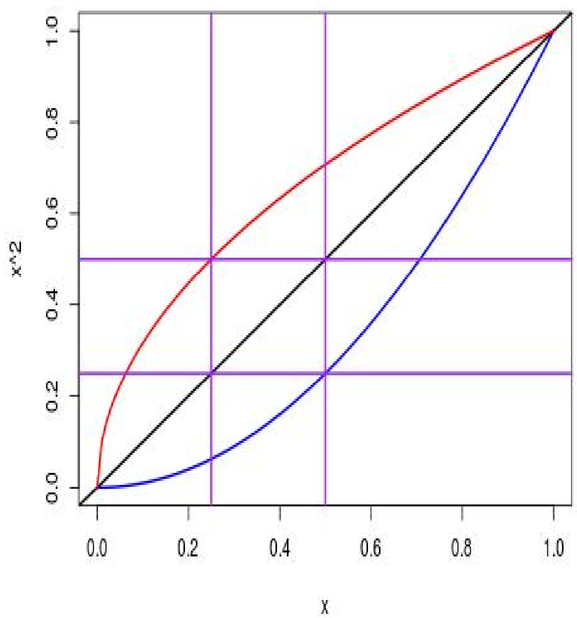
Beispiel 5.4 *Betrachte die Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto x^2$. Die Inverse ist gegeben durch*

$$f^{-1} : [0, 1] \to [0, 1], \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Es gilt:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Einsetzen liefert (5.1) und (5.2).



5.2 Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist stetig und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion heißt *natürlicher Logarithmus*:

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \quad \forall x \in (0, \infty) \\ \ln e^x &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Satz 5.5 (Rechenregeln für $\ln$**)** *(a)* $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ Vorl.11

(b) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ *für alle* $x, y > 0$

(c) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ *für alle* $x, y > 0$

(d) $\ln(x^k) = k \ln x$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$, $x > 0$

Beweis. Nach Definition der Umkehrfunktion gilt für alle $y > 0$:

$$\ln y = x \iff y = e^x \tag{5.3}$$

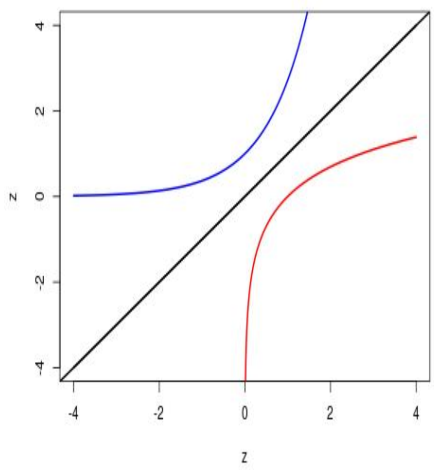


Figure 4: Die Exponentialfunktion ist in blau, die Logarithmusfunktion in rot dargestellt.

(a) Anwendung von (5.3) liefert: $e^0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln 1 = 0$
$e^1 = e \quad \Longrightarrow \quad \ln e = 1$

(b) Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gibt für alle $x, y > 0$

$$e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} e^{\ln y} = xy.$$

Mit (5.3) folgt (b).

(c) Mit Hilfe von (a) und (b) erhalten wir

$$0 = \ln 1 = \ln\left(\frac{y}{y}\right) = \ln y + \ln\left(\frac{1}{y}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y. \tag{5.4}$$

Damit folgt

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y.$$

(d) Fall $k \in \mathbb{N}_0$: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion über k.

- $k = 0$: $\ln(x^0) = \ln 1 = 0 = 0 \ln x$
- $k \to k+1$: Sei die Behauptung richtig für k. Dann folgt

$$\ln(x^{k+1}) = \ln(x \cdot x^k) = \ln x + \ln(x^k) = \ln x + k \ln x = (k+1) \ln x$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Induktionsvoraussetzung verwendet.

Damit folgt die Behauptung für $k \in \mathbb{N}_0$.
Fall $k \in -\mathbb{N}$: Dann ist $-k \in \mathbb{N}$ und wir können die Behauptung für $-k$ beim zweiten Gleichheitszeichen verwenden:

$$\ln(x^k) = -\ln(x^{-k}) = -(-k)\ln x = k \ln x.$$

Die erste Gleichung folgt aus (5.4).

■

Asymptotisches Verhalten von $\exp$ **und** $\ln$**.**

Satz 5.6 (Wachstum der Exponentialfunktion)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

Allgemeiner gilt für alle $m \in \mathbb{N}$*:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$$

Die Exponentialfunktion wächst schneller gegen unendlich als jedes Polynom.

Beweis. Für alle $x > 0$ gilt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2} \to \infty$$

für $x \to \infty$. Für $m \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt entsprechend:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \quad \Longrightarrow \quad \frac{e^x}{x^m} \geq \frac{x}{(m+1)!} \to \infty$$

für $x \to \infty$. ■

Satz 5.7

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\ln(e^n) = n \ln e = n \to \infty$$

für $n \to \infty$. Da $x \mapsto \ln x$ monoton wächst, folgt die Behauptung. ■

Satz 5.8 (Wachstum der Logarithmusfunktion)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$$

Allgemeiner gilt für alle $m \in \mathbb{N}$*:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^m} = \infty$$

x wächst schneller gegen unendlich als jede Potenz des Logarithmus.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$. Es seien $x_n > 0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Setze $y_n = \ln x_n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Wir erhalten

$$\frac{x_n}{(\ln x_n)^m} = \frac{e^{\ln x_n}}{(\ln x_n)^m} = \frac{e^{y_n}}{(y_n)^m} \to \infty$$

für $n \to \infty$ nach Satz 5.6. ■

Satz 5.9

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln \ln x} = \infty$$

Dabei schreiben wir $\ln \ln x$ *für* $\ln(\ln x)$.

Beweis. Es seien $x_n > 0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Setze $y_n = \ln x_n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Wir erhalten

$$\frac{\ln x_n}{\ln \ln x_n} = \frac{y_n}{\ln y_n} \to \infty$$

für $n \to \infty$ nach Satz 5.8. ■

Satz 5.10 *Für $a > b > 0$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n} = \infty$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{e^{\ln a^n}}{e^{\ln b^n}} = \frac{e^{n \ln a}}{e^{n \ln b}} = e^{n(\ln a - \ln b)} = \infty$$

für $n \to \infty$, da $\ln a - \ln b > 0$. ■

Allgemeine Potenzfunktion.

Definition 5.11 *Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir*

$$x^a := e^{a \ln x}.$$

Spezialfälle:

- $x^n = e^{n \ln x} = \underbrace{e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} \cdots e^{\ln x}}_{n\text{-mal}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\text{-mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, denn
$$(x^{1/n})^n = (e^{\frac{1}{n} \ln x})^n = e^{\ln x} = x.$$

Lemma 5.12 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $x^{a+b} = x^a x^b$.*

Beweis. Wir berechnen

$$x^{a+b} = e^{(a+b)\ln x} = e^{a\ln x + b\ln x} = e^{a\ln x}e^{b\ln x} = x^a x^b.$$

■

Betrachte für $b > 1$ die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = b^x = e^{x\ln b}.$$

Wegen $b > 1$ ist $\ln b > \ln 1 = 0$ und somit f streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion von f heißt *Logarithmus zur Basis* b und wird mit $\log_b$ bezeichnet.

Lemma 5.13 *Für alle $b > 1$ gilt*

$$\log_b(b^x) = \frac{\ln(b^x)}{\ln b}.$$

Allgemein gilt für alle $b > 1$ und $a > 0$

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln b}.$$

Beweis. Beim vorletzten Gleichheitszeichen verwenden wir die Definition von $\log_b$:

$$\log_b(a) = \frac{\log_b(a)\ln b}{\ln b} = \frac{\ln(e^{\log_b(a)\ln b})}{\ln b} = \frac{\ln(b^{\log_b(a)})}{\ln b} = \frac{\ln(a)}{\ln b}.$$

■

5.3 Trigonometrische Funktionen

Zur Erinnerung: Die Menge der komplexen Zahlen ist gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Wir setzen $i = (0, 1)$. Damit lässt sich jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ darstellen als $z = x + iy$. Die *komplexe Konjugation* ist gegeben durch

$$\overline{x + iy} := x - iy.$$

Es gilt:

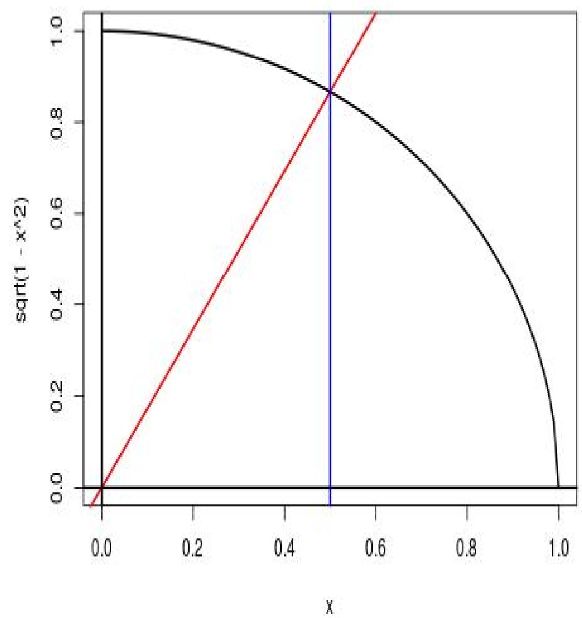
$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \quad \overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}.$$

Der Betrag ist gegeben durch

$$|x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Komplexe Zahlen vom Betrag 1 sind von der Form e^{ix}, $x \in \mathbb{R}$. Die *Eulersche Formel* besagt

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Lemma 5.14 *Die Eulersche Formel ist äquivalent zu*

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir verwenden dies als Definition von Sinus und Kosinus.

Beweis. Beachte dazu

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \forall x$$

Damit folgt

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x.$$

■

Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$(1,0) = (\cos 0, \sin 0), \quad e^{ix} = (\cos x, \sin x) = (\cos(x+2\pi), \sin(x+2\pi)) = e^{ix+2\pi i}$$

Es gilt:

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{ix})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{k!} = e^{-ix}.$$

Damit folgt

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = 1.$$

Die Eulersche Formel ist nützlich, um trigonometrische Formeln herzuleiten.

Beispiel 5.15 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$. Mit Hilfe der Eulerschen Formel können wir dies wie folgt umschreiben:*

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i\sin(x+y) &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y) \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteile müssen auf beiden Seiten übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\ \sin(x+y) &= \cos x\sin y + \sin x\cos y \end{aligned}$$

Definition 5.16 *Tangens:* Vorl.12

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Kotangens:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Weil die Exponentialfunktion stetig ist, sind auch sin, cos, tan und cot auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Satz 5.17 (Reihendarstellung von cos **und** sin**)** *Kosinus und Sinus besitzen die folgenden Reihendarstellungen*

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \Rightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \Rightarrow \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Reihen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Beweis. Wir wissen

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(ix)^k}{k!} + \frac{(-ix)^k}{k!}\right).$$

Dabei ist

$$(ix)^k + (-ix)^k = (ix)^k(1 + (-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 2(ix)^k & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit folgt:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Analog bestimmen wir die Reihendarstellung für Sinus:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(ix)^k}{k!} - \frac{(-ix)^k}{k!}\right).$$

Dabei ist

$$(ix)^k - (-ix)^k = (ix)^k(1-(-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 2(ix)^k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit folgt:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

■

Definition 5.18 *Wir schreiben*

$$\lim_{y\to x} f(y) = a,$$

falls $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = a$ *für alle Folgen* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ *gilt.*

Lemma 5.19

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1.$$

Beweis. Wir verwenden die Reihendarstellung von $\sin x$. Für $x \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{x^{2j+2}}{(2j+3)!} = 1 + c(x)x^2\end{aligned}$$

mit

$$c(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{x^{2j}}{(2j+3)!};$$

dabei haben wir den Summationsindex mit $k = j+1$ geändert. Wir schätzen $c(x)$ ab. Für $j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\left|(-1)^{j+1}\frac{x^{2j}}{(2j+3)!}\right| \leq \frac{x^{2j}}{j!}.$$

Damit folgt

$$|c(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| (-1)^{j+1} \frac{x^{2j}}{(2j+3)!} \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x^2)^j}{j!} = e^{x^2}.$$

Wir interessieren uns für den Grenzwert $x \to 0$. Daher genügt es x mit $|x| \leq 1$ zu betrachten. Es gilt:

$$\sup_{x:|x|\leq 1} |c(x)| \leq \sup_{x:|x|\leq 1} e^{x^2} \leq e^1 = e.$$

Wegen

$$0 \leq |c(x)x^2| \leq ex^2 \quad \forall x \text{ mit } |x| \leq 1$$

folgt $\lim_{x\to 0} c(x)x^2 = 0$. Damit ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + c(x)x^2) = 1.$$

Die Behauptung für den zweiten Grenzwert folgt analog. ■

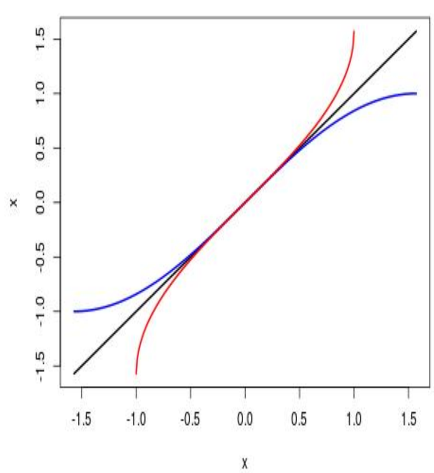
Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Die Funktion

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

ist stetig und streng monoton wachsend mit Bild $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion *Arkussinus*

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ist stetig und streng monoton wachsend. Wir erhalten den Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

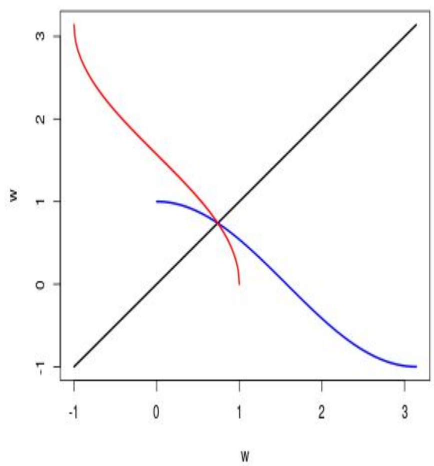


$$\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$$

ist stetig und streng monoton fallend mit Bild $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion *Arkuskosinus*

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

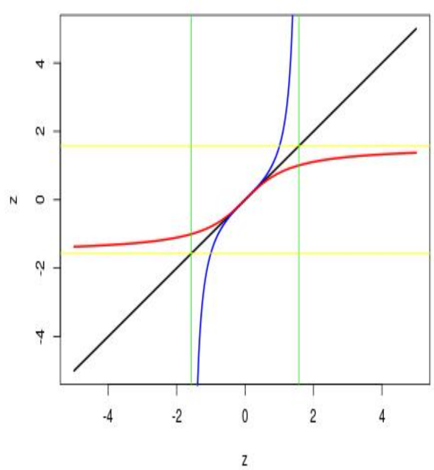
ist stetig und streng monoton fallend.



$$\tan = \frac{\sin}{\cos} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

ist stetig und streng monoton wachsend mit Bild $\mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion heißt *Arkustangens*

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



6 Differenzierbarkeit

6.1 Landau-Symbole

Definition 6.1 (Landau-Symbole) *Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}^d$.*

(a) $f(x) = O(g(x))$ *für* $x \to x_0$, *falls*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \text{sodass} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|x - x_0\| < \varepsilon \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

Man sagt: f ist bis auf eine Konstante asymptotisch durch g beschränkt.

(b) $f(x) = o(g(x))$ *für* $x \to x_0$, *falls*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Man sagt: f ist gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar.

Beispiel 6.2 *Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

- $f(x) = O(1)$ *für* $x \to x_0$ *bedeutet*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \text{sodass} \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad |f(x)| \leq C$$

  D.h. f ist in einer Umgebung von x_0 beschränkt.

- $f(x) = o(1)$ *für* $x \to x_0$ *bedeutet*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0.$$

  Insbesondere folgt, dass f in einer Umgebung von x_0 beschränkt ist. Damit folgt $f(x) = O(1)$ für $x \to x_0$.

- $f(h) = o(h)$ *für* $h \to 0$ *bedeutet* $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. *Damit folgt*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{sodass} \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } |h| < \varepsilon \quad \left|\frac{f(h)}{h}\right| \leq 1$$
$$\implies \quad |f(h)| \leq |h| \to 0$$

  für $h \to 0$. Mit der Einschließungsregel folgt $\lim_{h \to 0} f(h) = 0$. Damit folgt

$$f(h) = o(1) \quad \text{für } h \to 0.$$

  Beachte: $\sqrt{h} = o(1)$ für $h \to 0$, aber $\sqrt{h} \neq o(h)$ für $h \to 0$, denn

$$\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to \infty$$

  für $h \to 0$.

Beispiel 6.3 *Betrachte*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^7 + 2x^3 - x^2.$$

Wir suchen eine möglichst präzise und einfache aymptotische Beschreibung von f für $x \to 0$.
Heuristik: Für kleine $|x|$ sind x^7 und x^3 gegenüber x^2 asymptotisch vernachlässigbar.

$$\Longrightarrow \quad f(x) \approx -x^2 \quad \textit{für } x \to 0.$$

Mathematisch präzise gilt: $f(x) = O(x^2)$ für $x \to 0$. Denn für x mit $|x| \leq 1$ gilt:

$$|f(x)| \leq 5|x|^7 + 2|x|^3 + x^2 \leq 5x^2 + 2x^2 + x^2 = 8x^2$$

Bemerkung 6.4

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = c \quad \Longrightarrow \quad f(x) = O(g(x)) \textit{ für } x \to x_0.$$

Beweis. Wenn $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = c$, folgt in einer Umgebung von x_0:

$$\left| \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| - c \right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad c - 1 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq c + 1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \leq (c+1)|g(x)|$$

Das bedeutet $f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$. ∎

Definition 6.5 *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(a) $f(x) = O(g(x))$ *für* $x \to -\infty$, *falls*

$$\exists M > 0 \quad \exists C > 0 \quad \textit{sodass} \quad \forall x \in \mathbb{R} \textit{ mit } x < -M \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

$f(x) = O(g(x))$ *für* $x \to \infty$, *falls*

$$\exists M > 0 \quad \exists C > 0 \quad \textit{sodass} \quad \forall x \in \mathbb{R} \textit{ mit } x > M \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

(b) $f(x) = o(g(x))$ *für* $x \to x_0 \in \{-\infty, \infty\}$, *falls*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Beispiel 6.6 *Betrachte* Vorl.13

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^7 + 2x^3 - x^2.$$

Wir suchen eine möglichst präzise und einfache aymptotische Beschreibung von f für $x \to \infty$.
Heuristik: Für große x sind x^2 und x^3 gegenüber x^7 asymptotisch vernachlässigbar.

$$\Longrightarrow \quad f(x) \approx 5x^7 \quad \textit{für } x \to \infty.$$

Mathematisch präzise gilt: $f(x) = O(x^7)$ für $x \to \infty$. Denn für $x \geq 1$ gilt:

$$|f(x)| \leq 5x^7 + 2x^3 + x^2 \leq 5x^7 + 2x^7 + x^7 = 8x^7$$

6.2 Differenzierbarkeit

Wir wollen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal an einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ durch eine Gerade approximieren, die das Änderungsverhalten von f in der Nähe von x_0 beschreibt.

Definition 6.7 *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt* differenzierbar *in $x_0 \in I$, falls für eine Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ die Linearisierung*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \textit{für } x \to x_0 \tag{6.1}$$

gültig ist. Die approximierende Gerade

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

heißt Tangente *von f in x_0. Ihre Steigung $f'(x_0)$ heißt* Ableitung *von f in x_0.*

Lemma 6.8 *Für $x \to x_0$ approximiert die Tangente die Funktion f besser als jede andere Gerade.*

Beweis. Es gelte (6.1). Eine Gerade lässt sich schreiben als $x \mapsto a(x - x_0) + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_0) + b + f(x_0) - b + (f'(x_0) - a)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \\ &= a(x - x_0) + b + r(x, x_0) \end{aligned}$$

mit dem Approximationsfehler

$$r(x, x_0) = f(x_0) - b + (f'(x_0) - a)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Approximationsfehler der Tangente: $o(|x - x_0|)$
Fall $b \neq f(x_0)$: $r(x, x_0) = O(1)$ schlechter als $o(|x - x_0|)$
Fall $b = f(x_0)$ und $a \neq f'(x_0)$: $r(x, x_0) = O(x - x_0)$ schlechter als $o(|x - x_0|)$ ■

Lemma 6.9 *f in x_0 differenzierbar $\Longrightarrow$ f in x_0 stetig*

Beweis. (6.1) liefert

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)) = f(x_0).$$

■

Wir schreiben (6.1) für $x \neq x_0$ um:

$$\begin{aligned} & f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \to x_0 \\ \Longleftrightarrow\quad & f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \to x_0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Setze $x - x_0 = h$. Dann ist $x = x_0 + h$ und (6.1) ist äquivalent zu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

$\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ heißt *Differenzenquotient.*

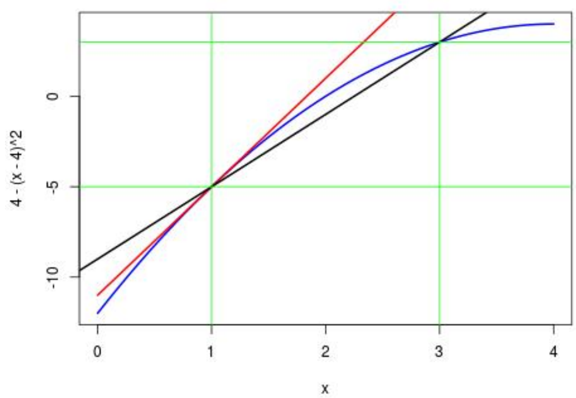
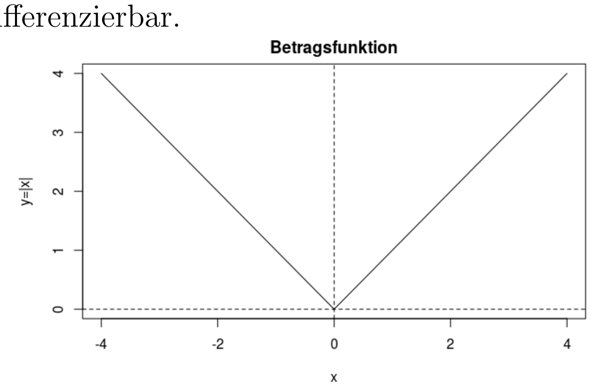


Figure 5: Der Graph von f ist in blau gezeichnet, die Tangente an $x_0 = 1$ in rot. Die schwarze Gerade hat als Steigung den Differenzenquotienten zwischen $x_0 = 1$ und $x_0 + h = 3$.

Achtung: Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar. Z.B. ist $x \mapsto |x|$ in 0 nicht differenzierbar.



Definition 6.10 *Wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist, dann heißt f differenzierbar. Anstelle von $f'(x_0)$ schreibt man auch*

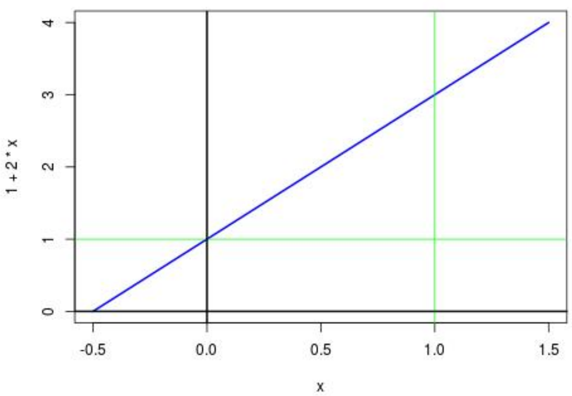
$$\frac{df}{dx}(x_0) \quad \textit{oder} \quad Df(x_0).$$

Beispiel 6.11 *Wir betrachten die Gerade mit Steigung a*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$$

Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0 + h) + b - ax_0 - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a.$$



Beispiel 6.12 *Wir betrachten die Parabel*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0. \end{aligned}$$

Beispiel 6.13 *Wir betrachten die Exponentialfunktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$$

Zunächst analysieren wir das Verhalten bei $x_0 = 0$. *Für alle* $h \neq 0$ *gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{e^h - e^0}{h} = \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{h} \left(1 + h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1 \right) \\ &= 1 + h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!} = 1 + h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j}{(j+2)!} = 1 + hc(h) \end{aligned}$$

mit

$$c(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j}{(j+2)!}.$$

Wir beschränken die letzte Reihe. Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{|h^j|}{(j+2)!} \le \frac{|h^j|}{j!}.$$

Damit ergibt sich folgende Schranke:

$$|c(h)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|h|^j}{j!} = e^{|h|}.$$

Wegen

$$0 \le |hc(h)| \le |h|e^{|h|} \to 0$$

für $h \to 0$ folgt aus der Einschließungsregel $\lim_{h\to 0} hc(h) = 0$. Es folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h\to 0}(1 + hc(h)) = 1 = e^0 \quad \Longrightarrow \quad (\exp)'(0) = 1 = e^0.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - e^0}{h} = e^x. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$(\exp)'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beispiel 6.14 *Wir betrachten die Sinusfunktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x.$$

Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} &= \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}. \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \\ &\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} \frac{\cos h - 1}{\frac{h^2}{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{\frac{h^2}{2}} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$(\sin)'(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Analog zeigt man

$$(\cos)'(x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6.3 Ableitungsregeln

Satz 6.15 (Ableitungsregeln) *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x \in I$ differenzierbar. Dann gilt:*

(a) $(cf)'(x) = cf'(x)$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$

(b) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ Summenregel

(c) $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ Produktregel

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, *falls* $g(x) \neq 0$ Quotientenregel

Beweis der Produktregel. Sei $x \in I$ und $h \neq 0$ mit $|h|$ so klein, dass $x + h \in I$. Wir betrachten den Differenzenquotienten: Vorl.14

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
=&\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
=&f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir verwendet, dass g in x stetig ist, da g in x differenzierbar ist. ■

Lemma 6.16 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ hat die Ableitung*

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis mit vollständiger Induktion. *Induktionsanfang $n = 1$:* Dann ist $f(x) = x$ und $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$.
Induktionsschluss $n \to n+1$: Sei die Behauptung richtig für n. Wir schreiben $f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$ und wenden die Produktregel an. Die Ableitung von x^n kennen wir nach Induktionsannahme.

$$f'(x) = x \cdot nx^{n-1} + 1 \cdot x^n = (n+1)x^n.$$

■

Damit ergibt sich die Ableitung eines Polynoms:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq n$.

Beispiel 6.17

$$f(x) = 4x^{12} - 7x^4 + 3x^3 + 7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 48x^{11} - 28x^3 + 9x^2$$

Lemma 6.18 *Für alle x im Definitionsbereich gilt*

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Beweis. Wir wenden die Quotientenregel auf $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ an und verwenden $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$:

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos x(\sin)'(x) - \sin x(\cos)'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

da $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Andererseits gilt

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

■

Kettenregel.

Definition 6.19 *x_0 heißt innerer Punkt von $A \subseteq \mathbb{R}$, falls*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \textit{sodass} \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$$

Satz 6.20 (Kettenregel) *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ mit $g(E) \subseteq D$. Sei x_0 innerer Punkt von E, $g(x_0)$ innerer Punkt von D. Sei g in x_0 und f in $g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Komposition $f \circ g$ in x_0 differenzierbar mit*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Beweis. Für $x \neq x_0$ mit $g(x) \neq g(x_0)$ gilt:

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\to f'(g(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

für $x \to x_0$. Dabei haben wir verwendet, dass

$$g \text{ in } x_0 \text{ differenzierbar} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ stetig in } x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Für $x \neq x_0$ mit $g(x) = g(x_0)$ gilt:

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = 0 = f'(g(x_0)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(g(x_0))g'(x_0).$$

■

Beispiel 6.21 *Für $a > 0$ betrachten wir die Funktion*

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x = e^{x \ln a}.$$

f ist die Komposition von $\exp$ *und $x \mapsto x \ln a$. Für $h(x) = e^x$, $g(x) = x \ln a$ ist $f(x) = h(g(x))$. Anwenden der Kettenregel liefert*

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x).$$

Wegen $h'(x) = e^x$, $g'(x) = \ln a$ folgt

$$f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Satz 6.22 *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : I \to J$, $y \mapsto f(y)$ bijektiv und differenzierbar in y_0 mit $f'(y_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$, $x \mapsto f^{-1}(x)$ in $x_0 = f(y_0)$ differenzierbar mit*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Beweis. Für alle $y \in I$ gilt: $f^{-1}(f(y)) = y$. Wenn wir wissen, dass f^{-1} in $f(y_0)$ differenzierbar ist, folgt aus der Kettenregel:

$$(f^{-1})'(f(y_0))f'(y_0) = 1.$$

Wegen $f(y_0) = x_0$ und $f'(y_0) \neq 0$ folgt

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

■

Beispiel 6.23 *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist bijektiv und überall differenzierbar mit* $(\exp)' = \exp \neq 0$. *Daher ist die Umkehrfunktion* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit*

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$$

Lemma 6.24 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Beweis. Es genügt die logarithmierte Gleichung zu zeigen. Da die Logarithmusfunktion stetig ist, folgt

$$\begin{aligned}\ln\left(\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n \to \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n \to \infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} x \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln 1}{\frac{x}{n}} = x(\ln)'(1) = x = \ln e^x.\end{aligned}$$

Im letzten Grenzwert haben wir einen Differenzenquotienten von ln an der Stelle 1. ■

Lemma 6.25 *Sei $a \neq 0$. Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ besitzt die Ableitung*

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

Beweis. Es ist $f(x) = e^{a \ln x}$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = (\exp)'(a \ln x) \frac{d}{dx}(a \ln x) = e^{a \ln x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

■

Spezialfälle.

- $a = 1/2$: Dann ist $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ und

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0.$$

- $a = -n$ mit $n \in \mathbb{N}$: Dann ist

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

  Speziell gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}.$$

Lemma 6.26 *Für alle $x \in (-1, 1)$ gilt*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Beweis. Es gilt

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Aus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ folgt $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Damit folgt

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

■

Lemma 6.27 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Beweis. Mit $(\tan)' = 1 + \tan^2$ folgt

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{(\tan)'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

■

7 Anwendungen der Ableitung

7.1 Extrema

Definition 7.1 • *Die Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *hat bei* $x_0 \in [a, b]$ *ein* globales Maximum*, falls* $f(x_0) \geq f(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$.

- f *hat bei* $x_0 \in [a, b]$ *ein* globales Minimum*, falls* $f(x_0) \leq f(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$.
- f *hat bei* $x_0 \in [a, b]$ *ein* lokales Maximum*, falls ein* $\varepsilon > 0$ *existiert, sodass* $f(x_0) \geq f(x)$ *für alle* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [a, b]$.
- f *hat bei* $x_0 \in [a, b]$ *ein* lokales Minimum*, falls ein* $\varepsilon > 0$ *existiert, sodass* $f(x_0) \leq f(x)$ *für alle* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [a, b]$.

Maxima und Minima heißen Extrema*. Wenn* $>$ *statt* $\geq$ *bzw.* $<$ *statt* $\leq$ *gilt, spricht man von* strikten *Maxima und Minima.*

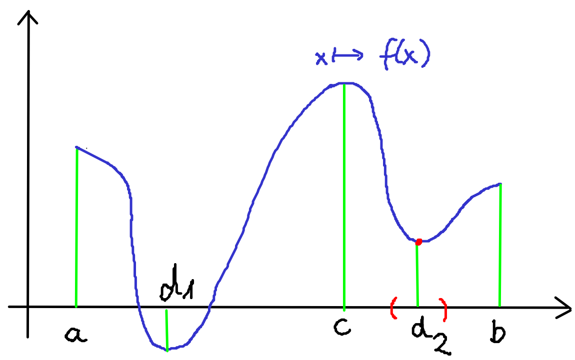
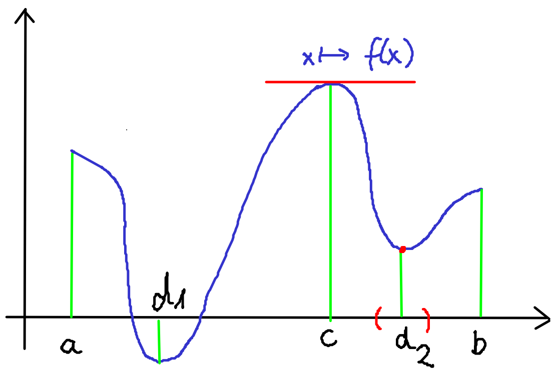


Figure 6: f hat in c ein globales Maximum, in d_1 ein globales Minimum. f hat lokale Maxima bei a, b und c und lokale Minima bei d_1 und d_2. Alle Extrema sind strikt.

Lemma 7.2 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *differenzierbar auf* (a, b)*. Wenn* f *in* $x_0 \in (a, b)$ *ein* Vorl.15
lokales Extremum besitzt, dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Lemma 7.2 gibt eine *notwendige Bedingung für lokale Extrema.*



Beweis von Lemma 7.2. Angenommen, f besitzt in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum. Dann

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Wir schreiben die Punkte $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ als $x_0 + h$ mit $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann folgt

$$\forall h \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$

Division durch h liefert

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \forall 0 < h < \varepsilon \\ \geq 0 & \forall -\varepsilon < h < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \begin{cases} \leq 0 & \forall h_n > 0 \text{ mit } \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \\ \geq 0 & \forall h_n < 0 \text{ mit } \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \end{cases}$$

Damit ist die Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

gleichzeitig ≤ 0 und ≥ 0. Damit folgt $f'(x_0) = 0$. ■

Beachte: Für $x_0 = a$ und $x_0 = b$ kann $f(x_0)$ ein lokales oder globales Extremum sein und gleichzeitig kann für die einseitige Ableitung in x_0 gelten: $f'(x_0) \neq 0$. Z.B. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Es gilt

$$f'(x) = 2x \neq 0 \quad \text{für } x \in \{-1, 1\}.$$

Vorgehensweise zur Bestimmung der Extrema einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(a) Nullstellen von f' in (a, b) bestimmen.

(b) Diejenigen Nullstellen aus (a) aussortieren, zu denen kein lokales Extremum gehört.

(c) Besitzt f in a bzw. b ein lokales Maximum oder Minimum?

(d) Das größte lokale Maximum ist das globale Maximum, das kleinste lokale Minimum ist das globale Minimum.

Beispiel 7.3 *Betrachte* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$. *Die Ableitung ist gegeben durch* $f'(x) = 3x^2$. *Es gilt*

$$f'(x) = 0 \quad \iff \quad x = 0$$

Wegen

$$f(x) < 0 = f(0) \quad \forall x < 0 \quad \textit{und} \quad f(x) > 0 = f(0) \quad \forall x > 0$$

hat f *in* 0 *kein lokales Extremum. Wegen*

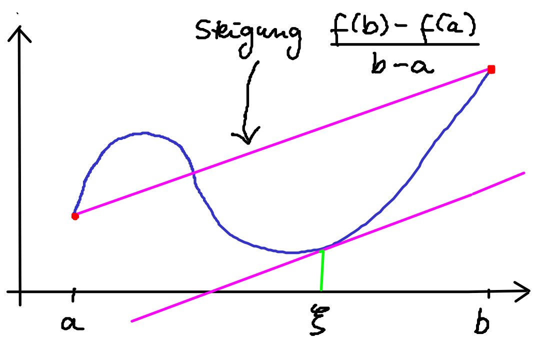
$$f(-1) = -1 \leq f(x) \quad \forall x \in [-1, 1] \quad \textit{und} \quad f(1) = 1 \geq f(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

hat f *in* -1 *ein lokales und globales Minimum und in 1 ein lokales und globales Maximum.*

7.2 Mittelwertsatz

Satz 7.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b). *Dann gibt es ein* $\xi \in (a, b)$ *mit*

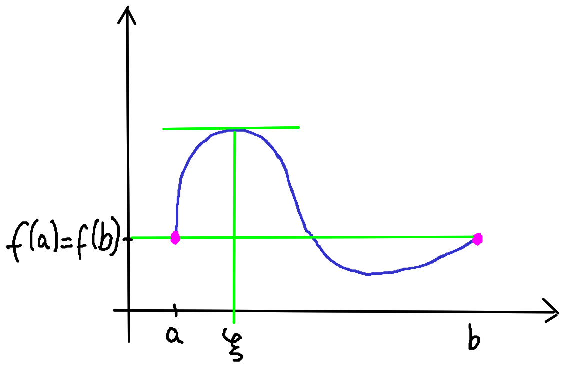
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Korollar 7.5 (Satz von Rolle) *Wenn zusätzlich* $f(a) = f(b)$, *dann gibt es ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Falls f auf $[a, b]$ konstant ist, gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$.

Sei f nicht konstant. Als stetige Funktion nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an. Da f nicht konstant ist, sind Minimum und Maximum verschieden. Wegen $f(a) = f(b)$ wird Minimum oder Maximum im offenen Intervall (a, b) angenommen. Also besitzt f ein lokales Extremum in einem Punkt $\xi \in (a, b)$. Aus Lemma 7.2 folgt $f'(\xi) = 0$. ∎



Satz 7.6 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Angenommen, $g(a) = g(b)$. Nach dem Satz von Rolle existiert $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Also gilt $g(a) \neq g(b)$.

Wir betrachten die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

F ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) mit $F(a) = f(a)$ und $F(b) = f(a)$. Damit ist der Satz von Rolle auf F anwendbar. Somit existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Wegen $g'(\xi) \neq 0$ folgt die Behauptung. ■

Beweis des Mittelwertsatzes. Der Mittelwertsatz folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz für $g(x) = x$, $g'(x) = 1 \neq 0$ für all x. ■

7.3 Monotonie

Definition 7.7 • *Die Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* monoton wachsend, *falls*

$$\forall x, y \in I \text{ mit } x \leq y \quad f(x) \leq f(y)$$

f heißt streng monoton wachsend, *falls*

$$\forall x, y \in I \text{ mit } x < y \quad f(x) < f(y)$$

- f *heißt* monoton fallend*, falls*

$$\forall x, y \in I \text{ mit } x \leq y \quad f(x) \geq f(y)$$

  f *heißt* streng monoton fallend*, falls*

$$\forall x, y \in I \text{ mit } x < y \quad f(x) > f(y)$$

Beispiel 7.8 • *$f(x) = x$ ist streng monoton wachsend.*

- *Konstante Funktionen sind monoton wachsend und monoton fallend.*
- *$f(x) = x^2$ ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend und auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend.*

Satz 7.9 (Monotoniekriterium) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:*

(a) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f$ *auf $[a, b]$ streng monoton wachsend.*

(b) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f$ *auf $[a, b]$ streng monoton fallend.*

(c) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *auf $[a, b]$ monoton wachsend.*

(d) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *auf $[a, b]$ monoton fallend.*

Beachte: In (a) und (b) muss "$\Longleftarrow$" nicht gelten. Betrachte dazu z.B.

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3.$$

Die Funktion ist streng monoton wachsend auf $[-1, 1]$. Es gilt $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. Somit gilt nicht

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Beweis von Satz 7.9. (a) Seien $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) > 0.$$

Da $y - x > 0$ ist, folgt

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(y) > f(x).$$

Also ist f streng monoton wachsend.
"$\Longrightarrow$" in (b), (c) und (d) folgen analog.
(c) "$\Longleftarrow$": Sei f monoton wachsend. Für $x \in (a, b)$ und $h > 0$ klein genug gilt $x+h \in (a, b)$ und

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

■

Beispiel 7.10 *Wir wissen, dass* ln *als Umkehrfunktion der streng monoton wachsenden Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist. Alternativ folgt die strenge Monotonie von* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$ *aus* Vorl.16

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x$$

Lemma 7.11

$$1 + x \le e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{mit Gleichheit genau für } x = 0 \tag{7.1}$$

$$\ln(1 + x) \le x \quad \forall x > -1 \quad \textit{mit Gleichheit genau für } x = 0 \tag{7.2}$$

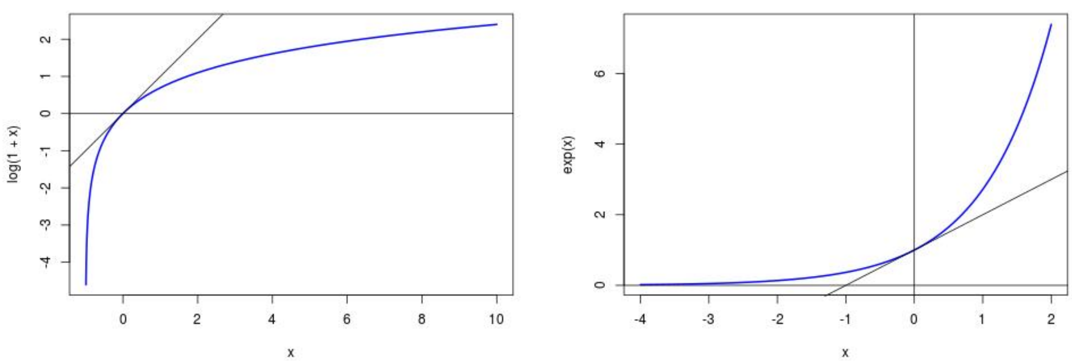


Figure 7: Im linken Bild sind $x \mapsto x$ in schwarz und $x \mapsto \ln(1 + x)$ in blau dargestellt. Im rechten Bild sind neben den Koordinatenaxen die Abbildungen $x \mapsto 1 + x$ in schwarz und $x \mapsto e^x$ in blau gezeigt.

Beweis. Fall $x \ge 0$: (7.1) folgt aus der Reihendarstellung von exp:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ge 1 + x.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \quad \iff \quad x = 0$$

Fall $x < 0$: Für große n folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ge 1 + x.$$

Damit folgt

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ge 1 + x.$$

Um zu untersuchen, wann Gleichheit gilt, betrachten wir die Funktion $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - 1 - x$. Wegen

$$f'(x) = e^x - 1 < 0 \quad \forall x < 0$$

ist f auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend. Es folgt für alle $x < 0$:

$$e^x - 1 - x = f(x) > f(0) = 0 \Longleftrightarrow e^x > 1 + x$$

Damit ist (7.1) gezeigt. Da ln streng monoton wächst folgt aus (7.1)

$$\ln(1 + x) \leq \ln(e^x) = x.$$

Die Einschränkung $x > -1$ brauchen wir für $1 + x > 0$. Gleichheit gilt für die gleichen x wie in (7.1). ■

Satz 7.12 (Hinreichendes Kriterium für Extrema) *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:*

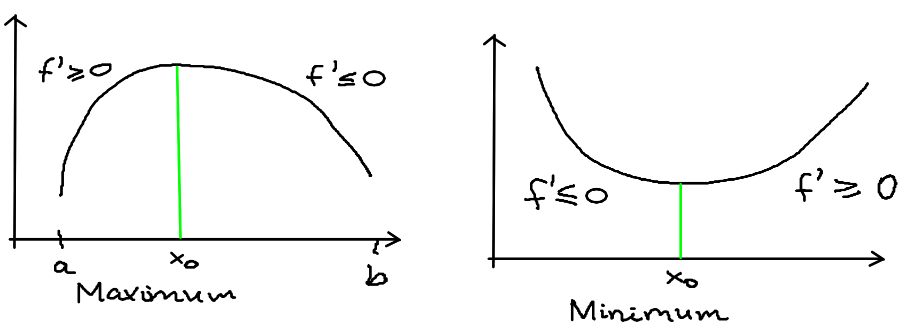
(a) $f' \geq 0$ in (a, x_0) und $f' \leq 0$ in (x_0, b) $\Longrightarrow$ f nimmt sein globales Maximum in x_0 an.

(b) $f' \leq 0$ in (a, x_0) und $f' \geq 0$ in (x_0, b) $\Longrightarrow$ f nimmt sein globales Minimum in x_0 an.

Beweis.

(a) f ist auf $(a, x_0]$ monoton wachsend und auf $[x_0, b)$ monoton fallend.

■



Das Kriterium ist auch für lokale Extrema anwendbar, wenn man f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ anstelle von (a, b) betrachtet.

Satz 7.13 *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt:*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f = const \text{ auf } (a, b).$$

Beweis.

"$\Longleftarrow$" klar.

"$\Longrightarrow$" Seien $x, y \in (a,b)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in (x,y)$ mit

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

Da $x, y \in (a,b)$ beliebig sind, ist f auf (a,b) konstant.

■

Lemma 7.14 *Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g'$ auf (a,b). Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass $f = g + c$ auf (a,b) gilt.*

Beweis. Wegen $0 = f' - g' = (f-g)'$ folgt, dass $f - g$ konstant ist. Daraus folgt die Behauptung. ■

7.4 Berechnung von Grenzwerten

Wir wissen, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Unser Beweis verwendet die Reihendarstellung von $\sin x$. Sowohl Zähler als auch Nenner konvergieren für $x \to 0$ nach 0.

Satz 7.15 (Regel von l'Hospital) *Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Sei $x_0 \in \{a,b\}$ und es gelte*

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ *oder*

(b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Falls

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis von (a) für $x_0 = a \in \mathbb{R}$. Da f, g auf (a,b) differenzierbar sind, sind f, g auf (a,b) stetig. Wegen $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ lassen sich f und g stetig auf $[a,b)$ fortsetzen mit $f(a) = 0 = g(a)$.

Sei $x \in (a,b)$. Die Funktionen f und g sind auf $[a,x]$ stetig, auf (a,x) differenzierbar und es gilt $g'(y) \neq 0$ für alle $y \in (a,x)$. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz liefert: es existiert $\xi \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann existieren $\xi_n \in (a, x_n)$ mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Wegen $a \leq \xi_n \leq x_n \to a$ folgt aus der Einschließungsregel $\lim_{n\to\infty} \xi_n = a$. Damit folgt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Damit folgt die Behauptung. ■

Beispiel 7.16

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Wir haben die Regel von L'Hospital verwendet; beachte $\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$.

Beispiel 7.17

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Beachte: Wir haben zweimal die Regel von L'Hospital angewendet.

- $\lim_{x\to 0}(x - \sin x) = 0$, $\lim_{x\to 0} x \sin x = 0$.
- $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 0$, $\lim_{x\to 0}(\sin x + x \cos x) = 0$.

Beispiel 7.18 *Sei* $\alpha > 0$. *Beachte:* $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$. *Mit der Regel von L'Hospital folgt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Folgerung: Für $n \in \mathbb{N}$ *sei* $x_n = \ln n$. *Es gilt* $\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \infty$. *Es folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln n}{(\ln n)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{(x_n)^\alpha} = 0.$$

7.5 Höhere Ableitungen

Definition 7.19 *Ist* f' *differenzierbar, so bezeichnen wir die Ableitung von* f' *mit* f''. *Ist* f'' *differenzierbar, so bezeichnen wir die Ableitung von* f'' *mit* f'''. *Allgemein spricht man von der* n-ten Ableitung $f^{(n)}$.

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(1)} := f', \quad f^{(2)} := f'', \quad f^{(n+1)} := (f^{(n)})',$$

falls die Ableitung existiert.

Vorsicht: Um $f^{(n+1)}(x)$ definieren zu können, muss $f^{(n)}$ in einer Umgebung $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ von x definiert sein.

Definition 7.20 *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt*

- n-mal differenzierbar *in (a, b), falls $f', f'', \dots, f^{(n)}$ auf (a, b) existieren;*
- n-mal stetig differenzierbar *in (a, b), falls $f', f'', \dots, f^{(n)}$ auf (a, b) existieren und dort stetig sind. Man schreibt $f \in \mathcal{C}^n(a, b)$;*
- unendlich oft differenzierbar *in (a, b), falls $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Man schreibt $f \in \mathcal{C}^\infty(a, b)$.*

Beispiel 7.21 *Sei $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 4$. Es gilt $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit*

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 7, \quad f''(x) = 6x - 4, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 4.$$

Lemma 7.22 *Polynome sind in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sei $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$ ein Polynom vom Grad n. Dann gilt* Vorl.17

$$a_l = \frac{1}{l!} f^{(l)}(0) \quad \forall 0 \leq l \leq n.$$

Beweis. Mit Hilfe der Indexverschiebung $j = k - 1$ berechnen wir

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j$$

Dies ist ein Polynom vom Grad $n - 1$. Für $0 \leq l \leq n$ erhalten wir mit der Indexverschiebung $j = k - l$

$$\begin{aligned} f^{(l)}(x) &= \sum_{k=l}^n k(k-1)\dots(k-(l-1)) a_k x^{k-l} \\ &= \sum_{j=0}^{n-l} (j+l)(j+l-1)\dots(j+1) a_{j+l} x^j. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Das ist ein Polynom vom Grad $n - l$. Für $l \geq n + 1$ gilt

$$f^{(l)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen von $x = 0$ in (7.3) liefert

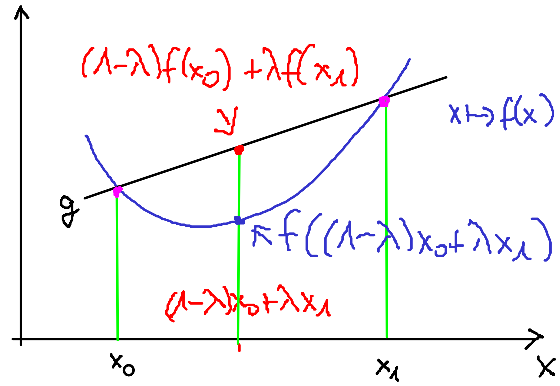
$$f^{(l)}(0) = \text{Koeffizient von } x^0 \text{ in (7.3)} = l! a_l \quad \Longrightarrow \quad a_l = \frac{1}{l!} f^{(l)}(0).$$

■

Beispiel 7.23 $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, *denn*

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

7.6 Krümmungsverhalten



Der Graph von f beschreibt in wachsender x-Richtung eine Linkskurve. Zwischen x_0 und x_1 liegt der Graph von f *unterhalb* der Verbindungslinie g von $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$.

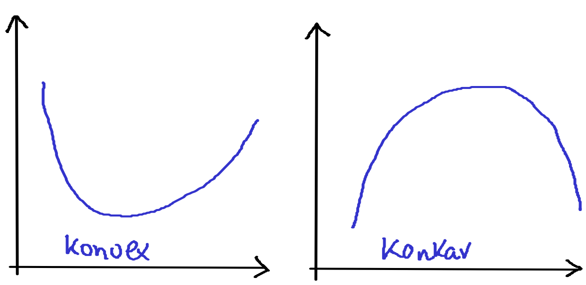
- Die Punkte zwischen x_0 und x_1 werden beschrieben durch $(1-\lambda)x_0+\lambda x_1$, $\lambda \in [0,1]$.
- Die Funktionswerte $g(x)$ für x zwischen x_0 und x_1 werden beschrieben durch

$$(1-\lambda)f(x_0)+\lambda f(x_1), \quad \lambda \in [0,1].$$

Definition 7.24 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* konvex, *falls für alle $x_0, x_1 \in [a,b]$ mit $x_0 \neq x_1$ gilt:*

$$f((1-\lambda)x_0+\lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0)+\lambda f(x_1) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Gilt $<$ anstelle von $\leq$, so heißt f strikt konvex. *Die Funktion f heißt* konkav, *falls $-f$ konvex ist.*



Satz 7.25 *Für zweimal differenzierbares $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gilt:*

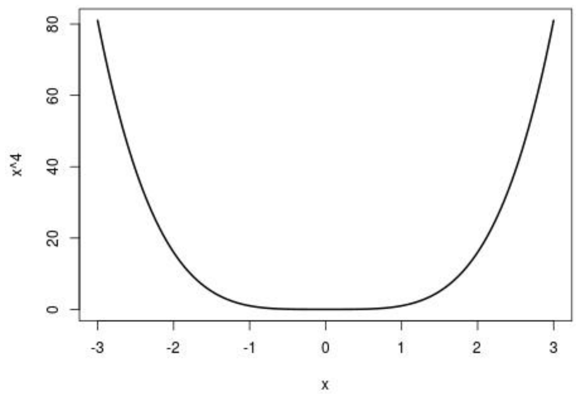
(a) f *konvex* $\iff f'' \geq 0$ *auf* (a,b)
f *strikt konvex* $\Longleftarrow f'' > 0$ *auf* (a,b)

(b) f *konkav* $\Longleftrightarrow f'' \leq 0$ *auf* (a,b)
f *strikt konkav* $\Longleftarrow f'' < 0$ *auf* (a,b)

Beispiel 7.26 *Betrachte* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$. *Es gilt*

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2.$$

Die Funktion f *ist strikt konvex auf* $\mathbb{R}$, *aber* $f''(0) = 0$. *Somit impliziert strikte Konvexität* nicht $f'' > 0$.



Beispiel 7.27 *Betrachte* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. *Es gilt*

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x.$$

Somit ist f *strikt konvex.*

Beispiel 7.28 *Betrachte* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. *Es gilt*

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x.$$

Somit ist exp *strikt konvex.*

Beispiel 7.29 *Betrachte* $f : (0, \infty)$, $x \mapsto \ln x$. *Es gilt*

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x.$$

Somit ist ln *strikt konkav.*

Satz 7.30 *Sei* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und* $f'(x_0) = 0$ *für ein* $x_0 \in (a,b)$. *Dann gilt:*

(a) $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ *besitzt ein striktes lokales Minimum in* x_0.

(b) $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ *besitzt ein striktes lokales Maximum in* x_0*.*

Beweis von (a). Nach Voraussetzung ist f'' stetig und $f''(x_0) > 0$. Daher

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad f''(x) > 0$$

Folglich ist f' streng monoton wachsend auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) > 0 &\quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

Daher ist f streng monoton fallend auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und streng monoton wachsend auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Somit hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum. ■

Bemerkung 7.31 *Falls* $f'(x_0) = 0 = f''(x_0)$*, so kann man keine Aussage über lokale Extrema bei* x_0 *machen.*

Beispiel 7.32

- *Betrachte* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $x \mapsto x^3$*. Es gilt*

  $$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0 = f''(0)$$

  f *hat in* 0 *kein lokales Extremum.*

- *Betrachte* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $x \mapsto x^4$*. Es gilt*

  $$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0 = f''(0)$$

  f *hat in* 0 *ein lokales und globales Minimum. Denn* $f(0) = 0 < f(x)$ *für alle* $x \neq 0$*.*

- *Betrachte* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $x \mapsto -x^4$*. Es gilt*

  $$f'(x) = -4x^3, \quad f''(x) = -12x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0 = f''(0)$$

  f *hat in* 0 *ein lokales und globales Maximum.*

7.7 Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendiskussion möchte man das Verhalten einer Funktion studieren. Wir erläutern dies am Beispiel von

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \frac{1}{x}.$$

- *Randverhalten:*

  $$\lim_{x \to \infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \infty, \quad \lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \infty.$$

- *Differenzierbarkeit:* $f \in \mathcal{C}^\infty(0,\infty)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

- *Extrema:* Notwendige Bedingung für ein Extremum:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

  Beachte: $x = -1$ ist nicht im Definitionsbereich von f.
  Wegen $f''(1) = 2 > 0$ hat f in 1 ein *lokales Minimum.* Wegen der Randwerte ist dies das globale Minimum.
  Wert an der Minimumstelle: $f(1) = 2$.

- *Monotonie:*

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < x < 1 \\ > 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

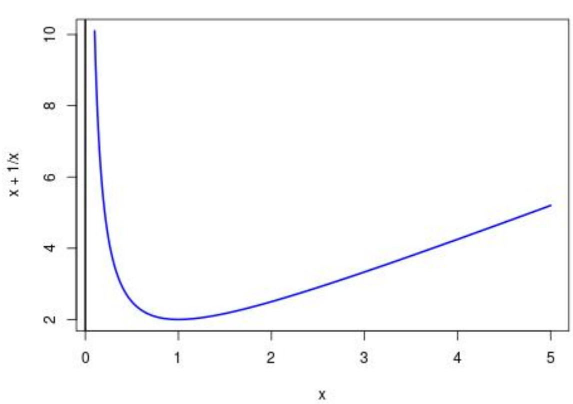
  $\Longrightarrow f$ ist auf $\left\{ \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,\infty) \end{array} \right\}$ streng monoton $\left\{ \begin{array}{c} \text{fallend} \\ \text{wachsend} \end{array} \right\}$.

- *Krümmung:* Wegen

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

  ist f strikt konvex.

- *Graph von f:*



8 Integration

8.1 Definition des Integrals

Problem: Gegeben $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$. Wie groß ist der Flächeninhalt unter dem Graphen von f?

Für die konstante Funktion

$$f(x) = c \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

ist der gesuchte Flächeninhalt $c(b-a)$. Für kompliziertere Funktionen kann man probieren, die Fläche durch Rechtecke zu approximieren. Betrachte eine *Zerlegung* Z von $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die *Feinheit* der Zerlegung ist

$$|Z| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_{j-1}|.$$

Die *äquidistante Zerlegung* ist gegeben durch

$$x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Hier gilt

$$|x_j - x_{j-1}| = \frac{b-a}{n} \quad \forall j \quad \Longrightarrow \quad |Z| = \frac{b-a}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Gegeben eine Zerlegung Z wähle beliebige *Zwischenpunkte* Vorl.18

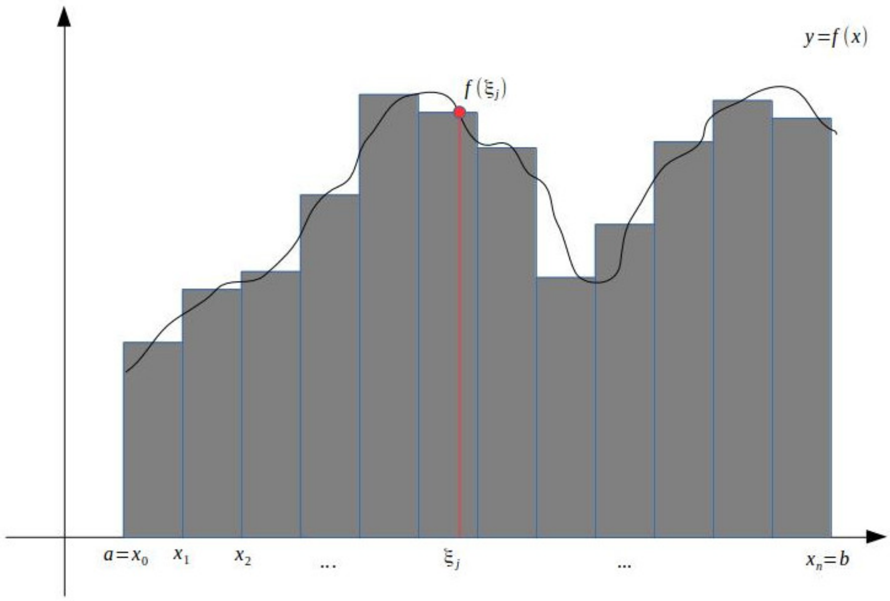
$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j], \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dann heißt

$$S_Z = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Riemann-Summe. S_Z ist die Summe der Rechteckflächen mit Höhe $f(\xi_j)$ über dem Intervall $[x_{j-1}, x_j]$.

Wählt man Zerlegungen Z_n, $n \in \mathbb{N}$, die beliebig fein werden, d.h. $|Z_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, kann man hoffen, im Grenzwert den gesuchten Flächeninhalt zu erhalten.



Definition 8.1 *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* ***(Riemann-)integrierbar****, falls für alle Zerlegungsfolgen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Feinheit $|Z_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ die zugehörigen Riemann-Summen S_{Z_n} für jede Wahl der Zwischenpunkte gegen denselben Grenzwert $I(f)$ konvergieren:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = I(f).$$

$I(f)$ heißt ***bestimmtes Integral*** *von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f heißt* ***Integrand****. Man schreibt:*

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Der Name der *Integrationsvariablen* x ist irrelevant. Man kann auch schreiben

$$I(f) = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Setze

$$\int_a^a f(x)\, dx := 0, \qquad \int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx.$$

8.2 Wichtige Eigenschaften des Integrals

Viel wichtiger als die Definition sind die Rechenregeln für das Integral. Aus der Definition ergeben sich folgende *Eigenschaften des Integrals.*

Satz 8.2 *Für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar gilt:*

(a) Normierung: $\displaystyle\int_a^b 1\,dx = \int_a^b \,dx = b - a.$

(b) Positivität: $f \geq 0$ *auf* $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

(c) Monotonie: $f \geq g$ *auf* $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

(d) Linearität: $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$ *für* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

(e) Zerlegbarkeit: *Für* $a < c < b$ *gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Die Gleichung gilt für beliebige a, b, c, *wenn alle auftretenden Integrale Sinn machen.*

Satz 8.3 *Jede stetige Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Satz 8.4 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar mit* $p \geq 0$. *Dann gibt es ein* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b p(x)\,dx.$$

p *heißt* Gewichtsfunktion.

Beweis. Da f stetig ist, besitzt f auf $[a,b]$ ein Minimum $\underline{m}$ und ein Maximum $\overline{m}$. Wegen $p \geq 0$ gilt

$$\underline{m} \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \overline{m} \int_a^b p(x)\,dx.$$

Folglich existiert $\mu \in [\underline{m}, \overline{m}]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = \mu \int_a^b p(x)\,dx.$$

Da f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit $\mu = f(\xi)$. ■

Anwendung 8.5 *Wähle* $p(x) = 1$ *für alle* x. *Dann existiert* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b 1\,dx = f(\xi)(b-a).$$

8.3 Stammfunktionen

Satz 8.6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ist in jedem $x \in (a,b)$ differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x).$$

In diesem Sinn ist die *Integration die Umkehrung der Differentiation*.

Beweis des Hauptsatzes. Sei $x \in (a,b)$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $x+h \in [a,b]$. Es gilt:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert $\xi_h \in [x, x+h]$ mit

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} f(\xi_h) h = f(\xi_h).$$

Wegen $\xi_h \in [x, x+h]$ folgt $\lim_{h\to 0} \xi_h = x$. Da f stetig ist, folgt

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x).$$

■

Definition 8.7 *Sei $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gilt*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b),$$

so heißt F eine Stammfunktion *von f auf (a,b).*

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besitzt eine stetige Funkion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Stammfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in (a,b)$$

Lemma 8.8 *Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis.

- Ist F eine Stammfunktion von f, so ist für alle $c \in \mathbb{R}$ auch $F+c$ eine Stammfunkion von f, denn
$$(F+c)' = F' + c' = F' = f.$$

- Seien F und G Stammfunktionen von f. Dann gilt:

$$F' = f = G' \quad \text{auf } (a,b)$$

Aus Lemma 7.14 folgt $F = G + c$ auf (a,b).

■

Satz 8.9 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Funktion $G : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion von f. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante. Daher existiert $c \in \mathbb{R}$ sodass

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b].$$

Es folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) = G(b) - G(a) = (F(b)+c) - (F(a)+c) = F(b) - F(a).$$

■

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(x)|_a^b$$

Statt Stammfunktion sagt man auch *unbestimmtes Integral.* Für eine Stammfunktion von f schreibt man auch

$$\int f(x)\,dx$$

ohne Integrationsgrenzen.

Beispiele von Stammfunktionen.

$f(x)$	$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$\int f(x)\,dx$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$

Beachte:

- Für $x > 0$ gilt $\ln|x| = \ln x$ und daher $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
- Für $x < 0$ gilt $\ln|x| = \ln(-x)$ und daher $(\ln|x|)' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Zusammen folgt $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$.

$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\int f(x)\,dx$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$

Beispiel 8.10

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$$

Zunächst machen wir eine Partialbruchzerlegung *des Integranden:* Vorl.19

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right).$$

Damit folgt:

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)\,dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

auf $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Beispiel 8.11

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Beispiel 8.12

$$F(x) = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x+1)}\,dx$$

Wir machen eine Partialbruchzerlegung des Integranden. Dazu suchen wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ *sodass für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ *gilt*

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+1}.$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1 &= a(x-2)(x+1) + b(x-1)(x+1) + c(x-1)(x-2) \\ &= a(x^2-x-2) + b(x^2-1) + c(x^2-3x+2) \\ &= x^2(a+b+c) + x(-a-3c) + (-2a-b+2c) \quad \forall x \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten von x^2 und x Null sind und der konstante Term 1 ist:

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ -a-3c &= 0 \\ -2a-b+2c &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -a-3c &= 0 \\ b-2c &= 0 \\ -b+8c &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -3c \\ b &= 2c \\ 6c &= 1 \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$c = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Es folgt:

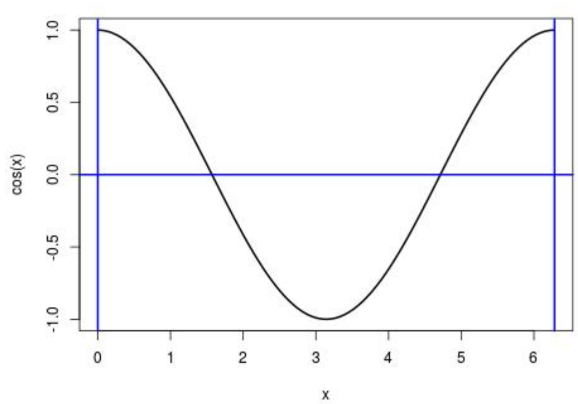
$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{6}\ln|x+1| \end{aligned}$$

Beispiel 8.13

$$\int_0^1 \left(x^7 + 5x^3 + 2\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^8 + \frac{5}{4}x^4 + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{5}{4} + 2 = \frac{1+10+16}{8} = \frac{27}{8}.$$

Beispiel 8.14

$$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin 0 = 0.$$



Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse im Bereich von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ geht negativ in das Integral ein, der restliche Flächeninhalt positiv. Der Flächeninhalt oberhalb der x-Achse ist genauso groß wie der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse.

8.4 Integrationsregeln

Satz 8.15 (Partielle Integration) *Für stetig differenzierbare Funktionen* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Beweis. Nach der Produktregel der Differentiation gilt $(fg)' = fg' + f'g$. Daraus folgt:

$$\int_a^b \left(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\right)\,dx = \int_a^b (fg)'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Beispiel 8.16

$$\int_0^2 xe^x\,dx$$

Wir integrieren partiell mit

$$f(x) = x \qquad g'(x) = e^x$$
$$f'(x) = 1 \qquad g(x) = e^x$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^2 xe^x\,dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1.$$

Beispiel 8.17 *Wir suchen eine Stammfunktion zu* $\ln x$. *Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist eine Stammfunktion gegeben durch*

$$F(x) = \int_1^x \ln t\,dt, \quad x > 0.$$

Wir integrieren partiell mit

$$f(t) = \ln t \qquad g'(t) = 1$$
$$f'(t) = \frac{1}{t} \qquad g(t) = t$$

Damit erhalten wir

$$\int_1^x \ln t\,dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}t\,dt = x\ln x - \ln 1 - (x-1) = x\ln x - x + 1.$$

Folglich ist

$$G(x) = x\ln x - x, \quad x > 0,$$

eine Stammfunktion von $\ln x$. *Wir machen die Probe, indem wir ableiten:*

$$G'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

Beispiel 8.18

$$I := \int_0^\pi \sin^2 x\, dx$$

Wir integrieren partiell mit

$$f(x) = \sin x \qquad\qquad g'(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x \qquad\qquad g(x) = -\cos x$$

Damit erhalten wir

$$I = [-\sin x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x)\, dx = \pi - I$$

Beachte: $\sin 0 = 0 = \sin \pi$. *Damit folgt*

$$2I = \pi \quad \Longleftrightarrow \quad I = \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 8.19

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x\, dx$$

Wir integrieren partiell mit

$$f(x) = \sin x \qquad\qquad g'(x) = e^x$$
$$f'(x) = \cos x \qquad\qquad g(x) = e^x$$

Damit erhalten wir

$$I = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\, dx = -\int_0^\pi e^x \cos x\, dx.$$

Wir integrieren nochmal partiell:

$$f(x) = -\cos x \qquad\qquad g'(x) = e^x$$
$$f'(x) = \sin x \qquad\qquad g(x) = e^x$$

Es folgt:

$$I = [-e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x\, dx = -e^\pi \cos \pi + \cos 0 - I = e^\pi + 1 - I.$$

Damit erhalten wir

$$I = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

Satz 8.20 (Substitutionsregel) *Sei* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar. Dann gilt für jede stetige Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *auf dem Bildintervall* $I := g([a, b]) = \{g(x) : x \in [a, b]\}$

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx.$$

Beweis. Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt Vorl.20

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Wir integrieren beide Seiten von a bis b:

$$J = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_a^b (F \circ g)'(t)\,dt = [(F \circ g)(t)]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Wir können

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(x)\,dx$$

für ein $y_0 \in I$ wählen. Es folgt

$$J = \int_{y_0}^{g(b)} f(x)\,dx - \int_{y_0}^{g(a)} f(x)\,dx = \int_{y_0}^{g(b)} f(x)\,dx + \int_{g(a)}^{y_0} f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

■

Merkregel für die Substitution.

$$x = g(t), \quad dx = g'(t)\,dt$$

Für die Grenzen gilt:

$$t = a \quad \Longrightarrow \quad x = g(a), \qquad t = b \quad \Longrightarrow \quad x = g(b).$$

Lemma 8.21 (Verschiebung) *Sei $f : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx.$$

Falls f periodisch ist mit Periode c, d.h. $f(t) = f(t+c)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx.$$

Beweis. Dies folgt aus der Substitutionsregel mit der *Verschiebung* $x = t + c$, $dx = dt$.
■

Spezialfall: $x \mapsto \sin x$ ist periodisch mit Periode 2π. Damit folgt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$\int_a^b \sin x\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} \sin x\,dx.$$

Lemma 8.22 (Skalierung) *Sei $f : [ac, bc] \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx.$$

Beweis. Wir wenden die Substitutionsregel an mit der *Skalierung* $x = ct$, $dx = cdt$. Es folgt $dt = \frac{1}{c}dx$ und

$$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_a^b f(ct)c\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx.$$

■

Beispiel 8.23 *Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$. Wir berechnen*

$$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt.$$

Die Substitution $x = g(t)$, $dx = g'(t)\,dt$ liefert

$$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{g(a)}^{g(b)} = \ln g(b) - \ln g(a) = \ln \frac{g(b)}{g(a)}.$$

Alternativ kann man gleich raten, dass $\ln g(t)$ eine Stammfunktion von $\frac{g'(t)}{g(t)}$ ist.

Zum Beispiel gilt für $[a,b] \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\int_a^b \tan t\,dt = \int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\int_a^b \frac{(\cos t)'}{\cos t}\,dt = -\ln\frac{\cos b}{\cos a} = \ln\frac{\cos a}{\cos b}.$$

9 Mehr über Integrale

9.1 Uneigentliche Integrale

Definition 9.1 *Ist $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ auf $[a,\beta]$ für alle $a < \beta < b$ integrierbar, dann heißt*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral*, falls der Grenzwert existiert. Dabei ist $b = \infty$ erlaubt. Analog verfährt man bei der unteren Grenze.*

Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ auf $[\alpha,\beta]$ für alle $a < \alpha < \beta < b$ integrierbar, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b}\int_c^\beta f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral*, falls die Grenzwerte für ein $c \in (a,b)$ existieren. Dabei ist $a = -\infty$, $b = \infty$ erlaubt.*

Beispiel 9.2

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Die Funktion hat eine Singularität bei 0. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_{\varepsilon}^{1} = \ln 1 - \ln \varepsilon = -\ln \varepsilon \to \infty$$

as $\varepsilon \to 0$. Es folgt

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

Definition 9.3 *Man schreibt*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = c \quad \textit{oder} \quad \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = c,$$

falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n > x_0$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Man spricht auch vom rechtsseitigen Grenzwert*. Analog definiert man den* linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x).$$

Es gilt:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx$$

Bemerkung 9.4 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$ *ist nicht wohldefiniert. Denn:*

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\, dx = -\infty.$$

"$-\infty + \infty$" ist nicht wohldefiniert.

Beispiel 9.5

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_{1}^{M} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} [\ln x]_{1}^{M} = \lim_{M\to\infty} (\ln M - \ln 1) = \infty.$$

Lemma 9.6

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \textit{falls } \alpha > 1 \quad \textit{(Integral konvergent)} \\ \infty & \textit{falls } \alpha < 1 \quad \textit{(Integral divergent)} \end{cases}$$

Beweis.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_1^M$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}M^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{falls } \alpha > 1, \\ \infty & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

■

Lemma 9.7

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \infty & \textit{falls } \alpha > 1 \quad \textit{(Integral divergent)} \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \textit{falls } \alpha < 1 \quad \textit{(Integral konvergent)} \end{cases}$$

Beweis.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}\right)$$
$$= \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha > 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

■

9.2 Parameterabhängige Integrale

Wir betrachten eine Funktion $f(x,y)$, die von einem Parameter y abhängt. Für festes x schreiben wir für die Ableitung der Funktion $y \mapsto f(x,y)$ (falls diese existiert)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \text{oder} \quad \partial_y f(x,y) \quad \text{oder} \quad \partial_2 f(x,y).$$

Man spricht von der *partiellen Ableitung nach* y.

Satz 9.8 *Sei* $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt:*

(a) *Die Funktion* $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$ *ist stetig.*

(b) Satz von Fubini:

$$\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

D.h. die Integrationsreihenfolge ist beliebig.

(c) Wenn f auf $[a,b]\times[c,d]$ eine stetige partielle Ableitung $\partial_y f$ besitzt, dann ist F stetig differenzierbar mit

$$F'(y) = \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx \quad \forall y \in [c,d]$$

Mit anderen Worten:

$$\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

D.h. Differentiation und Integration dürfen vertauscht werden.

Anwendung: Integralsinus. Für $b > 0$ definieren wir Vorl.21

$$Si(b) := \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Der Integrand hat keine Singularität bei 0, sondern ist stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}$, da

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Frage: Wie verhält sich $Si(b)$ für $b \to \infty$?
Dazu betrachten wir die *Laplacetransformation*:

$$I(b,y) = \int_0^b e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Insbesondere gilt:

$$Si(b) = I(b,0)$$

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f ist stetig. Nach Satz 9.8 ist $y \mapsto I(b,y)$ stetig. Die partielle Ableitung ist gegeben durch

$$\partial_y f(x,y) = -xe^{-xy}\frac{\sin x}{x} = -e^{-xy}\sin x.$$

Man beachte, dass diese Formel auch für $x = 0$ gilt. Die partielle Ableitung ist stetig. Satz 9.8 liefert

$$\partial_y I(b,y) = \int_0^b -e^{-xy}\sin x\,dx.$$

Wir integrieren partiell mit

$$g(x) = -e^{-xy} \qquad\qquad h'(x) = \sin x$$
$$g'(x) = ye^{-xy} \qquad\qquad h(x) = -\cos x$$

und erhalten

$$\partial_y I(b,y) = [e^{-xy}\cos x]_{x=0}^{x=b} + \int_0^b ye^{-xy}\cos x\,dx.$$

Eine weitere partielle Integration mit

$$g(x) = ye^{-xy} \qquad\qquad h'(x) = \cos x$$
$$g'(x) = -y^2e^{-xy} \qquad\qquad h(x) = \sin x$$

liefert

$$\begin{aligned}\partial_y I(b,y) &= [e^{-xy}(\cos x + y\sin x)]_{x=0}^{x=b} + \int_0^b y^2e^{-xy}\sin x\,dx\\ &= e^{-by}(\cos b + y\sin b) - 1 - y^2\partial_y I(b,y).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\partial_y I(b,y) = \frac{1}{1+y^2}(e^{-by}(\cos b + y\sin b) - 1) = g(b,y) - \frac{1}{1+y^2}$$

mit der Funktion

$$g(b,y) = \frac{e^{-by}}{1+y^2}(\cos b + y\sin b).$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx - Si(b) = I(b,y) - I(b,0) &= \int_0^y \partial_2 I(b,t)\,dt = \int_0^y \left(g(b,t) - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt\\ &= \int_0^y g(b,t)\,dt - [\arctan t]_0^y = \int_0^y g(b,t)\,dt - \arctan y\end{aligned}$$

Umformen liefert:

Lemma 9.9

$$Si(b) - \arctan y = \int_0^b e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^y g(b,t)\,dt.$$

Um Informationen über $Si(b)$ zu erhalten, schätzen wir die Integrale ab.

Lemma 9.10 *Für alle* $x > 0$ *gilt* $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1.$

Beweis. Für $x \geq 1$ gilt
$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| \leq 1.$$
Sei $x \in (0,1)$. Wegen $1 < \pi$ ist $\sin x > 0$ und es gilt
$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{\sin x}{x}.$$
Damit bleibt zu zeigen:
$$\sin x \leq x \quad \forall x \in (0,1)$$
Betrachte die Funtion
$$f(x) = x - \sin x.$$
Wir müssen zeigen, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in (0,1)$. Es gilt
$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x$$
Insbesondere ist f monoton wachsend und es gilt
$$f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \in (0,1).$$
■

Lemma 9.11 *Für alle $b, y > 0$ gilt:*
$$\left|\int_0^b e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{1}{y}, \qquad \left|\int_0^y g(b,t)\,dt\right| \leq \frac{1}{b}.$$

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 9.10 erhalten wir
$$\begin{aligned}\left|\int_0^b e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| &\leq \int_0^b e^{-xy}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx \leq \int_0^b e^{-xy}\,dx\\ &= \left[-\frac{1}{y}e^{-xy}\right]_{x=0}^{x=b} = -\frac{1}{y}e^{-by} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y}.\end{aligned}$$
Das zweite Integral ist gegeben durch
$$\left|\int_0^y g(b,t)\,dt\right| \leq \int_0^y \frac{e^{-bt}}{1+t^2}|\cos b + t\sin b|\,dt.$$
Dabei gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung
$$\begin{aligned}|\cos b + t\sin b| &= \left|\left\langle \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}\right\rangle\right| \leq \left\|\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}\right\|\\ &= \sqrt{1+t^2}\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = \sqrt{1+t^2}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\left|\int_0^y g(b,t)\,dt\right| \leq \int_0^y \frac{e^{-bt}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \leq \int_0^y e^{-bt}\,dt \leq \frac{1}{b}.$$

Bei der vorletzten Ungleichung haben wir verwendet, dass $1/\sqrt{1+t^2} \leq 1$. Die Abschätzung des letzten Integrals ist analog zu oben, nur die Rollen von b und y sind vertauscht. ■

Lemma 9.12 *Für $b \to \infty$ gilt*

$$Si(b) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Insbesondere gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} Si(b) = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Wir kombinieren Lemma 9.9 und Lemma 9.11:

$$|Si(b) - \arctan y| = \left|\int_0^b e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^y g(b,t)\,dt\right| \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{b}.$$

Wir bilden den Grenzwert $y \to \infty$. Wegen $\lim_{y\to\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$ folgt

$$\left|Si(b) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{1}{b}.$$

Damit folgt die Behauptung. ■

9.3 Vertauschung von Summation und Integration

Satz 9.13 *Seien $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, integrierbar. Es gebe $a_k \in \mathbb{R}$ mit* Vorl.21

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall k$$

und $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$. Dann konvergiert $f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^\infty f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

D.h. Summation und Integration können vertauscht werden, wenn es eine konvergente Majorante gibt.

Beispiel 9.14 *Für $|t| < 1$ gilt:*

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k$$

Dies ist eine geometrische Reihe. Für $|t| \le |x| < 1$ folgt:

$$|(-t)^k| \le |x|^k \quad \forall k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}|x|^k < \infty.$$

Aus dem vorangehenden Satz folgt:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-t)^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^x t^k\,dt.$$

Wir berechnen

$$\int_0^x t^k\,dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Andererseits wissen wir für $|x| < 1$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x).$$

Damit folgt:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \text{für } |x| < 1. \tag{9.1}$$

Definition 9.15 *Funktionsdarstellungen der Form*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < r,$$

nennt man die Entwicklung *der Funktion f* in eine Potenzreihe. *Die größtmögliche Gültigkeitsschranke $r > 0$ nennt man den* Konvergenzradius *der Potenzreihe.*

Für $x = -1$ ist die linke Seite von (9.1) nicht definiert. Die rechte Seite liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k+1}\frac{1}{k+1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1} = -\infty.$$

Somit folgt $r = 1$.

Lemma 9.16

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \textit{für alle } x \in (-1,1].$$

Beweis. Es bleibt die Behauptung für $x = 1$ zu zeigen. Betrache für $0 < x < 1$

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \quad \text{mit } a_k = \frac{x^{k+1}}{k+1}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Nach Satz 3.13 konvergiert die alternierende Reihe $s(x)$ und es gilt

$$\left| s(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq a_{n+1} = \frac{x^{n+2}}{n+2} \tag{9.2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < x < 1$. Für $x \in (0,1)$ gilt $s(x) = \ln(1+x)$. Da die Logarithmusfunktion stetig ist, folgt

$$\lim_{x\uparrow 1} s(x) = \lim_{x\uparrow 1} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Wir bilden den Grenzwert $x \uparrow 1$ in (9.2):

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2} \quad \forall n$$

Wir bilden den Grenzwert für $n \to \infty$ und erhalten

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1}.$$

Das zeigt die Behauptung für $x = 1$. ■

Ein anderes Beispiel einer Potenzreihe ist die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Der Konvergenzradius ist 1.

Bemerkung 9.17 *Wenn keine konvergente Majorante existiert, muss die Aussage von Satz 9.13 nicht gelten.*

Beweis. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Indikatorfunktion von A. Wir betrachten die Funktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_1 = 1_{(0,1)}, \quad f_k = k 1_{(0,\frac{1}{k})} - (k-1) 1_{(0,\frac{1}{k-1})}, k \geq 2.$$

Insbesondere gilt für alle $k \geq 2$

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -(k-1) & \text{falls } x \in [\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |f_k(x)| \leq k-1 \quad \forall x$$

und diese Schranke kann nicht verbessert werden. Insbesondere gibt es keine konvergente Majorante; die Voraussetzung von Satz 9.13 ist nicht erfüllt.

Wir zeigen, dass die Aussage des Satzes nicht gilt. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx &= \int_0^1 1_{(0,1)}(x)\,dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^1 \left(k 1_{(0,\frac{1}{k})}(x) - (k-1) 1_{(0,\frac{1}{k-1})}(x) \right) dx \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(k \frac{1}{k} - (k-1) \frac{1}{k-1} \right) = 1. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) &= 1_{(0,1)} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(k 1_{(0,\frac{1}{k})}(x) - (k-1) 1_{(0,\frac{1}{k-1})}(x) \right) \\ &= 1_{(0,1)} + \lim_{n\to\infty} \left(n 1_{(0,\frac{1}{n})}(x) - 1_{(0,1)}(x) \right) = \lim_{n\to\infty} n 1_{(0,\frac{1}{n})}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \neq 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

■

9.4 Abschätzungen von Summen und Reihen

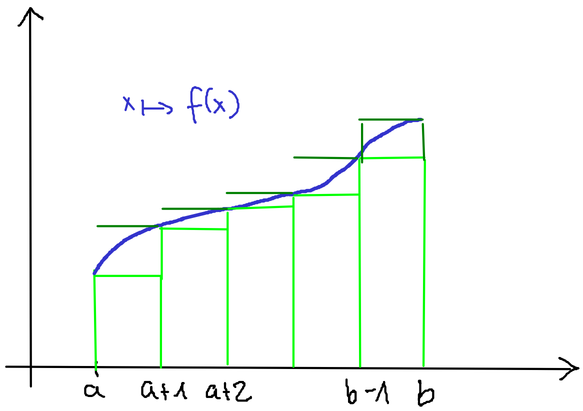
Satz 9.18 *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton. Dann gilt:*

(a) f monoton wachsend

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$$

(b) f monoton fallend

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=a+1}^{b} f(k) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$



Beweis.
Wir zerlegen den Integrationsbereich in Teilintervalle der Länge 1:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx$$

Fall f monoton wachsend: Dann gilt $f(k) \le f(x) \le f(k+1)$ für alle $x \in [k, k+1]$ und es folgt

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\,dx \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = f(k+1).$$

Summation liefert

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \sum_{k=a}^{b-1} f(k+1) = \sum_{j=a+1}^{b} f(j);$$

bei der letzten Summe haben wir einen Indexshift mit $j = k+1$ gemacht.
Fall f monoton fallend: Dann ist $-f$ monoton wachsend. Mit Teil (a) folgt

$$\sum_{k=a}^{b-1} (-f(k)) \le \int_a^b (-f(x))\,dx \le \sum_{k=a+1}^{b} (-f(k)).$$

Multiplikation mit -1 liefert die Behauptung. ■

Beispiel 9.19 *Sei $\alpha > 0$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$. Die Funktion f ist monoton wachsend. Aus Satz 9.18 folgt:*

$$\int_0^n x^\alpha\,dx \le \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \le \int_1^{n+1} x^\alpha\,dx$$

Wir berechnen

$$\int_0^n x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$
$$\int_1^{n+1} x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

Einsetzen liefert

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \le \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \le \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

Es folgt:

$$1 \le \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{n^{\alpha+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{n^{\alpha+1}} \to 1$$

für $n \to \infty$*. Aus der Einschließungsregel folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}} = 1, \qquad \textit{d.h.} \ \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \simeq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ \textit{für}\ n \to \infty.$$

Beispiel 9.20 *Das Sortieren von* n *Elementen benötigt bis zu* $\log_2(n!)$ *Vergleiche. Wie viele sind das für große* n*?* Vorl.22

Es gilt

$$\log_2(n!) = \ln(n!)\log_2(e).$$

Für das asymptotische Verhalten von $\log_2(n!)$ *ist* $\ln(n!)$ *entscheidend;* $\log_2(e)$ *ist eine multiplikative Konstante. Es ist*

$$\ln(n!) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln k.$$

Die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$ *ist monoton wachsend. Satz 9.18 liefert*

$$\int_1^n \ln x \, dx \le \ln(n!) \le \int_2^{n+1} \ln x \, dx \le \int_1^{n+1} \ln x \, dx.$$

Die letzte Abschätzung gilt, weil $\ln x \ge 0$ *für* $x \ge 1$*. Wir berechnen*

$$\int_1^n \ln x \, dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1,$$
$$\int_1^{n+1} \ln x \, dx = [x\ln x - x]_1^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1 = (n+1)\ln(n+1) - n.$$

Damit folgt

$$n\ln n - n + 1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln(n+1) - n. \tag{9.3}$$

Lemma 9.21

$$\ln(n!) \simeq n\ln n \quad \textit{für}\ n \to \infty.$$

Beweis. Wir dividieren die Ungleichung (9.3) durch $n \ln n$:

$$1 - \frac{n}{n \ln n} + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln n} \leq \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{n}{n \ln n}.$$

Dabei gilt für die untere Schranke

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n}{n \ln n} + \frac{1}{n \ln n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 1$$

und für die obere Schranke

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{n}{n \ln n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) = 1.$$

Mit der Einschließungsregel folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n} = 1$$

und damit die Behauptung. ■

Wir können auch eine präzisere Asymptotik angeben:

Lemma 9.22

$$\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n).$$

Beweis. Aus (9.3) folgt

$$1 \leq \ln(n!) - n \ln n + n \leq (n+1)\ln(n+1) - n \ln n.$$

Die obere Schranke ist gegeben durch

$$n(\ln(n+1) - \ln n) + \ln(n+1) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \ln n + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln n + r_n$$

mit

$$r_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Damit folgt die Behauptung. ■

Satz 9.23 (Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen) *Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq f(1). \tag{9.4}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert genau dann, wenn $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ konvergiert.

Beweis. Satz 9.18 mit $a = 1$ und $b = n + 1$ liefert:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) + f(n+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k). \tag{9.5}$$

Damit folgt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1)$$

für alle n. Die letzte Abschätzung folgt aus $f(n+1) \geq 0$.
Fall $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent: Wegen $f \geq 0$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$. Aus (9.5) folgt $\int_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty$.
Fall $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ divergent: Wegen $f \geq 0$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \infty$. Aus (9.5) folgt $\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \infty$. ■

Lemma 9.24 *Für $s > 1$ ist die Riemannsche Zetafunktion*

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

konvergent und es gilt

$$\frac{1}{s-1} - 1 \leq \zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1}.$$

Beweis. Die Funktion $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^s}$ ist monoton fallend. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx &= \lim_{M \to \infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^s}\, dx = \lim_{M \to \infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^M \\ &= \lim_{M \to \infty} \left(\frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right) = \frac{1}{s-1} < \infty\end{aligned}$$

für alle $s > 1$. Nach dem Integralkriterium konvergiert die Reihe $\zeta(s)$ und es gilt die Abschätzung

$$0 \leq \zeta(s) - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \leq f(1) = 1.$$

■

Lemma 9.25 *Für $s \to \infty$ gilt:* $\zeta(s) = 1 + O\left(\frac{1}{2^s}\right)$.

Beweis. Es gilt:

$$\zeta(s) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^s};$$

bei der letzten Reihe haben wir den Indexshift $k = j + 1$ gemacht. Wir wenden das Integralkriterium auf die monoton fallende Funktion $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^s}$ an. Da die Reihe konvergiert, können wir in der Abschätzung gleich den Grenzwert für $n \to \infty$ bilden:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^s} - \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{(x+1)^s}\, dx \leq f(1) = \frac{1}{2^s}.$$

Wir berechnen

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{(x+1)^s}\, dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(x+1)^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{1-s}}{1-s} - \frac{2^{1-s}}{1-s}\right) = \frac{2}{2^s(s-1)}.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} & 0 \leq \zeta(s) - 1 - \frac{2}{2^s(s-1)} \leq \frac{1}{2^s} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{2}{2^s(s-1)} \leq \zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{2^s} + \frac{2}{2^s(s-1)} = \frac{1}{2^s}\left(1 + \frac{2}{s-1}\right). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. ∎

10 Potenzreihen

10.1 Taylorsche Formel

Bereits bekannte Potenzreihen:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad |x| < 1.$$

Bedeutung von Potenzreihen.

- Ist zu gegebenem f eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

bekannt, so kann man f durch Polynome approximieren:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \to 0$$

für $n \to \infty$. Das ist in der Numerik wichtig.

- Ist zu gegebenen a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, die *erzeugende Funktion*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

bekannt, kann man aus den Eigenschaften von f Rückschlüsse auf das Verhalten von a_k, $k \in \mathbb{N}$, ziehen. Das ist in der Stochastik und in der Kombinatorik wichtig.

Zur Erinnerung: Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar ist, ist $f'(a)$ die Steigung der bestmöglichen linearen Approximation von f in der Nähe von a: Vorl.23

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(|x - a|)$$

für $x \to a$. Umschreiben mit $x = a + h$ liefert

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

für $h \to 0$. Dabei ist $h \mapsto f(a) + f'(a)h$ ein Polynom ersten Grades.

Frage: Kann man f nahe bei a durch geeignete Polynome höherer Ordnung in h approximieren? Mit anderen Worten: Gibt es Koeffizienten $a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots + a_n h^n + o(h^n) \tag{10.1}$$

für $h \to 0$? Beachte: $o(h^n)$ ist besser als $o(h^k)$ für $k < n$. Aus (10.1) folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - f'(a)h - a_2 h^2 - \ldots - a_{n-1} h^{n-1}}{h^n} = a_n. \tag{10.2}$$

Da f in a differenzierbar ist, ist f in a stetig, d.h.

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a).$$

Daher gehen Zähler und Nenner in (10.2) für $h \to 0$ gegen 0.

Wir betrachten (10.2) für $n = 2$ und wenden die Regel von l'Hospital an:

$$a_2 = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h}.$$

Wenn f' in a stetig ist, gehen Zähler und Nenner gegen 0. Dann folgt mit der Regel von l'Hospital:

$$a_2 = \lim_{h \to 0} \frac{f''(a+h)}{2},$$

falls f in einer Umgebung von a zweimal differenzierbar ist. Falls f'' in a stetig ist, folgt

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

Analog findet man

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Satz 10.1 (Taylorsche Formel) *Sei* $\varepsilon > 0$, $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ *n-mal stetig differenzierbar für ein* $n \in \mathbb{N}_0$*. Dann gilt:*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

für $h \to 0$*. Dabei bezeichnet man*

$$T_{n,a}f(h) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

als n-tes Taylorpolynom *von f um a.*

Man kann den Approximationsfehler in verschiedenen Formen angeben:

Satz 10.2 (Taylorsche Formel mit Restglied) *Sei I ein offenes Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$ *$(n+1)$-mal stetig differenzierbar für ein* $n \in \mathbb{N}_0$*. Dann gilt für alle* $x, a \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}f(a,x)$$

mit den Restgliedformeln

$$\begin{aligned} R_{n+1}f(a,x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \qquad \textit{Cauchy} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \qquad \textit{Lagrange} \end{aligned}$$

für ein ξ zwischen a und x.

Beweis. *Darstellung des Restglieds in Cauchyscher Integralform.* Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion über n.
Induktionsanfang $n = 0$*:* Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt sich

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f^{(0)}(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Induktionsschluss $n-1 \to n$*:* Sei die Behauptung richtig für $n-1$, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Wir integrieren partiell:

$$u(t) = f^{(n)}(t) \qquad v'(t) = (x-t)^{n-1}$$
$$u'(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad v(t) = -\frac{1}{n}(x-t)^n$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \\
=&\frac{1}{(n-1)!}\left[-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n}\right]_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
=&\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für n.

Lagrange-Darstellung des Restglieds. Für t zwischen a und x hat $(x-t)^n$ ein festes Vorzeichen. Nach Voraussetzung ist $f^{(n+1)}$ stetig. Deshalb können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung mit Gewichtsfunktion $p(t) = (x-t)^n$ anwenden: Es existiert ξ zwischen a und x sodass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =&\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt \\
=&\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=a}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.
\end{aligned}$$

■

Beispiel 10.3 *Betrachte* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$*. Dann gilt*

$$f'(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir wenden die Taylorformel mit Lagrange-Restglied für $a = 0$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *an. Wegen*

$$f^{(k)}(a) = e^0 = 1 \quad \forall k$$

folgt für ein ξ zwischen 0 und x

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Für $x = 1$ ist $\xi \in [0, 1]$ und $1 = e^0 \leq e^\xi \leq e^1 = e \leq 3$. Damit ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \leq e \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{3}{(n+1)!}.$$

Das liefert eine gute Approximation für e.

Korollar 10.4 *Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion f mit $\lim_{n\to\infty} R_n f(a, x) = 0$ folgt aus der Taylorschen Formel*

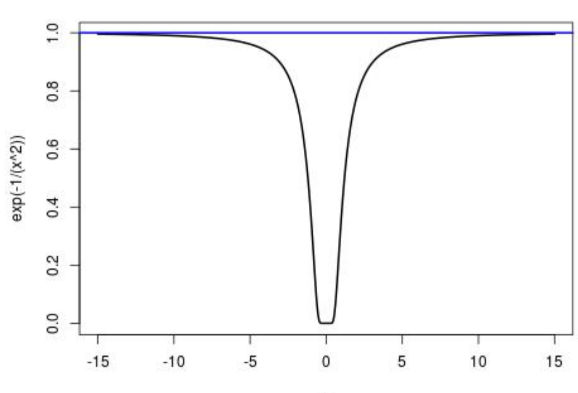
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Dies ist die Taylorreihe für f.

Auf die Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} R_n f(a, x) = 0$ kann man nicht verzichten.

Beispiel 10.5 *Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$



Die Funktion f ist stetig, da

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0 = f(0).$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^0 = 1 = \lim_{x\to-\infty} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Für $x \neq 0$ *ist die Ableitung gegeben durch*

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \begin{cases} > 0 & \textit{falls } x > 0, \\ < 0 & \textit{falls } x < 0. \end{cases}$$

Somit ist f *auf* $(0,\infty)$ *streng monoton wachsend und auf* $(-\infty,0)$ *streng monoton fallend. Für* $x \neq 0$ *ist die zweite Ableitung gegeben durch*

$$f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3}\cdot\frac{2}{x^3}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^4}\left(\frac{2}{x^2} - 3\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Es gilt

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x^2} \geq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} \geq x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \geq |x|$$

Somit ist f *konvex auf* $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ *und konkav auf* $\mathbb{R} \setminus (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$. *Die Funktion* f *besitzt Wendepunkte in* $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Behauptung: f *ist beliebig oft differenzierbar mit* $f^{(n)}(0) = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.
Für $n = 1$ *gilt:*

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \exp\left(-\frac{1}{h^2}\right) = \lim_{x\to\infty} x \exp(-x^2) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(x^2)} = 0.$$

Insbesondere folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \neq f(x) \quad \forall x \neq 0$$

Die Funktion f *lässt sich nicht in eine Taylorreihe entwickeln.*
Moral: *Nicht jede unendlich of differenzierbare Funktion lässt sich in eine Taylorreihe entwickeln.*

Beispiel 10.6 *Betrachte für* $a \in \mathbb{R}$ *die Funktion* $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^a$. *Die Funktion* f *ist beliebig oft differenzierbar mit*

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Aus der Taylorschen Formel folgt:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}f(0,x)$$

mit

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} =: \binom{a}{k}$$

Es folgt
$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + R_{n+1}f(0,x).$$
Man kann zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}f(0,x) = 0$ *für alle* $|x| < 1$. *Damit ergibt sich die* Binomialreihe
$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$$
für $|x| < 1$, $a \in \mathbb{R}$. *Dies ist eine Verallgemeinerung der binomischen Formel: Für* $a = n \in \mathbb{N}$ *gilt*
$$\binom{n}{k} = 0 \quad \forall k > n$$
In diesem Fall folgt
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

10.2 Konvergenzradius und analytische Funktionen

Satz 10.7 *Zu jeder Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, *gibt es einen* Konvergenzradius $r \geq 0$ Vorl.24
($r = \infty$ ist erlaubt), sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

- $|z| < r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *absolut konvergent*
- $|z| > r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *divergent*

Falls die Folge $(\sqrt[k]{a_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert, gilt*
$$r = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}}.$$
Das ist die Formel von Cauchy-Hadamard.

Beispiel 10.8 *Für die geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ *gilt* $a_k = 1$ *für alle* k. *Somit ist der Konvergenzradius* $r = 1$.

Definition 10.9 *Eine Funktion* $x \mapsto f(x)$ *heißt in* $x = 0$ analytisch, *wenn* f *sich mit positivem Konvergenzradius* $r > 0$ *in eine Potenzreihe entwickeln lässt, d.h. falls* a_k *existieren mit*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < r.$$

Satz 10.10 *Seien f und g in $x = 0$ analytisch mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < r_f, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < r_g.$$

Dann gilt:

(a) *f' ist in $x = 0$ analytisch. Die Ableitung ergibt sich durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe:*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{für } |x| < r_f.$$

(b) *Die Koeffizienten der Potenzreihe sind eindeutig:*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

(c) *Stammfunktionen $\int f(x)\,dx$ von f sind in $x = 0$ analytisch. Man erhält sie durch gliedweise Integration der Potenzreihe:*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } |x| < r_f$$

(d) *$f + g$ und $f \cdot g$ sind in $x = 0$ analytisch mit*

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k,$$
$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} x^k \quad \text{für } |x| < \min\{r_f, r_g\}.$$

Beispiel 10.11 *Für die geometische Reihe gilt für $|x| < 1$:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Aus Satz 10.10 folgt für $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \tag{10.3}$$
$$\frac{2}{(1-x)^3} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2}$$

Anwendung. *Sei $p \in (0,1]$. Wir führen eine Folge unabhängiger Zufallsexperimente durch, die mit Wahrscheinlichkeit p einen Erfolg und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ einen Misserfolg liefern. Sei X die zufällige Anzahl von Experimenten, die wir durchführen müssen, bis das erste Experiment gelingt. Dann gilt*

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die geometrische Reihe liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Das bedeutet, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 nach endlich vielen Versuchen ein Experiment gelingt. Für die erwartete Anzahl an benötigten Versuchen liefert (10.3)

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

11 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

11.1 Kurven

Definition 11.1 *Eine* parametrisierte Kurve *im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

deren Komponenten γ_i stetig sind. γ heißt stetig differenzierbar*, wenn alle γ_i stetig differenzierbar sind. Die Menge*

$$\gamma([a,b]) = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$$

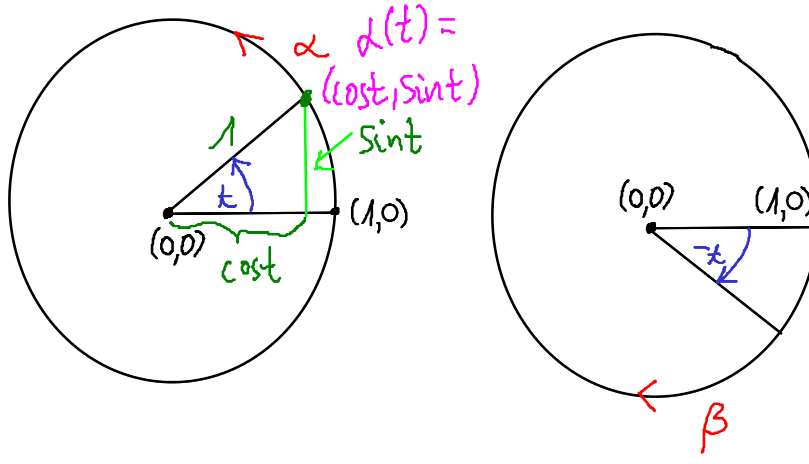
heißt Spur *von γ.*

Eine Kurve beschreibt die Bewegung eines Punktes im Raum. Damit entspricht t Zeit und $\gamma(t)$ dem Ort des Punktes zur Zeit t.

Beispiel 11.2

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$
$$\beta(t) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

sind zwei parametrisierte Kurven. α und β haben die gleiche Spur, sind aber verschiedene Kurven.



Definition 11.3 *Die Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar. Dann heißt*

$$\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

Tangentialvektor *oder Geschwindigkeitsvektor zur Stelle t.*

$$\|\gamma'(t)\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k'(t)^2}$$

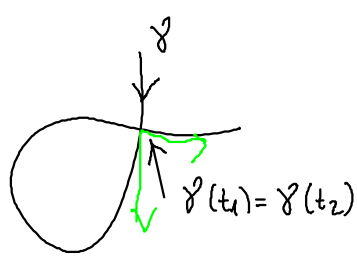
heißt Geschwindigkeit *zur Zeit t. Falls $\gamma'(t) \neq 0$, heißt*

$$T_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Tangentialeinheitsvektor *an der Stelle t.*

Es gilt $\|T_\gamma(t)\| = 1$. Vorsicht:

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \not\Longrightarrow \quad \gamma'(t_1) = \gamma'(t_2)$$

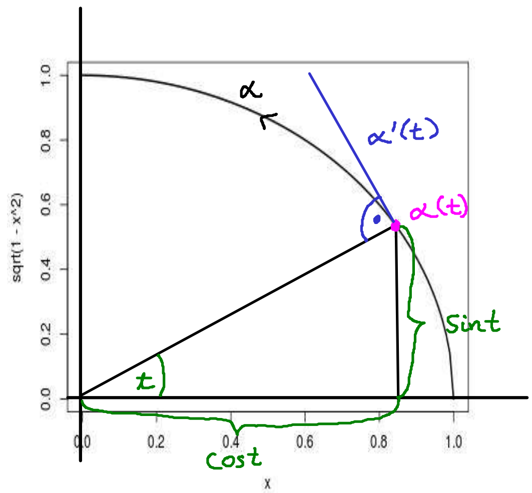


Beispiel 11.4 *Betrachte die Kurve $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Es gilt:*

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1.$$

Somit ist $\alpha'(t)$ ein Tangentialeinheitsvektor. Es gilt

$$\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = \cos t(-\sin t) + \sin t \cos t = 0.$$



Beispiel 11.5 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$. Es gilt

$$T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(1, f'(t))}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}.$$

11.2 Partielle Ableitungen

Definition 11.6 *Betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \xi \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

differenzierbar, so heißt ihre Ableitung an der Stelle x_k partielle Ableitung *von f nach x_k und wird mit $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ oder $\partial_k f(x)$ oder $\partial_{x_k} f(x)$ bezeichnet, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$. Der Vektor*

$$\nabla f(x) := \mathrm{grad} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

heißt Gradient *von f. Setze*

$$Df(x) := \nabla f(x)^t = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)).$$

Lemma 11.7 *Falls f stetig partiell differenzierbar ist (d.h. Df stetig ist), dann ist f* total differenzierbar*, d.h.*

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(\|h\|)$$

für $\mathbb{R}^n \ni h \to 0$. Dabei ist h ein Spaltenvektor und $Df(x)$ ein Zeilenvektor.

Für $h = (h_1, \dots, h_n)^t$ ist $\|h\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n h_k^2}$.

Beispiel 11.8 (Lineare Funktion) *Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die lineare Funktion* Vorl.25

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \langle a, x\rangle = \sum_{k=1}^n a_k x_k.$$

Für $n = 1$ ist $a \in \mathbb{R}$ und es gilt $f(x) = ax$, $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Im allgemeinen ist $\partial_k f(x) = a_k$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $1 \le k \le n$. Es folgt

$$\mathrm{grad} f(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Für $x, h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x+h) = \langle a, x+h\rangle = \langle a, x\rangle + \langle a, h\rangle = f(x) + a^t h = f(x) + Df(x)h.$$

Somit ist f total differenzierbar und die lineare Approximation durch die Ableitung ist exakt.

Beispiel 11.9 (Quadratische Funktion) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, d.h. $A = (A_{ij})_{1\le i,j\le n}$ mit $A_{ij} = A_{ji}$. Betrachte die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$x \mapsto x^t A x = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i A_{ij} x_j.$$

Für $n = 1$ ist $f(x) = ax^2$ und $f'(x) = 2ax$. Im allgemeinen sind die partiellen Ableitungen gegeben durch

$$\partial_k f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \partial_k (x_i x_j).$$

Dabei erhalten mit der Produktregel

$$\partial_k (x_i x_j) = \delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk} \quad \text{mit} \quad \delta_{lk} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } l = k, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Einsetzen liefert

$$\partial_k f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}\delta_{ik}x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}x_i\delta_{jk} = \sum_{j=1}^n A_{kj}x_j + \sum_{i=1}^n A_{ik}x_i.$$

Da A symmetrisch ist, gilt $A_{ik} = A_{ki}$ und es folgt

$$\partial_k f(x) = 2\sum_{j=1}^n A_{kj}x_j = 2A_{k\cdot}x,$$

wobei $A_{k\cdot}$ die k-te Zeile von A bezeichnet. Damit erhalten wir

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax.$$

Es folgt

$$Df(x) = 2(Ax)^t = 2x^tA^t = 2x^tA,$$

da $A^t = A$. Weiter gilt für $x, h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+h) = (x+h)^tA(x+h) = x^tAx + x^tAh + h^tAx + h^tAh.$$

Beachte: h^tAx ist reellwertig. Damit gilt $h^tAx = (h^tAx)^t = x^tA^th = x^tAh$. Damit folgt

$$f(x+h) = f(x) + 2x^tAh + h^tAh = f(x) + Df(x)h + h^tAh.$$

Wir wissen:

$$\frac{h^tAh}{\|h\|} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{h_ih_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^n h_k^2}}$$

mit

$$0 \leq \left|\frac{h_ih_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^n h_k^2}}\right| \leq \frac{|h_ih_j|}{\sqrt{h_i^2 + h_j^2}} = \frac{\max\{|h_i|, |h_j|\}}{\sqrt{1 + \frac{\max\{|h_i|, |h_j|\}^2}{\min\{|h_i|, |h_j|\}^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\max\{|h_i|, |h_j|\} \to 0$$

für $h \to 0$. Mit der Einschließungsregel folgt

$$\frac{h^tAh}{\|h\|} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad h^tAh = o(\|h\|)$$

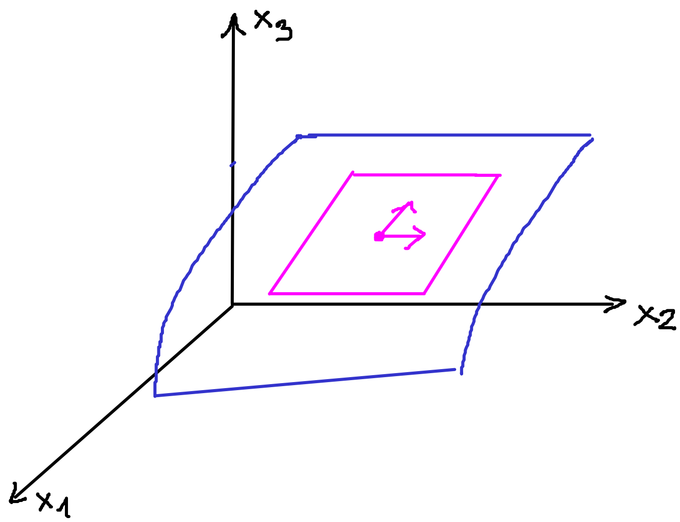
für $h \to 0$. Somit ist f total differenzierbar.

Tangentialebene. Angenommen, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist in x_0 total differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

für $x \to x_0$. Die *Tangentialebene* an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ wird beschrieben durch

$$x \mapsto f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0).$$



11.3 Höhere Ableitungen

Definition 11.10 *Betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ist $\partial_i f$ nach x_j differenzierbar, so schreiben wir für die Ableitung*

$$\partial_j \partial_i f, \quad \partial_{x_j} \partial_{x_i} \quad \textit{oder} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j} \partial_{x_i}}.$$

Beispiel 11.11 *Betrachte die Funktion $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) = \cos(xy) + \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \cos(xy) + \ln x - \ln y$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\partial_x f(x, y) = -y \sin(xy) + \frac{1}{x}, \quad \partial_y f(x, y) = -x \sin(xy) - \frac{1}{y}.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\partial_x \partial_x f(x, y) = -y^2 \cos(xy) - \frac{1}{x^2} \qquad \partial_x \partial_y f(x, y) = -\sin(xy) - xy \cos(xy)$$

$$\partial_y \partial_x f(x, y) = -xy \cos(xy) - \sin(xy) \qquad \partial_y \partial_y f(x, y) = \frac{1}{y^2} - x^2 \cos(xy)$$

Beobachtung: $\partial_x \partial_y f(x, y) = \partial_y \partial_x f(x, y)$

Definition 11.12 *Die Matrix* $Hf(x) = (\partial_j \partial_i f(x))_{1 \le i,j \le n}$ *heißt* Hesse-Matrix *von* f *im Punkt* x*.*

Satz 11.13 *Sind alle* $\partial_i \partial_j f$ *stetig, so gilt*

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \quad \forall i, j$$

D.h. die Reihenfolge der Ableitungen ist irrelevant.

Definition 11.14 *Für* $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $\varepsilon > 0$ *sei*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$$

die Kugel um x *mit Radius* ε*. Eine Menge* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *heißt* offen, *wenn*

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \textit{sodass} \quad B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

Z.B. ist $(0,1) \times (0,1)$ offen, $[0,1) \times [0,1)$ und $[0,1] \times [0,1]$ jedoch nicht.

Satz 11.15 *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar, d.h.* $\partial_i \partial_j f$ *existieren und sind stetig für alle* i, j*.*

- ***Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:*** *Falls* f *in* $x \in U$ *ein lokales Extremum besitzt, dann gilt*

  $$\nabla f(x) = 0.$$

  Im Fall eines lokalen Minimums ist $Hf(x)$ *positiv semidefinit, d.h. alle Eigenwerte von* $Hf(x)$ *sind* ≥ 0*. Im Fall eines lokalen Maximums ist* $Hf(x)$ *negativ semidefinit, d.h. alle Eigenwerte von* $Hf(x)$ *sind* ≤ 0*.*

- ***Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum:*** *Falls* $\nabla f(x) = 0$ *und* $Hf(x)$ *positiv definit (d.h. alle Eigenwerte von* $Hf(x)$ *sind* > 0*), dann hat* f *in* x *ein striktes lokales Minimum. Falls* $\nabla f(x) = 0$ *und* $Hf(x)$ *negativ definit (d.h. alle Eigenwerte von* $Hf(x)$ *sind* < 0*), dann hat* f *in* x *ein striktes lokales Maximum.*

Vorgehensweise zur Bestimmung der Extrema von $f : U \to \mathbb{R}$**.**

(a) Bestimmung aller kritischen Punkt von f, d.h. aller $x \in U$ mit $\nabla f(x) = 0$.

(b) Für jeden kritischen Punkt x von f Bestimmung von $Hf(x)$.

(c) Untersuchen der Eigenwerte $\lambda_i(x)$ von $Hf(x)$ für jeden kritischen Punkt.

  - Alle $\lambda_i(x) > 0 \Longrightarrow$ striktes lokales Minimum in x.
    Alle $\lambda_i(x) < 0 \Longrightarrow$ striktes lokales Maximum in x.

- Es gibt Eigenwerte > 0 und $= 0 \implies$ kein lokales Maximum in x.
  Es gibt Eigenwerte < 0 und $= 0 \implies$ kein lokales Minimum in x.
- Falls es positive und negative Eigenwerte gibt, liegt weder ein Maximum noch ein Minimum vor.

Beispiel 11.16 *Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$. Es gilt*

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$$

Wir suchen die kritischen Stellen:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad x = y = 0$$

Somit ist $(0, 0)$ die einzige kritische Stelle. Die Hesse-Matrix

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist in allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ positiv definit. Daher besitzt f in $(0, 0)$ ein striktes lokales und globales Minimum.

Beispiel 11.17 *Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - 2y^2$. Es gilt*

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y \end{pmatrix}$$

Wir suchen die kritischen Stellen:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad x = y = 0$$

Somit ist $(0, 0)$ die einzige kritische Stelle. Die Hesse-Matrix

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ist indefinit. Somit hat f in $(0, 0)$ kein Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

Verallgemeinerung.

Definition 11.18 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt in $x \in U$* (total) differenzierbar*, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h \mapsto A(h) =: Ah$ gibt, sodass gilt:*

$$f(x + h) = f(x) + Ah + o(\|h\|) \quad \text{für } h \to 0. \tag{11.1}$$

Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kann man durch eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ beschreiben. Für $h \in \mathbb{R}^n$ ist

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Wir identifizieren die lineare Abbildung A mit dieser Matrix.

Sei $f = (f_1, \dots, f_m)^t$. Damit schreiben wir (11.1) für die Komponenten $1 \leq i \leq m$:

$$f_i(x+h) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j + o(\|h\|) \quad \text{für } h \to 0. \tag{11.2}$$

Es gilt: f ist in x differenzierbar. $\iff$ Alle Komponenten sind in x differenzierbar.

Lemma 11.19 *Für alle i, j gilt:*

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

Beweis. Sei $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Betrachte $h \in \mathbb{R}^n$ mit $h_k = 0$ für alle $k \neq j$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} h_k = a_{ij} h_j \quad \text{und} \quad \|h\| = \sqrt{h_j^2} = |h_j|.$$

Damit liefert (11.2)

$$\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h_j} = a_{ij} + \frac{o(\|h\|)}{h_j} = a_{ij} + \frac{o(\|h\|)}{\pm\|h\|} \to a_{ij}$$

für $h \to 0$. ■

Die Matrix A heißt *Jacobi-Matrix* von f. Man schreibt:

$$A = Df(x) := J_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

12 Differentialgleichungen

12.1 Anfangswertprobleme

Differentialgleichungen beschreiben Prozesse, bei denen die Rate, mit der sich der Zustand ändert, eine gegebene einfache Funktion des Zustandes ist.

Beispiel 12.1 (Wachstumsprozesse)
Sei $N(t)$ die Anzahl der Individuen in einer Population zur Zeit t, β die Geburtenrate und δ die Sterberate. Die folgende Differentialgleichung beschreibt das Wachstum großer Populationen:

$$N'(t) = (\beta - \delta)N(t), \quad t \geq 0.$$

Das ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung. *Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch*

$$N(t) = ce^{(\beta-\delta)t}, \quad t \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wir können einfach nachprüfen, dass dies Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$N'(t) = c(\beta - \delta)e^{(\beta-\delta)t} = (\beta - \delta)N(t).$$

Gibt man zusätzlich einen Anfangswert $N(0) = N_0$ vor, so spricht man von einem Anfangswertproblem. *In diesem Fall sucht man $c \in \mathbb{R}$ sodass*

$$N_0 = N(0) = ce^{(\beta-\delta)0} = ce^0 = c.$$

Somit löst die Funktion

$$N(t) = N_0 e^{(\beta-\delta)t}$$

das Anfangswertproblem

$$N(0) = N_0, \quad N'(t) = (\beta - \delta)N(t), \quad t \geq 0.$$

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $y(x) \in \mathbb{R}$. Da $x \in \mathbb{R}$, spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Da nur die 1. Ableitung vorkommt, spricht man von einer Differentialgleichung 1. Ordnung.

Anfangswertproblem. Sei $I = (\underline{x}, \overline{x}) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}$, $y_0 \in \Omega_0$, $f : I \times \Omega_0 \to \mathbb{R}$. Wir suchen $y : I \to \Omega_0$ mit

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0.$$

Beispiel 12.2 *Sei $g : I \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in I$. Betrachte das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = g(x) \quad \forall x \in I \quad \textit{und} \quad y(x_0) = y_0.$$

Die Bedingung $y' = g$ besagt, dass y eine Stammfunktion von g ist. Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Somit gibt es eine eindeutige

Lösung des Anfangswertproblems. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert:

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Damit folgt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Beispiel 12.3 *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad y(0) = y_0.$$

Aus dem letzten Beispiel folgt:

$$y(x) = y_0 + \int_{0}^{x} a\,dt = y_0 + ax$$

Beispiel 12.4 (Charakterisierung der Exponentialfunktion)
Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad y(0) = 1.$$

Da y differenzierbar ist, ist y stetig. Wegen $y' = y$ ist y' stetig, also y stetig differenzierbar.

Da $y(0) = 1$ und y stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ sodass $y(x) > 0$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Somit können wir die Gleichung $y' = y$ auf $(-\delta, \delta)$ durch y dividieren und erhalten

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

Es folgt

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int_0^x 1\,dt = x \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

Damit ergibt sich

$$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = [\ln y(t)]_0^x = \ln y(x) - \ln y(0) = \ln y(x),$$

da $y(0) = 1$ und $\ln 1 = 0$. Wir erhalten

$$\ln y(x) = x \quad \Longrightarrow \quad y(x) = e^x.$$

Wir machen die Probe:

$$y'(x) = e^x = y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = e^0 = 1.$$

Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad y(x_0) = y_0$$

für $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$. *Da* $y(x_0) = y_0 > 0$ *und* y *stetig ist, gibt es ein* $\delta > 0$ *sodass* $y(x) > 0$ *für alle* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) =: I$. *Somit können wir die Gleichung* $y' = y$ *auf* I *durch* y *dividieren und erhalten*

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \quad \forall x \in I.$$

Für $x \in I$ *folgt*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int_{x_0}^{x} 1\, dt = x - x_0.$$

Damit ergibt sich

$$x - x_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = [\ln y(t)]_{x_0}^{x} = \ln y(x) - \ln y(x_0) = \ln y(x) - \ln y_0.$$

Wir erhalten

$$\ln y(x) = \ln y_0 + x - x_0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = y_0 e^{x - x_0}$$

Wir machen die Probe:

$$y'(x) = y_0 e^{x-x_0} = y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0 e^0 = y_0.$$

12.2 Differentialgleichungen mit separierbarer rechter Seite

Die Differentialgleichungen $y' = f$ und $y' = y$ sind Spezialfälle von Anfangswertproblemen mit *separierbarer* rechter Seite. Die allgemeine Form ist gegeben durch

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

mit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Sei $g(y_0) \neq 0$. Da g stetig ist und y als differenzierbare Funktion stetig ist, existiert $\delta > 0$ sodass $g(y(x)) \neq 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Somit können wir die Differentialgleichung auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ durch $g(y(x))$ dividieren:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Damit ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Wir substituieren im linken Integral $s = y(t)$, $ds = y'(t)dt$:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(s)}\, ds = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(s)}\, ds = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt. \tag{12.1}$$

Setze

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\, ds, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Damit können wir (12.1) umschreiben als

$$G(y(x)) = F(x).$$

Falls G eine Umkehrfunktion G^{-1} besitzt, ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$y(x) = G^{-1}(F(x)).$$

Dieser Lösungsweg heißt *Trennung der Variablen.*

Vorgehensweise bei Trennung der Variablen. Die zu lösende Differentialgleichung muss von der folgenden Form sein

$$y' = f(x)g(y)$$

mit einer Funktion $f(x)$, die nicht von y abhängt und einer Funktion $g(y)$, die nur von y abhängt. Wir schreiben $y' = \frac{dy}{dx}$. Dann bringen wir alle von y abhängigen Terme auf eine Seite, alle anderen auf die andere Seite:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$$

Die letzte Gleichung müssen wir dann nach y auflösen.

Beispiel 12.5 *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = 1 + y(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad y(0) = 0.$$

Wegen $1 + y(x)^2 > 0$ können wir durch $1 + y(x)^2$ dividieren und erhalten

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = 1$$

Integration liefert

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{1 + y(t)^2}\, dt = \int_0^x 1\, dt = x.$$

Im linken Integral substituieren wir $s = y(t)$, $ds = y'(t)dt$. Damit ergibt sich

$$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{1 + y(t)^2}\, dt = \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{1 + s^2}\, ds = [\arctan s]_0^{y(x)} = \arctan y(x).$$

Es folgt

$$y(x) = \tan x.$$

Wir machen die Probe:

$$y'(x) = 1 + (\tan x)^2 = 1 + y(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

12.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Seien $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{12.2}$$

inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung. Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so spricht man von einer *homogenen* Differentialgleichung:

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \tag{12.3}$$

Lemma 12.6 *Sei $\mathcal{H}$ die Menge der Lösungen der homogenen Differentialgleichung* (12.3) *und $\mathcal{I}$ die Menge der Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung* (12.2)*.*

(a) Ist $y_i \in \mathcal{I}$ und $y_h \in \mathcal{H}$, dann ist $y_i + y_h \in \mathcal{I}$.

(b) Sind $y_{i_1}, y_{i_2} \in \mathcal{I}$, dann ist $y_{i_1} - y_{i_2} \in \mathcal{H}$.

(c) Sei $y_i \in \mathcal{I}$. Dann gilt:

$$\mathcal{I} = y_i + \mathcal{H} = \{y_i + y_h : y_h \in \mathcal{H}\}.$$

D.h. alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (12.2) *sind gegeben durch $y_i + y_h$, wobei y_i eine spezielle Lösung von* (12.2) *und y_h eine beliebige Lösung von* (12.3) *ist.*

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(y_i + y_h)'(x) + a(x)(y_i + y_h)(x) &= y_i'(x) + a(x)y_i(x) + y_h'(x) + a(x)y_h(x) = f(x) \\
(y_{i_1} - y_{i_2})'(x) + a(x)(y_{i_1} - y_{i_2})(x) &= y_{i_1}'(x) + a(x)y_{i_1}(x) - \big(y_{i_2}'(x) + a(x)y_{i_2}(x)\big) \\
&= f(x) - f(x) = 0
\end{aligned}$$

Zu (c): "$\supseteq$": Nach (a) gilt $y_i + y_h \in \mathcal{I}$.
"$\subseteq$": Sei $y \in \mathcal{I}$. Nach (b) ist $y - y_i \in \mathcal{H}$ und es gilt $y = y_i + (y - y_i)$, also $y \in y_i + \mathcal{H}$. ■

Damit ergibt sich folgendes Lösungsverfahren der inhomogenen Differentialgleichung (12.2). *Schritt 1:* Wir bestimmen $\mathcal{H}$ und somit alle Lösungen von (12.3).

Lemma 12.7 *Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

ist gegeben durch

$$y(x) = ce^{-A(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

wobei A eine Stammfunktion von a ist, d.h. $A'(x) = a(x)$ für alle x.

Beweis. Die homogene Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$y'(x) = -a(x)y(x).$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir erhalten

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x) \quad \Longrightarrow \quad (\ln y(x))' = -a(x).$$

Dann folgt mit einer Konstanten d

$$\ln y(x) = -A(x) + d \quad \Longrightarrow \quad y(x) = e^{-A(x)+d} = ce^{-A(x)}$$

mit $c = e^d$. Wir machen die Probe:

$$y'(x) = ce^{-A(x)}(-A'(x)) = -a(x)ce^{-A(x)} = -a(x)y(x).$$

■

Beispiel 12.8 *Ein Spezialfall ist die Differentialgleichung*

$$y'(x) = y(x).$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit $a(x) = -1$*. Somit gilt* $A(x) = -x$*. Für die Lösung folgt*

$$y(x) = ce^{-A(x)} = ce^x.$$

Schritt 2: Wir bestimmen eine spezielle Lösung $y_i \in \mathcal{I}$ von (12.2).

Lemma 12.9 *Eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung*

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

ist gegeben durch

$$y(x) = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt,$$

wobei A *eine Stammfunktion von* a *ist und* $x_0 \in \mathbb{R}$*.*

Beweis. Wir bestimmen diese Lösung mit Hilfe eines Ansatzes, der als *Variation der Konstanten* bezeichnet wird. Die Konstante c aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung wird durch eine Funktion $c(x)$ ersetzt. Wir machen den Ansatz

$$y(x) = c(x)e^{-A(x)}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$c(x)'e^{-A(x)} + c(x)(-A'(x))e^{-A(x)} + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x).$$

Wegen $A' = a$ folgt

$$c(x)'e^{-A(x)} = f(x) \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = f(x)e^{A(x)} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt$$

Damit folgt

$$y(x) = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt.$$

Wir verifizieren, dass dies eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$y'(x) = -A'(x)e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt + e^{-A(x)}f(x)e^{A(x)} = -a(x)y(x) + f(x).$$

■

Schritt 3: Wir bestimmen $\mathcal{I} = y_i + \mathcal{H}$, also alle Lösungen von (12.2).

Satz 12.10 *Alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung*

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

sind gegeben durch

$$y(x) = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt = e^{-A(x)} \left(c + \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt \right),$$

wobei A eine Stammfunktion von a ist und $c \in \mathbb{R}$. Eine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $y(x_0) = y_0$ ist gegeben durch

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt \right),$$

falls $A(x_0) = 0$.

Beweis. Das folgt aus Lemma 12.6. Der Anfangswert ist gegeben durch

$$y(x_0) = e^{-A(x_0)}y_0 = y_0.$$

■

Beispiel 12.11 *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$y'(x) + y(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y(0) = 1.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit $a(x) = 1$, $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$. Damit folgt $A(x) = x$, $A(0) = 0$. Mit Hilfe von Satz 12.10 erhalten wir

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt \right) = e^{-x} \left(1 + \int_{0}^{x} e^{t} \sin t\,dt \right).$$

Wir integrieren partiell mit

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin t & v'(t) &= e^t \\ u'(t) &= \cos t & v(t) &= e^t \end{aligned}$$

Es folgt

$$I(x) := \int_0^x e^t \sin t \, dt = [e^t \sin t]_0^x - \int_0^x e^t \cos t \, dt.$$

Wir integrieren nochmal partiell mit

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos t & v'(t) &= e^t \\ u'(t) &= -\sin t & v(t) &= e^t \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & I(x) = e^x \sin x - \left([e^t \cos t]_0^x + \int_0^x e^t \sin t \, dt \right) = e^x(\sin x - \cos x) + 1 - I(x) \\ \implies \quad & I(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$y(x) = e^{-x}(1 + I(x)) = \frac{3}{2} e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x).$$

Wir machen die Probe:

$$y'(x) = -\frac{3}{2} e^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) \quad \implies \quad y'(x) + y(x) = \sin x$$

Der Anfangswert ist gegeben durch $y(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$.