Extra - Zusammenfassung

Analysis für Informatik [MA0902] (Technische Universität München)

Analysis für Informatik

Zusammenfassung zur Klausurvorbereitung
(Version vom 13. März 2016)

Die Grundlagen dieser Zusammenfassung sind vor einigen Jahren im Rahmen der damaligen Analysis-Vorlesungen entstanden, weshalb nicht zwangsläufig alle Themenbereiche der aktuellen Vorlesung abgedeckt sein müssen. Ich habe mich jedoch bemüht, die wichtigsten Definitionen und Sätze aus den jeweiligen Kapiteln festzuhalten. Für ausführliche Beschreibungen ist stets das offizielle Skript zu konsultieren.

1 Grundlagen

- Ein Körper heißt **angeordnet**, falls $a = 0$ oder $a > 0$ oder $-a > 0$ und falls $a > 0$ und $b > 0$ gilt zudem $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.
- Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $s_0 \in \mathbb{K}$ gibt mit $a \in M \Rightarrow a \leq s_0$.
- $\mathbb{K}$ ist **ordnungsvollständig**, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ eine kleinste obere Schranke $\sup M \in \mathbb{K}$, das Supremum von M, besitzt. Das Supremum $\sup M$ ist also einerseits eine obere Schranke von M und andererseits kann jede obere Schranke s_0 von M durch $\sup M \leq s_0$ nach unten abgeschätzt werden.

$$\sup M \in M \Rightarrow \max M = \sup M$$
$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$
$$\lambda > 0 \Rightarrow \sup(\lambda X) = \lambda \sup X$$
$$X, Y \subset [0, \infty) \Rightarrow \sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$$
$$X \subset Y \Rightarrow \sup X \leq \sup Y$$

- $\mathbb{R}$ ist ein **archimedisch geordneter Körper**, d.h. zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$.
- Zu $a < b$ aus $\mathbb{R}$ gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$ also ist $\mathbb{Q}$ eine **dichte Menge**.
- Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.
- Die **algebraischen Zahlen** $\mathbb{A}$ sind alle möglichen Nullstellen von Polynomen $\mathbb{Z}[x]$.
- Die Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$ sind die **transzendenten Zahlen**.
- $\mathbb{B}$ ist die Menge der **berechenbaren Zahlen**, das sind Zahlen, für die es ein Programm gibt, welches die Ziffernfolge liefert.
- **Euklidische Norm** und Eigenschaften:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- Maximumnorm: $\|x\|_\infty = \max\{|x_k| : \forall k\}$
- ℓ^1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

2 Grenzwerte

- Eine **Folge** (a_n) reeller Zahlen bezeichnet die Abbildung $n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl a_n heißt das n-te **Glied der Folge**. Statt (a_n) schreibt man auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Die Folge (a_n) konvergiert gegen den **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ auch $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

- Folgen, die nicht konvergieren, heißen **divergent**.
- Eine Folge (a_n) heißt **uneigentlich konvergent**, falls für alle $K > 0$ auch $a_n \geq K$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ oder } a_n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

- Zwei Folgen heißen **asymptotisch gleich** falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$ gilt und man schreibt in diesem Fall $a_n \simeq b_n$ $(n \to \infty)$.
- Mehrdimensionale Vektoren konvergieren, wenn alle Komponenten konvergieren.
- Folgen komplexer Zahlen konvergieren somit nur, wenn Real- und Imaginärteil jeweils konvergieren, da komplexe Zahlen auch nur Vektoren sind.
- Eine konvergente Folge (a_n) reeller Zahlen ist **beschränkt**, es gibt also eine Schranke $K > 0$ mit $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Eine Funktion $f\colon D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ heißt im Punkt $x \in D$ ihres Definitionsbereichs **stetig**, falls für jede Folge (x_n) aus D gilt

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x).$$

- Eine Funktion heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.
- Die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen ist stetig.
- **Monotonie der Grenzwertbildung und Einschließungsregel**
  - Es sei $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Gilt $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $a \leq b$.
  - Es sei $a_n \leq a'_n \leq a''_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a''_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a'_n = a.$$

- Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt **monoton wachsend**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Jede monotone Folge reeller Zahlen konvergiert, falls sie beschränkt ist. Andernfalls besitzt sie einen uneigentlichen Grenzwert.
- **Limes superior und Limes inferior**

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$

- Ist (a_n) eine Folge aus $\mathbb{R}^d$ und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, also $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Grenzwerte konvergenter Teilfolgen heißen **Häufungswerte** der Folge (a_n).
- **Satz von Bolzano-Weierstraß**. Gegeben sei eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen. Dann sind $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ maximaler bzw minimaler Häufungswert der Folge. Es gilt

$$a_n \to a \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a.$$

- Jede beschränkte Folge aus $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergente Teilfolge und damit wenigstens einen Häufungswert. Jede beschränkte Folge, die nur einen einzigen Häufungswert besitzt, muss bereits konvergieren.

- Grenzwert der Funktion f im Punkt x_0: Sei $f\colon D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$, dann steht

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \to a \text{ für } x \to x_0$$

für $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to x_0$.
- Einer Folge (a_n) komplexer Zahlen ordnen wir die Folge (s_n) mit

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

zu und bezeichnen sie als unendliche **Reihe** mit den Gliedern a_n und den **Partialsummen** s_n.
- Konvergieren die Partialsummen $s_n \to s$, so heißt die Reihe konvergent und der Grenzwert s heißt **Summe** oder **Wert der Reihe** mit

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$$

- **Notwendige Konvergenzbedingung** für Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow a_k \to 0 \ (k \to \infty)$$

- Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nichtnegativen Gliedern $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen beschränkt ist, i.Z. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.
- Die Folge (s_n) ist bei positiven Gliedern monoton wachsend.
- **Majorantenkriterium**. Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen, deren Glieder für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|a_k| \leq b_k$ erfüllen. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **Majorante** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt:
  - Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

  - Divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.
- **Quotientenkriterium**. Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für fast alle k. Existiert der Grenzwert

$$q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für $q < 1$ bzw. divergiert für $q > 1$. Falls $q = 1$ gilt, ist das Kriterium unschlüssig und liefert keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz.
- **Wurzelkriterium**. Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ definieren wir die Zahl

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

als Kehrwert des Konvergenzradius nach der **Formel von Cauchy-Hadamard**. Wie beim Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für $\rho < 1$ und divergiert für $\rho > 1$. Falls $\rho = 1$ gilt, ist das das Kriterium unschlüssig und liefert keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz.
- **Leibniz-Kriterium**. Es sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge dann konvergiert die zugehörige alternierende Reihe $s = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$. Die Partialsumme s_n approximiert den Reihenwert s bis auf einen Fehler, der höchstens so groß ist, wie der Betrag des ersten weggelassenen Summanden:

$$\left|s - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}$$

- **Summe zweier Reihen**. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergiert absolut**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
- **Umordnungssatz**. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann absolut, wenn für jede Permutation $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die umgeordnete Reihe gegen ein und denselben Wert konvergiert:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
- **Cauchy'scher Doppelreihensatz**.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{k,j}| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}$$
- **Multiplikation zweier Reihen**. Wenn von den beiden konvergenten Reihen $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ wenigstens eine absolut konvergiert, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ der **Cauchy-Produkte** $c_m = \sum_{k=1}^{m} a_k b_{m-k}$ gegen $A \cdot B$.
- **Zwischenwertsatz**. Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert y_* zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an wenigstens einer Stelle $x_* \in [a,b]$ an mit $f(x_*) = y_*$.
- Stetige Funktionen bilden Intervalle auf Intervalle ab.
- Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt **abgeschlossen**, falls der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A wieder in A liegt. Wenn also $a_n \in A$ für fast alle n und $a_n \to a$ gilt, so ist auch $a \in A$.
- Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ heißt **kompakt**, falls K abgeschlossen und beschränkt ist.
- Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann kompakt, falls jede Folge aus K einen Häufungswert in K besitzt.
- Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.
- Jede stetige reellwertige Funktion $f : K \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ auf einer nichtleeren kompakten Menge K nimmt ihr Maximum $\overline{x}$ und ihr Minimum $\underline{x}$ an. Es gilt
$$f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\overline{x}) \text{ für alle } x \in K.$$
- **Fundamentalsatz der Algebra**. Jedes nichtkonstante Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ besitzt eine Nullstelle $z_* \in \mathbb{C}$.
- **Groß-Oh**. $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to a$, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für jede Folge $x_n \to a$ gilt:
$$|f(x_n)| \le c \cdot |g(x_n)| \text{ für fast alle } n.$$
- **Klein-Oh**. $f(x) = o(g(x))$ für $x \to a$, falls
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3 Differentiation

- Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in I$, wenn für eine gewisse Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ die Linearisierung
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0)$$
gültig ist. Die Zahl $f'(x_0)$ ist dann die Steigung der Tangenten von f in x_0 und heißt **Ableitung** von f in x_0 mit
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
Insbesondere gilt auch
$$f \text{ differenzierbar in } x_0 \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0.$$

Es lassen sich Ableitungen zu einigen elementaren Funktionen festhalten:

$f(x)$	$\exp x$	a^x	$\ln x$	$\log_a x$	x^a
$f'(x)$	$\exp x$	$a^x \ln a$	$1/x$	$1/(x \ln a)$	ax^{a-1}

- **Kettenregel**. $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- **Umkehrregel**. Ist $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$ und $f'(x) \neq 0$, so gilt
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$
- **Summenregel** und **Faktorregel**. $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$
- **Produktregel**. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- **Quotientenregel**.
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \text{ für } g(x) \neq 0$$
- **Logarithmische Ableitung**. $Lf(x) = f'(x)/f(x)$ mit $f(x) \neq 0$.
$$L(f \cdot g)(x) = Lf(x) + Lg(x)$$
$$Lf(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(f(x)) \text{ und } L(f^a)(x) = aLf(x)$$
- **Satz von Schwarz**. Falls mehrfach-partielle Ableitungen stetig sind, ist die Reihenfolge der Ableitungen egal.
- Konvergiert die aus einer Funktionenfolge $f_k \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gebildete Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ für alle $x \in D$, so sprechen wir von der **punktweisen Konvergenz** der Reihe gegen die Grenzfunktion $f \colon D \to \mathbb{R}$.
- Wird die Funktionenfolge durch die positiven Glieder (a_k) einer konvergenten Reihe majorisiert, d.h. gilt
$$|f_k(x)| \leq a_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$
so sprechen wir von der **majorisierten Konvergenz** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Es gilt zudem
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konvergiert majorisiert} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konvergiert punktweise.}$$
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiere majorisiert. Wenn dann $\lim\limits_{x \to a} f_k(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dürfen die Grenzwerte vertauscht werden, also gilt
$$\lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to a} f_k(x).$$
- Wenn für die differenzierbaren Funktionen f_k die Funktion $f \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ punktweise konvergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ majorisiert konvergiert, so ist f differenzierbar und die Reihe darf gliedweise differenziert werden.
- **Globale Extrema** sind das Maximum und das Minimum.
- Ein **lokales Extremum** x_0 liegt vor, wenn es ein offenes Intervall (Umgebung) $\mathcal{U}(x_0) \ni x_0$ gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in \mathcal{U}(x_0) \cap I$.
- Falls f in x_0 differenzierbar ist, so gilt:
$$f \text{ besitzt in } x_0 \text{ ein lokales Extremum} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

- **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**. Stetige Funktionen $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ seien auf (a, b) differenzierbar; es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$
Für $g(x) = x$ gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$
- **Satz von Rolle**. Die Voraussetzungen seien wie oben und $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$ mit $\xi \in (a, b)$.
- Eine Funktion f heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$
Analog ist f **streng monoton wachsend**, falls
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
- **Monotoniekriterium**.
$$\begin{aligned} f'|_{(a,b)} > 0 &\Rightarrow f'|_{(a,b)} \text{ streng monoton wachsend} \\ f'|_{(a,b)} < 0 &\Rightarrow f'|_{(a,b)} \text{ streng monoton fallend} \\ f'|_{(a,b)} \geq 0 &\Leftrightarrow f'|_{(a,b)} \text{ monoton wachsend} \\ f'|_{(a,b)} \leq 0 &\Leftrightarrow f'|_{(a,b)} \text{ monoton wachsend} \end{aligned}$$
Falls f in den Randwerten a oder b stetig ist, ist f auch dort monoton wachsend/fallend.
- **Kriterium für Extrema**. Sei $f'(x_0) = 0$, so gilt:
$$\begin{aligned} f'|_{(a,x_0)} \geq 0 \text{ und } f'|_{(x_0,b)} \leq 0 &\Rightarrow f \text{ nimmt das Maximum in } x_0 \text{ an} \\ f'|_{(a,x_0)} \leq 0 \text{ und } f'|_{(x_0,b)} \geq 0 &\Rightarrow f \text{ nimmt das Minimum in } x_0 \text{ an} \end{aligned}$$
- **Kriterium für Konstanz**. $f'(x) = 0$ in $I \Leftrightarrow f(x) = \text{const.}$ in I
- **Regel von l'Hôpital**. Für differenzierbare $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es sei x_0 einer der beiden Randpunkte a bzw. b. In den zwei Situationen
$$\begin{aligned} f(x) \to 0 \text{ und } g(x) \to 0 \text{ für } x \to x_0 \text{ und} \\ f(x) \to \infty \text{ und } g(x) \to \infty \text{ für } x \to x_0 \end{aligned}$$
gilt: Falls $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$ existiert, so ist
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- **Konvexität**. Für zweimal differenzierbare Funktionen $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ sind folgenden Ungleichungen äquivalent und die Funktion f heißt konvex (oder streng konvex, falls die Ungleichung strikt ist) mit $x_0 < x_1$:
$$\begin{aligned} f\left((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1\right) \leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \quad (0 < \lambda < 1) \\ f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_1) \\ f''(x) \geq 0 \end{aligned}$$

- Ist f konvex, so gilt außerdem $f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \leq f(x_1)$.
- **Jensen'sche Ungleichung**. Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ und $p_1, \ldots, p_n > 0$ mit $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Dann gilt

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot f(x_k).$$

  Falls f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit bei $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
- Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng konvex. Dann besitzt f höchstens eine Minimalstelle in I und kann das Maximum nur in den Randpunkten von I annehmen (falls vorhanden).
- **Kriterium für lokale Extrema**. Es sei f zweimal stetig differenzierbar auf (a, b) und $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ besitzt ein striktes lokales Minimum in } x_0$$
$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ besitzt ein striktes lokales Maximum in } x_0$$

4 Integration

- **Riemann'sche Summe.** Für $\xi \in [x_{j-1}, x_j]$ gilt

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

- Eine Funktion f heißt auf $[a, b]$ **Riemann-integrierbar**, oder kurz **integrierbar**, falls für alle Zerlegungsfolgen (Z_k) mit asymptotisch verschwindender Feinheit $|Z_k| \to 0$ die zugehörigen Riemann'schen Summen S_n unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte gegen ein und denselben Grenzwert $I(f)$ konvergieren; dieser Grenzwert

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

  heißt dann das bestimmte Integral von f auf $[a, b]$. Die Funktion f ist der zugehörige **Integrand**.
- **Eigenschaften des bestimmten Integrals.** Für integrierbare Funktionen f mit $a < b$ gelten
  - **Normierung**
  $$\int_a^b \mathrm{d}x = (b - a)$$
  - **Positivität**
  $$f \geq 0 \text{ auf } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$
  - **Linearität**
  $$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
  - **Zerlegbarkeit**
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
  - Zusätzlich zu den Eigenschaften gelten noch
  $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
- Monotonie von Integralen

$$f \leq g \text{ auf } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- Die Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bilden einen Vektorraum beschränkter Funktionen. Integrierbarkeit folgt aus einem der beiden folgenden Punkte
  - f ist beschränkt und monoton
  - f ist stückweise stetig
- **Mittelwertsatz der Integralrechnung.** Es sei f stetig und p integrierbar mit $p > 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit
$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x.$$
p wird oft als Gewichtsfunktion bezeichnet.
- **Uneigentliche Integrale** erweitern das Integral um einen Punkt b, der nicht integrierbar ist, und man schreibt beispielweise
$$\lim_{M\to b} \int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- **Majorantenkriterium.** Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ auf jedem kompakten Teilintervall von (a,b) integrierbar mit $|f| \leq g$. Existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, so auch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zusätzlich gilt
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Uneigentliche Integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, für die $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ existiert, heißen **absolut konvergent**.
- **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.** Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig sowie $a \in I$ fest gewählt. Dann ist die für $x \in I$ definierte Funktion
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
differenzierbar; sie ist auf I eine **Stammfunktion** von f, d.h. es gilt $F' = f$. Eine beliebige Stammfunktion F von f liefert den Wert des Integrals durch
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$
Zwei verschiedene Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante.
- **Partielle Integration**
$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(t)g'(x)\,\mathrm{d}t$$
- **u-Substitution(sregel)**
$$\int_a^b f(u(t)) \cdot u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Parameterabhängige Integrale.** Für jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \times J \to \mathbb{R}$ mit einem Parameterintervall $J \subset \mathbb{R}$ definiert das Integral $F(x) = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ eine zugehörige stetige Funktion $F\colon J \to \mathbb{R}$.
- Wenn $f(t,x)$ auf $[a,b] \times J$ eine stetige partielle Ableitung $\partial_x f$ besitzt, so ist $F(x)$ auch stetig differenzierbar und die Ableitung berechnet sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen:
$$F'(x) = \int_a^b \partial_x f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$
Ist $J = [c,d]$ kompakt, so gilt
$$\int_c^d F(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

- **Integration von Reihen.** Wenn die aus den integrierbaren Funktionen f_k gebildete Reihe mit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ majorisiert konvergiert, so ist die Funktion f integrierbar und die Reihe darf gliedweise integriert werden:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Abschätzung von Summen.** Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann gilt

$$f \text{ monoton wachsend } \Rightarrow \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$$
$$f \text{ monoton fallend } \Rightarrow \sum_{k=a+1}^{b} f(k) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

- **Integralkriterium.** Für monoton fallende Funktionen $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ existiert der Grenzwert der Abweichung zwischen Summe und Integral und erfüllt

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \le f(1).$$

Insbesondere gilt auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert.}$$

5 Potenzreihen

- Funktionsdarstellungen der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-c)^n \quad \text{mit } c_n, z, c \in \mathbb{C}$$

nennt man **Entwicklung** der Funktion f in eine **Potenzreihe** mit dem Mittelpunkt c einer **Kreisscheibe** mit dem **Konvergenzradius** r. Dies ist die hierfür bestmögliche Gültigkeitsschranke. Falls $|z-c| < r$ konvergiert die Reihe absolut und für $|z-c| > r$ divergiert sie. Für den Konvergenzradius gilt nach **Cauchy-Hadamard**

$$r^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{bzw.} \quad r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

- **Taylorpolynome.** Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^{n+1}$ auf dem offenen Intervall I eine $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x_0, x)$$

mit dem **Restglied**

$$R_{n+1}(x_0,x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

für $\xi \in (x_0, x)$.

- **Taylorreihe.**

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x_0,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- Eine Funktion $f(x)$ heißt in $x = 0$ **analytisch**, wenn sie sich mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt.
- **Kalkül der Potenzreihen.** Die Funktionen f, g seien in $x = 0$ analytisch mit positiven Konvergenzradien $r_f, r_g > 0$ und den Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{sowie} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

  - Differentiation: f' ist in $x = 0$ analytisch mit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (|x| < r_f)$$

  - Eindeutigkeit der Koeffizienten

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

  - Integration: Stammfunktionen $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ sind in $x = 0$ analytisch mit

$$\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n \quad (|x| < r_f)$$

  - Summe: $f + g$ ist in $x = 0$ analytisch mit

$$(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \quad (|x| < \min(r_f, r_g))$$

  - Produkt: $f \cdot g$ ist in $x = 0$ analytisch mit

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) x^n \quad (|x| < \min(r_f, r_g))$$

  - Quotient: Falls $g(0) = b_0 \neq 0$, so ist f/g in $x = 0$ analytisch mit der rekursiven Definition

$$c_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot b_{n-j} \right) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

  - Komposition: Falls $|g(0)| = |b_0| < r_f$, so ist $f \circ g$ in $x = 0$ analytisch.
- Eine für $|x| < r$ definierte Funktion $f(x)$ heißt **gerade**, falls

$$f(-x) = f(x) \quad (|x| < r)$$

- $f(x)$ heißt **ungerade**, falls

$$f(-x) = -f(x) \quad (|x| < r)$$

6 Differentialgleichungen

- Funktionen der Form $y'(x) = f(x, y(x))$ nennen wir Differentialgleichungen.
- **Satz von Picard-Lindelöf**. Es sei die rechte Seite f des Anfangswertproblems auf dem erweiterten Phasenraum $\Omega = (\underline{x}, \overline{x}) \times \Omega_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ mit $(x_0, y_0) \in \Omega$ stetig und bezüglich jeder Komponente der Zustandsvariablen y stetig differenzierbar. Dann besitzt das Anfangswertproblem eine in beiden Richtungen, d.h. für $x < x_0$ und $x > x_0$, bis an den Rand von Ω fortgesetzte Lösung.

- Neben numerischen Methoden, wie dem Euler-Verfahren, dem Heun-Verfahren oder dem Runge-Kutta-Verfahren, lösen wir Differentialgleichungen analytisch mit der **Separation (Trennung) der Variablen** für $g(y(x)) \neq 0$ und $y(x_0) = y_0$ mit

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x) \cdot g(y(x)) \\ \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,\mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} &= \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- **Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**. Sei

$$y^{(n)}(x) + c_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + c_1 \cdot y'(x) + c_0 \cdot y(x) = 0$$

gegeben, dann lässt sich diese Gleichung durch Einsetzen von $\exp(\lambda x)$ für $y(x)$ und Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms lösen. Die allgemeine Lösung mit den (paarweise verschiedenen!) Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist dann

$$y(x) = a_1 \exp(\lambda_1 x) + \ldots + a_n \exp(\lambda_n x).$$

Zur Bestimmung der speziellen Lösung muss das lineare Gleichungssystem mit gegebenen Anfangswerten gelöst werden.

7 Rudimentäre Formelsammlung

- Maximumsberechnung
$$|a| = \max(a, -a) \geq 0$$

- Dreiecksungleichungen
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
$$|a + b| \geq ||a| - |b||$$

- Ungleichung für geometrische Summen
$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n \leq \frac{1}{1 - x}$$

- Bernoulli'sche Ungleichung
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

- Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel (**AM-GM-Ungleichung**)
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \text{ für } a, b \geq 0$$

- Ungleichung vom mittleren Verhältnis (Cauchy)
$$\min\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right) \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} \leq \max\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$$

- Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (CSU)
$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} = \|x\| \cdot \|y\|$$

- Euler'sche Zahl
$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Exponentialfunktion
$$\exp(x) = \mathrm{e}^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Sonderfall der Reihe zum Logarithmus
$$\ln(x + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k + 1}$$

- Folgerungen der Bernoulli'schen Ungleichung
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exp(x) \geq 1 + x$$
$$\exp(x) \leq \frac{1}{1 - x} \quad (x < 1)$$
$$\lim_{h \to \infty} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$

- Stirling'sche Formel
$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

- Zentraler Binomialkoeffizient

$$p_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}$$
$$p = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\sqrt{n}} \text{ mit } p_n \simeq \sqrt{\pi n}$$
$$\binom{2n}{n} \simeq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k}{k}x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad \left(|x| < \frac{1}{4}\right)$$

- Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

- Binomialreihe

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k \quad (|x| < 1, a \in \mathbb{R})$$

- Teleskopreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1$$

- Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$

- Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^k = \frac{1}{1-z} \text{ für } z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}q^k = \infty \text{ für } q \geq 1$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$$

- Rieman'sche Zetafunktion (konvergiert und ist stetig in $(1,\infty)$)

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}$$
$$\lim_{s\to\infty}\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{s\to\infty}k^{-s} = 1$$
$$\zeta(s) = 1 + \mathcal{O}(2^{-s}) \quad (s\to\infty)$$
$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

- Bernoulli'sche Zahlen

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_j$$

Mit ungeradem Index ist $B_{2k+1} = 0$ und B_{2k} hat ein alternierendes Vorzeichen mit

$$(-1)^{k-1}B_{2k} \simeq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \quad (k\to\infty)$$

- Besondere Darstellungen trigonometrischer, zyklometrischer und hyperbolischer Funktionen

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

- Grundlegende Identitäten trigonometrischer, zyklometrischer und hyperbolischer Funktionen

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \qquad \sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) \qquad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sinh -x = -\sinh x \qquad \cosh -x = \cosh x$$

- Weitere Identitäten trigonometrischer, zyklometrischer und hyperbolischer Funktionen

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\exp(\mathrm{i}\varphi) &= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \\
\sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\
\sin 2x &= 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \\
\sin(x+y)\sin(x-y) &= \sin^2 x - \sin^2 y \\
\cos(x+y)\cos(x-y) &= \cos^2 x - \sin^2 y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\
\cosh x + \sinh x &= \exp(x) \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y \\
\sinh 2x &= 2\sinh x \cdot \cosh x \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x
\end{aligned}$$

- Spezielle Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\exp(x) - 1} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x) - x}{\sin(x) + x} = -1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

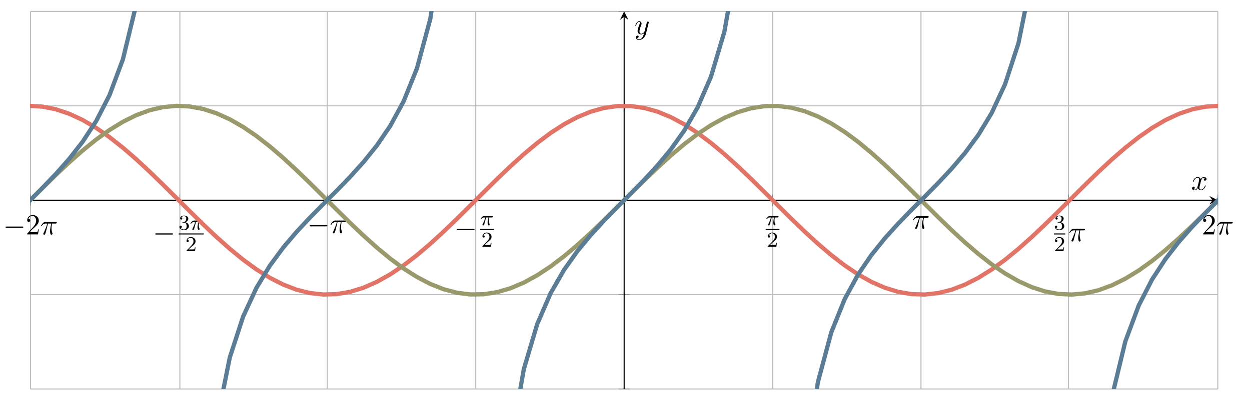

Abbildung 1: Graphen der trigonometrischen Funktionen (rot: $\cos x$, grün: $\sin x$, blau: $\tan x$)

8 Ableitungen und Integrale

Ableitungen

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$
2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(\cos x)' = -\sin x$
6. $(\tan x)' = \sec^2 x$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(\sinh x)' = \cosh x$
11. $(\cosh x)' = \sinh x$
12. $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$
13. $(\operatorname{arcsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
14. $(\operatorname{arccosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
15. $(\operatorname{arctanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

Integrale

1. $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (n \neq -1)$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$
3. $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
5. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$
6. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$
7. $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$
8. $\displaystyle\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x$
9. $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x$
10. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x$
11. $\displaystyle\int \tanh x \,\mathrm{d}x = \ln|\cosh x|$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}$
13. $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} \quad (a>0)$
14. $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} \quad (a>0)$
15. $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) \quad (a>0)$