Vorlesung 5 14.05.2021

Wdh:
- Bernoulli-Verteilung
- Binomial-Verteilung
- Geometrische-Verteilung

Warten auf den n-ten Erfolg

n unabhängige ZV $X_1, \dots X_n$, die jeweils geometrisch verteilt sind mit Parameter p und bestimmen die Dichte der Zufallsvariablen $Z := X_1 + \dots + X_n$

Z = Anzahl der Versuche bis zum n-ten erfolgreichen Experiment (einschließlich)

Falls $Z = z$ => genau n erfolgreiche und $z-n$ nicht erfolgreiche Experimente

Dafür gibt es genau $\binom{z-1}{n-1}$ Möglichkeiten, von denen jede mit Wahrscheinlichkeit $p^n(1-p)^{z-n}$ eintritt.

Es gilt also: $\binom{z-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{z-n}$

ZV Z nennt man negativ binomialverteilt mit Ordnung n

5.4 Poisson-Verteilung

↳ kann verwendet werden, um Anzahl von Ereignissen zu modellieren welche mit konstanter Rate und unabhängig voneinander in einem Zeitintervall auftreten

Poisson-verteilte ZV X mit Parameter $\lambda \geq 0$ hat den Wertebereich $W_X = \mathbb{N}_0$ und Dichte:

$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0$$

$$X \sim Po(\lambda)$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

5.4.1 Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

binomial-verteilte ZV X_n mit $X_n \sim Bin(n, p_n)$ wobei $p_n = \lambda/n$

Für ein beliebiges k mit $0 \leq k \leq n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X_n den Wert k annimmt, gleich:

$$b(k; n, p_n) = \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k}$$

$n \mapsto \infty$

$$\lim_{n\to\infty} b(k; n, p_n) = \lim \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

=> $X \sim Bin(n, \lambda/n)$ nähert sich für $n \to \infty$ $Po(\lambda)$ an

=> wenn n im Vergleich zu λ hinreichend groß ist, dann kann die Poisson-Verteilung als Approximation der Binomialverteilung

„GRENZWERT SELTENER EREIGNISSE"

Folgende Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Annahme der Poisson-Verteilung gerechtfertigt ist:

- Ereignisse treten nie zur selben Zeit ein
- Prob., dass ein Ereignis in einem (kleinen) Zeitintervall auftritt, ist proportional zur Länge des Intervalls
- Anzahl der Ereignisse in einem festen Zeitintervall hängt nur von dessen Länge ab, nicht von der Lage auf der Zeitachse
- wenn man 2 disjunkte Zeitintervalle betrachtet, so sind die Anzahlen der Ereignisse in diesen Zeiträumen voneinander unabhängig

Satz 59: **Summe von Poisson-verteilten Zufallsvariablen**

Sind X und Y unabh. ZV mit $X \sim Po(\lambda)$ und $Y \sim Po(\mu)$, dann gilt:

$$Z := X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$$

6. Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

6.1 Die Ungleichungen von Markov und Chebyshev

Satz 60 (Markov-Ungleichung)

X = ZV mit nur nicht negativen Werten

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$:

$$Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t} \qquad Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t$$

äquivalent dazu

Satz 61 (Chebyshev-Ungleichung)

X = ZV und sei $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dann gilt:

$$Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{Var[X]}{t^2} \qquad Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{Var[X]}] \leq 1/t^2$$

äquivalent dazu

6.2 Gesetz der großen Zahlen

Satz 63

ZV X, $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig aber fest

Dann gilt für alle $n \geq \frac{Var[X]}{\varepsilon \delta^2}$

Sind $X_1, \dots X_n$ unabh. ZV mit derselben Verteilung wie X und setzt man:

$$Z = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

so gilt: $Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon$

VORLESUNG 6

21.04.21

WAHRSCHEINLICHKEIT UND RELATIVE HÄUFIGKEIT

X = Indikatorvariable für Ereignis A, $\Pr[A] = p$
Somit: X = Bernoulli-verteilt mit $\mathbb{E}[X] = p$

$Z = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ = rel. Häufigkeit mit der A bei n Wiederholungen des Versuches eintritt, denn

$$Z = \frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen } A \text{ eingetreten ist}}{\text{Anzahl aller Versuche}}$$

Mit Hilfe des obigen Gesetzes der großen Zahlen:

$$\Pr[|Z - p| \geq \delta] \leq \varepsilon,$$

für genügend großes n. Also nähert sich die rel. Häufigkeit von A bei hinreichend vielen Wiederholungen des Experimentes mit beliebiger Sicherheit beliebig nahe an die „wahre" Wahrscheinlichkeit p an.

relative Abweichung $|\frac{1}{n}\sum_i X_i - p|$

absolute Abweichung $|\sum_i X_i - np|$

6.3 Chernoff-Schranken

6.3.1 Chernoff-Schranken für Summen von 0-1-Zufallsvariablen

Satz 64:

$X_1, \dots, X_n$ = unabh. Bernoulli-verteilte ZV mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$

Dann gilt:
für $X = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ sowie jedes $\delta > 0$:

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu$$

Satz 66

$X_1, \dots, X_n$ = unabh. Bernoulli-verteilte ZV mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$

Dann gilt:
für $X = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ sowie jedes $0 < \delta < 1$:

$$\Pr[X \geq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^\mu$$

LEMMA 67:

Für $0 \leq \delta < 1$ gilt: $(1-\delta)^{1-\delta} \geq e^{-\delta + \frac{\delta^2}{2}}$

und $(1+\delta)^{1+\delta} \geq e^{\delta + \frac{\delta^2}{3}}$

KOROLLAR 68

$X_1, \dots, X_n$ = unabh. Bernoulli-verteilte ZV mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$

für $X = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$

gilt:

1. $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/3}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,
2. $\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/2}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,
3. $\Pr[|X - \mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,
4. $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e}{1+\delta}\right)^{(1+\delta)\mu}$ und
5. $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mu$.

7. ERZEUGENDE FUNKTIONEN

7.1 Einführung

DEFINITION 70:

Für eine ZV X mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ ist die (Wahrscheinlichkeits-)erzeugende Funktion definiert durch:

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X]$$

↳ gilt für allgemeines $s \in \mathbb{R}$, wir werden uns auf $s \in [-1,1]$ konzentrieren

Eine Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ist also die (gewöhnliche) erzeugende Funktion der Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $f_i := \Pr[X = i]$

Beobachtung

Sei $Y := X + t$ mit $t \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$G_Y(s) = \mathbb{E}[s^Y] = \mathbb{E}[s^{X+t}] = \mathbb{E}[s^t \cdot s^X] = s^t \cdot \mathbb{E}[s^X] = s^t \cdot G_X(s)$$

ebenso lässt sich leicht nachrechnen, dass:

$G'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X = k] \cdot s^{k-1}$, also $G'_X(0) = \Pr[X = 1]$, sowie

$G_X^{(i)}(0) = \Pr[X = i] \cdot i!$, also

$G_X^{(i)}(0)/i! = \Pr[X = i]$

Satz 71 (Eindeutigkeit der w.e. Funktion)

Dichte und Verteilung einer ZV X mit $W_X \subseteq \mathbb{N}$ sind durch die w.e. Funktion eindeutig bestimmt.

→ **Bernoulli-Verteilung**

X = bernoulli-verteilte ZV mit $\Pr[X=0]=1-p$ und $\Pr[X=1]=p$

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = (1-p)\cdot s^0 + p\cdot s^1 = 1-p+ps\,.$$

→ **Gleichverteilung auf $\{0,\dots,n\}$**

X = auf $\{0,\dots,n\}$ gleichverteilt. d.h. für $0 \le k \le n$ mit $\Pr[X=k] = 1 = \frac{1}{n+1}$

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\cdot s^k = \frac{s^{n+1}-1}{(n+1)(s-1)}\,.$$

→ **Binomialverteilung**

Für $X \sim Bin(n,p)$ gilt:

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k = (1-p+ps)^n\,.$$

→ **Geometrische Verteilung**

X = geometrisch verteilte ZV mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\cdot s^k$$
$$= ps \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)s)^{k-1} = \frac{ps}{1-(1-p)s}\,.$$

→ **Poisson-Verteilung**

Für $X \sim Po(\lambda)$ gilt:

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot s^k = e^{-\lambda+\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}\,.$$

7.1.1 Zusammenhang zwischen der w.e.Funktion und den Momenten

Erinnerung: k-ter Moment $= \mathbb{E}[X^k]$

Da

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X=k]\cdot s^k = \mathbb{E}[s^X]$$

gilt:

$$G'_X(1) := \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X=k] = \mathbb{E}[X]$$

Momenterzeugende Funktionen

DEFINITION 74

Zu einer ZV X ist die momenterzeugende Funktion:

$$M_X(s) := \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

Es gilt:

$$M_X(s) := \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(Xs)^i}{i!}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[X^i]}{i!}\cdot s^i$$

und für ZV X mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}[(e^s)^X] = G_X(e^s)$$

7.2 Summe von Zufallsvariablen

Satz 75 (ERZEUGENDE FUNKTION EINER SUMME)

Für unabh. ZV $X_1,\dots,X_n$ und die ZV $Z := X_1 + \dots + X_n$ gilt:

$$G_Z(s) = G_{X_1}(s)\cdot \ldots \cdot G_{X_n}(s)$$

Ebenso gilt:

$$M_Z(s) = M_{X_1}(s)\cdot \ldots \cdot M_{X_n}(s)$$

7.2.1 Zufällige Summen

Situation, dass $Z := X_1 + \dots + X_N$, wobei N ebenfalls ZV

SATZ 77

$X_1, X_2, \dots$ unabh. und identisch verteilte ZV mit der w.e. Funktion $G_X(s)$. N sei ebenfalls eine unabhängige ZV mit der w.e. Funktion $G_N(s)$. Dann besitzt ZV $Z := X_1 + \dots + X_Z$ die w.e. Funktion $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$

WICHTIG!

FORMEL-SAMMLUNG

!!

8. FORMELSAMMLUNG

8.1 Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen

Im Folgenden: A und B, sowie $A_1, \ldots, A_n$ = Ereignisse
$A \uplus B = A \cup B$ und zugleich $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung)
$A_1 \uplus \ldots \uplus A_n = \Omega \to A_1, \ldots A_n$ = Partition von Ω

$\Pr[\emptyset] = 0$
$0 \leq \Pr[A] \leq 1$
$\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
$A \subseteq B \implies \Pr[A] \leq \Pr[B]$

$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies$ $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Additionssatz
$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ allgemeine Form: siehe Satz 9	Inklusion/Exklusion, Siebformel
$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Boolesche Ungleichung
$\Pr[A\|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$ für $\Pr[B] > 0$	Def. bedingte Ws.

$B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]$	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
$\Pr[B] > 0,\ B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[A_i\|B] = \frac{\Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{i=1}^n \Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]}$	Satz von Bayes
$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2\|A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n\|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$	Multiplikationssatz
A und B unabhängig $\iff$ $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	Definition Unabhängigkeit

8.2 Erwartungswert und Varianz diskreter ZV

$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$ $\left(= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i], \text{ falls } W_X \subseteq \mathbb{N}_0 \right)$	Erwartungswert
$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot (x - \mathbb{E}[X])^2$	Varianz

8.3 Gesetze zum Rechnen mit ZV

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\iff$ für alle $(a_1, \ldots, a_n)$: $\Pr[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n] = \Pr[X_1 = a_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = a_n]$
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\implies f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig
$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$

$X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \implies$ $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$	Monotonie des Erwartungswerts
$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X\|A_i] \cdot \Pr[A_i]$	
$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$	
$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$	

$\mathbb{E}[a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n]$	Linearität des Erwartungswerts
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\implies$ $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$	Multiplikativität des Erwartungswerts
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\implies$ $\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$	Varianz einer Summe

$X \geq 0 \implies$ $\Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X]/t$ für $t > 0$	Markov
$\Pr[\|X - \mathbb{E}[X]\| \geq t] \leq \mathrm{Var}[X]/t^2$ für $t > 0$	Chebyshev
siehe Satz 63 bruh x)	Gesetz der großen Zahlen

Satz 63

ZV X, $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig aber fest
Dann gilt für alle $n \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon \delta^2}$

Sind $X_1, \ldots X_n$ unabh. ZV mit derselben Verteilung wie X und setzt man:

$Z = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ so gilt: $\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon$

Ty for studying with me~
good luck