SS 21
DISKRETE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. VORLESUNG

1. Kapitel: DISKRETE WAHRSCHEINLICHKEITSRÄUME

GRUNDLAGEN:

- diskreter Wahrscheinlichkeitsraum = durch Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ von Elementarereignissen gegeben
- Jedes Elementarereignis ω_i hat eine (Elementar-)Wahrscheinlichkeit $Pr[\omega_i]$ wobei $0 \leq Pr[\omega_i] \leq 1$

und $\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = 1$

BSP: Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

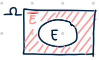
- Menge $E \subseteq \Omega$ heißt Ereignis

$Pr[E] := \sum_{\omega \in E} Pr[\omega]$

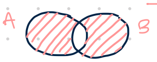
BSP: Würfel: $E = \{2, 4, 6\}$ „nur gerade Zahlen"

$Pr[E] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

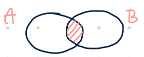
- $\bar{E}$ = komplementäres Ereignis zu E



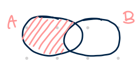
- $A \cup B$ = Schnitt / „oder"



- $A \cap B$ = Vereinigung / „und"



- $A \setminus B$ = Differenz / „ohne"



- 2 Ereignisse A und B heißen disjunkt / unvereinbar, wenn $A \cap B = \emptyset$

- Relative Häufigkeit von E

$$\frac{\text{absolute Häufigkeit von E}}{\text{Anzahl aller Beobachtungen}} = \frac{\text{Anzahl Eintreten von E}}{\text{Anzahl aller Beobachtungen}}$$

ENDLICHER WAHRSCHEINLICHKEITSRAUM

= Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$

LEMMA 8 Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, ...$ gilt:

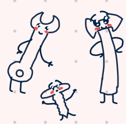
„Kleiner Werkzeugkasten"

① $Pr[\emptyset] = 0$, $Pr[\Omega] = 1$

② $0 \leq Pr[A] \leq 1$

③ $Pr[\bar{A}] = 1 - Pr[A]$

④ wenn $A \subseteq B$, so folgt $Pr[A] \leq Pr[B]$



zusätzlich: $Pr[\Omega] = Pr[A \cup \bar{A}] = Pr[A] + Pr[\bar{A}]$

ADDITIONSSATZ $A_1, ... A_n$ paarweise disjunkt $(A_j \cap A_i = \emptyset)$

$$\Rightarrow \quad Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i]$$

Für disjunkte Ereignisse A und B:

$$Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$$

Für unendliche Mengen von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, ...$ gilt:

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$$

SATZ 9: (SIEBFORMEL, PRINZIP DER EX-/INKLUSION)

für Ereignisse $A_1, ... A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

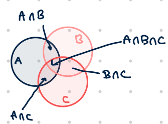
$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - ...$$
$$+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_l \leq n} Pr[A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_l}] + - ...$$
$$+ (-1)^{n-1} \cdot Pr[A_1 \cap ... \cap A_n].$$

Für $n = 2$ (A und B)

$$Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]$$

Für $n = 3$ (A, B und C)

$$Pr[A \cup B \cup C] = Pr[A] + Pr[B] + Pr[C] - Pr[A \cap B] - Pr[A \cap C] - Pr[B \cap C] + Pr[A \cap B \cap C]$$



KOROLLAR 10:

BOOLSCHE UNGLEICHUNG: für Ereignisse $A_1, ... A_n$ gilt:

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i] \quad \text{— analog für unendliche Ereignisse} \rightarrow \quad Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$$

WAHL DER WAHRSCHEINLICHKEITEN

↳ Prinzip von Laplace:

„wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, also:"

$$Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Vorlesung 2 →

2. VORLESUNG

BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN

A und B = Ereignisse mit $Pr[B] > 0$.
Bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr[A|B]$ von A gegeben B =

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$$

Erforderliche Eigenschaften:

① $Pr[B|B] = 1$
② $Pr[A|\Omega] = Pr[A]$
③ für fester B ist $Pr[A|B]$ proportional zu $Pr[A \cap B]$

allgemein:

$$\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega|B] = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{Pr[\omega \cap B]}{Pr[B]} = \sum_{\omega \in B} \frac{Pr[\omega]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B]}{Pr[B]} = 1$$

$\Rightarrow$ $Pr[\emptyset|B] = 0$
$Pr[\bar{A}|B] = 1 - Pr[A|B]$

MULTIPLIKATIONSSATZ:

$$Pr[A \cap B] = Pr[B|A] \cdot Pr[A] = Pr[A|B] \cdot Pr[B]$$

Ereignisse $A_1, \dots, A_n$. Falls $Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, dann

Multiplikationssatz:

$Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] =$

$$Pr[A_1] \cdot Pr[A_2|A_1] \cdot Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot Pr[A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3] \cdot \dots$$
$$\dots \cdot Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$$

gut für Aufgaben, wo die Ereignisse voneinander abhängen

SATZ 18:
Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

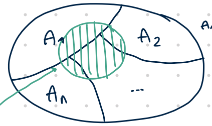
Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ (PAARWEISE DISJUNKT) und es gelte: $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$
Dann folgt:

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]$$

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]$$

analog für paarweise disjunkte Ereignisse mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

VERANSCHAULICHUNG



$A_1, \dots, A_n$ = paarweise disjunkt

$Pr[B] = Pr[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)]$ Anwendung des Additionssatzes:

$\Rightarrow Pr[B] = Pr[B \cap A_1] + \dots + Pr[B \cap A_n] =$
$Pr[B|A_1] \cdot Pr[A_1] + \dots + Pr[B|A_n] \cdot Pr[A_n]$

SATZ 19: SATZ VON BAYES

- Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt mit $Pr[A_j] > 0$ für alle j
- Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $Pr[B] > 0$. Dann gilt für beliebiges $i = 1, \dots, n$:

$$Pr[A_i|B] = \frac{Pr[A_i \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} Pr[B|A_j] \cdot Pr[A_j]}$$

analog für $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$:

$$Pr[A_i|B] = \frac{Pr[A_i \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} Pr[B|A_j] \cdot Pr[A_j]}$$

UNABHÄNGIGKEIT:

$Pr[A|B] = Pr[A]$
„Das Eintreten von B hat keinen Einfluss auf das Eintreten von A"
$\Rightarrow$ Ereignis A und B sind unabhängig

DEFINITION 21:

A und B heißen unabhängig, wenn gilt $Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$

falls $Pr[B] \neq 0$: $Pr[A] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]} = Pr[A|B]$

DEFINITION 22:

paarweise verschiedene Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ gilt, dass

$$Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot Pr[A_{i_k}] \quad (*)$$

Eine unendliche Familie von paarweise verschiedenen Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn $(*)$ für jede Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist

LEMMA 23:

Die (paarweise verschiedene) Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \dots, s_n) \in \{0,1\}^n$ gilt, dass

$$Pr[A_1^{s_1} \cap \dots A_n^{s_n}] = Pr[A_1^{s_1}] \cdot \dots \cdot Pr[A_n^{s_n}]$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$

LEMMA 24:

Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.