3. Vorlesung

30.04.21

4. ZUFALLSVARIABLEN

Anstatt der Ergebnisse selbst, sind wir oft an „Auswirkungen" oder „Merkmale" der (Elementar-)Ereignisse interessiert

Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt (numerische) Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X ist über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge Ω heißt diskret

Bei diskreten Zufallsvariablen ist der WERTEBEREICH

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} ; \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ebenfalls wieder endlich (bzw. unendlich abzählbar)

(diskrete) DICHTE (funktion) der Zufallsvariable X

$$f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto Pr[X = x] \in [0,1]$$

= Verteilungs(funktion)

VERTEILUNG(SFUNKTION) der Zufallsvariable X

$$F_X : \mathbb{R} \ni x \to Pr[X \leq x] = \sum_{x' \in W_X : x' \leq x} Pr[X = x'] \in [0,1]$$

ERWARTUNGSWERT und VARIANZ

↳ der Zufallsvariable X → was so ca. im Ø rauskommt

$\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x)$$

(Summe über alle x deren Wsk)

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot Pr[X = x]$ konvergiert

Satz 32 Monotonie des Erwartungswertes

X und Y Zufallsvariablen über den Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.
Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

falls gilt:
$a \leq X(\omega) \leq b$,
dann auch $a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$

Remember!

Lemma 24:
$Pr[A \cap B \cap C] =$
$Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C] =$
$Pr[A \cap B] \cdot Pr[C]$

4.2.1 Rechenregeln für den Erwartungswert

$$Y := f(X) = f \circ X$$

wobei: $f : D \to \mathbb{R}$ beliebige Funktion mit $W_X \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$

BEOBACHTE: $f(X)$ ist wieder eine Zufallsvariable

aus $Pr[Y = y] = Pr[\{\omega \mid f(X(\omega)) = y\}] = \sum_{x : f(x) = y} Pr[X = x]$

folgt: $\sum_{x \in \Omega} f(X(\omega)) \cdot Pr[\omega]$

SATZ 33

(Linearität des Erwartungswertes, einfache Version)

für beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$$

SATZ 34

sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$,
Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$$

definition 35

X = Zufallsvariable und A = Ereignis mit $Pr[A] > 0$.
Die bedingte Zufallsvariable $X|A$ besitzt die Dichte

$$f_{X|A}(x) := Pr[X = x \mid A] = \frac{Pr[„X = x" \cap A]}{Pr[A]}$$

Die Definition von $f_{X|A}$ ist zulässig, da

$$\sum_{x \in W_X} f_{X|A}(x) = \sum_{x \in W_X} \frac{Pr[„X = x" \cap A]}{Pr[A]} = \frac{Pr[A]}{Pr[A]} = 1$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}[X|A]$ der Zufallsvariable $X|A$ berechnet sich so:

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_{X|A}(x)$$

~~Satz 3.6~~ SATZ 36 Satz der totalen Erwartung

X = Zufallsvariable
Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ und $Pr[A_1], \ldots, Pr[A_n] > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot Pr[A_i]$$

analog gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot Pr[A_i]$$

4.2.2 VARIANZ

wie stark die Zufallsvariable X um den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ streut

Definition 38:

Für Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die Varianz $Var[X]$ durch:

$$Var[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot Pr[X = x]$$

Größe $\sigma := \sqrt{Var[X]}$ = „STANDARDABWEICHUNG VON X"

SATZ 39:

Für Zufallsvariable X

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

SATZ 41

Für beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X]$$

außerdem:

$$Var[a \cdot X] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2 = a^2 \mathbb{E}[X^2] - (a\,\mathbb{E}[X])^2 = a^2 \cdot Var[X]$$

DEF 42

Für Zufallsvariable X nennen wir $\mathbb{E}[X^k]$ das k-te Moment und $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ das k-te zentrale Moment

Der Erwartungswert ist also identisch zum ersten Moment, während die Varianz dem zweiten zentralen Moment entspricht

4. VORLESUNG

07.05.21

Mehrere Zufallsvariablen

$Pr[X=x, Y=y] = Pr[\{\omega; X(\omega)=x, Y(\omega)=y\}]$

BEMERKUNG:
$Pr[X=x, Y=x] \equiv Pr[\text{„}X=x \wedge Y=y\text{"}]$

Gemeinsame Dichte

$f_{X,Y}(x,y) := Pr[X=x, Y=y]$ der Zufallsvariablen X, Y

$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x,y)$ bzw $f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x,y)$

Randdichte

Ereignisse "$Y=y$" bilden eine Partitionierung des Wahrscheinlichkeitsraumes und es gilt daher:

$$Pr[X=x] = \sum_{y \in W_Y} Pr[X=x, Y=y] = f_X(x)$$

Dichte der einzelnen Zufallsvariablen entsprechen also genau der Randdichte

Für 2 Zufallsvariablen definiert man die gemeinsame Verteilung

$$F_{X,Y}(x,y) = Pr[X \leq x, Y \leq y] = Pr[\{\omega; X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}]$$
$$= \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} f_{X,Y}(x', y')$$

Randverteilung:

$$F_X(x) = \sum_{x' \leq x} f_X(x') = \sum_{x' \leq x} \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x', y')$$

sowie $F_Y(y) = \sum_{y' \leq y} f_Y(y') = \sum_{y' \leq y} \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y')$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ = unabhängig, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt:

$$Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = Pr[X_1 = x_1] = \dots = Pr[X_n = x_n]$$

alternativ: $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$

Bei unabh. ZV:

gemeinsame Dichte = Produkt der Randdichte

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

Satz 46:

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige ZV und $S_1, \dots S_n$ beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$.
Dann sind die Ereignisse „$X_1 \in S_1$", ..., „$X_n \in S_n$" unabhängig

SATZ 47

Seien $f_1, \dots, f_n$ reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$)
Wenn die Zufallsvariablen $X_1, \dots X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$

Zusammengesetzte Zufallsvariablen

Beispiel: Würfel wird 2x geworfen, X bzw. Y Augenzahl (X: 1. Wurf, Y: 2. Wurf)
$\hookrightarrow Z := X + Y$

Für Z gilt z.B.: $Pr[Z=1] = Pr[\emptyset]$
$Pr[Z=4] = Pr[\{1,3\}, \{3,1\}, \{2,2\}] = \frac{3}{36}$

Für Verteilung der Summe zweier unabh. ZV gilt:

Satz 49:

Für 2 unabh. ZV X und Y sei $Z = X + Y$. Es gilt:

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$$

„Faltung" oder „Konvolution" der Dichten f_X und f_Y

MOMENTE ZUSAMMENGESETZTER ZUFALLSVARIABLEN

Satz 50: Linearität des Erwartungswerts

Für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ und $X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n]$$

Satz 52: (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ gilt:

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$$

DEFINITION 53

Zu einem Ereignis A heißt die Zufallsvariable Indikatorvariable der Ereignisses A.

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{falls A eintritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beobachtung

Für I_A gilt nach Definition:

$\mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot Pr[A] + 0 \cdot Pr[\bar{A}] = Pr[A]$ Ebenso: $\mathbb{E}[I_{A_1} \cdot \ldots \cdot I_{A_n}] = Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$

SATZ 54

Für unabhängige ZV $X_1, \dots X_n$ und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt:

$$Var[X] = Var[X_1] + \dots + Var[X_n]$$

ERINNERUNG: Satz 9 - Siebformel

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \dots$$
$$+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] + - \dots$$
$$+ (-1)^{n-1} \cdot Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

WICHTIGE DISKRETE VERTEILUNGEN

→ Funktionen, die von gewissen Parametern abhängen.
Betrachten einer ganzen Familie von ähnlichen Verteilungen

Bernoulli-Verteilung

ZV X mit $W_X = \{0,1\}$ und Dichte $f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x=1 \\ 1-p & \text{für } x=0 \end{cases}$

heißt BERNOULLI-VERTEILT

Parameter p heißt Erfolgswahrscheinlichkeit

Eine solche Verteilung erhält man z.B. bei einer einzelnen Indikatorvariable
Es gilt mit $q := 1-p$

$$\mathbb{E}[X] = p \quad \text{und} \quad Var[X] = pq$$

$$\text{wegen } \mathbb{E}[X^2] = p \text{ und } Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2$$

Binomialverteilung

(Eine Bernoulli-verteilte ZV entspricht der Verteilung einer Indikator-variable.
Häufig: Betrachten von Summen von Indikatorvariablen)

DEFINITION 55

Sei $X := X_1 + \ldots + X_n$ als Summe von n unabhängigen, Bernoulli-verteilten ZV mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p definiert.
X = binomial-verteilt mit Parameter n und p.

$$X \sim Bin(n,p)$$

$W_X = \{0, \ldots, n\}$

Dichte der Binomialverteilung: $f_X(x) = b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

mit $q := 1-p$.

$\mathbb{E}[X] = np$

$Var[X] = npq$

Satz 56

Wenn $X \sim Bin(n_x, p)$ und $Y \sim Bin(n_y, p)$ unabh.
dann gilt für: $Z := X+Y \Rightarrow Z \sim Bin(n_x + n_y, p)$

Geometrische Verteilung

→ Wdh. eines Experiments solange bis Erfolg eintritt.
Gelingt ein einzelner Versuch mit Wsk p, dann ist die Anz. der Versuche bis zum Erfolg geometrisch verteilt

DEF 57:

geom. verteilte ZV X mit Parameter (Erfolgswsk) $p \in (0,1]$ und $q := 1-p$
hat die DICHTE

$f_X(i) = pq^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}$

ERWARTUNGSWERT & VARIANZ

$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$

$Var[X] = \frac{q}{p^2}$