VORLESUNG 7

28.05.2021

KAPITEL II:

kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

Kontinuierliche Zufallsvariablen

DEF 79

Eine kontinuierliche oder auch stetige ZV X und ihr zugrunde liegender kontinuierlicher (reeller) Wahrscheinlichkeitsraum sind definiert durch eine integrierbare Dichte(-funktion) $f_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, die durch Vereinigung $A = \bigcup_k I_k$ abzählbar viele paarweise disjunkter Intervalle beliebiger Art (offen, geschlossen, halboffen, einseitig unendlich) gebildet werden kann, heißt Ereignis. Ein Ereignis A tritt ein, wenn X einen Wert aus A annimmt. Die Wahrscheinlichkeit von A ist bestimmt durch:

$$Pr[A] = \int_A f_X(x)\,dx = \sum_k \int_{I_k} f_X(x)\,dx$$

Postbote sagt er kommt um 12:30
=> wird aber sehr unwahrscheinlich um Punkt 12:30 kommen

=> einteilen in 2 Räume:

$Pr[X = 12{:}00 - 12{:}30] = \frac{1}{2}$

$Pr[X = 12{:}30 - 13{:}00] = \frac{1}{2}$

BEOBACHTUNGEN (Eigenschaften der Verteilungsfunktion)

1. F_X ist monoton steigend
2. F_X ist stetig => „stetige ZV"
3. Es gilt: $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. Jeder (außer an endlich vielen Punkten) differenzierbare Funktion F, welche zuvor genannten Eigenschaften erfüllt, können wir eine Dichte f durch $f(x) = F'(x)$ zuordnen

Es gilt:

$$Pr[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

Bei deren von uns betrachteten Dichten besteht zwischen den Ereignissen „$a < X \leq b$" „$a \leq X \leq b$", „$a \leq X < b$" und „$a < X < b$" kein wesentlicher Unterschied

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_{]a,b]} f(t)\,dt = \int_{[a,b[} f(t)\,dt = \int_{]a,b[} f(t)\,dt$$

„kleiner Exkurs"

1.3 Kolmogorov-Axiome und σ-Axiome

1.3.1 σ-Algebren

DEFINITION 82:

Sei Ω eine Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

(E1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(E2) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann folgt $\bar{A} \in \mathcal{A}$

(E3) Für $n \in \mathbb{N}$, sei $A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Für jede (endliche) Menge Ω stellt die Menge $P(\Omega)$ eine σ-Algebra dar.

Für $\Omega = \mathbb{R}$ ist die Klasse der Borel'schen Mengen, die aus allen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ besteht, welche sich durch abzählbare Vereinigungen und Schnitte von Intervallen (offen, geschlossen, halboffen) darstellen lassen, eine σ-Algebra

1.3.2 Kolmogorov-Axiome

DEFINITION 83: (Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov-Axiome)

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$Pr[.]: \mathcal{A} \to [0,1]$$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. (W1) $Pr[\Omega] = 1$
2. (W2) $A_1, A_2, \ldots$ seien paarweise disjunkte Ereignisse; Dann gilt:

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$$

Für ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt $Pr[A]$ Wahrscheinlichkeit von A.
Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist definiert durch das Tupel $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$

LEMMA 84:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ ein Wahr. Raum. Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, \ldots$ gilt:

1. $Pr[\emptyset] = 0$, $Pr[\Omega] = 1$
2. $0 \leq Pr[A] \leq 1$
3. $Pr[\bar{A}] = 1 - Pr[A]$
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $Pr[A] \leq Pr[B]$

kleiner „Werkzeugkasten"

LEMMA 84 (Additionssatz)

Wenn Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt, so folgt:

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i]$$

analog:

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$$

Für disjunkte A und B:

$$Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$$

1.3.3 Lebesgue-Integrale

Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ = messbar, falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist

z.B ist für jede Borel'sche Menge A die Indikatorfunktion messbar

$$I_A: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in A \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Jede stetige Funktion = messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funk. sind wiederum messbar.

Jede messbare Funk. kann ein Integral, das sogenannte Lebesgue-Integral geschrieben $\int f \, d\lambda$, zuordnen

somit: $\quad A: A \to \int f \cdot I_A \, d\lambda$

= Abbildung auf Borel'sche Menge

1.4 Rechnen mit kontinuierlichen Zufallsvariablen

1.4.1 Funktionen kontinuierlicher Zufallsvariablen

sei $Y := g(X)$ mit einer Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Die Verteilung von Y erhalten wir durch

$$F_Y(y) = \Pr[Y \le y] = \Pr[g(X) \le y] = \int_C f_X(t)\, dt$$

$C := \{t \in \mathbb{R} \mid g(t) \le y\}$ = alle reellen Zahlen, für welche $Y \le y$ gilt

Aus Verteilung F_Y kann nun durch Differenzieren die Dichte f_Y bestimmt werden

$$f_Y = F_Y'$$

Simulation von Zufallsvariablen

Simulation einer ZV X mit Dichte f_X = alg. Erzeugung von Zufallswerten, deren Verteilung der Verteilung von X entspricht.

=> zu simulierende ZV X = stetig im Bildbereich $]0,1[$ und besitzt eine streng monoton wachsende Verteilungsfunktion F_X.

- ZV U = gleichverteilt auf $]0,1[$

Aus unseren Annahmen über F_X folgt, dass es zu F_X eine (eindeutige) inverse Funktion F_X^{-1} gibt mit $F_X(F_X^{-1}(x)) = x$ für alle $x \in]0,1[$

sei nun: $\quad \tilde{X} := F_X^{-1}(U)$

dann gilt:

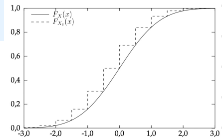
$$\begin{aligned} \Pr[\tilde{X} \le t] &= \Pr[F_X^{-1}(U) \le t] \\ &= \Pr[U \le F_X(t)] \\ &= F_U(F_X(t)) \\ &= F_X(t) \end{aligned}$$

1.4.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen als Grenzwerte diskreter Zufallsvariablen

X = kontinuierliche ZV. Wir können aus X leicht eine diskrete ZV konstruieren, indem wir für ein festes δ definieren:

$$X_\delta = n\delta \iff X \in [n\delta, (n+1)\delta[\quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Für X_δ gilt: $\Pr[X_\delta = n\delta] = F_X((n+1)\delta) - F_X(n\delta)$



Für $\delta \to 0$ nähert sich die Verteilung von X_δ der Verteilung von X immer mehr an

1.4.3 Erwartungswert und Varianz

DEFINITION 88

Erwartungswert einer kontinuierlichen ZV X:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\, dt$$

sofern das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t)\, dt$ endlich ist.

Varianz einer kontinuierlichen ZV X:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t)\, dt$$

wenn $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ existiert

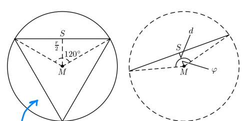
Lemma 89:

sei X eine kontinuierliche ZV, und sei $Y := g(X)$

dann gilt:

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\, dt$$

1.4.4 Laplace-Prinzip in kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen



=> im kontinuierlichen Fall muss die Bedeutung von „gleichwahrscheinlich" nicht immer ganz klar sein

BERTRAND'SCHES PARADOX

Was ist die Wsk, dass die Länge einer zufällig gewählten Sehne die Seitenlänge dieses Dreiecks zu übersteigen?

Beobachtungen:

- Die Seiten des Dreiecks haben Abstand $\frac{r}{2}$ vom Mittelpunkt M.
- Die Lage jeder Sehne ist (bis auf Rotation um M) durch einen der folgenden Parameter festgelegt:
  - Abstand d zum Kreismittelpunkt,
  - Winkel φ mit dem Kreismittelpunkt.

Wir nehmen für jeden dieser Parameter Gleichverteilung an und ermitteln $\Pr[A]$.

1. Sei $d \in [0, r]$ gleichverteilt. A tritt ein, wenn $d < \frac{r}{2}$, und es folgt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.
2. Sei $\varphi \in [0°, 180°]$ gleichverteilt. Für A muss gelten $\varphi \in]120°, 180°]$, und es folgt somit $\Pr[A] = \frac{1}{3}$.

VORLESUNG 8

4.05.2021

2. WICHTIGE STETIGE VERTEILUNGEN

2.1 GLEICHVERTEILUNG

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b \\ 1 & \text{für } x>b \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad Var[X] = \frac{(a-b)^2}{12}$$

2.1 NORMALVERTEILUNG

DEF 91:

ZV X mit $W_X = \mathbb{R}$ = normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ wenn sie folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \varphi(x;\mu,\sigma)$$

Wir schreiben: $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$\mathcal{N}(0,1)$ = Standardnormalverteilung $\Rightarrow$ zugehörige Dichte: $\varphi(x;0,1)$ abgekürzt durch $\varphi(x)$

Verteilungsfunktion zu $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ ist:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \Phi(x;\mu,\sigma)$$

$\Rightarrow$ „GAUß'SCHE Φ FUNKTION"

Lemma 92:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

Satz 93 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte ZV mit $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.
Dann gilt für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$: $Y = aX + b$ normalverteilt mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Sei also X eine beliebige $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$-verteilte ZV und $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$.
Dann gilt nach Satz 93 Y $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Y heißt auch normiert.

Ferner gilt:

$$Pr[a < X \le b] = Pr\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

SATZ 94:

X sei $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt, dann gilt: $\mathbb{E}[X] = 0$, $Var[X] = 1$

ebenso (SATZ 95):

wenn X $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ verteilt $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$

2.3 EXPONENTIALVERTEILUNG

kontinuierliches Analogon zur geometrischen Verteilung (ebenfalls „gedächtnislos")

DEFINITION 96

Eine ZV X heißt exponentiell mit den Parametern λ, $\lambda > 0$, wenn sie die Dichte hat

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die entsprechende Verteilungsfunktion gilt (für $x \ge 0$) — für $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$

$$F(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

analog $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt$ $\Rightarrow$ $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

EIGENSCHAFTEN DER EXPONENTIALVERTEILUNG

- **Satz 97:** (Skalierung exp.vert. Variablen)
  - X = exp.vert. ZV mit λ $\Rightarrow$ Für alle $a > 0$ ist $Y := aX$ wieder exp.verteilt mit Parameter λ/a.
- **Satz 98:** (Gedächtnislosigkeit)
  - Eine (pos) kontin. ZV X mit $W_X = \mathbb{R}^+$ ist genau exp.verteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt:

$$Pr[X > x+y \mid X > y] = Pr[X > y]$$

2.3.2 Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

Erinnerung: Poisson-Verteilung lässt sich als Grenzwert der Binomial-Verteilung darstellen

Wir betrachten eine Folge geometrisch verteilter ZV X_n mit den Parametern $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_n \le k \cdot n$, gleich

$$\Pr[X_n \le kn] = \sum_{i=1}^{kn}(1-p_n)^{i-1} \cdot p_n = p_n \cdot \sum_{i=0}^{kn-1}(1-p_n)^i$$
$$= p_n \cdot \frac{1-(1-p_n)^{kn}}{p_n} = 1 - \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{kn}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$ gilt daher für die ZV $Y_n := \frac{1}{n}X_n$:

$$\lim_{n\to\infty}\Pr[Y_n \le t] = \lim_{n\to\infty}\Pr[X_n \le t \cdot n]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{tn}\right]$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}.$$

Die Folge Y_n der (skalierten) geom. verteilten ZV geht also für $n \to \infty$ in eine exponential verteilte ZV mit Parameter λ über.

3. Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

3.1 Mehrdimensionale Dichte

Beobachtung:

Für 2 kontinuierliche ZV X, Y wird der zugrunde liegende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum über $\mathbb{R}^2$ durch eine integrierbare (gemeinsame) Dichtefunktion $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ mit bestimmt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Für ein Ereignis $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (das aus abzählbar vielen geschlossenen oder offenen Bereichen gebildet sein muss) gilt:

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Unter den Bereich B verstehen wir dabei Mengen der Art:

$$\longrightarrow \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\} \quad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \longleftarrow$$

(dabei können die einzelnen Intervallgrenzen auch „offen" sein bzw. $\pm\infty$)

Analog zum 1D-Fall ordnen wir der Dichte $f_{X,Y}$ eine gemeinsame Verteilung $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ zu:

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr[X \le x, Y \le y] = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

3.2 Randverteilung und Unabhängigkeit

DEFINITION 100:

$f_{X,Y}$ = gemeinsame Dichte von X und Y. Randverteilung von X gegeben durch:

$$F_X(x) = \Pr[X \le x] = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\,dv\right]du$$

Analog Randdichte von X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v)\,dv$$

gilt symmetrisch für Y

DEFINITION 101

Zwei kontinuierliche ZV X und Y heißen unabhängig, wenn für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Pr[X \le x, Y \le y] = \Pr[X \le x] \cdot \Pr[Y \le y]$$

dies bedeutet auch:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

gilt auch analog dazu mit ZV $X_1, \ldots, X_n$

und

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

3.3 Warteprobleme mit der Exponentialverteilung

Warten auf mehrere Ereignisse

Satz 102:

ZV $X_1, \ldots X_n$ unabh. und exp. verteilt mit den Parametern $\lambda_1, \ldots \lambda_n$.
Dann ist auch $X := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

Thank you for studying with me~
good luck ~