Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 7

Tutorium

T7.1 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

T7.2 Begründen Sie: Sind A und B zwei reelle $n \times n$-Matrizen mit

$$A\,B = 0\,, \quad \text{aber} \quad A \neq 0 \text{ und } B \neq 0\,,$$

so gilt $\det(A) = 0 = \det(B)$.

T7.3 Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mittels der Leibniz'schen Formel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

T7.4 Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ über einem Körper K heißt

(i) **nilpotent**, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^k = 0$;

(ii) **idempotent**, wenn $A^2 = A$ gilt;

(iii) **selbstinvers** (oder Involution), wenn $A^2 = E_n$ gilt.

(a) Bestimmen Sie, welche Werte die Determinante einer Matrix A annehmen kann, die (i) nilpotent, bzw. (ii) idempotent, bzw. (iii) selbstinvers ist.

(b) Geben Sie für jede der drei Eigenschaften ein Beispiel für eine Matrix in $K^{2\times 2} \setminus \{0, E_2\}$ an, die diese Eigenschaft erfüllt.

Zusätzliche Übungen

Z7.1 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede Matrix

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit n Zeilen und n Spalten und reellen Zahlen $a_{i,j}$ (an i-ter Zeile und j-ter Spalte) wird die *Permanente* $\operatorname{per}(A)$ von A als $\operatorname{per}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ definiert.

a) Geben Sie $\operatorname{per}(A)$ explizit für $n = 2$ und $n = 3$ an.

b) Familientreffen der ehrenwerten Gesellschaft im Ristorante „Omertà", Portici, Provinz Neapel. Teilnehmer:

1. Gaetano Finocchio, genannt „Il Padrino" (Mafia Catanese),
2. Consolato Froce, genannt „Il Buco" (N'dragata, Reggio Calabria),
3. Guglielmo Ruffiano, genannt „Uilli" (Camorra Napoletana).

Die Tür geht auf, der schreckliche Arrigo Bonisoli, genannt „Sole" (Potenza, Basilicata), Bruder des fürchterlichen Andrea Bonisoli, genannt „La Tazza" (Mantova, Lombardia), erscheint. Obwohl Sole heute nur eine kleine Faustfeuerwaffe bei sich trägt und eigentlich nur um Feuer für seine Zigarette bitten will, entlädt sich die Spannung des Familientreffens in einer wilden Schießerei. Gleichzeitig schießt jeder der Teilnehmer auf einen der Teilnehmer, in der Rage des Gefechts eventuell auch auf sich selbst. Jeder Schuß ist tödlich. Möglicherweise wird ein Teilnehmer durch mehrere Schüsse niedergestreckt. Die Wahrscheinlichkeit, daß Teilnehmer Nr. i auf Teilnehmer Nr. j ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) schießt, bezeichnen wir mit $p_{i,j}$. Sole rettet sich durch einen Sprung durch die Tür. Aus der intimen Kenntnis der Familienverhältnisse gehen wir von den folgenden Mordwahrscheinlichkeiten aus:

$$A = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Sole ist kaltblütig genug, nach dem Abklingen der Ballerei den Raum nochmals zu betreten, um um Feuer zu bitten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er wegen des Ablebens aller Teilnehmer der Versammlung niemanden mehr um Feuer bitten kann?

Z7.2 Ermitteln Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 38 & 7 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7^{44} & 0 \\ \frac{22}{23} & 5 & \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -102 & 8^e & e^8 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = A^\top B^{-1}.$$

Z7.3 Bestimmen Sie die Determinante der folgenden *Tridiagonalmatrizen*

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathrm{i} \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Zusatzfrage: Was haben Kaninchenpaare damit zu tun?

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `http://www.moodle.tum.de`

T7.1 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

① $|A|$. $2\times 5 - 3\times 7 = 10 - 21 = -11$

② $|B|$. $5 + 0 + (-12) - (-7) - 6$
$= 5 - 12 + 7 - 6$
$= -6$

定义

③ $|C|$. $1\times \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5\times \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$
$= 5 \times 10 \times 8 = 400$

→ 代余法

④ $|D|$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$2 - \frac{5}{3}\times 8$
$\frac{5}{3}$ $= 2 - \frac{40}{3}$
$\frac{5}{3}\times 2 = \frac{10}{3}$ $= \frac{6-40}{3}$
$7 - \frac{10}{3} = \frac{11}{3}$ $= \frac{-34}{3}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 & 6 \\ \frac{11}{3} & 0 & -\frac{34}{3} & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $3 - \frac{5}{3}\times 6 =$

→ 技巧

$= 3\times \begin{vmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{34}{3} & -7 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3\times \frac{11}{3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 11 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 11 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 11 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

计算 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

① $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$: 行列式变号

② $\begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ a & b \end{vmatrix}$

因为 $\lambda[c \; \cdots]$ 行列式变为 λ倍

③ 矩阵乘λ ⇒ 每行乘λ: λ^n倍

④ $\begin{vmatrix} c-a & d-b \end{vmatrix}$

$= 11 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 11 \times (-1) \times 4 = -44$

$\begin{vmatrix} a & b \end{vmatrix}$

不多

D 是 Block-Matrix

$\begin{matrix} A & \\ & B \end{matrix}$

$|A|\,|B| = (-11) \times (-6) = 66$

归纳：$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a_{12} = 2$

A_{12} 是 a_{12} 的代数余子式

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

且 $|B| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

T7.2 Begründen Sie: Sind A und B zwei reelle $n \times n$-Matrizen mit

$$AB = 0\,, \quad \text{aber} \quad A \neq 0 \text{ und } B \neq 0\,,$$

so gilt $\det(A) = 0 = \det(B)$.

Widerspruchsbeweis:

若 $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar

$\Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}B$

$\Rightarrow B = 0$ 而 $B \neq 0$.

矛盾

$\Rightarrow \det(A) = 0$

同理 $\det(B) = 0$

$|AB| = |0| = 0$

$|A|\,|B| = 0$

$|A| = 0$ 或 $|B| = 0$

若 $|A| = 0$. 那

说明A可逆

$|A| = 0$

A不可逆

又 $AB = 0$

$A^{-1}AB = A^{-1} \cdot 0$

$B = 0$

$|B| = 0$

若 $|B| = 0$ 那同理 $|A| = 0$

$\Rightarrow \det(A) = \det(B) = 0$

T7.3 Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mittels d

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Leibniz

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)} ,$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

1 2 3 4

↓

mapping

每一行选一个乘，为了使结果非0. 必须每行选非0

* 求行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{vmatrix} = abc\,|d|$$

一定要注意符号

$(1,2,3,4) \to (3,4,2,1)$

$sgn(6) = (-1)^5 = (-1)$

$= -abd$

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $12 \nearrow$ $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

$(-1)^0$ $(-1)^2$

$\sum (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22}$ $(-1)^{-1} a_{12} a_{21}$

$A \neq 0$

$AA \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1}$

$A = E_n$

T7.4 Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ über einem Körper K heißt

(i) **nilpotent**, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^k = 0$;

(ii) **idempotent**, wenn $A^2 = A$ gilt; $|A| = 0$

(iii) **selbstinvers** (oder Involution), wenn $A^2 = E_n$ gilt.

(a) Bestimmen Sie, welche Werte die Determinante einer Matrix A annehmen kann, die (i) nilpotent, bzw. (ii) idempotent, bzw. (iii) selbstinvers ist.

(b) Geben Sie für jede der drei Eigenschaften ein Beispiel für eine Matrix in $K^{2\times 2} \setminus \{0, E_2\}$ an, die diese Eigenschaft erfüllt.

(a) (i) $A^k = 0$

$k \neq 0$

$\Rightarrow |A|^k = 0$

$|A| = 0$

(ii) $A^2 = A$

①若 $|A| = 0$

如 $A = 0$ 满足

②若 $|A| \neq 0$ A 可逆

$\underbrace{A^{-1} \cdot A} \cdot A = \cancel{A^{-1}} A$

$A = E_n$.

即 $|A| = 1$

$\Rightarrow |A| = 0$ 或 1

zB $A = 0$ 或 E_n 或 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(iii) $A^2 = E_n$

$|A^2| = |E_n|$

$\Rightarrow |A|^2 = 1$

$|A| = \pm 1$

$|A| = -1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b)

(i) **nilpotent**, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^k = 0$;

(ii) **idempotent**, wenn $A^2 = A$ gilt;

(iii) **selbstinvers** (oder Involution), wenn $A^2 = E_n$ gilt.

(i)

$|A| = 0$

(ii)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

(iii)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

$(0\ 1)$ $(0\ 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 7

Tutorium

T7.1 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung T7.1: (a) Wir benutzen die Formel für 2×2-Matrizen:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11.$$

(b) Wir benutzen die Formel für 3×3-Matrizen (Sarrus-Regel):

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 5 + 0 + (-12) - 0 - (-7) - 6 = -6.$$

(c) Da C eine obere Dreiecksmatrix ist, ist $\det(C)$ das Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400.$$

(d) Die Matrix D ist eine Block-Matrix mit der quadratischen Matrix A oben links, der quadratischen Matrix B unten rechts, und einem 3×2-Nullblock unten links. In diesem Fall ist $\det(D) = \det(A) \cdot \det(B)$:

$$\det(D) = \det \begin{pmatrix} & A & * & * & * \\ & & * & * & * \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & B & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B) = (-11) \cdot (-6) = 66.$$

T7.2 Begründen Sie: Sind A und B zwei reelle $n \times n$-Matrizen mit

$$A\,B = 0\,, \quad \text{aber} \quad A \neq 0 \text{ und } B \neq 0\,,$$

so gilt $\det(A) = 0 = \det(B)$.

Lösung T7.2: Angenommen, es gilt $\det(A) \neq 0$. In diesem Fall ist die Matrix A invertierbar, und aus der Gleichung $A\,B = 0$ folgt durch Kürzen von A die Gleichung $B = 0$ – ein Widerspruch. Also gilt $\det(A) = 0$. Analog folgt $\det(B) = 0$.

T7.3 Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mittels der Leibniz'schen Formel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Lösung T7.3: Es gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\,,$$

wobei $S_4 = \{\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\} \,|\, \sigma \text{ ist bijektiv}\}$. Bei der Leibniz'schen Formel sind natürlich nur die Summanden $\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}$ zu berücksichtigen, bei denen die Faktoren $a_{1\,\sigma(1)}$, $a_{2\,\sigma(2)}$, $a_{3\,\sigma(3)}$, $a_{4\,\sigma(4)}$ von null verschieden sind.
Nun ist $a_{1\,\sigma(1)}$ höchstens dann von null verschieden, wenn $\sigma(1) = 3$ gilt, da dann $a_{1\,\sigma(1)} = a$ erfüllt ist. Analog erhält man $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 1$.
Damit gilt

$$\det(A) = \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\,,$$

wobei

$$\sigma : (1,\, 2,\, 3,\, 4) \mapsto (3,\, 4,\, 2,\, 1)\,.$$

Diese Permutation σ hat offenbar das Signum -1, somit gilt

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^5 = -1\,.$$

Damit erhalten wir

$$\det(A) = -a\,b\,c\,d\,. <$$

T7.4 Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ über einem Körper K heißt

(i) **nilpotent**, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^k = 0$;

(ii) **idempotent**, wenn $A^2 = A$ gilt;

(iii) **selbstinvers** (oder Involution), wenn $A^2 = E_n$ gilt.

(a) Bestimmen Sie, welche Werte die Determinante einer Matrix A annehmen kann, die (i) nilpotent, bzw. (ii) idempotent, bzw. (iii) selbstinvers ist.

(b) Geben Sie für jede der drei Eigenschaften ein Beispiel für eine Matrix in $K^{2\times 2} \setminus \{0, E_2\}$ an, die diese Eigenschaft erfüllt.

Lösung T7.4: (a)

(i) Es sei A nilpotent, d. h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Dann folgt aus der Multiplikativität der Determinante:

$$\det(A)^k = \det(A^k) = \det(0) = 0,$$

und somit $\det(A) = 0$.

(ii) Es sei A idempotent, d. h. es gilt $A^2 = A$. Dann folgt aus der Multiplikativität der Determinante:

$$\det(A)^2 = \det(A^2) = \det(A),$$

und somit $\det(A) \in \{0, 1\}$, da die Gleichung $x^2 = x$ über einem Körper K die Lösungsmenge $\{0, 1\}$ hat.

Die idempotenten Matrizen $A = 0$ bzw. $A = E_n$ zeigen, dass beide Werte 0 und 1 auch wirklich vorkommen als Determinanten von idempotenten Matrizen.

(iii) Es sei A selbstinvers, d. h. A ist invertierbar und es gilt $A = A^{-1}$. Dann folgt aus der Multiplikativität der Determinante:

$$\det(A)^2 = \det(A^2) = \det(E_n) = 1,$$

und somit $\det(A) \in \{-1, 1\}$, da die Gleichung $x^2 = 1$ über einem Körper K die Lösungsmenge $\{-1, 1\}$ hat.

Die selbstinversen Matrizen $A = E_n$ bzw. $A = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ zeigen, dass beide Werte 1 und -1 auch wirklich vorkommen als Determinanten von selbstinversen Matrizen.

(b) Zum Beispiel: (i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (iii) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Zusätzliche Übungen

Z7.1 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede Matrix

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit n Zeilen und n Spalten und reellen Zahlen $a_{i,j}$ (an i-ter Zeile und j-ter Spalte) wird die *Permanente* $\mathrm{per}(A)$ von A als $\mathrm{per}(A) := \sum\limits_{\sigma\in S_n} \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ definiert.

a) Geben Sie $\mathrm{per}(A)$ explizit für $n = 2$ und $n = 3$ an.

b) Familientreffen der ehrenwerten Gesellschaft im Ristorante „Omertà", Portici, Provinz Neapel. Teilnehmer:

1. Gaetano Finocchio, genannt „Il Padrino" (Mafia Catanese),
2. Consolato Froce, genannt „Il Buco" (N'dragata, Reggio Calabria),
3. Guglielmo Ruffiano, genannt „Uilli" (Camorra Napoletana).

Die Tür geht auf, der schreckliche Arrigo Bonisoli, genannt „Sole" (Potenza, Basilicata), Bruder des fürchterlichen Andrea Bonisoli, genannt „La Tazza" (Mantova, Lombardia), erscheint. Obwohl Sole heute nur eine kleine Faustfeuerwaffe bei sich trägt und eigentlich nur um Feuer für seine Zigarette bitten will, entlädt sich die Spannung des Familientreffens in einer wilden Schießerei. Gleichzeitig schießt jeder der Teilnehmer auf einen der Teilnehmer, in der Rage des Gefechts eventuell auch auf sich selbst. Jeder Schuß ist tödlich. Möglicherweise wird ein Teilnehmer durch mehrere Schüsse niedergestreckt. Die Wahrscheinlichkeit, daß Teilnehmer Nr. i auf Teilnehmer Nr. j $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ schießt, bezeichnen wir mit $p_{i,j}$. Sole rettet sich durch einen Sprung durch die Tür. Aus der intimen Kenntnis der Familienverhältnisse gehen wir von den folgenden Mordwahrscheinlichkeiten aus:

$$A = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Sole ist kaltblütig genug, nach dem Abklingen der Ballerei den Raum nochmals zu betreten, um um Feuer zu bitten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er wegen des Ablebens aller Teilnehmer der Versammlung niemanden mehr um Feuer bitten kann?

Lösung Z7.1: a) Im Fall $n = 2$ ergibt sich

$$\mathrm{per}(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1},$$

und im Fall $n = 3$ erhält man

$$\mathrm{per}(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}$$

(der i-te Summand „gehört zu" σ_i).

b) Bei der Ballerei erschießt der Mafiosi Nr. i den Mafiosi Nr. $\sigma(i)$. Da wir am Ableben aller Mafiosi interessiert sind, wollen wir, daß die Abbildung $i \to \sigma(i)$ eine Permutation ist, also $\sigma \in S_3$. Von den insgesamt $3^3 = 27$ möglichen Schießereien führen also $3! = 6$ Stück zum Tode aller Beteiligten. Alle Permutationen mit Fixpunkten stehen dabei für die Selbsterschießungen einiger Mafiosi, die Identität für den gemeinschaftlich begangenen Selbstmord. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mafiosi Nr. i den Mafiosi Nr. $\sigma(i)$ erschießt, ist $p_{i,\sigma(i)}$. Die durch die Permutation σ beschriebene Ausrottung der Anwesenden passiert also mit der Wahrscheinlichkeit $\omega_\sigma = \prod_{i=1}^{3} p_{i,\sigma(i)}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der 3 überlebt, ist also:

$$\Omega_\dagger = \sum_{\sigma \in S_3} \omega_\sigma = \sum_{\sigma \in S_3} \prod_{i=1}^{3} p_{i,\sigma(i)} = \operatorname{per}(A).$$

Nun rechnet man mit Hilfe von a) nach: $\operatorname{per}(A) = 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,17$.

Z7.2 Ermitteln Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 38 & 7 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7^{44} & 0 \\ \frac{22}{23} & 5 & \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -102 & 8^e & e^8 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = A^\top B^{-1}.$$

Lösung Z7.2: Wir entwickeln bei der Matrix A zunächst nach der dritten Spalte und berechnen dann die Determinante der verbleibenden 3×3 Matrix mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 38 & 7 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3) \left|\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{array}\right|$$
$$= (-3) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(4 \cdot 5 - 3 \cdot 5) = (-3) \cdot 5 = -15.$$

Hierbei haben wir im vorletzten Schritt nochmals eine Blockstruktur verwendet und dann die Determinante von 2×2 Matrizen.
Um $\det(B)$ zu berechnen, verwenden wir mehrfach die Regel dass die Determimante einer Block-Dreiecksmatrix dass Produkt der Determinanten der Diagonalblöcke ist, wobei hier in jedem Schritt einer der Diagonalblöcke nur eine 1×1 Matrix ist:

$$\det(B) = \left|\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 7^{44} & 0 \\ \frac{22}{23} & 5 & \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -102 & 8^e & e^8 & 10 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 7^{44} \\ \frac{22}{23} & 5 & \sqrt{\pi} \\ \hline 0 & 0 & 6 \end{array}\right| \cdot 10 = \left|\begin{array}{c|c} -3 & 0 \\ \hline \frac{22}{23} & 5 \end{array}\right| \cdot 6 \cdot 10$$
$$= (-3) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 = -900.$$

Um die Determinante von $C = A^\top B^{-1}$ zu berechnen, können wir die bereits bestimmten Ergebnisse benutzen ohne C explizit berechnen zu müssen:

$$\det(C) = \det(A^\top B^{-1}) = \det(A^\top)\det(B^{-1}) = \det(A)\det(B)^{-1} = \frac{-15}{-900} = \frac{1}{60}.$$

Z7.3 Bestimmen Sie die Determinante der folgenden *Tridiagonalmatrizen*

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathrm{i} \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Zusatzfrage: Was haben Kaninchenpaare damit zu tun?

Lösung Z7.3: Wir bezeichnen die Determinante der angegebenen $n \times n$-Matrix mit f_n. Durch Entwickeln nach der ersten Zeile ergibt sich

$$f_n = f_{n-1} - \mathrm{i} \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathrm{i} \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} = f_{n-1} - \mathrm{i}^2 f_{n-2} = f_{n-1} + f_{n-2}$$

mit den Randbedingungen $f_0 = f_1 = 1$. Die Zahlen f_n sind die *Fibonacci-Zahlen* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$, die Leonardo Pisano, genannt *Fibonacci*, in seinem Rechenbuch (*Liber abbaci*, 1202) einführte als Anzahl der Kaninchenpaare nach n Monaten, wenn man mit einem Kaninchenpaar startet und annimmt, dass jedes Paar ab dem zweiten Lebensmonat jeden Monat ein neues Paar in die Welt setzt (und niemals stirbt).