Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 2

Tutorium

T2.1 Bilden Sie – sofern möglich – mit den folgenden Matrizen und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Ausdrücke

$$A+C, \quad 2B, \quad A(y+z), \quad C(-4z), \quad (A+C)y, \quad AB, \quad BA, \quad AC^\top, \quad A^2, \quad B^2, \quad x^\top A, \quad y^\top z, \quad yz^\top.$$

T2.2 Bestimmen Sie in (a)-(c) die Inversen der angegebenen Matrizen bzw. begründen Sie dass die Matrizen nicht invertierbar sind. Überlegen Sie in (d)-(g) wie Sie die Inversen der Matrizen bestimmen könnten, ohne die Rechnungen durchzuführen und ohne nochmals den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

(a) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D := AB$, (e) $E := A^\top$, (f) $F = ((A^{-1}B^{-1})^\top)^{-1}$ (g) $G = 3A$.

Zur Selbstkontrolle: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, C n. inv., $B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^\top$, $(B^{-1})^\top(A^{-1})^\top$, $\frac{1}{3}A^{-1}$.

T2.3 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Zur Selbstkontrolle: a) 2, b) 0, c) 2, d) 3

T2.4 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

(a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 2 \\ -9x_1 + 15x_2 &= -6 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= -21 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 &= 10 \\ -6x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 10x_4 &= -22 \end{aligned}$$

Zur Selbstkontrolle: a) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$, b) $L = \left\{ (1, 0, -2, 1)^\top \right\}$

Zusätzliche Übungen

Z2.1

(a) Ist das Inverse einer invertierbaren symmetrischen Matrix wieder symmetrisch ?

(b) Folgt aus der Invertierbarkeit einer Matrix A stets die Invertierbarkeit der Matrix $A^\top$?

(c) Ist die Summe invertierbarer Matrizen stets invertierbar?

(d) Ist das Produkt invertierbarer Matrizen stets invertierbar?

Z2.2 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ und $(2A)^{-1}$.

(b) Ist $A+B$ invertierbar?

Z2.3 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & -8 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & & & = & 2 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & = & 6 \end{array}$$

Z2.4 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Z2.5 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} r \cdot x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & r \cdot y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & r \cdot z & = & 1 \end{array}$$

Tipp: Achten Sie darauf Fallunterscheidungen so lange wie möglich zu vermeiden!

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `http://www.moodle.tum.de`

Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 2

Tutorium

T2.1 Bilden Sie – sofern möglich – mit den folgenden Matrizen und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \ \text{und} \ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Ausdrücke

$$A+C, \quad 2B, \quad A(y+z), \quad C(-4z), \quad (A+C)y, \quad AB, \quad BA, \quad AC^\top, \quad A^2, \quad B^2, \quad x^\top A, \quad y^\top z, \quad yz^\top.$$

Lösung T2.1:

$$A+C = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \qquad 2B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} \qquad A(y+z) = Ay + Az = \begin{pmatrix} -31 \\ 41 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$C(-4z) = -4Cz = \begin{pmatrix} -44 \\ 16 \\ -76 \end{pmatrix} \ (A+C)y = Ay + Cy = \begin{pmatrix} -43 \\ 37 \\ -34 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} -3 & -21 \\ 13 & -7 \\ 2 & -35 \end{pmatrix} \qquad BA \text{ nicht}$$

$$\text{definiert } AC^\top = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 9 \\ 8 & -2 & 17 \\ 19 & -10 & 22 \end{pmatrix} \qquad A^2 \text{ nicht definiert} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 49 \end{pmatrix} \qquad x^\top A = \begin{pmatrix} 2 & -17 \end{pmatrix}$$

$$y^\top z = 14 \qquad yz^\top = \begin{pmatrix} 24 & 16 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}.$$

T2.2 Bestimmen Sie in (a)-(c) die Inversen der angegebenen Matrizen bzw. begründen Sie dass die Matrizen nicht invertierbar sind. Überlegen Sie in (d)-(g) wie Sie die Inversen der Matrizen bestimmen könnten, ohne die Rechnungen durchzuführen und ohne nochmals den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

(a) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D := AB$, (e) $E := A^\top$, (f) $F = \left[((A^{-1}B^{-1})^\top)^{-1}\right]^{-1}$ (g) $G = 3A$.

求逆

(a) 以B为例

3

2

$= (A^{-1}B^{-1})^T$
$= (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

$G^{-1} = (3A)^{-1}$
$= \frac{1}{3} \cdot A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1.5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \cancel{0.5}\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$0 \quad 0 \quad 0.5 \quad -1.5 \quad 0 \quad 1$

(b) Der Gauß-Algorithmus ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

also $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) Umformen der Matrix $(C|E_3)$ mit dem Gauß-Algorithmus ergibt für den linken Teil z.B.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\text{rg}(C) = 2$. Also ist C nicht invertierbar.

(d) Wegen $D^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ können wir D^{-1} mit den Ergebnissen aus (a) und (b) als Matrixprodukt ausrechnen.

(e) Wegen $E^{-1} = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ können wir E^{-1} mit dem Ergebnissen aus (a) durch transponieren berechnen.

(f) Wegen $F^{-1} = (((A^{-1}B^{-1})^\top)^{-1})^{-1} = ((A^{-1}B^{-1})^\top) = (B^{-1})^\top (A^{-1})^\top$ können wir auch hier Teilergebnisse anwenden.

(g) Es gilt $G^{-1} = (3A)^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1}$.

T2.3 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Lösung T2.3:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II-4I} \end{matrix}$$

Der Rang der Matrix ist somit 2.

(b) Die Nullmatrix besitzt den Rang 0.

(c) Der Rang einer Matrix ändert sich nicht durch Zeilenvertauschung. Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II + I} \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III + II} \end{matrix}$$

Der Rang der Matrix ist somit 2.

(d)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II + 2I} \\ \text{III + 3I} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III -}\frac{10}{7}\text{II} \end{matrix}$$

Die Matrix besitzt somit den Rang 3.

T2.4 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & = & 2 \\ -9x_1 & + & 15x_2 & = & -6 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -12 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 5x_4 & = & -21 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 10 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & + & 13x_3 & + & 10x_4 & = & -22 \end{array}$$

Lösung T2.4:

(a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 2 \\ -9 & 15 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \text{II + 3I} \end{matrix}$$

Damit gilt $x_2 = s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}s$, also $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -4 & 3 & 6 & -5 & -21 \\ 2 & -2 & -1 & 6 & 10 \\ -6 & 6 & 13 & 10 & -22 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 22 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \text{II - 2I} \\ \text{III + I} \\ \text{IV - 3I} \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 13 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \text{III + II} \\ \text{IV - 3II} \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{IV - 2III} \end{matrix}$$

Damit gilt $x_4 = 1 \;\Rightarrow\; x_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2 \;\Rightarrow\; x_2 = 3 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 6 - 2 - 3 = 1$, also $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Zusätzliche Übungen

Z2.1

(a) Ist das Inverse einer invertierbaren symmetrischen Matrix wieder symmetrisch?

(b) Folgt aus der Invertierbarkeit einer Matrix A stets die Invertierbarkeit der Matrix $A^\top$?

(c) Ist die Summe invertierbarer Matrizen stets invertierbar?

(d) Ist das Produkt invertierbarer Matrizen stets invertierbar?

Lösung Z2.1: Wir begründen die Aussagen bzw. geben Gegenbeispiele an:

(a) Die Aussage ist wahr.
Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erhält man aus der Symmetrie der Einheitsmatrix

$$\left(A^{-1}A\right)^\top = E_n^\top = E_n,$$

also $A^\top \left(A^{-1}\right)^\top = E_n$ und damit $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$ und wenn A symmetrisch ist

$$\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1} = A^{-1}.$$

(b) Die Aussage ist wahr.
A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = E_n$, also $(A^{-1})^\top A^\top = E_n$, sodass $(A^{-1})^\top$ das Inverse von $A^\top$ ist.

(c) Die Aussage ist falsch.
E_n und $-E_n$ sind invertierbar, ihre Summe $E_n - E_n = n \times n$-Nullmatrix aber nicht.

(d) Die Aussage ist wahr.
$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = E_n$, also $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Z2.2 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ und $(2A)^{-1}$.

(b) Ist $A + B$ invertierbar?

Lösung Z2.2: Es gilt

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/4 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5/4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5/4 & 1/2 \\ 3 & -7/4 & -1/2 \\ 2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2A)^{-1} = \tfrac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/8 & -1/4 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} .\text{Wir rechnen: } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6/5 & -7/5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A+B) = 2 \neq 3 \;\Rightarrow\; A+B \text{ nicht invertierbar.}$$

Z2.3 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & -8 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & = & 6 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & & & = & 2 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Lösung Z2.3:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 8 & 2 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & 3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II - 2I} \\ \text{III + I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III - 4II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I - }\frac{1}{7}\text{III} \\ \text{II + }\frac{1}{7}\text{III} \\ \frac{1}{7}\text{III} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{2}\text{I} \\ \frac{1}{2}\text{II} \\ \\ \end{array}$$

Damit gilt $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$, sodass $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & -4 \\ 5 & 5 & 11 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II - 2I} \\ \text{III - 5I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III - II} \end{array}$$

Damit gilt $0 = 1$, d. h., es gibt keine Lösung, $L = \emptyset$.

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II + I} \\ \text{III - I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III - II} \end{array}$$

Damit ist x_3 frei wählbar, $x_3 = s$, $s \in \mathbb{R}$. Aus der zweiten Zeile folgt: $x_2 + x_3 = 1 \;\Leftrightarrow\; x_2 + s = 1 \;\Leftrightarrow\; x_2 = 1 - s$.

Aus der ersten Zeile folgt: $3x_1 - 5x_2 + x_3 = -1 \;\Leftrightarrow\; 3x_1 - 5(1-s) + s = -1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{4}{3} - 2s$.

Somit gilt $x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - 2s \\ 1 - s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$.

Z2.4 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung Z2.4:

(a)

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II+2I} \end{matrix}$$

Der Rang der Matrix ist somit 1.

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alle drei Spalten der Matrix stimmen überein und sind nicht der Nullvektor. Somit besitzt die Matrix den Rang 1.

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II - 2I} \\ \text{III - 3I} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III - 2I} \end{matrix}$$

Der Rang der Matrix ist somit 2.

(d) Der Rang einer Matrix ändert sich nicht durch Zeilenvertauschung. Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II - 2I} \\ \\ \end{matrix}$$

Die Matrix besitzt somit den Rang 3.

Z2.5 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} r \cdot x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & r \cdot y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & r \cdot z & = & 1 \end{array}$$

Tipp: Achten Sie darauf Fallunterscheidungen so lange wie möglich zu vermeiden!

Lösung Z2.5: Indem wir die oberen zwei Zeilen tauschen, sparen wir uns die unnötige Fallunterscheidung, ob $r = 0$ ist oder nicht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r \quad -1 \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1-r^2 & 1-r & 1-r \\ 0 & 1-r & r-1 & 0 \end{array}\right) \quad (*)$$

Jetzt machen wir Fallunterscheidungen:
<u>1. Fall:</u> $r = 1$. Dann lautet $(*)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In diesem Fall gibt es also unendlich viele Lösungen (genauer: zwei freie Parameter) und man liest die Lösungsmenge ab:

$$L = \{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

<u>2. Fall:</u> $r \neq 1$. Dann können wir in $(*)$ die 2. und 3. Zeile durch $1-r$ dividieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1-r^2 & 1-r & 1-r \\ 0 & 1-r & r-1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (1-r)^{-1} \\ \mid \cdot (1-r)^{-1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1+r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Hier machen wir wieder eine Zeilenvertauschung und rechnen weiter:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+r & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(1+r) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+r & 1 \end{array}\right).$$

<u>Fall 2.1:</u> $r = -2$. Dann ist $L = \emptyset$.

<u>Fall 2.2:</u> $r \neq -2$. Dann gibt es genau eine Lösung: $L = \{ \frac{1}{2+r} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.