Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 12

Tutorium

$m \times n$

T12.1 Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv semidefinit, falls $v^\top M v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass eine positiv semidefinite Matrix nur nichtnegative Eigenwerte besitzt.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix $A^\top A$ nur nichtnegative Eigenwerte besitzt.

(a) 若有 λ 对应 v_0 是 $M v_0 = \lambda v_0$

由题 $v^T M v \geq 0 \quad \forall v$

$\Rightarrow$ 对 $v = v_0$ 也成 $v_0^T M v_0 \geq 0$

$v_0^T \lambda v_0 \geq 0$

$\lambda v_0^T v_0 \geq 0$

$\lambda \|v_0\|^2 \geq 0$

v_0 nicht null

$\Rightarrow \lambda \geq 0$

(b) A^TA 也成 若有: $\lambda \Rightarrow v_0$

定义 $[A^TA v_0 = \lambda v_0]$

A^TA 是 posivitive …

to prove: $v^T A^T A v \geq 0$ für alle v 由

考虑 Av $\quad (Av)^T A v \geq 0$

$\|Av\|^2 \geq 0$

matrix mul vektor = vektor.

T12.2 Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegungen der Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$2\times 2 \; 3\times 3$

$B = U \Sigma V^T$

$2\times 3 \quad 2\times 3 \quad 3\times 3$

3×2

$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$BB^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$2\times 3 \; 3\times 2$

$= \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$B = U \Sigma V^T$

$B^T = V \Sigma^T U^T$

$B \cdot B^T = U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T$

$= U \Sigma \Sigma^T U^T$

向量

$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$

$54 - 15\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$

$\lambda = \frac{15 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2}$

$= \frac{20}{2} \quad \frac{10}{2} \to 5$

10 大

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

反向:

Nun bestimmen wir noch U:

$\Rightarrow (1) \rightarrow u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$u_1 = \tfrac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sigma_2} A v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ergänze } u_3 = u_1 \times u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$

und erhalte

$$U = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Singulärwertzerlegung von A ist nun gegeben durch $A = U \Sigma V^\top$.

(b) (1) Für die Singulärwerte der Matrix B berechnen wir die Eigenwerte von $B^\top B$ mit

$$B^\top B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

ziehen daraus die Wurzeln und ordnen die Ergebnisse in absteigender Reihenfolge. Für das charakteristische Polynom ergibt sich

$3\times2 \quad 3\times3 \quad 3\times2 \quad 2\times2$

(a) $A = U \Sigma V^T$ 其结

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$U \Sigma V^T \cdot V \Sigma^T U^T = U \Sigma \Sigma^T U^T$

$A A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$3\times2 \quad 2\times3 \Rightarrow 3\times3$

$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 18-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \cdot |18-\lambda|$

$= [(2-\lambda)^2 - 4] \cdot (18-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 18 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 0$

★ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

★ $\sqrt{4} = 2$

对 $\lambda_1 = 18$ 来说

$(A + \lambda E) v = 0$

$\begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 \\ 2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$3\times3 \quad 3\times1 \quad 3\times1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

对 $\lambda_2 = 4$ 来说

$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

对 $\lambda_3 = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Damit erhalten wir Matrix V, in deren Spalten die Eigenvektoren stehen.

$$V = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Wir bestimmen schließlich die Matrix U:

$$u_1 = \tfrac{1}{\sigma_1} B v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sigma_2} B v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$U = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Als Singulärwertzerlegung ergibt sich schließlich

$$B = U \Sigma V^\top = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

T12.3 Berechnen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Lösung T12.3:

$$\|A\|_1 = 12 \quad (\text{max. Spaltensumme})\,, \ \|A\|_\infty = 11 \quad (\text{max. Zeilensumme})\,.$$

T12.4 Berechnen Sie die Spektralnormen der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung T12.4: Die Spektralnorm einer symmetrischen Matrix ist der Betrag des betragsgrößten Eigenwerts der Matrix. Wir berechnen also zunächst die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(3+\lambda) + (-4) + (-4) - (-4\lambda - 4\lambda - 3 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 5 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda - 5)\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Eigenwerte 1 sowie -2 ± 3, also 1 und -5. Natürlich ist -5 damit der *betrags*größte Eigenwert der Matrix A, also ist die Spektralnorm

$$\|A\|_2 = |-5| = 5\,.$$

Für die Spektralnorm berechnen wir die Eigenwerte von B. Es gilt:

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda)\,.$$

Die Eigenwerte von B sind also 2 und 4, der betragsgrößte Eigenwert ist 4. Damit folgt $\|B\|_2 = 4$.

T12.5 Bestimmen Sie die Definitheit der folgenden Matrizen!

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(e) $E = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$,

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Lösung T12.5: (a) Wegen $\det(A) < 0$ ist A indefinit.
(b) Wegen $\det(B) > 0$ und $\mathrm{Spur}(B) > 0$ ist B positiv definit.
(c) Wegen $\det(C) = 0$ und $\mathrm{Spur}(C) < 0$ ist C negativ semidefinit (und nicht definit).
(d) Wegen $\det(D) > 0$ und $\mathrm{Spur}(D) < 0$ ist D negativ definit.
(e) Wegen $\det(E) = 0$ und $\mathrm{Spur}(E) > 0$ ist E positiv semidefinit (und nicht definit).
(f) Die Matrix hat den Eigenwert 10 (mit EV e_3) und wegen der Blockdiaonalgestalt und (b) zwei weitere positive Eigenwerte. Damit ist F positiv definit.

$(1-\lambda)(-2-\lambda)-1=0$

$-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-1=0$

$\lambda^2+\lambda-3=0$

$\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$1-4\times(-3)=13$

Zusätzliche Übungen

Z12.1 Begründe, warum die Länge von Vektoren eines euklidischen Vektorraums eine Norm ist.

Lösung Z12.1: Wir prüfen die drei Eigenschaften einer Norm nach:

(N1) klar, wegen der positiven Definitheit von $\langle\ ,\ \rangle$.

(N2) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v\rangle} = |\lambda|\, \|v\|$.

(N3) Unter Verwendung der Chauchy-Schwarz'schen Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle \le \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| \\ &\le \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| = \big(\|v\| + \|w\|\big)^2 .\end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert nun die Dreiecksungleichung.

Z12.2 Ein einfarbiges Bild in einem 3×3-Gitter wird durch eine reelle 3×3-Matrix gespeichert, deren Einträge den Graustufenwerten am jeweiligen Pixel entsprechen. Das Bild eines Fadenkreuzes wird so durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ repräsentiert. Führen Sie die Singulärwertzerlegung durch, und komprimieren Sie die Daten, indem Sie den kleinsten Singulärwert durch 0 ersetzen. Welches Graustufenbild ergibt sich nach Datenkompression?

Lösung Z12.2: Da die Matrix A bereits symmetrisch ist, können wir die Singulärwertzerlegung schneller über die Hauptachsentrafro erhalten: Zunächst ist 0 ein EW von A, da A nicht vollen Rang hat, und wir erhalten

$$\mathrm{Eig}_A(0) = \ker A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Durch Raten (oder Berechnung von χ_A) und Beachten von $\mathrm{Spur} A = 1$ findet man weiter EW 2 und -1 mit

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}_A(-1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Da diese Eigenräume automatisch paarweise orthogonal sind, erhalten wir durch Normieren der aufspannenden Vektoren die orthogonale Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mit $S^\top A S = \mathrm{diag}(2, -1, 0)$ oder

$$A = S\ \mathrm{diag}(2, -1, 0) S^\top = S\ \mathrm{diag}(2, 1, 0)\, (\mathrm{diag}(0, -1, 0) S^\top) .$$

Da die Matrix $\mathrm{diag}(0, -1, 0)\, S^\top$ ebenfalls orthogonal ist, haben wir so die Singulärwertzerlegung von A erhalten. Wir machen nun den kleinsten Singulärwert zu 0, und erhalten als komprimiertes Bild dann

$$S\ \mathrm{diag}(2, 0, 0)\, (\mathrm{diag}(0, -1, 0) S^\top) = S\ \mathrm{diag}(2, 0, 0)\, S^\top) =$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 4/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{4}{3} \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuz wird also etwas *verschmiert.*

Z12.3

(a) Zeigen Sie, dass die Frobeniusnorm eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Frobeniusnorm mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$ verträglich und submultiplikativ ist.

(c) Warum ist die Frobeniusnorm für $n > 1$ von keiner Vektornorm induziert?

Lösung Z12.3: (a) Identifiziere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{n^2}$:

$$\tilde{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})^\top .$$

Die euklidische Norm $\|\cdot\|$ des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^{n^2}$. Wegen $\|A\|_F = \|\tilde{a}\|_2$ ist daher auch $\|\cdot\|_F$ eine Norm.

(b) Verträglichkeit mit $\|\cdot\|_2$ bedeutet $\|Ax\|_2 \le \|A\|_F\|x\|_2$. Wir berechnen daher

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2^2 &= \left\|\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i\end{pmatrix}\right\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\right) \le \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{\text{unabh. von } j}\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \|x\|_2^2\|A\|_F^2 ,\end{aligned}$$

wobei die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

verwendet wurde. Somit gilt also

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F\|x\|_2 .$$

Submultiplikativität bedeutet $\|AB\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$. Wir berechnen daher erneut mit der Cauchy-Schwarz'schen-Ungleichung

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \sum_{k,l=1}^n (AB)_{kl} = \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki}b_{il}\right)^2 \le \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki}^2 \sum_{i=1}^n b_{il}^2\right) \\ &= \sum_{k,i=1}^n a_{ki}^2 \sum_{l,i=1}^n b_{il}^2 = \|A\|_F^2\|B\|_F^2 .\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\|AB\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F .$$

(c) Eine natürliche Matrizennorm erfüllt $\|E_n\| = 1$, das ist aber bei der Frobeniusnorm für $n > 1$ nicht erfüllt, es gilt nämlich

$$\|E_n\|_F = \sqrt{n} \ne 1 .$$

Somit folgt, dass $\|\cdot\|_F$ keine natürliche Matrizennorm ist.

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `http://www.moodle.tum.de`