Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Probeklausur

SS 2022, 08.06.2022, 09:00-09:45 Uhr

Lineare Algebra für Informatiker

Tragen Sie Ihre Lösungen auf dem Lösungsblatt ein.

Aufgabe 1 (ca. 15 Punkte)
Geben Sie jeweils ohne Begründung an:

(a) Die Realteile $\operatorname{Re} z_0$, $\operatorname{Re} z_1$ und $\operatorname{Re} z_2$ der drei komplexen Lösungen z_0, z_1 und z_2 von $z^3 = -27$.

(b) Die Real- und Imaginärteile von $w_1 = \frac{3}{4}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$ und $w_2 = \frac{3+4i}{1+i}$.

(c) Die Menge L aller reellen Zahlen s, sodass $\ker(A) \neq \{0\}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(d) Die Dimension $\dim(V)$ des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V = \langle x^2-1, x^2+1, x^2+2, x^2-2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$.

(e) Das Inverse A^{-1} der reellen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (ca. 9 Punkte)
Es sei $b \in \mathbb{R}^3$ mit $b^\top b = 1$. Wir setzen $P = bb^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Zeigen Sie: $P \cdot P = P$.

(b) Zeigen Sie: Falls $v^\top b = 0$, $v \in \mathbb{R}^3$, so gilt $Pv = 0$.

(c) Zeigen Sie: Für jedes $v \in \mathbb{R}^3$ gilt: $Pv \in \langle b \rangle$.

Aufgabe 3 (ca. 16 Punkte)
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung bzw. ein begründetes Gegenbeispiel an. (Nur die Begründung wird bepunktet.)

(a) Die Menge $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ mit } |f(x)| \leq K \ \forall x \in \mathbb{R}\}$ bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Gilt $A^2 = E_n$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $A - E_n$ oder $A + E_n$ nicht invertierbar.

(c) Das LGS $(e_1 + e_3) \cdot (e_1 + e_3)^\top x = 0$ ist eindeutig lösbar ($e_1 = (1,0,0)^\top$, $e_3 = (0,0,1)^\top \in \mathbb{R}^3$).

(d) Die Menge $\{\exp, \log\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}_{>0}}$ ist linear unabhängig.

Viel Erfolg!