Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 1

Tutorium

T1.1 Begründen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines reellen Polynoms $p = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so auch $\overline{z} \in \mathbb{C}$.

T1.2 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie die Beträge von

$$\text{(a)}\ \tfrac{50-25\mathrm{i}}{-2+11\mathrm{i}}, \qquad \text{(b)}\ (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2, \qquad \text{(c)}\ \mathrm{i}^{99} + \mathrm{i}^{100} + 2\mathrm{i}^{101} - 2\,.$$

Zur Selbstkontrolle: (a) $\mathrm{Re}(z) = -3$, $\mathrm{Im}(z) = -4$, $|z| = 5$. (b) $\mathrm{Re}(z) = -2$, $\mathrm{Im}(z) = 2\sqrt{3}$, $|z| = \sqrt{4+12} = 4$. (c) $\mathrm{Re}(z) = -1$, $\mathrm{Im}(z) = 1$, $|z| = \sqrt{2}$.

T1.3 Berechnen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

(a) $z^2 - 4z + 5 = 0$, (b) $z^2 + (1-\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$, (c) $z^2 + 4z + 8 = 0$.

Zur Selbstkontrolle: (a) $z = 2 + \mathrm{i} \ \vee\ z = 2 - \mathrm{i}$. (b) $z = \mathrm{i} \ \vee\ z = -1$. (c) $z = -2 + 2\mathrm{i} \ \vee\ z = -2 - 2\mathrm{i}$.

T1.4 Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen die Polardarstellung an:

$$z_1 = -2\mathrm{i}, \qquad z_2 = \mathrm{i} - 1, \qquad z_3 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}), \qquad z_4 = \tfrac{2}{1-\mathrm{i}}.$$

Zur Selbstkontrolle: $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$, $z_3 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$, $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

T1.5 Zu den komplexen Zahlen mit Polarkoordinaten

$$r_1 = 2,\ \varphi_1 = {}^{\pi}/_{2}, \qquad r_2 = 1,\ \varphi_2 = {}^{3\pi}/_{4}, \qquad r_3 = 3,\ \varphi_3 = {}^{5\pi}/_{4}, \qquad r_4 = 4,\ \varphi_4 = {}^{2\pi}/_{3}$$

sind Real- und Imaginärteil gesucht.

Zur Selbstkontrolle: $z_1 = 2\mathrm{i}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \mathrm{i})$, $z_3 = -3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $z_4 = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

T1.6 Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^{100}$.

Zur Selbstkontrolle: $\mathrm{Re}\left(z_{100}\right) = -2^{99}$, $\mathrm{Im}\left(z_{100}\right) = \sqrt{3} \cdot 2^{99}$.

T1.7 Berechnen Sie die komplexen Wurzeln:

(a) $\sqrt[3]{-8}$, (b) $\sqrt{8\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)}$.

Zur Selbstkontrolle: (a) $a_0 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$. (b) $a_0 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$, $a_1 = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$.

Zusätzliche Übungen

Z1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von $p = z^3 + 4z^2 + 8z$.

Z1.2 Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

(a) $(1 + 4\mathrm{i}) \cdot (2 - 3\mathrm{i})$, (b) $\frac{4}{2+\mathrm{i}}$, (c) $\sum_{n=0}^{2009} \mathrm{i}^n$.

Z1.3 Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in $\mathbb{C}$:

(a) $\{z \,|\, |z + \mathrm{i}| \leq 3\}$, (b) $\{z \,|\, \mathrm{Re}(\overline{z} - \mathrm{i}) = z\}$, (c) $\{z \,|\, |z - 3| = 2|z + 3|\}$.

Z1.4

(a) Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen die Polardarstellung an:

$$z_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}), \qquad z_2 = \frac{2}{1 - \mathrm{i}}.$$

(b) Zu den komplexen Zahlen mit Polarkoordinaten

$$r_3 = 3,\ \varphi_3 = 5\pi/4, \qquad r_4 = 4,\ \varphi_4 = 2\pi/3$$

sind Real- und Imaginärteil gesucht.

Z1.5 Berechnen Sie die komplexe Wurzel $\sqrt{-2\mathrm{i}}$.

Z1.6 Testen Sie die MATLAB-Funktion `zeigerplot` (siehe Moodle), das bei Eingabe von $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ einen Zeigerplot mit den n-ten Wurzeln von z ausgibt.

Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 1

Tutorium

T1.1 Begründen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines reellen Polynoms $p = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so auch $\overline{z} \in \mathbb{C}$.

$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ $a_1 \cdots a_n \in R$.

去证 $\bar{z} \in C$ 也是Null.

$\overline{a_n} = a_n$

$|ab| = |a||b|$ $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$

$\Rightarrow a_n(\bar{z})^n + \cdots a_1 \bar{z} + a_0 = 0$

$\Rightarrow \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = 0$

$\Rightarrow \bar{z}$ auch eine Nullstelle.

$\Rightarrow \overline{a_n}(\bar{z})^n + \cdots + \overline{a_1}\bar{z} + \overline{a_0} = 0$

T1.2 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie die Beträge von

$$\text{(a) } \frac{50-25\mathrm{i}}{-2+11\mathrm{i}}, \qquad \text{(b) } (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2, \qquad \text{(c) } \mathrm{i}^{99} + \mathrm{i}^{100} + 2\mathrm{i}^{101} - 2\,.$$

Lösung T1.2:

(a) Wir erweitern mit dem Komplexkonjugierten des Nenners und erhalten:

有理化

$$z = \frac{50-25\mathrm{i}}{-2+11\mathrm{i}} \cdot \frac{-2-11\mathrm{i}}{-2-11\mathrm{i}} = \frac{-100+50\mathrm{i}-550\mathrm{i}-275}{125} = -3-4\mathrm{i}\,.$$

Entsprechend ist $\mathrm{Re}(z) = -3$, $\mathrm{Im}(z) = -4$ und damit wiederum $|z| = 5$.

(b) Wir können die erste Binomische Formel verwenden:

展开

$$z = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3}\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2 = 1 - 3 + 2\sqrt{3}\mathrm{i} = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}\,.$$

Wir können ablesen: $\mathrm{Re}(z) = -2$, $\mathrm{Im}(z) = 2\sqrt{3}$ und $|z| = \sqrt{4+12} = 4$.

(c) Zuerst betrachten wir Potenzen von i. Es gilt:

$$\mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = 1, \quad \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^6 = -1, \quad \mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^8 = 1, \ \ldots$$

Jeweils nach vier Schritten, wiederholt sich das Ganze, wir können also vereinfachen:

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{i}^{96+3} + \mathrm{i}^{100} + 2\mathrm{i}^{100+1} - 2 = \mathrm{i}^{4\cdot 24} \cdot \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^{4\cdot 25} + 2 \cdot \mathrm{i}^{4\cdot 25} \cdot \mathrm{i} - 2 \\ &= 1 \cdot \mathrm{i}^3 + 1 + 2 \cdot \mathrm{i} - 2 = -\mathrm{i} + 1 + 2\mathrm{i} - 2 = -1 + \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\mathrm{Re}(z) = -1$, $\mathrm{Im}(z) = 1$ und $|z| = \sqrt{2}$.

T1.3 Berechnen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

(a) $z^2-4z+5=0$, (b) $z^2+(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=0$, (c) $z^2+4z+8=0$.

(a) $z=\frac{4\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

$\Delta=16-4\times5=-4$

$\Delta=(-1)\times4=i^2\cdot2^2=(2i)^2$

$z=\frac{4\pm2i}{2}$ $z=2\pm i$

(b) $z=\frac{(i-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

$\Delta=1-2i+i^2-4(-i)$
$=1-2i+i^2+4i$
$=(1+i)^2$

$z_1=\frac{i-1+1+i}{2}=\frac{2i}{2}=i$

$z_2=\frac{i-1-1-i}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

(c) $\Delta=16-4\times8=-16$

$\Delta=(-1)\times16=i^2\times4^2$

$z=\frac{-4\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

$=-2\pm\frac{4i}{2}$

$=-2\pm2i$

$z_1=2i-2$

$z_2=-2i-2$

T1.4 Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen die Polardarstellung an:

$$z_1=\overset{0}{-}2\mathrm{i},\qquad z_2=\mathrm{i}-1,\qquad z_3=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}),\qquad z_4=\frac{2}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$$

$z=a+bi$

$\begin{cases} r\cos\varphi=0\\ r\sin\varphi=-2\end{cases}$

$\Rightarrow r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi$
$=r^2=4$
$r=2$
$\Rightarrow \sin\varphi=-1$ $\varphi=-\frac{\pi}{2}$
[取正]

$z_1=2(\cos(-\frac{\pi}{2})+\sin(-\frac{\pi}{2})i)$

$\begin{cases} r\cos\varphi=-1\\ r\sin\varphi=1\end{cases}$

$\Rightarrow r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=2$

$\begin{cases} r\cos\varphi=-\frac{1}{2}\\ r\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

$\begin{cases} r\cos\varphi=1\\ r\sin\varphi=1\end{cases}$

T1.5 Zu den komplexen Zahlen mit Polarkoordinaten

$$r_1=2,\ \varphi_1={}^{\pi}/_2,\qquad r_2=1,\ \varphi_2={}^{3\pi}/_4,\qquad r_3=3,\ \varphi_3={}^{5\pi}/_4,\qquad r_4=4,\ \varphi_4={}^{2\pi}/_3$$

sind Real- und Imaginärteil gesucht.

Lösung T1.5: Wir wenden die bekannten Umrechnungsformeln an:

Für $r_1=2$ und $\varphi_1=\frac{1}{2}\pi$ gilt $a=2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)=0$ und $b=2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)=2$. Es sind a der Real- und b der Imaginärteil.
Damit erhalten wir $z_1=2\mathrm{i}$.
Für $r_2=1$ und $\varphi_2=\frac{3}{4}\pi$ gilt $a=1\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $b=1\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Es sind a der Real- und b der Imaginärteil.
Damit erhalten wir $z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})$.
Für $r_3=3$ und $\varphi_3={}^{5\pi}/_4$ gilt $a=3\cos\left({}^{5\pi}/_4\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ und $b=3\sin\left({}^{5\pi}/_4\pi\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}$. Es sind a der Real- und b der Imaginärteil.
Damit erhalten wir $z_3=-3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Für $r_4=4$ und $\varphi_4=\frac{2}{3}\pi$ gilt $a=4\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{4}{2}$ und $b=3\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{4\sqrt{3}}{2}$. Es sind a der Real- und b der Imaginärteil.
Damit erhalten wir $z_4=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

T1.6 Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{100}$.

取用代数 $z=\sqrt{3}+i$

$r\cos\varphi=\sqrt{3}$ 2

$r\sin\varphi=1$

$\Rightarrow r^2=4$, $r=2$

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow 30^\circ$ $\frac{\pi}{6}$

$r' = r^{100} \Rightarrow 2^{100}$

$\varphi' = \frac{\pi}{6} \times 100 \Rightarrow \frac{50}{3}\pi \Rightarrow \frac{2}{3}\pi$

$2^{100}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

Real: -2^{99}

Img: $2^{100} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot 2^{99}$

T1.7 Berechnen Sie die komplexen Wurzeln:

(a) $\sqrt[3]{-8}$, (b) $\sqrt{8\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)}$.

$2\varphi' = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$

$\varphi' = \left[k\pi - \frac{\pi}{6}\right]$

仍然借助极坐标，以(b)为例

$8 - 8\sqrt{3} i$

$\begin{cases} r\cos\varphi = 8 \\ r\sin\varphi = -8\sqrt{3} \end{cases}$

$r^2 = 64 + 64 \times 3 = 4 \times 64$

$r = 2 \times 8 = 16$

$\cos\varphi = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varphi = -\frac{\pi}{3}$

$r'\ \sqrt{16}\quad \varphi' = -\frac{\pi}{3} \div 2 = -\frac{\pi}{6}$ 不止!

$\Rightarrow \sqrt{16}\left(\cos(-30^\circ) + \sin(-30^\circ) i\right)$

$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) i$

$= 2\sqrt{3} - 2i$ 答案1

60°

Zusätzliche Übungen

Z1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von $p = z^3 + 4z^2 + 8z$.

Lösung Z1.1: Es ist offensichtlich, dass $z_1 = 0$ eine Nullstelle von p ist. Wir klammern diese aus und erhalten $p = z(z^2+4z+8)$. Die Nullstellen des zweiten Faktors erhalten wir nun mit der Mitternachtsformel. Es gilt:

$$z_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{-4 \pm 4\mathrm{i}}{2} \iff z_2 = -2 + 2\mathrm{i} \ \wedge \ z_3 = -2 - 2\mathrm{i}\,.$$

Z1.2 Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

(a) $(1+4\mathrm{i}) \cdot (2-3\mathrm{i})$, (b) $\frac{4}{2+\mathrm{i}}$, (c) $\sum_{n=0}^{2009} \mathrm{i}^n$.

Lösung Z1.2:

(a) Hier führt Ausmultiplizieren bereits zum Ziel: $(1+4\mathrm{i})\cdot(2-3\mathrm{i}) = (2-3\mathrm{i}+8\mathrm{i}+12) = 14+5\mathrm{i}$.

(b) Hier führt Erweitern mit dem Komplexkonjugierten des Nenners zum Ziel: $\frac{4}{2+\mathrm{i}} = \frac{4\cdot(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{8-4\mathrm{i}}{4+1} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$.

(c) Wir beachten die Tatsache, dass $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, ...

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2009} \mathrm{i}^n &= \underbrace{\mathrm{i}^0 + \mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3}_{=1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}=0} + \underbrace{\mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7}_{=\ 0} + \ldots \\ &\ldots + \underbrace{\mathrm{i}^{2004} + \mathrm{i}^{2005} + \mathrm{i}^{2006} + \mathrm{i}^{2007}}_{=\ 0} + \mathrm{i}^{2008} + \mathrm{i}^{2009} = 1 + \mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

Z1.3 Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in $\mathbb{C}$:

(a) $\{z \mid |z+\mathrm{i}| \leq 3\}$, (b) $\{z \mid \mathrm{Re}(\overline{z}-\mathrm{i}) = z\}$, (c) $\{z \mid |z-3| = 2|z+3|\}$.

Lösung Z1.3:

(a) $|z+\mathrm{i}| \leq 3$ liefert einen ausgefüllten Kreis um $-\mathrm{i}$ mit Radius 3.

(b) $\mathrm{Re}(\bar{z}-\mathrm{i}) = z$ impliziert $z \in \mathbb{R}$. Da alle $x \in \mathbb{R}$ diese Gleichung erfüllen, handelt es sich hier um die gesamte reelle Achse.

(c) Wir nennen die zu bestimmende Menge M. Aus

$$(z-3)(\overline{z}-3) = |z-3|^2 = 4|z+3|^2 = 4(z+3)(\overline{z}+3)$$

erhalten wir die Gleichung

$$|z|^2 - 3z - 3\overline{z} + 9 = 4|z|^2 + 12z + 12\overline{z} + 36$$

bzw.

$$|z|^2 + 5z + 5\overline{z} + 9 = 0\,.$$

Somit gilt für Zahlen $z \in M$ die Beziehung

$$|z+5|^2 = 16\,.$$

Also folgt

$$z \in K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+5| = 4\}\,.$$

Andererseits ergibt sich durch dieselbe Rechnung, dass $z \in K$ auch $z \in M$ impliziert. Somit haben wir gezeigt, dass $M = K$ ist. Die Menge beschreibt den Kreis mit Radius 4 um den Mittelpunkt $-5 \in \mathbb{C}$.

Z1.4

(a) Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen die Polardarstellung an:

$$z_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}), \qquad z_2 = \frac{2}{1-\mathrm{i}}.$$

(b) Zu den komplexen Zahlen mit Polarkoordinaten

$$r_3 = 3,\ \varphi_3 = {}^{5\pi}/_{4}, \qquad r_4 = 4,\ \varphi_4 = {}^{2\pi}/_{3}$$

sind Real- und Imaginärteil gesucht.

Lösung Z1.4:

(a) Es gilt $z_1 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}) \;\Rightarrow\; r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1,\ \varphi_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$.

Damit erhalten wir $z_1 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$.

Es gilt $z_2 = \frac{2}{1-\mathrm{i}} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{2} = 1+\mathrm{i} \;\Rightarrow\; r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \varphi_2 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Damit erhalten wir $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(b) Es gilt $z_3 = 3\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) = -3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Damit erhalten wir $\mathrm{Re}(z_3) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ und $\mathrm{Im}(z_3) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Es gilt $z_4 = 4\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

Damit erhalten wir $\mathrm{Re}(z_4) = -2$ und $\mathrm{Im}(z_4) = 2\sqrt{3}$.

Z1.5 Berechnen Sie die komplexe Wurzel $\sqrt{-2\mathrm{i}}$.

Lösung Z1.5: Zuerst bestimmen wir die Polardarstellung:

$$z = -2\mathrm{i} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right).$$

Damit erhalten wir mit der Formel für die zwei zweiten Wurzeln:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \mathrm{i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Z1.6 Testen Sie die MATLAB-Funktion `zeigerplot` (siehe Moodle), das bei Eingabe von $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ einen Zeigerplot mit den n-ten Wurzeln von z ausgibt.

Lösung Z1.6: Testen Sie z. B.

```
z=1+i;
n=3;
zeigerplot(z,n)
```

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `http://www.moodle.tum.de`