Linalg exercises merged

Lineare Algebra für Informatik [MA0901] (Technische Universität München)

Technische Universität München

Lineare Algebra für Informatik

SoSe 2020

Prof. Dr. Gregor Kemper — Dr. Fabian Reimers

Lösungen zu Blatt 1

Tutorübung

T 1 Rechnen mit Matrizen

Wir betrachten die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sind für diese Matrizen folgende Rechenoperationen definiert? Berechnen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

(a) $A + B$ (b) $A + C$ (c) $A + D$ (d) $A - 4C$ (e) A^2
(f) $A \cdot B$ (g) $C \cdot D$ (h) $D \cdot C$ (i) $A \cdot A^T$ (j) $C^T \cdot D^T$

Zusatzfrage: Welches der Ergebnisse ist eine symmetrische Matrix?

Lösung:

(a) Nicht definiert.

(b)
$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Nicht definiert.

(d)
$$A - 4C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & -5 \\ -4 & -6 & -15 \end{pmatrix}.$$

(e) Nicht definiert.

(f)
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(g) Nicht definiert.

(h)
$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 18 \\ 9 & 3 & 16 \end{pmatrix}.$$

(i)
$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(j)

$$C^T \cdot D^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 3 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Zusatzfrage: Welches der Ergebnisse ist eine symmetrische Matrix?

Antwort: Nur das Ergebnis in (i), also $\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, ist eine symmetrische Matrix.

T 2 Formeln

Es sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Matrizen $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times \ell}$ gilt:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

(b) Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Finden Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass die binomische Formel gilt:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Lösung:

(a) Mit $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) := AB$ und $D = (d_{ij}) := B^T A^T$ ist also $C^T = D$ zu zeigen. Zunächst stellen wir fest, dass C^T und D beide in $K^{\ell\times m}$ liegen. Es bleibt also $c_{ji} = d_{ij}$ für alle $1 \le i \le \ell$ und $1 \le j \le m$ zu zeigen. Für solche i und j ergeben sich per Definition des Matrizenprodukts:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{und} \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk},$$

also $c_{ji} = d_{ij}$.

(b) Es gilt nach dem Distributivgesetz (Satz 1.6):

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad &\iff \quad A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\iff \quad AB + BA = 2AB \\ &\iff \quad BA = AB. \end{aligned}$$

Die binomische Formel gilt also genau dann, wenn A und B kommutieren.

T 3 Netzwerk

Vier Computer sollen zu einem kleinen Netzwerk verbunden werden. Welcher Rechner mit welchem direkt verbunden ist stellen wir in einer *Kommunikationsmatrix* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ dar, wobei

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls eine direkte Verbindung von Computer } i \text{ zu Computer } j \text{ besteht } (i \neq j), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im vorliegenden Fall lautet die Kommunikationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

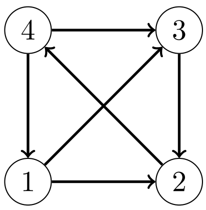
(a) Veranschaulichen Sie sich das Netzwerk mithilfe eines gerichteten Graphen.

(b) Berechnen Sie A^2 und A^3. Welche Bedeutung haben diese Matrizen für das Netzwerk?

(c) Was ist der kleinste Wert m, sodass die Matrix $\sum_{k=0}^{m} A^k$ nur von Null verschiedene Einträge hat? Welche Bedeutung hat diese Zahl m für das Netzwerk?

Lösung:

(a)



(b) Man berechnet

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Eintrag b_{ij} von $B := A^2$ lautet $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{4} a_{ik}a_{kj}$ und es ist

$$a_{ik}a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{falls eine Verbindung von } i \text{ zu } j \text{ über } k \text{ besteht,} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Demnach ist b_{ij} die Anzahl der Wege der Länge 2 von i nach j.

Der Eintrag c_{ij} von $C := A^3 = B \cdot A$ lautet $c_{ij} = \sum_{k=1}^{4} b_{ik}a_{kj}$ und es ist

$$b_{ik}a_{kj} = \begin{cases} b_{ik} & \text{falls eine Verbindung von } k \text{ zu } j \text{ besteht,} \\ 0 & \text{sonst ,} \end{cases}$$

d. h. $b_{ik}a_{kj}$ ist die Anzahl der Wege der Länge 3 von i nach j, bei denen k der letzte Knoten vor j im Weg ist. Somit ist insgesamt c_{ij} die Anzahl der Wege der Länge 3 von i nach j.

(c) Die Überlegungen aus (b) funktionieren für jedes $k \in \mathbb{N}$, d. h. der Eintrag in Position (i, j) der Matrix A^k ist die Anzahl der Wege der Länge k von i nach j. Der Eintrag in Position (i, j) der Matrix

$$I_4 + A + A^2 + \ldots + A^m$$

ist also die Anzahl der Wege der Länge $\leq m$ von i nach j. Das kleinste m, so dass alle Einträge dieser Matrix $\neq 0$ sind, ist also das kleinste m, so dass jeder Computer von jedem anderen Computer aus über einen Weg der Länge $\leq m$ erreichbar ist.

Wenn wir die Matrizen A, A^2, A^3 von oben betrachten, stellen wir fest, dass in diesem Beispiel-Netzwerk das kleinste solche m gleich 3 ist. Konkret ist:

$$I_4 + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgaben

H 1 Matrixmultiplikation [3 P.]

Berechnen Sie für alle $X, Y \in \{A, B, C, D, E, F\}$ das Produkt $X \cdot Y$, falls es definiert ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Lösung: Wir können folgende Produkte bilden:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 17 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C \cdot F = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

H 2 Produktionsprozess

[2+2 = 4 P.]

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus Rohstoffen R_1, R_2, R_3 zunächst Halbfabrikate H_1, H_2, H_3 und aus diesen die (End-)Produkte P_1, P_2, P_3 gefertigt. Es seien:

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \text{Anzahl an } R_i\text{, die zur Herstellung eines } H_j \text{ benötigt werden,}\\
b_{ij} &= \text{Anzahl an } H_i\text{, die zur Herstellung eines } P_j \text{ benötigt werden,}\\
c_{ij} &= \text{Anzahl an } R_i\text{, die zur Herstellung eines } P_j \text{ benötigt werden.}
\end{aligned}$$

(a) Stellen Sie eine Formel dafür auf, wie man c_{ij} mit Hilfe der a_{ij} und b_{ij} berechnet.

(b) Jetzt seien konkret

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Anzahlen von R_1, R_2, R_3 an, die insgesamt zur Herstellung von 1 P_1, 3 P_2 und 2 P_3 benötigt werden.

Lösung: (a) Berechnet man rückwärts, wie viele H_1, H_2 und H_3 für ein P_j benötigt werden, und dann, wie viele R_i jeweils für diese H_1, H_2 und H_3, so kommt man auf

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}.$$

Setzt man $A := (a_{ij})$, $B := (b_{ij})$ und $C := (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so erkennen wir hier das Matrixprodukt

$$C = A \cdot B.$$

wieder.

(b) Hier ist nach Teilaufgabe (a)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 10 \\ 6 & 2 & 6 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

In Spalte j stehen nun die Anzahlen an R_1, R_2 und R_3, die für ein P_j benötigt werden. Diese Anzahlen müssen nun gewichtet mit der Anzahl an P_j, die produziert werden sollen, aufsummiert werden, was wir als Matrix-Vektor-Produkt ausdrücken können:

$$C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 24 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Es werden also insgesamt 39 R_1, 24 R_2 und 23 R_3 benötigt.

H 3 **Spezielle Produkte** [4 P.]

Finden Sie durch Herumprobieren innerhalb der reellen 2×2-Matrizen jeweils ein Beispiel für die folgenden Situationen:

(a) $A^2 = 0$ und $A \neq 0$. (Hierbei ist $0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die 2×2-Nullmatrix.)

(b) $B^2 = -I_2$. (Hierbei ist $I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die 2×2-Einheitsmatrix.)

(c) $CD = -DC$ und $CD \neq 0$.

(d) $EF = 0$ und $e_{ij} \neq 0$ bzw. $f_{ij} \neq 0$ für alle Einträge von E bzw. F.

Lösung: Man findet z. B.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachten Sie, dass natürlich auch andere Lösungen möglich sind.)

Programmieraufgaben

P 1 **Programmierung: Matrixmultiplikation** [4 P.]

Programmieren Sie die Matrizenmultiplikation in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (z. B. in Java). Benutzen Sie ein zweidimensionales Array von Gleitkommazahlen zur Darstellung der Einträge.

Berechnen Sie mit Ihrem Programm (näherungsweise) die Potenzen A^2, A^4, A^8, A^{16} und A^{32} der Transitionsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Welche Vermutung haben Sie für den Grenzwert A^∞?

Lösung: Siehe die Dateien Matrix.java und P1.java für eine Umsetzung in Java. Man beobachtet, dass die Potenzen sich immer mehr der Matrix

$$A^\infty = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

annähern ("konvergieren"). Zum Beispiel ergibt sich (näherungsweise)

$$A^{32} = \begin{pmatrix} 0{,}6000000000931333 & 0{,}39999999990686835 \\ 0{,}5999999998603024 & 0{,}40000000013969883 \end{pmatrix}.$$

Technische Universität München

Lineare Algebra für Informatik

SoSe 2020

Prof. Dr. Gregor Kemper — Dr. Fabian Reimers

Lösungen zu Blatt 2

Tutorübung

T 4 Lineares Gleichungssystem

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\
-2x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\
2x_1 & - & 4x_2 & - & 7x_3 & + & 5x_4 & = & 5
\end{array}
$$

Lösung: Wir stellen die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringen sie durch elementare Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform:

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\
-2 & 4 & 10 & -2 & 4 \\
-1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\
2 & -4 & -7 & 5 & 5
\end{array}\right)
\quad -2 \quad - \quad +2
\to
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 5
\end{array}\right)
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 5
\end{array}\right)
\quad +
\to
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}\right)
\quad \mid \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right) \quad -
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Hieran sehen wir, dass das LGS lösbar ist, genauer, dass es einen freien Parameter gibt. Wir könnten weiter rechnen, um in strenge Zeilenstufenform zu kommen:

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\quad \mid \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) \quad +2
\to
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 5 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\quad -5
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\quad \mid \cdot (-1)
\to
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Jetzt lesen wir die Lösungsmenge ab: $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ \lambda \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

T 5 Kleines LGS mit Parameter

Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des folgenden LGS über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & ay & = & 1 \\ (a-1)x & - & 2y & = & 1 \end{array}$$

Lösung:

Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform (das ist zunächst ohne Fallunterscheidung möglich):

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -a & 1 \\ a-1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{+(1-a)} \left(\begin{array}{lr|r} 1 & -a & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{lr|r} 1 & -a & 1 \\ 0 & (a-2)(a+1) & 2-a \end{array}\right)$$

Jetzt ist eine Fallunterscheidung nötig, um zu sehen, welcher Typ von Zeilenstufenform vorliegt.

1. Fall $a = 2$: Die Zeilenstufenform ist

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{also: } L = \{\begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2. Fall $a = -1$: Die Zeilenstufenform ist

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad \text{also: } L = \emptyset.$$

3. Fall $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$: Die Zeilenstufenform ist

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -a & 1 \\ 0 & a+1 & -1 \end{array}\right), \quad \text{also: } L = \{\frac{1}{a+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

T 6 Struktur der Lösungmenge von LGS

Es seien K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Dann ist die Lösungsmenge $L_{\text{hom}} \subseteq K^n$ des homogenen LGS

$$A \cdot x = 0$$

ein *Unterraum* von K^n *(siehe nächste Woche)*. Weiter seien $b \in K^m$ und $L \subseteq K^n$ die Lösungsmenge des LGS

$$A \cdot x = b.$$

Zeigen Sie: Ist $L \neq \emptyset$ und ist $x_0 \in L$, so gilt:

$$L = x_0 + L_{\text{hom}} := \{x_0 + v \mid v \in L_{\text{hom}}\}.$$

Lösung:

"$\supseteq$": Es sei $y \in x_0 + L_{\text{hom}}$. Dann existiert ein $u \in L_{\text{hom}}$ mit $y = x_0 + u$. Dann ist

$$A \cdot (x_0 + u) = \underbrace{Ax_0}_{=b} + \underbrace{Au}_{=0} = b + 0 = b.$$

Es folgt $y \in L$.

"$\subseteq$": Es sei $x \in L$, d. h. $Ax = b$. Dann folgt $x - x_0 \in L_{\text{hom}}$, denn

$$A \cdot (x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0.$$

Es folgt $x = x_0 + (x - x_0) \in x_0 + L_{\text{hom}}$.

Hausaufgaben

H 4 Lineares Gleichungssystem [4 P.]

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & - & 14x_4 & = & -16 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & -16 \end{array}$$

Lösung: Wir stellen die erweiterte Koeffizientenmatrix auf, und bringen diese durch elementare Umforungen in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & -4 & -2 & -14 & -16 \\ 2 & -4 & -4 & -6 & -16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -10 \\ 0 & -3 & -5 & 2 & -13 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

An der Nullzeile sehen wir, dass das LGS lösbar ist. Da in Zeilenstufenform noch drei Zeilen $\neq 0$ übrig blieben, wissen wir, dass es genau einen freien Parameter gibt. Wir rechnen weiter (jetzt "von unten nach oben"), um in strenge Zeilenstufenform zu gelangen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 0 & -3 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können also $x_4 = \lambda$ als freien Parameter wählen, und erhalten dann die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} -2+3\lambda \\ 1-\lambda \\ 2+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

H 5 LGS mit Parameter

[4 P.]

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} r \cdot x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & r \cdot y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & r \cdot z & = & 1 \end{array}$$

Tipp: Achten Sie darauf Fallunterscheidungen so lange wie möglich zu vermeiden!

Lösung: Indem wir die oberen zwei Zeilen tauschen, sparen wir uns die unnötige Fallunterscheidung, ob $r = 0$ ist oder nicht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r \\ -1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1-r^2 & 1-r & 1-r \\ 0 & 1-r & r-1 & 0 \end{array}\right) \quad (*)$$

Jetzt machen wir Fallunterscheidungen:

<u>1. Fall:</u> $r = 1$. Dann lautet $(*)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In diesem Fall gibt es also unendlich viele Lösungen (genauer: zwei freie Parameter) und man liest die Lösungsmenge ab:

$$L = \{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

<u>2. Fall:</u> $r \neq 1$. Dann können wir in $(*)$ die 2. und 3. Zeile durch $1 - r$ dividieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1-r^2 & 1-r & 1-r \\ 0 & 1-r & r-1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (1-r)^{-1} \\ \mid \cdot (1-r)^{-1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1+r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Hier machen wir wieder eine Zeilenvertauschung und rechnen weiter:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+r & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(1+r) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+r & 1 \end{array}\right).$$

<u>Fall 2.1:</u> $r = -2$. Dann ist $L = \emptyset$.

<u>Fall 2.2:</u> $r \neq -2$. Dann gibt es genau eine Lösung: $L = \{ \frac{1}{2+r} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

H 6 Komplexe Zahlen

[2+3 = 5 P.]

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

(i) $z_1 = (4 - i) \cdot (1 + 4i)$ (ii) $z_2 = (1 + i)^4$

(ii) $z_3 = \dfrac{2}{1 - 3i} \cdot \dfrac{20 - 5i}{1 + 3i}$ (iv) $z_4 = \dfrac{7i - 1}{4 + 2i}$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ (ii) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ (iii) $|zw| = |z| \cdot |w|$.

Lösung:

(a) (i) $z_1 = (4 - i) \cdot (1 + 4i) = 4 - i + 16i - 4i^2 = 4 + 15i + 4 = \underline{\underline{8 + 15i}}$.

(ii) $z_2 = ((1 + i)^2)^2 = (1 + 2i + i^2)^2 = (1 + 2i - 1)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = \underline{\underline{-4}}$.

(iii) $z_3 = \dfrac{2}{1 - 3i} \cdot \dfrac{20 - 5i}{1 + 3i} = \dfrac{2 \cdot (20 - 5i)}{(1 - 3i) \cdot (1 + 3i)} = \dfrac{40 - 10i}{1 - 9i^2} = \dfrac{40 - 10i}{10} = \underline{\underline{4 - i}}$.

(iv) $z_4 = \dfrac{7i - 1}{4 + 2i} = \dfrac{(7i - 1) \cdot (4 - 2i)}{(4 + 2i) \cdot (4 - 2i)} = \dfrac{28i - 4 - 14i^2 + 2i}{16 - 4i^2} = \dfrac{30i + 10}{20} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i}}$.

(b) Es sei $z = a + bi$. Dann gilt $\overline{z} = a - bi$ und somit:

(i)

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = a = \mathrm{Re}(z).$$

(ii)

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \mathrm{Im}(z).$$

(iii) Weiter sei nun $w = c + di$. Dann gilt $z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ und somit

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{z \cdot w}.$$

Damit folgt

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2.$$

Da dies positive reelle Zahlen sind, folgt auch

$$|zw| = |z| \cdot |w|.$$

Programmieraufgaben

P 2 Gauß-Algorithmus

Programmieren Sie den Gauß-Algorithmus in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (z. B. in Java). Um sinnvoll mit Gleitkommazahlen zu rechnen, empfiehlt es sich eine Rechengenauigkeit (z. B. $\varepsilon = 10^{-10}$) einzuführen und den Test, ob ein Eintrag $a_{ij} = 0$ ist, durch den Test $|a_{ij}| < \varepsilon$ zu ersetzen.

Testen Sie Ihr Programm an der erweiterten Koeffizientenmatrix aus T 4.

Lösung: Siehe die Dateien Matrix.java, Gauss.java und P2.java für eine Umsetzung in Java.

Technische Universität München

Lineare Algebra für Informatik

SoSe 2020

Prof. Dr. Gregor Kemper — Dr. Fabian Reimers

Lösungen zu Blatt 3

Tutorübung

T 7 Untervektorräume

(a) Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$?

(i) $M_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2\}$,

(ii) $M_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 3z\}$,

(iii) $M_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$,

(iv) $M_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\}$,

(v) $M_5 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0 \text{ und } z \geq 0\}$.

(b) Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(i) $M_1 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$,

(ii) $M_2 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$,

(iii) $M_3 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ hat unendlich viele Nullstellen}\}$,

(c) Außerdem ist $U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist konstant}\}$ ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie den Durchschnitt $U \cap M_i$ und die Summe $U + M_i$ für die Teilmengen M_i aus (b), die Unterräume sind.

Lösung:

[Kommentar: Nur aus Platzgründen werden die Vektoren des $\mathbb{R}^3$ manchmal, wie hier in der Aufgabenstellung, als Zeilenvektoren (x, y, z) geschrieben. Normalerweise, wie jetzt in der Lösung, benutzen wir natürlich Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.]

(a)

(i) M_1 ist kein Unterraum, da $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin M_1$.

(ii) M_2 ist ein Unterraum, denn es ist die Lösungsmenge des homogenen LGS (bestehend aus einer einzigen Gleichung):

$$x + y - 3z = 0,$$

siehe Bsp. 4.5(5) in der Vorlesung.

(iii) M_3 ist ein Unterraum, da $M_3 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

(iv) M_4 ist kein Unterraum, da $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in M_4$, aber

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin M_4.$$

(v) M_5 ist kein Unterraum, da $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in M_5$, aber

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \notin M_5.$$

(b)

(i) M_1 ist ein Unterraum, denn $0 \in M_1$ (das ist die Nullfunktion!) und für alle $f, g \in M_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt auch
$$(f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0,$$
also $f + \lambda g \in M_1$.

(ii) M_2 ist kein Unterraum, da $0 \notin M_2$.

(iii) M_3 ist kein Unterraum, denn zum Beispiel liegen die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in M_3:
$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ x, & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad , \qquad g(x) := \begin{cases} x, & \text{für } x \leq 0 \\ 0, & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad .$$
Aber für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x$, also $f + g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \notin M_3$.

(c) Behauptung 1: $M_1 \cap U = \{0\}$.

Wir müssen nur $M_1 \cap U \subseteq \{0\}$ zeigen, da die andere Inklusion klar ist. Es sei also $f \in M_1 \cap U$. Dann ist f konstant und es gilt $f(1) = 0$, daraus folgt natürlich $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Behauptung 2: $M_1 + U = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Wir müssen nur $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq M_1 + U$ zeigen, da die andere Inklusion klar ist. Es sei also $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(1)$. Dann gilt natürlich $g \in M_1$ und $f - g$ ist konstant, also
$$f = g + (f - g) \in M_1 + U.$$

T 8 Erzeugter Unterraum im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_4 := \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben. Ist $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle$?

Lösung:

Als Vorbereitung wiederholen wir nochmal, wie der erzeugte Unterraum von zwei Vektoren aussieht:

$$U := \langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda+\mu\\ \mu\end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Geometrisch ist U eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt, aufgespannt von v_1, v_2.

Um zu testen, ob $U = \langle v_3, v_4\rangle$ ist, testen wir zum Beispiel als erstes: Gilt $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in U$?

Dann gäbe es also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda+\mu\\ \mu\end{pmatrix}$.

Es würde folgen:

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= 1\\ \lambda+\mu &= 0\\ \mu &= 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \underbrace{\lambda}_{=1} + \underbrace{\mu}_{=1} = 2. \text{ Das ist ein Widerspruch! } \lightning$$

Also ist $v_3 \notin U$ und somit $U \neq \langle v_3, v_4\rangle$.

T 9 Wahr oder falsch?

Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, S_1, $S_2 \subseteq V$ und u, v, $w \in V$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für jede Wahl von K, V, S_1, S_2, u, v, w wahr sind. Geben Sie dazu jeweils eine kurze **Begründung** oder ein **Gegenbeispiel** an.

(a) Aus $S_1 \subseteq S_2$ folgt $\langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$.

(b) Aus $\langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$ folgt $S_1 \subseteq S_2$.

(c) Es ist $\langle v,\, w \rangle = \langle v,\, w,\, v + 2w \rangle$.

(d) Aus $u \in \langle v,\, w \rangle$ folgt $v \in \langle u,\, w \rangle$.

Lösung:

(a) **WAHR:** Es sei $S_1 \subseteq S_2$. Jedes Element $v \in \langle S_1 \rangle$ ist eine Linearkombination von Vektoren aus S_1 und damit wegen $S_1 \subseteq S_2$ automatisch auch eine Linearkombination von Vektoren aus S_2, also auch $v \in \langle S_2 \rangle$.

(b) **FALSCH:** Zum Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Dann ist $S_1 \not\subseteq S_2$, aber $\langle S_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle S_2 \rangle$

(c) **WAHR:** Für jeden UVR U von V und alle $v, w \in V$ gilt:

$$v, w \in U \quad \Longrightarrow \quad v + 2w \in U$$

Also gilt auch:

$$v, w \in U \quad \Longleftrightarrow \quad v, w, v + 2w \in U$$

Also folgt:

$$\langle v, w \rangle = \langle v, w, v + 2w \rangle$$

(d) **FALSCH:** Zum Beispiel: $V = R^2, u = w = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Nullvektor), $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow u \in \langle v, w \rangle$ ✓, aber $v \notin \langle u, w \rangle = \langle 0 \rangle = \{0\}$.

Hausaufgaben

H 7 Durchschnitt [3 P.]

Berechnen Sie den Schnitt $U \cap W$ der beiden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}, \quad W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Lösung: Da der dritte Vektor, der W erzeugt, gerade die Summe (also eine Linearkombination) der ersten beiden Vektoren ist, gilt

$$W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \{\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 2\lambda + \mu \\ \lambda \\ \lambda + \mu \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Setzen wir einen allgemeinen Vektor aus W in die lineare Gleichung, die U definiert, ein, so erhälten wir die Bedingung:

$$0 = (2\lambda + \mu) - 2\lambda + (\lambda + \mu) = \lambda + 2\mu.$$

Das ist eine lineare Gleichung in den Unbestimmten λ, μ. Einer der beiden Parameter ist also frei wählbar, z. B. μ, und dann ergibt sich $\lambda = -2\mu$. Insgesamt erhält man

$$U \cap W = \{(-2\mu) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} -3\mu \\ -2\mu \\ -\mu \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

H 8 Gerade und ungerade Funktionen [2+3 = 5 P.]

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = f(-x)$. Sie heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = -f(-x)$. Es seien G die Menge aller geraden und U die Menge aller ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Es sind G und U Unterräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie dies für eine der beiden Mengen.

(b) Bestimmen Sie $G \cap U$ und $G + U$.

Lösung: (a) Wir zeigen: G ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(i) $G \neq \emptyset$, da $0 \in G$ liegt. (Achtung: Hierbei ist 0 die *Nullfunktion*, also die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$.)

(ii) Es seien f, $g \in G$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),$$

also $f + g \in G$.

(iii) Es sei $f \in G$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x),$$

also $\lambda f \in G$.

Aus (i), (ii) und (iii) zusammen folgt, dass G ein Untervektorraum ist. Der Nachweis für U geht ganz analog.

(b) Behauptung 1: $G \cap U = \{0\}$

Beweis: Wir müssen nur $G \cap U \subseteq \{0\}$ zeigen, denn die andere Inklusion ist natürlich für Unterräume immer gegeben. Es sei also $f \in G \cap U$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(-x) = -f(x),$$

woraus $f(x) = 0$ folgt. Also ist $f = 0$ (die Nullfunktion).

Behauptung 2: $G + U = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Wir müssen nur $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq G + U$ zeigen, denn die andere Inklusion ist wiederum klar. Es sei also $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir definieren $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + f(-x)$. Dann ist $g \in G$, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = g(x).$$

Ebenso definieren wir $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(-x)$, und es gilt dann $h \in U$. Aus

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}h(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

folgt $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h \in G + U$.

H 9 **Wahr oder falsch?** [4 P.]

Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, U, W, $W' \subseteq V$ Unterräume und u_1, $u_2 \in V$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für jede Wahl von K, V, U, W, W', u_1, u_2 wahr sind. Geben Sie dazu jeweils eine kurze **Begründung** oder ein **Gegenbeispiel** an.

(a) Aus $u_1, u_2 \notin U$ folgt $u_1 + u_2 \notin U$.

(b) Aus $u_1 \in U$, $u_2 \notin U$ folgt $u_1 + u_2 \notin U$.

(c) Es ist $U + W = \{u - w \mid u \in U, w \in W\}$.

(d) Es ist $U \cap (W + W') = (U \cap W) + (U \cap W')$.

Lösung: (a) **Falsch**. Gebenbeispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann sind u_1, $u_2 \notin U$, aber $u_1 + u_2 = 0 \in U$.

(b) **Wahr**. Beweis durch Widerspruch: Angenommen es wäre $w := u_1 + u_2 \in U$, dann würde folgen, dass $u_2 = w - u_1$ die Summe (bzw. Differenz) von zwei Vektoren aus U ist, also würde auch $u_2 \in U$ folgen. Widerspruch.

(c) **Wahr**. Die Abbildung $f : W \to W$, $w \mapsto -w$ ist bijektiv (denn $f \circ f = \mathrm{id}_W$), also ist

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\} = \{u + f(w) \mid u \in U, w \in W\} = \{u - w \mid u \in U, w \in W\}.$$

(d) **Falsch**. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $W' = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Dann ist

$$U \cap (W + W') = U \cap \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = U \cap \mathbb{R}^2 = U.$$

Aber es ist

$$(U \cap W) + (U \cap W') = \{0\} + \{0\} = \{0\}.$$

H 10 Rangbestimmung

[3+2 = 5 P.]

(a) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} := j - i$ für $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Berechnen Sie den Rang $\mathrm{rg}(A)$. Für welche n ist A regulär?

Lösung:

(a) Wir bringen A, B, C mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform. Die Anzahl der Nichtnullzeilen ist dann jeweils der Rang der Matrix.

Für A liefert der Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad \text{also: } \mathrm{rg}(A) = 3.$$

Für B erhält man:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also: } \mathrm{rg}(B) = 2.$$

Für C erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -16 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also: $\mathrm{rg}(C) = 2$.

(b) Für $n = 1$ ist $A = (0) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, also $\mathrm{rg}(A) = 0$. Für $n \geq 2$ hat A die Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & \dots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(n-1) & -(n-2) & -(n-3) & -(n-4) & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bringen A mit folgenden Umformungen in Zeilenstufenform: Für $i = 3, 4, \ldots, n$ addieren wir zur i-ten Zeile das $(i-2)$-fache der 1. Zeile und das $-(i-1)$-fache der 2. Zeile. Damit landen wir bei einer Matrix $B = (b_{ij})$, bei der für $i = 3, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$b_{ij} = a_{ij} + (i-2) \cdot a_{1j} - (i-1) \cdot a_{2j} = (j-i) + (i-2)(j-1) - (i-1) \cdot (j-2) = 0.$$

Es ist also:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Vertauschen der ersten beiden Zeilen ergibt Zeilenstufenform, also ist $\operatorname{rg}(A) = 2$ für alle $n \geq 2$. Es folgt: A ist genau dann regulär, wenn $n = 2$ ist.

Lösungen zu Blatt 4

Tutorübung

T 10 Basis des Lösungsraums

Die folgenden reellen Matrizen sind bereits in Zeilenstufenform. Geben Sie jeweils für das durch die Matrix definierte homogene LGS über $\mathbb{R}$ eine Basis des Lösungsraums L an:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Lösung: (a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wegen $n = 4$ und $r = 2$ gibt es also 2 freie Parameter, nämlich $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$. Damit ergibt sich $x_2 = 3x_3 = 3\lambda$ und $x_1 = 2x_2 - x_4 = 6\lambda - \mu$, und somit

$$L = \{\begin{pmatrix} 6\lambda - \mu \\ 3\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } L} \rangle.$$

> **Beachte:** Wir können die Basisvektoren des Lösungsraums (eines homogenen LGS) direkt aus der Zeilenstufenform herauslesen, indem wir einen freien Parameter auf 1 und die anderen freien Parameter auf 0 setzen, und die übrigen Koeffizienten entsprechend bestimmen (siehe Beispiel 6.2 (6) im Skript). Diesen schnelleren Weg wollen wir jetzt bei (b) und (c) üben.

(b) Wegen $n = 5$ und $r = 2$ gibt es 3 freie Parameter (nämlich x_1, x_3, x_5). Es ist

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

eine Basis von L

(c) Wegen $n = 5$ und $r = 3$ gibt es 2 freie Parameter (nämlich x_2, x_4). Es ist

$$\{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

eine Basis von L.

T 11 Linear unabhängige Funktionen

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $f_1,\ f_2,\ f_3 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = \cos(x).$$

Setzen Sie dazu in die Gleichung

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \quad (\text{mit } \lambda_i \in \mathbb{R})$$

geeignete Werte für $x \in \mathbb{R}$ ein.

Lösung: Es seien also $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Zu zeigen: Alle $\lambda_i = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0,$$

d. h.

$$\lambda_1 x + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x) = 0. \tag{1}$$

Setzen wir $x = 0$ ein, so erhalten wir

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \lambda_3 \underbrace{\cos(0)}_{=1} = 0$$

also schon mal $\lambda_3 = 0$. Damit wird (1) zu

$$\lambda_1 x + \lambda_2 \sin(x) = 0. \tag{2}$$

Einsetzen von $x = \pi$ liefert

$$\lambda_1 \pi + \lambda_2 \cdot 0 = 0,$$

also $\lambda_1 = 0$. Damit wird (2) zu

$$\lambda_2 \sin(x) = 0.$$

Einsetzen von $x = \pi/2$ liefert $\lambda_2 = 0$, und wir sind fertig.

T 12 Lagrange-Interpolation

Es sei K ein Körper und es seien $n+1$ paarweise verschiedene Elemente $a_0, \ldots, a_n \in K$ sowie (beliebige) Elemente $b_0, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Wir definieren die zugehörigen Lagrange-Polynome

$$L_j := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - a_i}{a_j - a_i} \in K[x], \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n.$$

Diese haben die Eigenschaft, dass für alle $j,\ k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt:

$$L_j(a_k) = \left\{ \begin{matrix} 1, & \text{für } j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{matrix} \right\} =: \delta_{j,k}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_0, \ldots, L_n$ im K-Vektorraum $K[x]$ linear unabhängig sind.

(b) Beweisen Sie den Interpolationssatz von Lagrange: Es gibt genau ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $\leq n$ mit $f(a_k) = b_k$ für $k = 0, \ldots, n$.

(c) Bestimmen Sie $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 2 mit $f(0) = -1$, $f(3) = 5$ und $f(-1) = 1$.

Lösung:

(a) Ansatz: Es seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$\lambda_0 L_0 + \ldots + \lambda_n L_n = 0.$$

Einsetzen der „Stützstellen“ a_k mit $k = 0, \ldots, n$ liefert:

$$0 = \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j \right)(a_k) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \underbrace{L_j(a_k)}_{=0 \text{ falls } j \neq k} = \lambda_k \underbrace{L_k(a_k)}_{=1} = \lambda_k,$$

also sind alle $\lambda_k = 0$, d. h. die Vektoren sind linear unabhängig.

(b)

Existenz: Setze $f := \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot L_j \in K[x]$. Wegen $\deg(L_j) = n$ für alle j, ist $\deg(f) \leq n$. Weiter gilt für alle $k \in \{0, ..., n\}$:

$$f(a_k) = \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot \underbrace{L_j(a_k)}_{=0 \text{ falls } k \neq j} = b_k \cdot \underbrace{L_k(a_k)}_{=1} = b_k.$$

Eindeutigkeit: Sei $g \in K[x]$ ein weiteres Polynom mit $\deg(g) \leq n$ und $g(a_k) = b_k$ (für $k = 0, ..., n$). Dann folgt:

$$\deg(f - g) \leq n \quad \text{und}$$

$$(f - g)(a_k) = f(a_k) - g(a_k) = 0 \ \text{ (für } k = 0, ..., n).$$

Also ist $(f - g)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit mindestens $(n+1)$ paarweise verschiedenen Nullstellen. Daraus folgt $f - g$ ist das Nullpolynom, also $f = g$. □

(c) Wir bestimmen zunächst die Langrange-Polynome:

$$L_0 = \frac{x(x-3)}{(-1) \cdot (-1-3)} = \frac{x^2 - 3x}{4}$$

$$L_1 = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(-3)}$$

$$L_2 = \frac{(x+1)x}{(3-(-1))\cdot(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$$

Mit diesen stellen wir nun f auf gemäß dem Beweis aus (b):

$$f := 1 \cdot L_0 - 1 \cdot L_1 + 5 \cdot L_2 = \left(\frac{x^2-3x}{4}\right) + \left(\frac{x^2-2x-3}{3}\right) + \frac{5}{12} \cdot (x^2+x) = \quad x^2 - x - 1$$

Hausaufgaben

H 11 Polynome als Vektoren

[3+3 = 6 P.]

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ der reellen Polynome vom Grad ≤ 4.

(a) Es seien in V die Polynome

$$f_1 := x^2 + 2x + 3, \qquad f_2 := 2x^2 + 5x + 4, \qquad f_3 := x^2 + 7$$

gegeben. Ist $f_3 \in \langle f_1, f_2 \rangle$? Falls ja, geben Sie f_3 als Linearkombination von f_1, f_2 an.

(b) Wir betrachten den Unterraum $U := \{f \in V \mid f(1) + f(-1) = f(2) - f(-2) = 0\}$ von V. Zeigen Sie, dass $B := \{x^2 - 1,\ \ x^3 - 4x,\ \ x^4 - 1\} \subseteq U$ eine Basis von U ist. *(Sie müssen nicht nachweisen, dass U ein Unterraum ist und dass $B \subseteq U$ gilt.)*

Lösung:

(a) Ansatz: Gesucht sind (wenn sie denn existieren) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot (x^2 + 2x + 3) + \lambda_2 \cdot (2x^2 + 5x + 4) = x^2 + 7.$$

Etwas umgeformt lautet die Gleichung:

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 - 1) \cdot x^2 + (2\lambda_1 + 5\lambda_2) \cdot x + (3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 7) = 0.$$

Da 1, x, x^2 in $\mathbb{R}[x]$ linear unabhängig sind (siehe Beispiel 5.6 (3) im Skript), folgen hieraus die 3 Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 1 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & & & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & - & 7 & = & 0 \end{array}$$

Dieses LGS über $\mathbb{R}$ wird nun gelöst:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right) \quad {}^{-2}\ \ {}^{-3} \quad \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \quad {}^{+2} \quad \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

An der Zeilenstufenform sehen wir, dass das LGS lösbar ist, also gilt $f_3 \in \langle f_1, f_2 \rangle$.

Die eindeutige Lösung des LGS ist $\lambda_2 = -2$, $\lambda_1 = 5$, also ist

$$f_3 = 5f_1 - 2f_2.$$

(b)

Lineare Unabhängigkeit: Es seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(x^2 - 1) + \mu(x^3 - 4x) + \nu(x^4 - 1) = 0.$$

Dann folgt

$$\nu x^4 + \mu x^3 + \lambda x^2 - 4\mu x - (\lambda + \nu) \cdot 1 = 0.$$

Hieraus folgen $\nu = \mu = \lambda = 0$ (da $1, x, x^2, x^3, x^4$ linear unabhängig sind).

Erzeugendensystem: Es sei $f = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \in U$. Dann folgt

$$0 = f(1) + f(-1) = \sum_{i=0}^{4} a_i + \sum_{i=0}^{4} a_i \cdot (-1)^i, \quad \text{also} \ \ 2a_0 + 2a_2 + 2a_4 = 0,$$

und ebenso

$$0 = f(2) - f(-2) = \sum_{i=0}^{4} a_i \cdot 2^i - \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot (-2)^i = 0, \quad \text{also} \;\; 4a_1 + 16a_3 = 0.$$

Wegen

$$a_0 = -a_2 - a_4, \;\; a_1 = -4a_3.$$

können wir also schreiben:

$$f = (-a_2 - a_4) - 4a_3x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = a_4 \cdot \underline{(x^4 - 1)} + a_3 \cdot \underline{(x^3 - 4x)} + a_2 \cdot \underline{(x^2 - 1)}.$$

H 12 Linear (un)abhängig? [1+2+1 = 4 P.]

Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Teilmenge des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ linear abhängig oder linear unabhängig ist.

(a) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

(b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$,

(c) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ -\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$.

Lösung:

(a) Wegen $1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ist M_1 linear abhängig.

(Jede Menge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.)

(b) Wir überprüfen M_2 auf lineare Unabhängigkeit, wie im Vorlesungsskript (Seite 32) beschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & a & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow +5 \\ \leftarrow +2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a+5 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & a+5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot (\frac{1}{5}) \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow -(a+5) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot (-1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix} =: A_a$$

Die Menge M_2 ist genau dann linear abhängig, wenn $\mathrm{rg}(A_a) < 3$ ist, also genau dann, wenn $a = -4$ ist.

(c) Da $M_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ vier verschiedene Vektoren enthält, ist M_3 linear abhängig; siehe die Bemerkung im Vorlesungsskript, Seite 32, Zeilen 26-28.

H 13 Vereinigungen von Unterräumen [3+1 = 4 P.]

Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U_1, U_2, U_3 Unterräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel über dem endlichen Körper $K = \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$, dass $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ein Unterraum von V sein kann, auch wenn $U_i \not\subseteq U_j$ für alle $i \neq j$ gilt.

Lösung

(a) "$\Longleftarrow$": Wenn $U_1 \subseteq U_2$ ist, so ist $U_1 \cup U_2 = U_2$ ein Unterraum. Ebenso: Wenn $U_2 \subseteq U_1$ ist, so ist $U_1 \cup U_2 = U_1$ ein Unterraum.

"$\Longrightarrow$": Es sei nun also $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum. Wenn $U_1 \subseteq U_2$ ist, so sind wir fertig. Also nehmen wir an, dass $U_1 \not\subseteq U_2$ ist. Dann gibt es ein $v \in U_1 \setminus U_2$.

Wir zeigen nun: $U_2 \subseteq U_1$. Dazu sei $w \in U_2$. Dann sind $v \in U_1 \cup U_2$ und $w \in U_1 \cup U_2$. Da $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum ist, folgt $v + w \in U_1 \cup U_2$. Nach H 10 (b) ist $v + w \notin U_2$. Also folgt $v + w \in U_1$. Dann ist auch $w = (v + w) - v \in U_1$ (als Differenz von zwei Vektoren aus U_1).

(b) Für den 2-dimensionalen Standardraum

$$V = \mathbb{F}_2^2 = \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$$

über $\mathbb{F}_2$ und die Unterräume

$$U_1 = \langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle = \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}, \quad U_2 = \langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle, \quad U_3 = \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$$

ist $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = V$, und somit ist $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ein Unterraum.

H 14 Basis eines Unterraums $U \subseteq K^n$ [3+1 = 4 P.]

Es sei der folgende Unterraum von $\mathbb{R}^4$ gegeben:

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis B von U (mit dem auf Seite 38 des Vorlesungsskripts beschriebenen Verfahren).

(b) Ergänzen Sie diese Basis von U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Lösung: (a) Wir schreiben die Vektoren, die hier als Erzeugendensystem von U angegeben sind, in die *Zeilen* einer Matrix und bringen diese auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Jetzt lesen wir (natürlich wieder aus den *Zeilen*) die Basisvektoren heraus. Es ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von U.

(b) An der Zeilenstufenform $(*)$ kann man erkennen, welche Standardbasisvektoren man noch hinzufügen kann/muss, um zu einer Matrix mit Rang $= \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ zu kommen. In diesem Fall sieht man an

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dass $B \cup \{e_4\}$ (4. Standardbasisvektor) eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Technische Universität München

Lineare Algebra für Informatik

SoSe 2020

Prof. Dr. Gregor Kemper — Dr. Fabian Reimers

Lösungen zu Blatt 5

Tutorübung

T 13 Dimensionsformel

(a) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U, W zwei endlich-dimensionale Unterräume von V. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

(b) Es seien U und W Unterräume von $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 15}$ mit $\dim(U) = 7$ und $\dim(W) = 12$. Welche Dimension hat dann $U \cap W$ mindestens?

Lösung:

(a) Es sei $\dim(U \cap W) = m$ und

$$A = \{a_1, \dots, a_m\}$$

eine Basis von $U \cap W$. Dann ist natürlich auch $A \subseteq U$ und A linear unabhängig, also können wir A nach dem Basisergänzungssatz (Korollar 6.14) mit Vektoren $b_1, \dots, b_r$ zu einer Basis

$$A \cup B = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_r\}$$

von U ergänzen. Inbesondere sei $\dim(U) = m + r$.

Ganz analog können wir B auch mit Vektoren $c_1, \dots, c_s$ zu einer Basis

$$A \cup C = \{a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_s\}$$

von W ergänzen. Inbesondere sei $\dim(W) = m + s$.

Wir zeigen nun, dass die Vektoren

$$a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s$$

zusammen eine Basis von $U + W$ bilden. Damit folgt dann:

$$\dim(U + W) = m + r + s = (m + r) + (m + s) - m = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

(1.) Erzeugendensystem:

Für ein $v \in U + W$ existieren $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$. Da $A \cup B$ bzw. $A \cup C$ Erzeugendensysteme von U bzw. W sind, folgt:

$$v = u + w \in \langle A \cup B \rangle + \langle A \cup C \rangle \overset{\substack{\text{(vgl. Satz 4.9)} \\ \downarrow}}{=} \langle (A \cup B) \cup (A \cup C) \rangle = \langle A \cup B \cup C \rangle.$$

Also ist $A \cup B \cup C$ ein Erzeugendensystem von $U + W$.

(2.) Linear unabhängig:

Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $\beta_1, \dots, \beta_r$, $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i c_i = 0. \tag{$*$}$$

Zu zeigen: Alle $\alpha_i = 0$, alle $\beta_i = 0$, alle $\gamma_i = 0$.

Es gilt

$$v := \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i}_{U} \;=\; -\underbrace{\sum_{i=1}^{s} \gamma_i c_i}_{W} \;\in\; U \cap W.$$

Also existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit

$$-\sum_{i=1}^{s} \gamma_i c_i = v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i.$$

Da $A \cup C$ linear unabhängig ist, folgt, dass alle γ_i (und alle λ_i) $= 0$ sind. Damit vereinfacht sich die Gleichung $(*)$ von oben zu

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i = 0.$$

Da $A \cup B$ linear unabhängig ist, folgt, dass alle α_i und alle β_i gleich 0 sind.

(b) Es ist

$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 15} = \{\sum_{i=0}^{15} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

und es ist $\dim(V) = 16$, da $\{1, x, x^2, \dots, x^{15}\}$ eine Basis von V ist. Da $U + W$ ein Unterraum von V ist, haben wir die Abschätzung

$$\dim(U + W) \leq 16.$$

Mit der Dimensionsformel aus (a) ergibt sich:

$$\dim(U \cap W) = \underbrace{\dim(U)}_{=7} + \underbrace{\dim(W)}_{=12} - \underbrace{\dim(U + W)}_{\leq 16} \geq 3.$$

An einem Beispiel, wie $U = \langle 1, x, \dots, x^6 \rangle$, $W = \langle x^4, x^5, \dots, x^{15} \rangle$ mit $\dim(U \cap W) = 3$, sieht man, dass keine bessere allgemeine untere Abschätzung als ≥ 3 möglich ist.

T 14 Codierungstheorie

Wir betrachten den linearen Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^5$, der durch folgende Codierungsvorschrift gegeben ist:

$$(x_1,\ x_2) \mapsto (x_1,\ x_2,\ x_1,\ x_2,\ x_1 + x_2).$$

(a) Geben Sie die Parameter (n, k), die Informationsrate und die Redundanz des Codes an.

(b) Geben Sie alle Codewörter und den Hamming-Abstand $d(C)$ an.

(c) Geben Sie die Generatormatrix G, die zu obiger Codierungsvorschrift gehört, sowie die zugehörige Parity-Check-Matrix P an.

(d) Über einen "rauschenden Kanal" werden nun die Wörter $v_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1, 1)$ und $v_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$ empfangen. Wie lauten wahrscheinlich die gesuchten Informationswörter? Welches Wort würden Sie erneut anfordern?

Lösung:

(a) Es ist $(n, k) = (5, 2)$, also ist die Informationsrate $2/5$ und die Redundanz 3.

(b) Wir geben sämtliche Codewörter an:

$$C = \{(0, 0, 0, 0, 0), \quad (1, 0, 1, 0, 1), \quad (0, 1, 0, 1, 1), \quad (1, 1, 1, 1, 0)\}.$$

An den vier Codewörter erkennen wir

$$d(C) = \min\{w(c) \mid c \in C \setminus \{0\}\} = \min\{3, 3, 4\} = 3.$$

(c) Es sind

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ A \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -A & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) In diesem Mini-Beispiel können wir zum Dekodieren einfach die empfangenen Wörter mit den Codewörtern aus (b) vergleichen. Wir stellen fest:

- v_1 ist ein Codewort. Also würden wir aus v_1 das Informationswort $(1, 1)$ herauslesen.
- v_2 ist kein Codewort, aber es gibt nur genau ein Codewort c_2 mit $d(v_2, c_2) = 1$, nämlich $c_2 = (0, 1, 0, 1, 1)$. Also würden wir die pragmatische Annahme machen, dass bei der Übertragung nur 1 Fehler passiert ist. Diesen können wir beheben, indem wir von v_2 zu c_2 übergehen, und das Informationswort $(0, 1)$ herauslesen.

  <u>Beachte:</u> Wegen $d(C) = 3$ ist dieser Code (nach Satz 7.5) 1-fehlerkorrigierend. Wenn also nur 1 Fehler passiert ist, können wir immer wie hier bei v_2 vorgehen.

- v_3 ist kein Codewort, und es gibt auch kein $c_3 \in C$ mit $d(v_3, c_3) = 1$. Stattdessen gibt es zwei Codewörter, die zu v_3 den Abstand 2 haben, nämlich $(0, 0, 0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1, 1, 0)$. Also können wir nicht sinnvoll dekodieren. Wir würden den Sender auffordern, das 3. Codewort erneut zu senden.

T 15 Hamming-Abstand

Es sei $C \subseteq K^n$ ein linearer Code über einem endlichen Körper K mit der Parity-Check-Matrix $P \in K^{(n-k)\times n}$. Zeigen Sie, dass dann für den Hamming-Abstand von C gilt:

$$d(C) = \min\{r \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt } r \text{ linear abhängige Spalten in } P\}.$$

Lösung: Es seien $s_1, \ldots, s_n \in K^{n-k}$ die Spalten von P, was wir kurz auch so schreiben:

$$P = (s_1 | \ldots | s_n).$$

Für einen Vektor

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n$$

gilt dann:

$$c \in C \quad \Longleftrightarrow \quad P \cdot c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n = 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
d(C) &= \min\{r \in \mathbb{N} \mid \exists\, c \in C \setminus \{0\} \text{ mit } w(c) \leq r\} \\
&= \min\{r \in \mathbb{N} \mid \exists\, c \in C \text{ mit } 1 \leq w(c) \leq r\} \\
&= \min\{r \in \mathbb{N} \mid \exists\, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ mit } P \cdot c = 0 \text{ und } 1 \leq w(c) \leq r\} \\
&= \min\{r \in \mathbb{N} \mid \exists\, c_1, \ldots, c_n \in K \text{ mit } c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n = 0, \\
&\qquad\qquad \text{und mindestens eines, aber höchstens } r \text{ von den } c_i \text{ sind } \neq 0\} \\
&= \min\{r \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt } r \text{ Indizes } i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n, \text{ und} \\
&\qquad\qquad \exists\, c_{i_1}, \ldots, c_{i_r} \in K, \text{ nicht alle } = 0, \text{ mit } c_{i_1} s_{i_1} + \ldots + c_{i_r} s_{i_r} = 0\} \\
&= \min\{r \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt } r \text{ linear abhängige Spalten in } P\}.
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

H 15 Linear unabhängige Mengen

[2,5+2,5 = 5 P.]

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

(a) Geben Sie eine unendliche Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ an, so dass jede 2-elementige Teilmenge von S linear unabhängig und jede 3-elementige Teilmenge von S linear abhängig ist.

(b) Geben Sie $n+1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ an, so dass jede n-elementige Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ linear unabhängig ist.

(Die Aufgabenstellung "Geben Sie ... an" beinhaltet immer nachzuweisen, dass Ihre Antwort die geforderten Eigenschaften hat, außer wenn explizit "ohne Begründung" dasteht.)

Lösung:

(a) Es sei

$$S := \{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist $S \subseteq \langle e_1, e_2 \rangle =: U$. Wegen $\dim(U) = 2$ ist jede 3-elementige Teilmenge von U (also auch jede 3-elementige Teilmenge von S) linear abhängig (siehe Korollar 6.13 (c)).

Für verschiedene λ, $\mu \in \mathbb{R}$, d. h. $\mu - \lambda \neq 0$, sehen wir an

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu - \lambda \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{rg}(A) = 2$, dass je zwei verschiedene Vektoren aus S linear unabhängig sind.

(b) Es seien $v_1 := e_1, \ldots, v_n := e_n$ (Standardbasis von $\mathbb{R}^n$) und

$$v_{n+1} := e_1 + \ldots + e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Für eine n-elementige Teilmenge M von $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ gibt es nun zwei Möglichkeiten.

1. Fall: Es ist $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist M die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, also insbesondere linear unabhängig.

2. Fall: Es ist $M = \{e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n, v_{n+1}\}$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wegen

$$e_i = v_{n+1} - (e_1 + \ldots + e_{i-1} + e_{i+1} + \ldots + e_n) \in \langle M \rangle$$

ist die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ in $\langle M \rangle$ enthalten. Es folgt $\langle M \rangle = \mathbb{R}^n$, also ist M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Wegen $|M| = n$ ist M nach Korollar 6.13 dann auch eine Basis und somit insbesondere linear unabhängig.

H 16 Schnitt von Untervektorräumen [4 P.]

Bestimmen Sie den Schnitt $U \cap W$ der folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle.$$

Lösung: Wir machen den Ansatz:

$$\underbrace{x_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{beliebiger Vektor aus } U} = \underbrace{x_3 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{beliebiger Vektor aus } W}.$$

Subtraktion der rechten Seite liefert ein homogenes LGS in den Variablen $x_1, \ldots, x_4$, das wir mit dem Gaußalgorithmus lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Rang der Matrix ist 3, also ist der Lösungsraum 1-dimensional. Mit $x_4 = \lambda$ (freier Parameter) folgen $x_3 = -\lambda$, $x_2 = -\lambda$ und $x_1 = -\lambda$. Wir können nun (z. B.) x_1 und x_2 benutzen, um $U \cap W$ zu berechnen:

$$U \cap W = \{x_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } x_1 = x_2 = -\lambda\}$$

$$= \{-\lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix}-\lambda\\0\\-\lambda\\-\lambda\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle.$$

H 17 Basis von $\mathbb{C}^3$ [3 P.]

Prüfen Sie nach, für welche $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{C}^3$ bilden:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} i \\ z+i \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 4-i \\ z+1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es sei $B := \{b_1, b_2, b_3\}$. Wegen $\dim(\mathbb{C}^3) = 3 = |B|$ reicht es nach Korollar 6.13 eine der beiden Eigenschaften “Erzeugendensysten’ bzw. “linear unabhängig” nachzuprüfen.

Prüfen wir (z. B.) auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & z+i & 4-i \\ i & -2 & z+1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{-1} \;\; {}^{-i} \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & z & 4 \\ 0 & -1 & z \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ {}_{+z} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 4+z^2 \end{pmatrix},$$

so sehen wir:

$$\begin{aligned} B \text{ Basis} \quad &\Longleftrightarrow \quad B \text{ linear unabhängig} \quad &&\Longleftrightarrow \quad 4 + z^2 \neq 0 \\ & &&\Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}. \end{aligned}$$

H 18 Codierungstheorie [1+2+1 = 4 P.]

Wir betrachten den linearen $(6,4)$-Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^6$, der durch folgende Codierungsvorschrift gegeben ist:

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \mapsto (x_1,\; x_2,\; x_3,\; x_4,\; x_1 + x_2,\; x_3 + x_4).$$

(a) Welche Generatormatrix G gehört zu obiger Codierungsvorschrift? Wie lautet die zugehörige Parity-Check-Matrix P?

(b) Über einen "rauschenden Kanal" werden nun die Wörter $c_1 = (1,1,0,1,0,1)$ und $c_2 = (0,0,1,0,1,1)$ empfangen. Wie lauten wahrscheinlich die gesuchten Informationswörter? Welches Wort würden Sie erneut anfordern?

(c) Bestimmen Sie den Hamming-Abstand $d(C)$.

Lösung: (a) Es sind

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sind c_1 und c_2 wirklich Codewörter? Also gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{F}_2^4$ mit $x_1 \mapsto c_1$ bzw. $x_1 \mapsto c_1$? Dazu berechnen wir $P \cdot c_1$ bzw. $P \cdot c_2$. Es ist

$$P \cdot c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist c_1 ein Codewort, und wir würden erwarten, dass das Informationswort $(1,1,0,1)$ codiert und dann versendet wurde.

Wegen $P \cdot c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist c_2 kein Codewort. Als nächstes würde man sich fragen: Ist bei der Datenübertragung vielleicht nur ein Fehler passiert, und könnten wir diesen im Nachhinein beheben? Es sei c_2' das eigentlich gesendete Codewort. Ansatz für den Fall, dass nur ein einziges Bit falsch ist: $c_2 = c_2' + e_i$ mit einem der Standardbasisvektoren. Dann liefert das die Bedingung:

$$P \cdot e_i = P \cdot c_2 - \underbrace{P \cdot c_2'}_{=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aber an den Spalten von P sehen wir, dass dies für e_1, e_2 und e_5 erfüllt ist. Also gibt es kein eindeutiges Codewort mit minimalem Hamming-Abstand zu c_2. Man würde also das 2. Codewort nochmal senden müssen.

(c) Mit Hilfe von P und T 15 können wir $d(C)$ bestimmen. Da P keine Nullspalte enthält, ist $d(C) \geq 2$. Da (z. B.) die ersten beiden Spalten von P gleich (und somit linear abhängig) sind, ist $d(C) \leq 2$. Damit ist $d(C) = 2$.

Technische Universität München

Lineare Algebra für Informatik

SoSe 2020

Prof. Dr. Gregor Kemper — Dr. Fabian Reimers

Lösungen zu Blatt 6

Tutorübung

T 16 Linear oder nicht?

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\varphi_1 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x+3y \\ 11x \\ 2x-4y \end{pmatrix}$,

(b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ -x^2y \\ y-x \end{pmatrix}$,

(c) $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-1 \\ -x-2 \end{pmatrix}$,

(d) $\varphi_4 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ f \mapsto f(x^2)$,

(e) $\varphi_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$, wobei $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet wird,

(f) $\varphi_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$, wobei $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet wird.

Lösung:

(a) φ_1 ist linear, denn $\varphi_1 = \varphi_A$ mit $A := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}$ (siehe Beispiel 8.2 (1)).

(b) φ_2 ist nicht linear, da zum Beispiel:

$$\varphi_2(2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \varphi_2(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{aber} \quad 2\cdot\varphi_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(c) φ_3 ist nicht linear, denn: $\varphi_3(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) φ_4 ist linear, denn für alle $f, g \in \mathbb{R}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_4(f+\lambda g) = (f+\lambda g)(x^2) = f(x^2) + \lambda g(x^2) = \varphi_4(f) + \lambda\varphi_4(g).$$

(e) φ_5 ist linear (genauer: $\mathbb{R}$-linear), denn:

(1) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\varphi_5(z+w) = \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} = \varphi_5(z) + \varphi_5(w).$$

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_5(\lambda\cdot z) = \overline{\lambda\cdot z} = \overline{\lambda}\cdot\overline{z} = \lambda\cdot\overline{z} = \lambda\cdot\varphi_5(z).$$

(f) φ_6 ist nicht linear (also nicht $\mathbb{C}$-linear), da zum Beispiel:

$$\varphi_6(i\cdot 1) = \varphi_6(i) = -i, \quad \text{aber} \quad i\cdot\varphi_6(1) = i\cdot 1 = i.$$

T 17 Kern und Bild

Es sei K ein Körper. Weiter sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ eine Matrix, deren Spalten wir mit $s_1, \ldots, s_n \in K^m$ bezeichnen, was manchmal auch als $A = (s_1|s_2|\ldots|s_n)$ ausgedrückt wird.

(a) Zeigen Sie: $\operatorname{Bild}(\varphi_A) = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$.

(b) Berechnen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

eine Basis B von $\operatorname{Kern}(\varphi_A)$ und eine Basis C von $\operatorname{Bild}(\varphi_A)$.

Lösung:

(a) Es ist

$$\operatorname{Bild}(\varphi_A) = \{A\cdot x \mid x \in K^n\} = \{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in K\}$$

$$= \{x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}}_{=s_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2}\end{pmatrix}}_{=s_2} + \ldots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}}_{=s_n} \mid x_1, \ldots, x_n \in K\} \quad = \quad \langle s_1, \ldots, s_n\rangle.$$

(b) Für $\operatorname{Kern}(\varphi_A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi_A(x) = 0\}$ ist das durch A gegebene homogene LGS zu lösen. Nach dem Gaußalgorithmus

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \quad +2 \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass es zwei freie Variablen gibt, also ist der Kern zwei-dimensional und eine Basis ist (z. B.)

$$B = \{\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Nach (a) wird das Bild von φ_A von den Spalten von A aufgespannt, d. h.

$$\operatorname{Bild}(\varphi_A) = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\rangle. \qquad (*)$$

Jetzt könnten wir mit dem Verfahren aus H 14 daraus eine Basis berechnen. Aber das ist hier gar nicht nötig, denn nach dem Dimensionssatz (Satz 8.9) wissen wir bereits:

$$4 = \underbrace{\dim(\operatorname{Kern}(\varphi_A))}_{=2} + \dim(\operatorname{Bild}(\varphi_A)) \qquad \Longrightarrow \qquad \dim(\operatorname{Bild}(\varphi_A)) = 2.$$

Also ist das Bild auch zwei-dimensional, und wir können für eine Basis einfach aus $(*)$ zwei linear unabhängige Vektoren auswählen, z. B.

$$C = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

T 18 Bild eines Unterraums

Es seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass $\varphi(U)$ ein Unterraum von W ist.

Lösung: Zur Verdeutlichung schreiben wir 0_V für den Nullvektor in V und 0_W für den Nullvektor in W.

(1) Nullvektor: Da U ein Unterraum ist, ist $0_V \in U$. Da φ linear ist, folgt

$$0_W = \varphi(0_V) \in \varphi(U).$$

(2) Abgeschlossenheit bzgl. Addition: Es seien $w_1, w_2 \in \varphi(U)$. Dann existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $\varphi(u_1) = w_1$, $\varphi(u_2) = w_2$. Da U ein Unterraum ist, ist $u_1 + u_2 \in U$, und, da φ linear ist, folgt

$$w_1 + w_2 = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(u_1 + u_2) \in \varphi(U).$$

(3) Abgeschlossenheit bzgl. skalarer Multiplikation: Es seien $w \in \varphi(U)$ und $\lambda \in K$. Dann existiert ein $u \in U$ mit $\varphi(u) = w$. Da U ein Unterraum ist, ist $\lambda u \in U$, und, da φ linear ist, folgt

$$\lambda w = \lambda\varphi(u) = \varphi(\lambda u) \in \varphi(U).$$

Hausaufgaben

H 19 Kern und Bild

[2+3 = 5 P.]

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ für die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Beantworten Sie dann mit Begründung: Ist φ_A injektiv? Ist φ_A surjektiv?

(b) Geben Sie (mit Begründung) eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass für die durch A definierte lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\mathrm{Kern}(\varphi_A) = \mathrm{Bild}(\varphi_A) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Lösung: (a) Für $\mathrm{Kern}(\varphi_A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi_A(x) = 0\}$ ist das durch A gegebene homogene LGS zu lösen. Nach dem Gaußalgorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\ {}^{-2}\ {}^{-3} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 12 & 12 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \end{matrix}\ {}^{-1} \mid \cdot \tfrac{1}{12} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sehen wir

$$\mathrm{Kern}(\varphi_A) = \langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wegen $\mathrm{Kern}(\varphi_A) \neq \{0\}$ ist φ_A nicht injektiv. Nach Korollar 8.11 ist φ_A dann auch nicht surjektiv.

(b) Wir setzen $A := \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. Nach T 17 ist dann

$$\mathrm{Bild}(\varphi_A) = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Außerdem ist die Lösungsmende des durch A definierten homogenen LGS gleich $\mathrm{Kern}(\varphi_A) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$, wie man an der Zeilenstufenform sieht:

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \mid \cdot \tfrac{1}{3} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \end{matrix}\ {}^{-2} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also leistet A das Gewünschte.

Anmerkung: Man kann A so finden: Da das Bild von den Spalten erzeugt wird, kann man den Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3c \\ 2 & 2c \end{pmatrix}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ machen. Für $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(\varphi_A)$ wird $9 + 6c = 0$ benötigt, also $c = -\frac{3}{2}$ und damit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{9}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ersetzt man A durch μA mit $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ändern sich $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi_A)$ nicht. Um Brüche zu vermeiden, kann man also A durch $2A$ ersetzen, und erhält so die in der Lösung angegebene Matrix.

H 20 Drehungen, Spiegelungen, Streckungen, Projektionen [1+2,5+1,5 = 5 P.]

(a) Es seien $\alpha, \varphi \in [0, 2\pi)$, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad v = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ (Vektor in Polarkoordinaten).}$$

Berechnen Sie $D_\alpha \cdot v$ und geben Sie das Ergebnis wieder in Polarkoordinaten an.

(b) Geben Sie eine geometrische Interpretation (siehe Titel der Aufgabe) der durch die folgenden reellen Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an:

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv) } D = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(v) } E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

(c) Es sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die zuerst an der x-Achse spiegelt und dann die Ebene um $60°$ um den Nullpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. Geben Sie eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass $\psi = \varphi_M$ gilt.

Bemerkung: Für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existieren eindeutige $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$v = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{(Polarkoordinaten).}$$

Hierbei ist r die Länge von v (siehe später Kapitel 13 der Vorlesung).

Lösung:

(a) Mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus folgt:

$$D_\alpha \cdot v = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\varphi) - \sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ \sin(\alpha)\cos(\varphi) + \cos(\alpha)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \varphi) \\ \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Geometrisch: Die durch D_α definierte lineare Abbildung

$$\varphi_{D_\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto D_\alpha \cdot v,$$

beschreibt also eine Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn.

(b)

(i) Es ist

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Also ist φ_A die Spiegelung an der y-Achse.

(ii) Es ist

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Also ist φ_B die Spiegelung an der Geraden $y = x$.

(iii) Es ist

$$C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist φ_C eine Projektion auf die x-Achse.
(Später werden wir sagen: Die *orthogonale* Projektion auf die x-Achse.)

(iv) Für $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ ist bekanntlich $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Also ist $D = D_{\pi/2}$ mit D_α aus (a). Daher ist φ_D die Drehung um den Winkel 45° um den Nullpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn.

(v) Es ist

$$E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 0{,}5y \end{pmatrix}.$$

Also ist φ_E eine Streckung in x-Richtung um den Faktor 3 und eine Streckung (bzw. "Stauchung") in y-Richtung um den Faktor 0,5.

(c) Wir bauen ψ in zwei Schritten auf:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \mapsto D_{60°} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Wir setzen die Matrix $D_{60°}$ ein und rechnen weiter:

$$D_{60°} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x - y \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich insgesamt:

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x - y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

H 21 Kern und Bild als Komplementärräume

[2+2+1 = 5 P.]

Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, die $\varphi \circ \varphi = \varphi$ erfüllt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(1.) $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0\}$.

(2.) $\mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi) = V$.

Geben Sie außerdem im Fall $V = \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq \mathrm{id}_V$ und $\varphi \circ \varphi = \varphi$ an.

Lösung:

(1.) Zu zeigen: $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0\}$.

"$\supseteq$": Diese Inklusion ist klar (wegen $\varphi(0) = 0$).

"$\subseteq$": Sei also $v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, d. h. $\varphi(v) = 0$, und zudem $v \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, d. h. es existiert ein $u \in V$ mit $\varphi(u) = v$. Wegen $\varphi \circ \varphi = \varphi$ folgt:

$$v = \varphi(u) = \varphi(\varphi(u)) = \varphi(v) = 0.$$

(2.) Zu zeigen: $\mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi) = V$.

"$\subseteq$": Diese Inklusion ist klar.

"$\supseteq$": Sei also $v \in V$. Wir können v als

$$v = \underbrace{v - \varphi(v)}_{=:x} + \underbrace{\varphi(v)}_{=:y}$$

schreiben. Dann ist natürlich $y \in \mathrm{Bild}(\varphi)$. Weiter ist $x \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, denn

$$\varphi(x) = \varphi(v - \varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(\varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0.$$

Also ist $v = x + y \in \mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi)$.

(3.) Betrachte zum Beispiel, die durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definierte lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann ist $\varphi_A(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Und somit ist

$$\varphi_A(\varphi_A(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})) = \varphi_A(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \varphi_A \circ \varphi_A = \varphi_A.$$

Programmieraufgaben

P 3 Hamming-Code

Programmieren Sie die Codierung und die Decodierung des Hamming-Codes in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (z. B. in Java). Die Decodierung soll 1-fehlerkorrigierend sein. Testen Sie Ihr Programm, indem Sie die folgende Sequenz von empfangenen Wörtern decodieren (pro Codewort ist maximal 1 Bit falsch übermittelt worden):

$$(0,0,1,1,1,0,1), \quad (0,1,0,0,0,0,0), \quad (1,0,1,1,0,0,1), \quad (1,0,0,1,1,0,0).$$

Überprüfung: Die vier Informationswörter zusammen bilden die Binärdarstellung einer 5-stelligen Zahl. Finden Sie diese.

Lösung: Siehe die Dateien HammingCode.java und P3.java für eine Umsetzung in Java. Die gesuchte Zahl lautet 12345.

Lösungen zu Blatt 7

Tutorübung

T 19 Lineare Fortsetzung

Es sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\varphi(\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie $\varphi(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})$ für jedes $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ explizit an.

(b) Beantworten Sie mit Begründung: Gibt es eine lineare Abbildung $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\psi(\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \psi(\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad \psi(\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}?$$

Lösung:

(a) Ansatz: Wir schreiben

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}}_{=: b_1} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}}_{=: b_2} \qquad (\text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Dies können wir als ein LGS in den Unbestimmten λ, μ (in Abhängigkeit von den Parametern x, y) lesen. Da $B = \{b_1, b_2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist, ist dieses LGS für alle $x, y \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar. Wir lösen es mit dem Gaußalgorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 4 & 7 & y \end{array}\right) \begin{matrix} \urcorner^{-4} \\ \hookleftarrow \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -4x+y \end{array}\right) \begin{matrix} \hookleftarrow \\ \lrcorner_{+2} \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7x+2y \\ 0 & -1 & -4x+y \end{array}\right),$$

also $\lambda = -7x + 2y$ und $\mu = 4x - y$. Damit können wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\varphi(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) &= \varphi((-7x+2y) \cdot b_1 + (4x-y) \cdot b_2) \\
(\varphi \text{ ist linear}) \longrightarrow \quad &= (-7x+2y) \cdot \varphi(b_1) + (4x-y) \cdot \varphi(b_2) \\
&= (-7x+2y) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (4x-y) \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}5x-y\\4x-y\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Wenn es eine solche lineare Abbildung ψ gäbe, dann wären also $\psi(b_1) = \varphi(b_1)$ und $\psi(b_2) = \varphi(b_2)$, d. h. ψ und φ stimmen auf einer Basis des $\mathbb{R}^2$ überein. Nach Satz 8.14 wäre dann $\psi = \varphi$. Also können wir das Ergebnis aus (a) benutzen:

$$\psi(\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}) \overset{\text{(a) für } x=y=3}{=} \begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Also gibt es *keine* Abbildung ψ, mit den in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften.

T 20 Darstellungsmatrix, Kern und Bild

Es sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $E = \{1,\, x,\, x^2\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : V \to V, \quad f \mapsto f(2) \cdot x + f'.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrix $D_E(\varphi)$ an.

(c) Bestimmen Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

Lösung:

(a) Für alle $f,\, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)(2) \cdot x + (\lambda f + g)' \\ &= (\lambda \cdot f(2) + g(2)) \cdot x + \lambda \cdot f' + g' \\ &= \lambda \cdot f(2) \cdot x + \lambda \cdot f' + g(2) \cdot x + g' \\ &= \lambda \cdot \varphi(f) + \varphi(g). \end{aligned}$$

Also ist φ eine lineare Abbildung.

(b) Wir berechnen die Bilder $\varphi(1)$, $\varphi(x)$, $\varphi(x^2)$ der Basisvektoren und schreiben diese ganz explizit als Linearkombination bzgl. der Basis E (in der richtigen Reihenfolge!):

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= x \cdot 1 + 0 &&= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2, \\ \varphi(x) &= x \cdot 2 + 1 &&= 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2, \\ \varphi(x^2) &= x \cdot 4 + 2x &&= 0 \cdot 1 + 6 \cdot x + 0 \cdot x^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten $D_E(\varphi)$, indem wir die Koeffizienten spaltenweise in eine Matrix eintragen:

$$D_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir erhalten $\mathrm{Kern}(\varphi)$ durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix $D_E(\varphi)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS hat die Lösungsmenge

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zurückübersetzen in den Polynomvektorraum ergibt: $\mathrm{Kern}(\varphi) = \langle 6 - x^2 \rangle$, also:

$$\{6 - x^2\} \text{ ist eine Basis von } \mathrm{Kern}(\varphi).$$

Wegen $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 1$ folgt aus der Dimensionsformel:

$$\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 3 - 1 = 2.$$

Wir müssen also nur zwei linear unabhängige Vektoren im Bild auswählen für eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$:

$$\{\varphi(1),\, \varphi(x)\} = \{x,\, 1 + 2x\} \text{ ist eine Basis von } \mathrm{Bild}(\varphi).$$

T 21 Inverse einer 2×2-Matrix

(a) Es seien K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ ist, und dass dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(b) Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Matrizen, ob sie regulär ist, und bestimmen Sie ggf. auch die inverse Matrix. Beachten Sie, dass B und C über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ definiert sind (also: Rechnen modulo 5):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{2\times 2}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{2\times 2}.$$

Lösung:

(a) "$\Leftarrow$": Es sei also $ad - bc \neq 0$. Dann können wir die Matrix $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ bilden und einfaches Nachrechnen zeigt:

$$A \cdot B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I_2,$$

also ist A invertierbar mit $A^{-1} = B$.

"$\Rightarrow$": Es sei A invertierbar, also $\mathrm{rg}(A) = 2$.

<u>1. Fall:</u> $a \neq 0$. Dann folgt mit dem Gaußalgorithmus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \xleftarrow{-\frac{c}{a}} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{rg}(A) = 2$ folgt $d - \frac{bc}{a} \neq 0$, also $ad - bc \neq 0$.

<u>2. Fall:</u> $a = 0$. Dann ist also $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wegen $\mathrm{rg}(A) = 2$ müssen $b \neq 0$ und $c \neq 0$ sein. Also ist $\underbrace{ad}_{=0} - bc = -bc \neq 0$.

> **Bemerkung:** Der Wert $\det(A) := ad - bc$ heißt die Determinante von $A \in K^{2\times 2}$. Auch für Matrizen $A \in K^{n\times n}$ mit $n \neq 2$ gibt es eine Determinante und die Aussage
>
> $$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0$$
>
> gilt auch dann (siehe nächstes Kapitel in der Vorlesung).

(b) Es ist $\det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$, also ist A invertierbar ($=$ regulär) und nach der Formel aus (a) gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det(B) = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10 = 0$ (Achtung: Rechnen modulo 5), also ist B nicht invertierbar.

Es ist $\det(C) = 4 - 2 = 2$, also ist C invertierbar. Wegen $(ad-bc)^{-1} = 2^{-1} = 3$ (Achtung: Rechnen modulo 5) ist

$$C^{-1} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgaben

H 22 Invertierbar

[3 P.]

Entscheiden Sie, ob die folgende Matrix A invertierbar ist, und bestimmen Sie, falls möglich, die inverse Matrix A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Lösung:

Wir benutzen das Verfahren von S. 53 f. des Vorlesungsskripts: Wir schreiben rechts neben A die Einheitsmatrix I_3 und stellen mithilfe elementarer Zeilenoperationen auf der linken Seite die Einheitsmatrix her. Falls dies auf der linken Seite nicht möglich ist, erkennen wir daran, dass A nicht invertierbar ist.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rceil^{+4}\ \rceil^{-2} \\ \hookleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rceil^{+1} \\ \hookleftarrow \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) .$$

An dieser Stelle sehen wir, dass $\operatorname{rg}(A) = 3$ ist, d. h. A ist regulär/invertierbar. Wir rechnen daher weiter:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \hookleftarrow \\ \rfloor_{+1} \mid \cdot(-1) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \hookleftarrow \\ \rfloor_{-2} \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -11 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Es ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & -4 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

H 23 Beispiele zum Thema Invertierbarkeit [5 P.]

Geben Sie jeweils zwei Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, die als Beispiele für die folgenden Situationen dienen:

(a) Es sind A und B invertierbar, aber $A+B$ ist nicht invertierbar.

(b) Es sind A und B nicht invertierbar, aber $A+B$ ist invertierbar.

(c) Alle drei Matrizen A, B und $A+B$ sind invertierbar.

(d) Es sind beide Diagonaleinträge von A gleich 1 und A ist nicht invertierbar.

(e) Es sind beide Diagonaleinträge von A gleich 0 und A ist invertierbar.

Lösung:

(a) Zum Beispiel:

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A + B = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A + B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Zum Beispiel:

$$A = B = I_2 \quad \Longrightarrow \quad A + B = 2 \cdot I_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ ist nicht invertierbar.}$$

(e) Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 2 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ ist invertierbar.}$$

H 24 Darstellungsmatrix [1+2,5+2,5+1 = 7 P.]

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die „Standardbasis“

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}.$$

Zur festen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die Abbildung

$$\varphi : V \to V, \quad X \mapsto A \cdot X - X \cdot A.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrix $D_E(\varphi)$ an.

(c) Bestimmen Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

(d) Beantworten Sie mit Begründung: Ist φ injektiv? Ist φ surjektiv?

Lösung:

(a) Für alle $X, Y \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(X+Y) &= A\cdot(X+Y) - (X+Y)\cdot A = A\cdot X + A\cdot Y - X\cdot A - Y\cdot A \\ &= (A\cdot X - X\cdot A) + (A\cdot Y - Y\cdot A) = \varphi(X) + \varphi(Y). \end{aligned}$$

Für alle $X \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(\lambda X) = A\cdot(\lambda X) - (\lambda X)\cdot A = \lambda(A\cdot X) - \lambda(X\cdot A) = \lambda\cdot(A\cdot X - X\cdot A) = \lambda\cdot\varphi(X).$$

(b) Wir schreiben die Bilder $\varphi(e_{ij})$ als Linearkombinationen von E:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot e_{11} - 2\cdot e_{12} + 3\cdot e_{21} + 0\cdot e_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3\cdot e_{11} - 3\cdot e_{12} + 0\cdot e_{21} + 3\cdot e_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 2\cdot e_{11} + 0\cdot e_{12} + 3\cdot e_{21} - 2\cdot e_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot e_{11} + 2\cdot e_{12} - 3\cdot e_{21} + 0\cdot e_{22}. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Darstellungsmatrix $D_E(\varphi)$, indem wir die Koeffizienten spaltenweise in eine Matrix eintragen:

$$D_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir könnten ähnlich wie in T 20 (c) mit der Darstellungsmatrix rechnen. Alternativ finden wir hier aber auch direkt die folgenden zwei Matrizen in Kern(φ):

$$\varphi(I_2) = A \cdot I_2 - I_2 \cdot A = A - A = 0 \quad \Longrightarrow \quad I_2 \in \text{Kern}(\varphi),$$
$$\varphi(A) = A \cdot A - A \cdot A = A^2 - A^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A \in \text{Kern}(\varphi).$$

Da die Matrizen I_2 und A linear unabhängig sind, ist $\dim(\text{Kern}(\varphi)) \geq 2$, und da die ersten zwei Spalten von $D_E(\varphi)$ linear unabhängig sind, ist auch $\dim(\text{Bild}(\varphi)) \geq 2$. Nach dem Dimensionssatz gilt

$$\dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi)) = 4,$$

also folgt $\dim(\text{Kern}(\varphi)) = \dim(\text{Bild}(\varphi)) = 2$. Also:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis von } \text{Kern}(\varphi)$$

und

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis von } \text{Bild}(\varphi).$$

(d) Wegen $\text{Kern}(\varphi) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist φ nicht injektiv. Wegen $\dim(\text{Bild}(\varphi)) = 2 \neq 4$ (oder nach Korollar 8.11) ist φ auch nicht surjektiv.

Programmieraufgaben

P 4 Inverse berechnen

Programmieren Sie den Algorithmus zur Berechnung der Inversen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (z. B. in Java). Sie können hierzu den bereits programmierten Gauß-Algorithmus aus P 2 als Grundlage nehmen und entsprechend anpassen. Überprüfen Sie dann Ihr Programm anhand Ihres Rechenergebnisses aus H 22 (oder umgekehrt).

Lösung: Siehe die Dateien Matrix.java, Inverse.java und P4.java für eine Umsetzung in Java.

Technische Universität München

Lineare Algebra für Informatik

SoSe 2020

Prof. Dr. Gregor Kemper — Dr. Fabian Reimers

Lösungen zu Blatt 8

Tutorübung

T 22 Darstellungsmatrizen und Matrixprodukt

Neben den Standardbasen B von $\mathbb{R}^3$ bzw. C von $\mathbb{R}^4$ seien noch die (geordneten) Basen

$$B' = \{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \} \quad \text{bzw.} \quad C' = \{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \}$$

gegeben. Ferner seien lineare Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$\varphi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\-x_2 + 3x_3\\2x_1\end{pmatrix} \text{ bzw. } \psi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2x_1 + 2x_3\\2x_1 + x_2 - x_3\\2x_1 + x_2\\2x_1 + 3x_3\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Darstellungs- bzw. Basiswechselmatrizen:

(a) $D_B(\varphi)$, $D_{C,B}(\psi)$, $D_{C,B}(\psi \circ \varphi)$,

(b) $S_{B,B'}$, $S_{B',B}$, $S_{C,C'}$, $S_{C',C}$,

(c) $D_{B'}(\varphi)$, $D_{C',B'}(\psi)$.

Lösung: (a) Die Darstellungsmatrizen von φ und ψ bzgl. den Standardbasen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ kann man einfach ablesen (siehe Satz 9.4). Es ist

$$\varphi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -1 & 3\\2 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{=:A_1} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

also ist $D_B(\varphi) = D_{B,B}(\varphi) = A_1$. Ebenso ist

$$\psi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\2 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\2 & 0 & 3\end{pmatrix}}_{=:A_2} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

also ist $D_{C,B}(\psi) = A_2$.

Damit können wir $D_{C,B}(\psi \circ \varphi)$ als Matrixprodukt berechnen (siehe Satz 9.5):

$$D_{C,B}(\psi \circ \varphi) = D_{C,B}(\psi) \cdot D_{B,B}(\varphi) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\2 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\2 & 0 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -1 & 3\\2 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -2 & 0\\0 & -3 & 3\\2 & -3 & 3\\8 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

(b) Die „neuen“ Basen in der Standardbasis darzustellen, ist immer leicht:

$$S_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_{C,C'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt $S_{B',B} = (S_{B,B'})^{-1}$ und $S_{C',C} = (S_{C,C'})^{-1}$. Die inverse Matrix berechnet man i. A. mit dem Verfahren aus dem Vorlesungsskript (wie z. B. in H 22). In diesem Fall kann man die gesuchten Basiswechselmatrizen aber auch „durch Hinschauen“ finden, z. B. ist:

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_4' - c_3'.$$

Man findet auf diese Weise:

$$S_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_{C',C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Nach Satz 9.7 gilt

$$D_{B'}(\varphi) = S_{B',B} \cdot D_B(\varphi) \cdot S_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und ebenso nach Satz 9.8

$$D_{C',B'}(\psi) = S_{C',C} \cdot D_{C,B}(\psi) \cdot S_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

T 23 Basiswechsel

Es sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Neben der „kanonischen Basis“ $E = \{1,\ x,\ x^2\}$ ist mit $B = \{2x+1,\ 7x+3,\ x^2+x+2\}$ noch eine weitere Basis von V gegeben (das müssen Sie nicht begründen).

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen $S_{E,B}$ und $S_{B,E}$ an.

(b) Schreiben Sie ein beliebiges Polynom $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V$ bzgl. der Basis B.

Lösung (a) Die Matrix $S_{E,B}$ kann man einfach ablesen:

$$S_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt $S_{B,E} = (S_{E,B})^{-1}$ (siehe S. 61 im Skript) und wir berechnen die Inverse nach dem Standard-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \;\; {\scriptstyle -2} \;\; \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \;\; {\scriptstyle +3} \;\; {\scriptstyle -2} \;\; \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \;\; {\scriptstyle -3} \;\; \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies S_{B,E} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Ansatz: Gesucht sind $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 = \underbrace{\lambda_1(2x+1) + \lambda_2(7x+3) + \lambda_3(x^2+x+2)}_{=(\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3)\cdot 1+(2\lambda_1+7\lambda_2+\lambda_3)\cdot x+\lambda_3\cdot x^2}.$$

Vergleicht man die Koeffizienten von $1,\ x,\ x^2$ auf beiden Seiten, so liest man das LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=S_{E,B}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ab. Da die Matrix $S_{E,B}$ invertierbar ist, hat dieses LGS eine eindeutige Lösung *(womit im Nachhinein begründet ist, dass B wirklich eine Basis ist)*:

$$S_{E,B} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \implies \underbrace{(S_{E,B})^{-1}}_{S_{B,E}} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (*).$$

Wir berechnen also

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a_0 - 3a_1 - 11a_2 \\ -2a_0 + a_1 + 3a_2 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

d. h. $\lambda_1 = 7a_0 - 3a_1 - 11a_2, \quad \lambda_2 = -2a_0 + a_1 + 3a_2, \quad \lambda_3 = a_2.$

> Die Formel in $(*)$ hätten wir genauso auch allgemein herleiten können: Multiplizieren wir an $S_{B,E}$ von rechts den Spaltenvektor mit den Koordinaten bzgl. der Basis E heran, so entsteht der Spaltenvektor mit den Koordinaten bzgl. der Basis B.

Hausaufgaben

H 25 Darstellungsmatrizen

[1+1+3 = 5 P.]

Es sei V ein zwei-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, b_2\}$. Weiter seien

$$c_1 := b_1, \quad c_2 := -3b_1 + 2b_2, \quad v := 5b_1 - 2b_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass $C = \{c_1, c_2\}$ eine Basis von V ist.

Mit dem Prinzip der linearen Fortsetzung definieren wir nun zwei lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ bzw. $\psi : V \to V$ durch ihre Werte auf der Basis C:

$$\varphi(c_1) := c_2, \quad \varphi(c_2) := c_1 \qquad \text{bzw.} \qquad \psi(c_1) := c_2, \quad \psi(c_2) := v.$$

(b) Bestimmen Sie $\varphi(v)$ und $\psi(v)$ als Linearkombinationen bzgl. der Basis C.

(c) Berechnen Sie die folgenden Darstellungsmatrizen:

$$D_C(\varphi), \quad D_C(\psi), \quad D_C(\varphi \circ \psi), \quad D_C(\psi \circ \psi), \quad D_B(\varphi).$$

Lösung:

(a) Wegen $|C| = 2 = \dim(V)$ reicht es zu zeigen, dass c_1, c_2 linear unabhängig sind. Dazu machen wir den Ansatz:

$$\lambda \cdot c_1 + \mu \cdot c_2 = 0 \qquad (\text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen von c_1 und c_2 ergibt:

$$\lambda \cdot b_1 + \mu \cdot (-3b_1 + 2b_2) = 0, \qquad \text{also} \qquad (\lambda - 3\mu) \cdot b_1 + 2\mu \cdot b_2 = 0.$$

Da b_1, b_2 linear unabhängig sind, folgen hieraus die zwei Gleichungen

$$\lambda - 3\mu = 0 \qquad \text{und} \qquad 2\mu = 0.$$

Also sind $\mu = 0$ und $\lambda = 0$, was zu zeigen war.

(b) Wir schreiben v bzgl. der Basis C:

$$v = 5b_1 - 2b_2 = -(-3b_1 + 2b_2) + 2b_1 = 2c_1 - c_2.$$

Damit folgt

$$\varphi(v) = \varphi(2c_1 - c_2) = 2\varphi(c_1) - \varphi(c_2) = 2c_2 - c_1.$$

Und ebenso

$$\psi(v) = \psi(2c_1 - c_2) = 2\psi(c_1) - \psi(c_2) = 2c_2 - v = 2c_2 - (2c_1 - c_2) = -2c_1 + 3c_2.$$

(c) Wir können $D_C(\varphi)$ direkt aus der Definition von φ herauslesen:

$$D_C(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Benutzen wir $v = 2c_1 - c_2$ aus (b), so können wir ebenso auch $D_C(\psi)$ herauslesen:

$$D_C(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 9.5 erhalten wir $D_C(\varphi \circ \psi)$ als Matrixprodukt:

$$D_C(\varphi \circ \psi) = D_C(\varphi) \cdot D_C(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ebenso erhalten wir $D_C(\psi \circ \psi)$ als Matrixprodukt:

$$D_C(\psi \circ \psi) = D_C(\psi)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mit der Formel für den Basiswechsel (Satz 9.7) und der Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix (T 21) berechnen wir

$$D_B(\varphi) = S_{B,C} \cdot D_C(\varphi) \cdot S_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (S_{B,C})^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

H 26 Obere Dreiecksmatrizen

[2+2 = 4 P.]

Es sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $(a_{ij}) \in K^{n\times n}$ heißt eine *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt, d. h. wenn A nur Einträge rechts oberhalb der Diagonale hat.

(a) Zeigen Sie: Wenn $A, B \in K^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrizen sind, so ist auch das Produkt AB eine obere Dreiecksmatrix. *(Zusatz: Wie lauten die Diagonaleinträge von AB?)*

Bemerkung: Da die Inverse A^{-1} einer oberen Dreiecksmatrix $A \in K^{n\times n}$ auch wieder eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt, dass die invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen eine *Untergruppe* von $\mathrm{GL}_n(K)$ bilden.

(b) Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(b_j) \in \langle b_1, \ldots, b_j\rangle \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beantworten Sie mit Begründung: Welche Form hat die Darstellungsmatrix $D_B(\varphi)$?

Lösung:

(a) Es seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrizen und $(c_{ij}) = C = AB$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{=0,\text{ falls } i>k} \cdot b_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \cdot \underbrace{b_{kj}}_{=0,\text{ falls } k>j} = \sum_{k=i}^{j} a_{ik}b_{kj}.$$

Für $i > j$ ist das eine leere Summe, also ist dann $c_{ij} = 0$. Daher ist C auch eine obere Dreiecksmatrix.

Zusatz: Für $i = j$ (Diagonaleinträge) besteht die Summe nur aus einem Summanden, nämlich $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

(b) Unter diesen Voraussetzungen ist $D_B(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix, denn schreiben wir $A = (a_{ij}) := D_B(\varphi)$, so lesen wir für $1 \le j \le n$ aus der j-ten Spalte der Darstellungsmatrix heraus:

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_i.$$

Aber nach Voraussetzung existieren auch $\lambda_1, \ldots, \lambda_j \in K$ mit

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i b_i.$$

Da die Darstellung des Vektors $\varphi(b_j)$ bzgl. der Basis B eindeutig ist, folgt $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$. Das zeigt, dass A eine obere Dreiecksmatrix ist.

H 27 Spiegelung an einer Geraden im $\mathbb{R}^2$

[2+1+1 = 4 P.]

Im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die folgende Basis $B = \{b_1, b_2\}$ und die folgende lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch ihre Darstellungsmatrix bzgl. B gegeben ist:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\varphi = \varphi_A$.

(b) Berechnen Sie $\varphi(v)$ für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(c) Zeichnen Sie die Gerade $U := \langle b_1 \rangle$ und die Vektoren b_2, $\varphi(b_2)$, v, $\varphi(v)$ in ein Koordinatensystem, um die Wirkung der linearen Abbildung φ zu veranschaulichen.

Lösung:

(a) Nach Satz 9.4 ist die gesuchte Matrix A genau die Darstellungsmatrix $D_E(\varphi)$ bzgl. der Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$. Also berechnen wir mit Satz 9.7:

$$D_E(\varphi) = S_{E,B} \cdot D_B(\varphi) \cdot S_{B,E} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot (S_{E,B})^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=(S_{E,B})^{-1} \text{ (hierfür haben wir T 21 benutzt)}} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

(b)

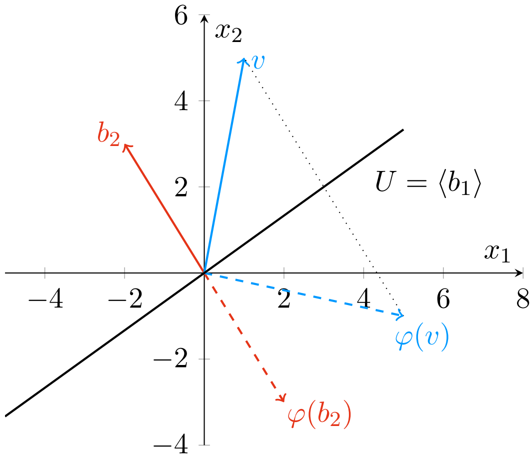
Lösungweg 1: Wir schreiben v bzgl. der Basis B, nämlich $v = b_1 + b_2$. Aus $D_B(\varphi)$ lesen wir $\varphi(b_1) = b_1$ und $\varphi(b_2) = -b_2$ heraus. Es folgt:

$$\varphi(v) = \varphi(b_1 + b_2) = \varphi(b_1) + \varphi(b_2) = b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösungweg 2: Wir benutzen das Ergebnis aus (a) und berechnen

$$\varphi(v) = \varphi_A(v) = A \cdot v = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c)



Geometrische Interpretation: Die Abb. φ ist eine Spiegelung an der Geraden $U = \langle b_1 \rangle$.

Technische Universität München

Lineare Algebra für Informatik

SoSe 2020

Prof. Dr. Gregor Kemper — Dr. Fabian Reimers

Lösungen zu Blatt 9

Tutorübung

T 24 Determinanten, Teil 1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Wir benutzen die Formel für 2×2-Matrizen (Bsp. 10.5 (2) im Skript):

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11.$$

(b) Wir benutzen die Formel für 3×3-Matrizen (Sarrus-Regel, Bsp. 10.5 (3) im Skript):

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 5 + 0 + (-12) - 0 - (-7) - 6 = -6.$$

(c) Da C eine obere Dreiecksmatrix ist, ist $\det(C)$ das Produkt der Diagonalelemente (siehe S. 73 im Skript):

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400.$$

(d) Die Matrix D ist eine Block-Matrix mit der quadratischen Matrix A oben links, der quadratischen Matrix B unten rechts, und einem 3×2-Nullblock unten links. In diesem Fall ist $\det(D) = \det(A) \cdot \det(B)$ (wie auf S. 73 im Skript):

$$\det(D) = \det \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{A} & * & * & * \\ & & * & * & * \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & B & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B) = (-11) \cdot (-6) = 66.$$

T 25 Determinanten, Teil 2

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & -3 \\ 7 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \cdot B, \quad D = A^T C^2.$$

Lösung:

(a) Wir entwickeln nach geeigneten Spalten bzw. Zeilen:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & -3 \\ 7 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{Spalte } j=2}}{=} (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{Zeile } i=2}}{=} (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot (4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2) = 4 \cdot (-18) = -72.$$

(b) Mithilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen erhalten wir:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ -2 \quad -3 \quad -4 \end{matrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -13 & -10 & -7 \\ 0 & -10 & -8 & -2 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{1. Spalte}}}{=} (-1)^{4+1} \cdot \det \begin{array}{c} \qquad -7 \quad -2 \\ \begin{pmatrix} -13 & -10 & -7 \\ -10 & -8 & -2 \\ -7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = -\det \begin{pmatrix} 36 & 4 & -7 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{3. Zeile}}}{=} \det \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Faktor 4 aus beiden} \\ \text{Zeilen herausziehen}}}{=} 16 \cdot \det \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 16 \cdot (-10) = -160.$$

(c) Da es sich um 4×4-Matrizen handelt, erhalten wir

$$\det(C) = \det(\frac{1}{2} \cdot B) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \det(B) = -10.$$

(d) Wir benutzen den Determinantenmultiplikationssatz und Lemma 10.6 (a):

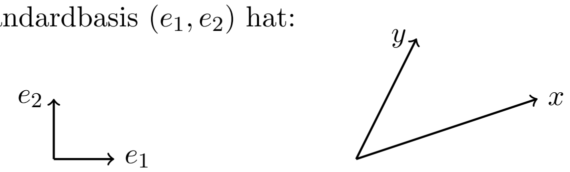
$$\det(D) = \det(A^T \cdot C^2) = \det(A^T) \cdot \det(C)^2 = \det(A) \cdot \det(C)^2 = -72 \cdot (-10)^2 = -7200.$$

T 26 Fläche eines Parallelogramms

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so gewählt, dass $x = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie mit Methoden der Schulgeometrie, dass $|\det(x \,|\, y)|$ der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Ecken 0, x, y, $x+y$ ist.

Bemerkung: Die Aussage gilt auch, wenn x, y nicht im 1. Quadranten liegen, also für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir dürfen (für unsere Skizze unten) voraussetzen, dass (x, y) die gleiche *Orientierung* wie die Standardbasis (e_1, e_2) hat:

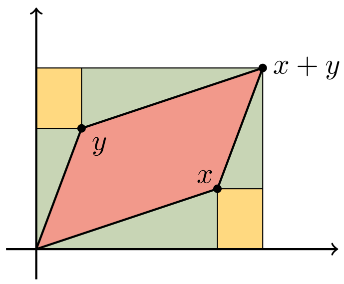


Ansonsten könnten wir einfach x und y tauschen, was nur das Vorzeichen der Determinante, also nicht den Betrag, ändert: $|\det(x \,|\, y)| = |\det(y \,|\, x)|$.

Wir berechnen die Fläche F des Parallelogramms, indem wir vom Rechteck mit den Ecken

$$0, \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c+d \end{pmatrix}, x+y$$

die Flächen R_1, R_2 der zwei gelben Rechtecke und die Flächen $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ der vier grünen Dreiecke abziehen, siehe Skizze:



$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad F &= (a+b)\cdot(c+d) - R_1 - R_2 - \triangle_1 - \triangle_2 - \triangle_3 - \triangle_4 \\ &= (ac + ad + bc + bd) - bc - bc - \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}bd - \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}bd \\ &= ad - bc = \det(x \,|\, y). \end{aligned}$$

Hausaufgaben

H 28 Invertierbar

[3 P.]

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen und entscheiden Sie jeweils, ob die Matrix invertierbar ist: *(Achten Sie auf den angegebenen Körper!)*

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{2\times 2}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1+i & -1+5i \\ 1 & 2+3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & c & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4c & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$).

Lösung: Wir berechnen die Determinante und entscheiden dann mit Hilfe von Satz 10.8, ob die Matrix regulär (d. h. invertierbar) ist.

(a) Über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_7$ ist

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 28 = 0 \quad \textit{(Rechnen modulo 7)}.$$

Wegen $\det(A) = 0$ ist A also nicht invertierbar

(b) Es ist

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1+i & -1+5i \\ 1 & 2+3i \end{pmatrix} = (1+i) \cdot (2+3i) - 1 \cdot (-1+5i)$$
$$= 2 + 2i + 3i + 3i^2 + (1-5i) = 2 + 5i - 3 + 1 - 5i = 0.$$

Wegen $\det(B) = 0$ ist B also nicht invertierbar.

(c) Es ist

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & c & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4c & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0 + 4c^2 + 2 - 0 - 1 - 4c = 4c^2 - 4c + 1.$$

Wegen $\det(C) = (2c-1)^2$ sehen wir, dass C genau dann invertierbar ist, wenn $c \neq \frac{1}{2}$ ist.

H 29 4×4**-Determinanten** [0,5+1+1,5+3 = 6 P.]

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$, wobei D eine sogenannte Vandermonde-Matrix abhängig von Parametern $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Da die ersten beiden Zeilen von A gleich sind, ist $\det(A) = 0$ (siehe Lemma 10.6 (c)).

(b) Wir benutzen die Formel für die Determinante einer Blockmatrix:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (4-6)^2 = 4.$$

(c) Wir berechnen

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle -1} \quad = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \det \overset{-5}{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$= (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-36+3) = -66.$$

(d) Die Berechnung der Determinante der Vandermonde-Matrix D finden Sie auf der nächsten Seite.

(d) Wir berechnen

$$\det(D) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ 0 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_1 x_3 + x_1^2 \\ 1 & x_4 + x_1 & x_4^2 + x_1 x_4 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_2 & x_3^2 + x_1(x_3 - x_2) - x_2^2 \\ 0 & x_4 - x_2 & x_4^2 + x_1(x_4 - x_2) - x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \cdot \det \begin{pmatrix} x_3 - x_2 & x_3^2 + x_1(x_3 - x_2) - x_2^2 \\ x_4 - x_2 & x_4^2 + x_1(x_4 - x_2) - x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_4 - x_2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_3 + x_2 + x_1 \\ 1 & x_4 + x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_4 - x_2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_3 + x_2 + x_1 \\ 0 & x_4 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_4 - x_2) \cdot (x_4 - x_3)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j < 4} (x_j - x_i).$$

H 30 (K)eine Formel für Blockmatrizen [3 P.]

Es sei K ein Körper. Untersuchen Sie, für welche $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Formel

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \det(A) \cdot \det(D) - \det(B) \cdot \det(C)$$

für alle $A, B, C, D \in K^{m \times m}$ gilt.

Lösung: Für $m = 1$ ist das die bekannte Formel einer 2×2-Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Für $m \geq 2$ gilt die Formel hingegen nicht mehr, wie das folgende Beispiel zunächst für $m = 2$ zeigt:

$$A = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hier ist $\det(A) \cdot \det(D) - \det(B) \cdot \det(C) = 1$, aber

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

da zwei Zeilen gleich sind (siehe Lemma 10.6 (c)). Dieses Beispiel lässt sich analog für alle $m \geq 2$ formulieren mit

$$A = D = I_m, \quad B = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

H 31 Eigenschaften von Matrizen [3+1 = 4 P.]

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ über einem Körper K heißt

(i) **nilpotent**, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^k = 0$;

(ii) **idempotent**, wenn $A^2 = A$ gilt;

(iii) **selbstinvers** (oder Involution), wenn $A^2 = I_n$ gilt.

(a) Bestimmen Sie, welche Werte die Determinante einer Matrix A annehmen kann, die (i) nilpotent, bzw. (ii) idempotent, bzw. (iii) selbstinvers ist.

(b) Geben Sie für jede der drei Eigenschaften ein Beispiel für eine Matrix in $K^{2\times 2}\setminus\{0, I_2\}$ an, die diese Eigenschaft erfüllt.

Lösung: (a)

(i) Es sei A nilpotent, d. h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Dann folgt aus der Multiplikativität der Determinante:

$$\det(A)^k = \det(A^k) = \det(0) = 0,$$

und somit $\det(A) = 0$.

(ii) Es sei A idempotent, d. h. es gilt $A^2 = A$. Dann folgt aus der Multiplikativität der Determinante:

$$\det(A)^2 = \det(A^2) = \det(A),$$

und somit $\det(A) \in \{0, 1\}$, da die Gleichung $x^2 = x$ über einem Körper K die Lösungsmenge $\{0, 1\}$ hat.

Die idempotenten Matrizen $A = 0$ bzw. $A = I_n$ zeigen, dass beide Werte 0 und 1 auch wirklich vorkommen als Determinanten von idempotenten Matrizen.

(iii) Es sei A selbstinvers, d. h. A ist invertierbar und es gilt $A = A^{-1}$. Dann folgt aus der Multiplikativität der Determinante:

$$\det(A)^2 = \det(A^2) = \det(I_n) = 1,$$

und somit $\det(A) \in \{-1, 1\}$, da die Gleichung $x^2 = 1$ über einem Körper K die Lösungsmenge $\{-1, 1\}$ hat.

Die selbstinversen Matrizen $A = I_n$ bzw. $A = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ zeigen, dass beide Werte 1 und -1 auch wirklich vorkommen als Determinanten von selbstinversen Matrizen.

(b) Zum Beispiel: (i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (iii) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Programmieraufgaben

P 5 Determinante

Programmieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix, deren Einträge Gleitkommazahlen sind, in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (z. B. in Java). Testen Sie Ihr Programm an der Matrix B aus T 25.

Lösung: Siehe die Dateien Matrix.java, Determinant.java und P5.java für eine Umsetzung in Java.

Lösungen zu Blatt 10

Tutorübung

T 27 Eigenvektoren

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor von A ist. Geben Sie auch den zugehörigen Eigenwert an.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A und alle Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.

(d) Entscheiden Sie mit Begründung, ob A diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Wegen

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3v$$

ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 3.

(b) Es gilt:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} x-4 & 3 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & 2 & x-3 \end{vmatrix} \; {\scriptstyle -1} = \begin{vmatrix} x-4 & 3 & -1 \\ 0 & x-2 & 2-x \\ -1 & 2 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{+1}{=} (x-2) \cdot \begin{vmatrix} x-4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2) \cdot \begin{vmatrix} x-4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) \cdot \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2) \cdot ((x-4)(x-1)+2)$$

$$= (x-2) \cdot (x^2 - 5x + 6) = (x-2)^2 \cdot (x-3).$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von χ_A, also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$.

(c) Für einen Eigenwert λ berechnet sich der Eigenraum E_λ als $\text{Kern}(A - \lambda I_3)$. Für $\lambda_1 = 2$ berechnen wir also:

$$E_2 = \text{Kern}(A - 2 \cdot I_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; {\scriptstyle -2 \quad -1} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Für $\lambda_2 = 3$ können wir uns diese Rechnung sparen, denn hier gilt $m_a(\lambda_2) = 1$. Also folgt aus Satz 11.12 direkt $m_g(\lambda_2) = 1$, d. h. der Eigenraum ist 1-dimensional. Mit dem Eigenvektor v (aus (a)) zum Eigenwert 3 ist somit

$$E_{\lambda_2} = E_3 = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(d) Für den Eigenwert λ_1 ist $m_a(\lambda_1) = 2$ (doppelte Nullstelle von χ_A), aber $m_g(\lambda_1) = 1$ (1-dimensionaler Eigenraum). Also ist A nach Satz 11.15 nicht diagonalisierbar. Ganz konkret sehen wir das hier auch nochmal daran, dass wir „nicht genügend Eigenvektoren“ haben, um eine Basis des $\mathbb{R}^3$ zu bekommen. (Das wäre nur möglich gewesen, wenn der Eigenraum E_{λ_1} 2-dimensional gewesen wäre.)

T 28 Eigenwerte der Inversen

Es seien K ein Körper, $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

Lösung:

Vorbemerkung: Da A invertierbar ist, ist 0 **kein** Eigenwert von A. Also ist $\lambda \neq 0$.

Nach Voraussetzung gibt es also ein $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Multiplikation mit A^{-1} von links ergibt

$$v = I_n \cdot v = A^{-1} \cdot (Av) = A^{-1} \cdot (\lambda v) = \lambda A^{-1} v.$$

Hier multiplizieren wir jetzt mit λ^{-1} von links und erhalten:

$$\lambda^{-1} v = A^{-1} v,$$

also ist (wegen $v \neq 0$) tatsächlich λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

T 29 Charakteristisches Polynom

Es sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A = x^5 - x^4 - 16x + 16$.

(a) Zerlegen Sie χ_A in ein Produkt von Linearfaktoren.

(b) Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte von A.

(c) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Man sieht die Nullstelle $\lambda_1 = 1$. Also können wir χ_A ohne Rest durch $x - 1$ teilen:

$$\begin{array}{rcl} x^5 - x^4 - 16x + 16 & = & (x-1)\cdot(x^4 - 16) + 0 \\ -\underline{(x^5 - x^4)} & & \\ -16x + 16 & & \\ -\underline{(-16x + 16)} & & \\ 0 & & \end{array}$$

Wir zerlegen weiter:

$$\begin{aligned} \chi_A &= x^5 - x^4 - 16x + 16 \\ &= (x-1)\cdot(x^4 - 16) \\ &= (x-1)\cdot(x^2-4)\cdot(x^2+4) \\ &= (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-2i)\cdot(x+2i). \end{aligned}$$

(b) Nach (a) können wir die komplexen Eigenwerte von A ablesen:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = 2i, \quad \lambda_5 = -2i.$$

(c) Für jeden Eigenwert λ von A gilt $m_a(\lambda) = 1$ und somit nach Satz 11.12 auch $m_g(\lambda) = 1$. Da χ_A außerdem in Linearfaktoren zerfällt, was nach Satz 11.8 über $\mathbb{C}$ immer erfüllt ist, ist A nach Satz 11.15 diagonalisierbar.

Bemerkung: Die Situation aus dieser Aufgabe lässt sich verallgemeinern zu folgender Beobachtung: Es sei $A \in K^{n\times n}$ und A habe $\boldsymbol{n}$ **paarweise verschiedene Eigenwerte** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann ist

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$$

und für jeden Eigenwert gilt

$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) = 1.$$

Also ist A bei n paarweise verschiedenen Eigenwerten immer **diagonalisierbar**.

Hausaufgaben

H 32 Eigenwerte und Eigenräume [4 P.]

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Nach der Determinantenformel für Blockmatrizen gilt:

$$\chi_A = \det(x \cdot I_4 - A) = \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -7 & -6 \\ 1 & x-3 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & x-3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= ((x-3)^2 - 1) \cdot ((x-3) \cdot (x-1) + 1) = (x^2 - 6x + 8) \cdot (x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x-4) \cdot (x-2)^3$$

Also besitzt A zwei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$. Wir berechnen die Eigenräume:

$$E_4 = \mathrm{Kern}(4 \cdot I_4 - A) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -6 \\ 1 & 1 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Der zweite Eigenraum:

$$E_2 = \mathrm{Kern}(2 \cdot I_4 - A) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 & -6 \\ 1 & -1 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -15 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

H 33 Die Spur [1+2+1 = 4 P.]

Zu einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ heißt $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$, also die Summe der Diagonalelemente, die *Spur* von A. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\operatorname{tr} : K^{n\times n} \to K,\ A \mapsto \operatorname{tr}(A)$ ist linear.

(b) Für alle $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times m}$ gilt: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

(c) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich, so gilt: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Bemerkung: Wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt, d. h. $\chi_A = \prod_{i=1}^n (x-\lambda_i)$, so ist $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, also die Summe der Eigenwerte mit Vielfachheiten gezählt.

Lösung:

(a) Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\lambda A + B) &= \operatorname{tr}(\lambda(a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j}) = \operatorname{tr}((\lambda a_{ij} + b_{ij})_{i,j}) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B),\end{aligned}$$

also ist tr eine lineare Abbildung.

(b) Wir führen die Bezeichnungen

$$C = (c_{ij}) := A \cdot B$$

und

$$D = (d_{ij}) := B \cdot A$$

ein. Benutzen wir für c_{ii} (bzw. später für d_{kk}) die Definition des Matrizenprodukts, so ergibt sich durch Umordnen der Summe:

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^m c_{ii} = \sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}) = \sum_{k=1}^n (\sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ik}) = \sum_{k=1}^n d_{kk} = \operatorname{tr}(D).$$

(c) Es seien nun $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich, d. h. es existiere ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^{-1}AS = B$. Dann ergibt sich mit Hilfe von Teilaufgabe (b):

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(S^{-1}AS) = \operatorname{tr}(S^{-1}(AS)) = \operatorname{tr}((AS)S^{-1}) = \operatorname{tr}(ASS^{-1}) = \operatorname{tr}(A).$$

H 34 Linearfaktoren [5 P.]

Schreiben Sie die folgenden Polynome jeweils als ein Produkt von Linearfaktoren:

(a) $f_1 := x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{R}[x]$,

(b) $f_2 := x^3 - 3x^2 + 4 \in \mathbb{R}[x]$,

(c) $f_3 := x^4 - 1 \in \mathbb{C}[x]$,

(d) $f_4 := x^2 + 5 \in \mathbb{C}[x]$,

(e) $f_5 := x^4 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

Lösung:

(a) Die Nullstellen des Polynoms $z^2 - 5z + 6$ sind 2 und 3, also ist

$$f_1 = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 3)(x^2 - 2) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

(b) Man sieht die Nullstelle -1. Polynomdivision liefert dann $f_2 = (x + 1)(x^2 - 4x + 4)$, also ist

$$f_2 = (x + 1)(x - 2)^2.$$

(c) Die Nullstellen sind ± 1 und $\pm i$, also ist

$$f_3 = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i).$$

(d) Die Nullstellen sind $\pm\sqrt{5}i$, also ist

$$f_4 = (x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i).$$

(e) In $\mathbb{F}_2$ ist $1 = -1$ eine Nullstelle von f_5. Polynomdivision liefert dann zunächst $f_5 = (x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$. Beim zweiten Faktor sieht man wieder die Nullstelle 1 und Polynomdivision liefert $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$. Der quadratische Faktor hat ebenfalls die Nullstelle 1 und Polynomdivision liefert $x^2 + 1 = (x + 1)(x + 1)$, also ist

$$f_5 = (x + 1)^4.$$

H 35 Spiegelungsachse finden

[2+1+1 = 4 P.]

In dieser Aufgabe gehen wir im Prinzip genau umgekehrt zur Aufgabe H 27 vor.

Wir betrachten die Matrix

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und die durch A definierte lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(a) Bestimmen Sie zur Matrix A die Unterräume E_1 und E_{-1}.

(b) Geben Sie eine Basis $B = \{b_1, b_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ an, so dass gilt:

$$D_B(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeichnen Sie die Gerade $U := \langle b_1 \rangle$ und die Vektoren b_2, $-b_2$, $v = (-1, 7)^T$, $\varphi_A(v)$ in ein Koordinatensystem, um die Wirkung der linearen Abbildung φ_A zu veranschaulichen.

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$E_1 = \mathrm{Kern}(A - I_2) = \mathrm{Kern}(5A - 5I_2) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$E_{-1} = \mathrm{Kern}(A + I_2) = \mathrm{Kern}(5A + 5I_2) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

(b) Nach (a) sehen wir, dass die Matrix A mit den Eigenvektoren

$$b_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert werden kann. Genauer gilt:

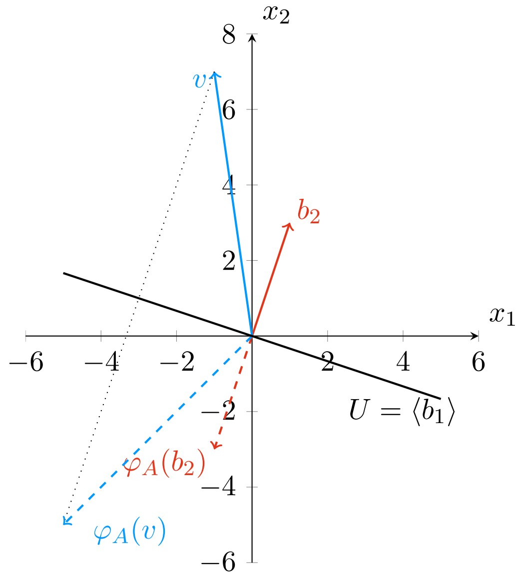
$$D_B(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Achtung: Nicht jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, für die es eine Darstellungsmatrix dieser Form $D_B(\varphi) = \mathrm{diag}(1, -1)$ gibt, ist automatisch eine Spiegelung! Was hier und in H 27 noch versteckt mit drin war, ist die Tatsache, dass b_1 und b_2 senkrecht (*orthogonal*) zueinander sind! Wir werden später sagen, dass B eine *Orthogonalbasis* des $\mathbb{R}^2$ ist.

Dass es möglich ist, die Matrix A mit einer Orthogonal- oder Orthonormalbasis zu diagonalisieren, ist kein Zufall, sondern folgt, da die Matrix A *symmetrisch* ist.

Dies werden unsere Themen in den letzten Kapiteln der Vorlesung werden.

(c) Es ist $\varphi_A(v) = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$.



Lösungen zu Blatt 11

Tutorübung

T 30 Diagonalisieren

Bestimmen Sie für die im Folgenden gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ jeweils eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $S^{-1}AS = D$ gilt.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Lösung:

(a) Es ist

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-1 & -4 \\ 2 & x-7 \end{pmatrix} = (x-1)(x-7)+8 = x^2-8x+15 = (x-3)(x-5).$$

Wir berechnen die Eigenräume:

$$E_3 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$E_5 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Mit $S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt also $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} := D$.

(b) Es ist

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 - x - 1.$$

$$\text{Nullstellen von } \chi_A: \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-1)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Wir benutzen die Bezeichnungen λ_1 und λ_2 und berechnen die Eigenräume:

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Mit $S := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt also $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} := D$.

T 31 Fibonacci-Folge

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad (\text{für alle } n \geq 1)$$

der Fibonacci-Zahlen. Bestmmen Sie mit Hilfe von T 30 eine geschlossene Formel für a_n.

Lösung:

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir benutzen die Bezeichnungen aus T 30 b):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot SD^nS^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot D^n \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n \\ -{\lambda_2}^n \end{pmatrix} = \frac{{\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

Es gilt $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$, also folgt:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

T 32 Eigenwerte von A^T

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Zeigen Sie, dass auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten eines Eigenwerts λ von A mit denen von λ als Eigenwert von A^T übereinstimmen.

(c) Sind auch die Eigenräume von A und von A^T gleich, also $E_\lambda(A) = E_\lambda(A^T)$? Geben Sie einen **Beweis** oder ein **Gegenbeispiel** an.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass A und A^T das gleiche charakteristische Polynom haben. Das liegt im Wesentlichen daran, dass sich die Determinante beim Transponieren nicht ändert. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det(x \cdot I_n - A) = \det((x \cdot I_n - A)^T) = \det((x \cdot I_n)^T - A^T) \\ &= \det(x \cdot I_n - A^T) = \chi_{A^T}.\end{aligned}$$

(b) *Notation:* Wir benutzen hier die Schreibweisen $m_a(\lambda, B)$ bzw. $m_g(\lambda, B)$ für die algebraische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ einer Matrix B.

Wegen $\chi_A = \chi_{A^T}$ gilt für alle Eigenwerte λ von A:

$$m_a(\lambda, A) = m_a(\lambda, A^T).$$

Da sich der Rang einer Matrix beim Transponieren nicht ändert ("Zeilenrang = Spaltenrang") ist außerdem:

$$\begin{aligned}m_g(\lambda, A) &= \dim(\mathrm{Kern}(\lambda I_n - A)) = n - \mathrm{rg}(\lambda I_n - A) \\ &= n - \mathrm{rg}((\lambda I_n - A)^T) = n - \mathrm{rg}(\lambda I_n - A^T) = \dim(\mathrm{Kern}(\lambda I_n - A^T)) \\ &= m_g(\lambda, A^T).\end{aligned}$$

(c) Nein, das stimmt natürlich nicht. Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist für $\lambda = 1$:

$$E_1(A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

aber

$$E_1(A^T) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Hausaufgaben

H 36 Rekursive Folge [4 P.]

Eine reellwertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 2, \quad a_1 := -1, \quad a_{n+1} := -a_n + 6a_{n-1} \quad (\text{für alle } n \geq 1)$$

Bestimmen Sie analog zur (T 31) eine explizite Formel für die Folgenglieder a_n.

Lösung: Wir machen den Ansatz:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Induktiv erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x+1 & -6 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

und die Eigenräume

$$E_2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

sowie

$$E_{-3} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Mit $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt also $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = D$ und mit $A^n = SD^nS^{-1}$ können wir die gesuchte Formel für a_n nun berechnen:

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A^n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \cdot (-\frac{1}{5}) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-\frac{1}{5}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -(-3)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 2^n + (-3)^n. \end{aligned}$$

H 37 Diagonalisierbar [2,5+1,5+1 = 5 P.]

Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3.}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenräume von A.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenräume von B.

(c) Entscheiden Sie, welche der beiden Matrizen diagonalisierbar ist. Geben Sie für diese Matrix X auch eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}XS = D$ an.

Lösung: (a) Wir entwickeln nach Zeile 2:

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-6 & 4 & -3 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 5 & -4 & x+2 \end{pmatrix} = (x-1)\cdot \det \begin{pmatrix} x-6 & -3 \\ 5 & x+2 \end{pmatrix} = (x-1)((x-6)(x+2)+15)$$

$$= (x-1)(x^2-4x+3) = (x-1)^2(x-3).$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$.

Wir berechnen die Eigenräume:

$$E_1 = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$E_3 = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(b) Da B eine obere Dreiecksmatrix ist, erhalten wir

$$\chi_B = \det \begin{pmatrix} x-2 & -4 & -4 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-2)^3.$$

Also hat B nur den Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Der zugehörige Eigenraum lautet

$$E_2 = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(c) Bei der Matrix A gilt $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ für beide Eigenwerte. Also ist A nach Satz 11.15 diagonalisierbar. Bei der Matrix B gilt $m_g(\lambda_1) = 2$, aber $m_a(\lambda_1) = 3$, also ist B nach Satz 11.15 nicht diagonalisierbar.

Aus den in (a) gefundenen Eigenvektoren bauen wir die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt also

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: D.$$

H 38 Trigonalisierbar? Diagonalisierbar? [5 P.]

Untersuchen Sie, für welche a, $b \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ 1 & -a & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

über $\mathbb{R}$ ähnlich zu einer (a) oberen Dreiecksmatrix bzw. (b) Diagonalmatrix ist.

Lösung: Wir berechnen

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x & b & -c \\ -1 & x+a & -2 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x \cdot \det \begin{pmatrix} x & b \\ -1 & x+a \end{pmatrix} = x \cdot (x^2 + ax + b).$$

Nach Anmerkung 11.18 ist A über dem Körper $\mathbb{R}$ genau dann ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix („trigonalisierbar“), wenn χ_A in $\mathbb{R}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Hier gilt:

$$\begin{aligned} \chi_A \text{ zerfällt in } \mathbb{R}[x] \text{ Linearfaktoren} \quad &\iff \quad x^2 + ax + b \text{ hat reelle Nullstellen} \\ &\iff \quad a^2 - 4b \geq 0 \text{ („Diskriminante“).} \end{aligned}$$

Damit ist (a) schon beantwortet:

$$A \text{ ist über } \mathbb{R} \text{ trigonalisierbar} \quad \iff \quad a^2 - 4b \geq 0.$$

Um zu untersuchen, wann A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, können wir ab jetzt voraussetzen, dass $a^2 - 4b \geq 0$ gilt, denn sonst ist A sicherlich nicht diagonalisierbar. Die reellen Eigenwerte von A lauten dann

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Wir müssen nun die alg. und geom. Vielfachheiten der Eigenwerte untersuchen und machen dazu Fallunterscheidungen.

<u>Fall 1:</u> $(b = 0)$. *(In diesem Fall ist 0 eine mehrfache Nullstelle von χ_A.)*

<u>Fall 1.1:</u> $(a = 0)$. Dann sind $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also $m_a(0) = 3$. Wegen $A \neq 0$ ist aber $m_g(0) < 3$, also ist A nicht diagonalisierbar.

<u>Fall 1.2:</u> $(a \neq 0)$. Dann sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = -a \neq 0$, also $m_a(0) = 2$ und $m_a(\lambda_3) = 1$. Es folgt $m_g(\lambda_3) = m_a(\lambda_3) = 1$ und an der Matrix A sehen wir

$$m_g(0) = \dim(\mathrm{Kern}(A)) = \dim(\mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2 = m_a(0),$$

also ist A diagonalisierbar.

<u>Fall 2:</u> $(b \neq 0)$. *(In diesem Fall ist 0 eine einfache Nullstelle von χ_A.)*

<u>Fall 2.1:</u> $(a^2 - 4b = 0)$. Dann sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = -a/2 \neq 0$, also $m_a(0) = 1$ und $m_a(\lambda_2) = 2$. Es folgt $m_g(0) = m_a(0) = 1$ und an der Matrix A sehen wir

$$m_g(\lambda_2) = \dim(\mathrm{Kern}(A + \frac{a}{2} I_3)) = \dim(\mathrm{Kern} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -b & 0 \\ 1 & -\frac{a}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}) \leq 1 < m_a(\lambda_2),$$

also ist A nicht diagonalisierbar.

<u>Fall 2.2:</u> $(a^2 - 4b \neq 0)$. Dann sind λ_1, λ_2, λ_3 drei paarweise verschiedene Eigenwerte, also ist A diagonalisierbar (siehe Lösung zur T 29 für dieses Argument).

H 39 Einsetzen in Polynome [1,5+2+1,5 = 5 P.]

Es sei K ein Körper. Wir können nicht nur Körperelemente $a \in K$, sondern auch quadratische Matrizen in Polynome einsetzen:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x] \quad \text{und} \quad A \in K^{n\times n} \quad \Longrightarrow \quad f(A) := \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \in K^{n\times n}.$$

(a) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, so ist $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(A)$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $A^4 = A^2 + 6 \cdot I_4$. Beantworten Sie mit Begründung: Welche Eigenwerte kann A höchstens haben?

(c) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Zeigen Sie: $\chi_A(A) = 0$ (Nullmatrix).

Bemerkung: Die Aussage in (c) ist der Spezialfall $n = 2$ des Satzes von Cayley-Hamilton: Für $A \in K^{n\times n}$ gilt $\chi_A(A) = 0$.

Lösung:

(a) Es sei λ ein Eigenwert von A. Dann existiert ein $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit $A \cdot v = \lambda v$. Für $i \in \mathbb{N}$ folgt dann $A^i \cdot v = \lambda^i v$ per Induktion. Wir rechnen:

$$f(A) \cdot v = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i A^i \right) \cdot v = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i v = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i v = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \right) \cdot v = f(\lambda) \cdot v.$$

Also ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert $f(\lambda)$ von $f(A)$.

(b) Es ist also A eine Nullstelle von $f := x^4 - x^2 - 6$. Ist nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist also $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(A) = 0$ (also von der Nullmatrix). Damit folgt $f(\lambda) = 0$. Also gilt:

$$\{\text{Eigenwerte von } A\} \subseteq \{\text{Nullstellen von } f\}.$$

Die Nullstellen von f berechnet man zum Beispiel durch Substitution $x^2 = z$. Man kommt auf die Zerlegung:

$$f = (x^2 - 3)(x^2 + 2) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2}).$$

Also:

$$\{\text{Eigenwerte von } A\} \subseteq \{\pm\sqrt{3}, \pm i\sqrt{2}\}.$$

(c) Es ist:

$$\chi_A = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) = x^2 - (a + d) \cdot x + (ad - bc),$$

und somit

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \cdot I_2 = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

wie es der Satz von Cayley-Hamilton vorhersagt.

Technische Universität München

Lineare Algebra für Informatik

SoSe 2020

Prof. Dr. Gregor Kemper — Dr. Fabian Reimers

Lösungen zu Blatt 12

Tutorübung

T 33 Orthogonale Projektion auf eine Gerade

Es seien $V = \mathbb{R}^n$, $u,\, v \in V$ mit $u \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Vektor

$$\varphi(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u$$

das Bild von v unter der orthogonalen Projektion $\varphi : V \to V$ auf den Unterraum $U = \langle u\rangle$ ist, d. h. $\varphi(v) \in U$ und $\varphi(v) - v \in U^{\perp}$.

Lösung:

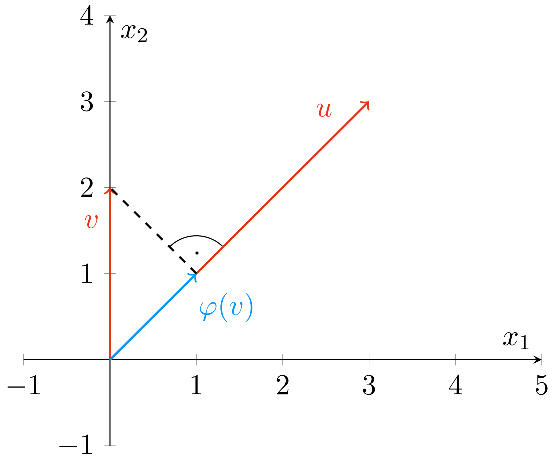
Offensichtlich ist $\varphi(v) \in \langle u\rangle = U$. Indem wir die Eigenschaften „bilinear“ und „symmetrisch“ des Skalarprodukts benutzen, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle \varphi(v) - v,\, u\rangle &= \langle \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u - v,\, u\rangle = \langle \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u,\, u\rangle + \langle -v,\, u\rangle \\ &= \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot \langle u,\, u\rangle - \langle v,\, u\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle = 0.\end{aligned}$$

Also ist $\varphi(v) - v$ orthogonal zu u und da $\{u\}$ eine Basis von U ist, ist somit $\varphi(v) - v \in U^{\perp}$.

Wir betrachten noch ein Beispiel mit Skizze zur Veranschaulichung der Situation. Es seien dazu

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u = \frac{6}{18} \cdot u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



T 34 Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Gegeben seien die Vektoren:

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Abstand $|u - v|$ zwischen u und v.

(b) Berechnen Sie den Winkel[1] α zwischen u und w.

(c) Berechnen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ des Unterraums $U := \langle u, v \rangle$.

Lösung: (a) Es ist

$$\|u - v\| = \| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

(b) Es ist

$$1 = \langle u, w \rangle = \|u\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha) = 2\cos(\alpha),$$

also ist $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ und somit $\alpha = \pi/3 = 60°$.

(c) Es ist

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\langle x, \lambda u + \mu v \rangle}_{=\lambda\langle x,u\rangle + \mu\langle x,v\rangle} = 0 \text{ für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = 0\} \\ &= \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Bemerkung: Geometrisch ist U die Ebene durch den Nullpunkt, die von u und v aufgespannt wird. Mit $(1,\ -2,\ 1)^T$ haben wir einen sog. *Normalenvektor* dieser Ebene berechnet. Ein solcher erzeugt die Gerade $U^\perp$, die durch den Nullpunkt geht und senkrecht zur Ebene U ist.

---

[1] Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ermöglicht es, den *Winkel* zwischen v und w zu definieren, als die eindeutig bestimmte Zahl α im abgeschlossenen Intervall $[0, \pi]$ mit

$$\langle v, w \rangle = |v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha).$$

T 35 Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Für $u,\, v \in \mathbb{R}^3$ ist das Kreuzprodukt definiert als

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass für alle $u,\, v,\, w \in \mathbb{R}^3$ gelten:

(a) $\langle u \times v,\, w\rangle = \det(u \mid v \mid w)$,

(b) $(u \times v) \perp u, \quad (u \times v) \perp v$,

(c) u, v linear unabhängig $\quad \Longleftrightarrow \quad u \times v \neq 0$.

Lösung:

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\langle u \times v,\, w\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1 \\ &= \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Aus (a) folgt für $w = u$:

$$\langle u \times v, u\rangle = \det(u \mid v \mid u) = 0,$$

da zwei Spalten gleich sind. Also ist $(u \times v) \perp u$. Aus demselben Grund ist $(u \times v) \perp v$.

(c)

"$\Rightarrow$": Es seien $u,\, v$ linear unabhängig. Dann existiert ein $w \in \mathbb{R}^3$, so dass $\{u, v, w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Damit ist

$$0 \neq \det(u \mid v \mid w) \overset{(a)}{=} \langle u \times v, w\rangle,$$

also folgt $u \times v \neq 0$.

"$\Leftarrow$": Es sei $u \times v \neq 0$ und es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda u + \mu v = 0$. Da $\times$ bilinear ist, folgt

$$0 = 0 \times v = (\lambda u + \mu v) \times v = \lambda(u \times v) + \mu \underbrace{(v \times v)}_{=0} = \lambda(\underbrace{u \times v}_{\neq 0}).$$

Daher ist $\lambda = 0$. Die analoge Rechnung mit $u \times (\lambda u + \mu v)$ zeigt $\mu = 0$. Also sind u und v linear unabhängig.

Bemerkung: Das Kreuzprodukt $u \times v$ zweier linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^3$ liefert also einen Normalenvektor für die Ebene $U = \langle u, v\rangle$. Zum Beispiel gilt mit den Vektoren aus T 34:

$$u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

was die Rechnung aus T 34 (c) nochmal bestätigt.

Hausaufgaben

H 40 Gram-Schmidt-Verfahren [4 P.]

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von

$$U = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Lösung: Wir bezeichnen die drei erzeugenden Vektoren von U der Reihe nach mit b_1, b_2 und b_3. Dann berechnen wir nach dem Schmidt-Verfahren:

$$c_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Und als nächstes

$$\widetilde{c}_2 := b_2 - \langle c_1, b_2 \rangle \cdot c_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix} - \frac{1}{12} \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-1\end{pmatrix},$$

den wir noch normieren müssen:

$$c_2 := \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Weiter geht es mit

$$\widetilde{c}_3 := b_3 - \langle c_1, b_3 \rangle \cdot c_1 - \langle c_2, b_3 \rangle \cdot c_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{12} \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} \rangle}_{=0} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{12} \underbrace{\langle \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} \rangle}_{=4} \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix}7\\3\\-4\\-2\end{pmatrix},$$

den wir auch noch normieren müssen:

$$c_3 := \frac{1}{\sqrt{78}} \begin{pmatrix}7\\3\\-4\\-2\end{pmatrix}.$$

Dann ist $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von U.

H 41 Summe und Differenz

[2 P.]

Es seien x, $y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $x + y$ und $x - y$ genau dann orthogonal zueinander sind (bzgl. des Standard-Skalarprodukts), wenn x und y die gleiche Länge haben.

Lösung: Es ist

$$\langle x+y,\, x-y\rangle \underset{\substack{\uparrow\\ \text{linear im 1. Argument}}}{=} \langle x, x-y\rangle + \langle y, x-y\rangle \underset{\substack{\uparrow\\ \text{linear im 2. Argument}}}{=} \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=\langle x,y\rangle} - \langle y,y\rangle = |x|^2 - |y|^2.$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} x+y \text{ und } x-y \text{ sind orthogonal} \quad &\iff \quad \langle x+y,\, x-y\rangle = 0 \\ &\iff \quad |x|^2 - |y|^2 = 0 \\ &\iff \quad |x|^2 = |y|^2 \\ &\iff \quad |x| = |y|. \end{aligned}$$

H 42 Orthogonale Matrizen

[1+1,5+1,5+2 = 6 P.]

(a) Zeigen Sie, dass für eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ gilt: $\det(A) \in \{\pm 1\}$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir nun die Drehmatrix $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie: $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie $\det(D_\alpha)$ und zeigen Sie: $D_\alpha^{-1} = D_{-\alpha} = D_\alpha^T$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie: $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{ D_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi) \}$. *Hinweis:* Betrachten Sie für eine Matrix $A = (b_1 \mid b_2) \in \mathrm{SO}_2$ die Polarkoordinaten von b_1.

Bemerkung: Die Matrizen in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ definieren Spiegelungen.

Lösung:

(a) Wegen $A^T A = I_n$ folgt

$$1 = \det(I_n) = \det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A)^2.$$

Also ist $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(b) Mit den Additionstheoremen für cos und sin ergibt sich

$$\begin{aligned} D_\alpha \cdot D_\beta &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = D_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\det(D_\alpha) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Also ist D_α invertierbar und mit der Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix folgt

$$D_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = D_\alpha^T.$$

Mit (b) erhalten wir außerdem

$$I_2 = D_0 = D_{\alpha+(-\alpha)} = D_\alpha \cdot D_{-\alpha},$$

also ist auch $(D_\alpha)^{-1} = D_{-\alpha}$.

(Geometrisch: Invers zur Drehung um den Winkel α nach links ist die Drehung um den Winkel $-\alpha$ nach links, also um den Winkel α nach rechts.)

(d) "$\supseteq$": In (c) wurde gezeigt, dass D_α orthogonal ist (d. h. $D_\alpha^{-1} = D_\alpha^T$) und die Determinante 1 hat. Also ist diese Inklusion bereits gezeigt.

"$\subseteq$": Es sei $A = (b_1 \mid b_2) \in \mathrm{SO}_2$. Dann ist $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$. Insbesondere hat b_1 die Länge 1, d. h. in Polarkoordinaten gilt

$$b_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \text{mit einem } \alpha \in [0, 2\pi).$$

Wegen $b_1 \perp b_2$ ist

$$b_2 \in \langle b_1 \rangle^\perp = \langle \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \rangle^\perp = \langle \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \rangle.$$

Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$b_2 = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Da b_2 die Länge 1 hat, folgt $\lambda = \pm 1$. Also bleiben nur zwei Möglichkeiten:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{=D_\alpha} \qquad \text{oder} \qquad A = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{=:S_\alpha}.$$

Wegen $\det(A) = 1$ folgt $A = D_\alpha$.

Bemerkung: Die „anderen" Matrizen in $O_2(\mathbb{R})$, also die orthogonalen 2×2-Matrizen mit Determinante -1, wie obiges S_α, sind Spiegelungsmatrizen.

Programmieraufgaben

P 6 Vektoriteration

Die Vektoriteration ist ein numerisches Verfahren zur Berechnung eines Eigenwert-Eigenvektor-Paares und verallgemeinert die Idee zur Eigenvektor-Berechnung der Google-Matrix aus der Vorlesung. Wir setzen dazu voraus, dass $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar ist und dass es einen eindeutigen betragsmäßig größten Eigenwert λ von A gibt. Ausgehend von einem fast beliebigen[1] Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert dann die durch

$$x_i := \frac{A \cdot x_{i-1}}{|A \cdot x_{i-1}|} \qquad (\text{für } i \geq 1)$$

rekursiv definierte Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen einen Eigenvektor x zum Eigenwert λ von A.

Programmieren Sie die Vektoriteration in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (z. B. in Java). Berechnen Sie mit Ihrem Programm näherungsweise einen Eigenwert λ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Einträge des Startvektors können Pseudozufallszahlen aus dem Intervall $(0, 1)$ sein.

Lösung:

Siehe die Dateien Matrix.java, Vector.java und P6.java für eine Umsetzung in Java. Je nach Glück mit dem Startvektor kann die Anzahl an Iterationen, die benötigt werden, bis Konvergenz zum Eigenvektor (bzw. Eigenwert) erreicht wird, variieren. Man findet den betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda = 7$ von A.

---

[1] Ist der Startvektor als Linearkombination der Eigenvektor-Basis geschrieben, so dürfen die Skalare, die vor den Eigenvektoren, die zum Eigenwert λ gehören, stehen, nicht alle gleich 0 sein.