Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 8

Tutorium

T8.1 Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, und die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine ONB von V ist.

(b) Schreiben Sie v als Linearkombination von B.

Zur Selbstkontrolle: (b) $v = \frac{1}{\sqrt{3}}v_1 + 2\sqrt{2}v_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}v_3$.

T8.2 Es sei V der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2]$. Prüfen Sie die Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$s(f, g) := f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

auf Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit. Ist s ein Skalarprodukt?

Zur Selbstkontrolle: ✓ ✓ × ×

T8.3 Gegeben ist eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Leider hat der Eumel seinen Kaffee über die Angabe verschüttet, so dass die Einträge x_1, x_2, x_3, x_4 unlesbar geworden sind. Der Eumel hat nur noch kurz gesehen, dass $x_1 > 0$ war. Rekonstruieren sie alle Einträge für

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & x_1 & x_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & x_2 & x_4 \end{pmatrix}.$$

T8.4 Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = (1, 0, 1, 0)^\top, \quad v_2 = (1, 1, 1, 1)^\top, \quad v_3 = (1, 1, 2, 2)^\top \quad \text{und} \quad v_4 = (0, 1, -1, 0)^\top.$$

Es sei $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von W.

(b) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtverfahren eine Orthonormalbasis von W.

T8.5 Begründen Sie, warum orthogonale Vektoren ungleich 0 linear unabhängig sind.

Zusätzliche Übungen

Z8.1 Es sei $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine *beliebige* Basis von $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $A := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die folgende MATLAB -Funktion `gramSchmidt(A)` soll das Gram-Schmidt-Vefahren implementieren. Ergänzen Sie das fehlende Fragment:

```
function A=gramSchmidt(A)
    [m,n]=size(A);
    A(:,1)=A(:,1)/norm(A(:,1));
    for k=2:n
      for j=1:k-1
        A(:,k)=A(:,k)- % Hier fehlt etwas
      end
      A(:,k)=A(:,k)/norm(A(:,k));
    end
```

Z8.2 Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_3 \subseteq \mathbb{R}[x]$ sei das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

für f, $g \in V$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ von V.

(b) Man berechne in V den Abstand von $f = x + 1$ und $g = x^2 - 1$.

Z8.3 Im $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) seien die Ebenen

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\} \quad \text{und} \quad E_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

gegeben, sowie der Vektor $v = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Normalenvektoren n_1 und n_2 der Ebenen E_1 und E_2.
Hinweis zu n_1: Schreiben Sie die Ebenengleichung mit Hilfe des Skalarproduktes.

(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2. Diesen erhält man als den *kleineren* der beiden Winkel $\measuredangle(n_1, n_2)$ bzw. $\measuredangle(n_1, -n_2)$ (erklären Sie ihrem Nachbarn, warum man das so definiert).

(c) Geben Sie eine Zerlegung $v = u + w$ des Vektors v an mit $u \in E_1$ und $w \perp E_1$.

T8.1 Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, und die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine ONB von V ist. 证B ↗ 子集 → 不相关 ↘ 相等.

(b) Schreiben Sie v als Linearkombination von B.

(a)

Schritt 1

B ist ein Basis von V

① $v_1 \in R^3$ $v_2 \in R^3$ $v_3 \in R^3$

② Linear unabhängig:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

③ $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\} = V$ ⇒ da $\dim(V) = 3 = |B|$

Schritt 2

B ist ein ONB von V

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ $\langle v_2, v_2 \rangle = 1$ $\langle v_3, v_3 \rangle = 1$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 1 \end{array}\right)$$

化简

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & \sqrt{6} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{6} \\ 0 & -2\sqrt{3} & 0 & -4\sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{6} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{6} \end{array}\right)$$

$z = \frac{\sqrt{6}}{-3} = \cancel{\ }$

$y = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

$x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

计算水平严重退化

(a) 长度为1 $\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1.$ $\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0} = 1$ $\|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{4}{6}} = 1$

b) 待定 λ μ k.

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\mu + k\frac{1}{\sqrt{6}} = 2 & ① \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\mu + k\frac{1}{\sqrt{6}} = -2 & ② \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda + 0\cdot\mu - \frac{2}{\sqrt{6}}k = 1 & ③ \end{cases}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda \overset{-1}{=} \frac{2}{\sqrt{6}}k$

$\frac{1}{\sqrt{6}}k = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda - \frac{1}{2}$ ④

④代入①、②

$\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\mu + \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda - \frac{1}{2} = 2$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\mu + \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda - \frac{1}{2} = -2$

减 ⇒ $\frac{2}{\sqrt{2}}\mu = 4$ $\mu = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

代回 $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda = \frac{5}{2}$

$\frac{3}{2\sqrt{3}}\lambda = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{6}}k = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

$k = -\frac{1}{3} \times \sqrt{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}\,v_1 + \underbrace{2\sqrt{2}}\,v_2 \cancel{+} \underbrace{-\frac{\sqrt{6}}{3}}\,v_3$

T8.2 Es sei V der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2]$. Prüfen Sie die Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$s(f, g) := f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

auf Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit. Ist s ein Skalarprodukt?

设 f, g 是在 $[0,2]$ 上的连续函数

- Bi:

$$\langle \lambda f + f', g \rangle_s$$
$$= \langle \lambda f, g \rangle_s + \langle f', g \rangle_s$$
$$= \lambda \langle f, g \rangle_s + \langle f', g \rangle_s$$

去证

$$\lambda \langle f, g \rangle = \lambda \big(f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) \big)$$

$$\langle f', g \rangle_s = \dots$$

已知: $(\pi f + f')(0)\,g(0) + (\pi f + f')(2)\,g(2)$

$+ (\pi f + f')(2)\,g(2)$

$\downarrow$

$(\pi f(0) + f'(0))\,g(0)$

所以满足Bi

- Sy: $\langle f, g\rangle_S = \langle g, f\rangle_S$?

$=$ 左: $f(0)g(0) + f(2)g(2) + f(2)g(2)$

右: $g(0)f(0) + g(2)f(2) + g(2)f(2)$

所以满足Sy

- Pos: $\langle f, f\rangle_S = f(0)f(0) + f(2)f(2) + f(2)g(2)$

$= f^2(0) + f^2(2) + f^2(2) \geq 0$

当 $\langle f, f\rangle_S = 0$ 时

$\Leftrightarrow f(0) = 0$ 且 $f(2) = 0$ 且 $f(2) = 0$

但无法说明 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上恒为0 如 $f(1.5) \neq 0$

所以不满足Pos

S不是Skalarprodukt.

T8.3 Gegeben ist eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Leider hat der Eumel seinen Kaffee über die Angabe verschüttet, so dass die Einträge x_1, x_2, x_3, x_4 unlesbar geworden sind. Der Eumel hat nur noch kurz gesehen, dass $x_1 > 0$ war. Rekonstruieren sie alle Einträge für

记住 ONB

$\langle v_1, v_2\rangle = 0$ 且 $\langle v_1, v_1\rangle = 1$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & x_1 & x_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & x_2 & x_4 \end{pmatrix}.$$

③ 用"行"为1

④ ···(自由)

① 1列 ⊥ 2列: $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$

② 2列为长1: $x_1^2 + \frac{1}{5} + x_2^2 = 1$

①+② $\Rightarrow x_1^2 + \frac{1}{5} + x_1^2 = 1$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad \Rightarrow x_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

T8.4 Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = (1,0,1,0)^\top, \quad v_2 = (1,1,1,1)^\top, \quad v_3 = (1,1,2,2)^\top \quad \text{und} \quad v_4 = (0,1,-1,0)^\top$$

Es sei $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von W.

#Basis

(b) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtverfahren eine Orthonormalbasis von W.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&2&2\\ 0&1&-1&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&2\\ 0&1&-1&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&-1&-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dimension ist drei

$\Rightarrow$ eine Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$

或用 $w_1^\top w_2^\top w_3^\top$

(b) $v_1 \to b_1 \quad v_2 \to b_2 \quad v_3 \to b_3$

(b) $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle \Leftarrow W$

$\downarrow$ MAP 创造基底

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4$

$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{2}$

$b_2 = \frac{1}{\|c_2\|} c_2$

$c_2 = v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2}$

$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\|c_2\| = \sqrt{2}$

$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$b_3 = \frac{1}{\|c_3\|} c_3$

$c_3 = v_3 - b_2 - b_1$

$\langle v_3, b_2 \rangle \cdots$ 略

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ v_3

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

T8.5 Begründen Sie, warum orthogonale Vektoren ungleich 0 linear unabhängig sind.

线性不相关：系数only为0

$v = \{v_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$

其中 $\langle v_\lambda, v_\varphi \rangle = 0$

解

设 $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_n v_n = 0$

$\sum \lambda_i v_i = 0$

存在唯一解 $\lambda_1 = \lambda_2 \dots + \lambda_2 = 0$

若有：$\langle v_1, (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \rangle = \langle v_1, 0 \rangle$

Again:

设有 $v_1\ v_2 \dots v_n$

彼此senkrecht

若有 $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \dots \lambda_n v_n = 0$

左乘 v_1

$=0$

左 $=\lambda_1\langle v_1,v_1\rangle+\underbrace{\lambda_2\langle v_1,v_2\rangle\cdots+\lambda_n\langle v_1,v_n\rangle}_{0}$

$\Rightarrow \lambda_1\langle v_1,v_1\rangle=0$

若 $\lambda_1\neq0$ 则 $\langle v_1,v_1\rangle=0$

由 Positi. Def 知 $v_1=0$

而 OGB $\neq0$ $\Rightarrow$ 同理 $\lambda_2=0$ $\lambda_3=0$ …

λ_i 都为0

$\langle v_1, \lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_n v_n\rangle=\langle v_1, 0\rangle$

$\underbrace{\lambda_1\langle v_1,v_1\rangle}_{\neq0}+\underbrace{\cdots+\lambda_n\langle v_1,v_n\rangle}_{0} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1=0$. 同理 $\lambda_1\sim\lambda_n=0$.

Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 8

Tutorium

T8.1 Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, und die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine ONB von V ist.

(b) Schreiben Sie v als Linearkombination von B.

Lösung T8.1: (a) Dies folgt unmittelbar aus $|B| = \dim(V) = 3$ und

$$\langle v_1, v_1\rangle = \langle v_2, v_2\rangle = \langle v_3, v_3\rangle = 1$$

und

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = 0.$$

(b) Da B eine ONB ist erhalten wir

$$v = \langle v_1, v\rangle v_1 + \langle v_2, v\rangle v_2 + \langle v_3, v\rangle v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 + 2\sqrt{2} v_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} v_3$$

T8.2 Es sei V der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2]$. Prüfen Sie die Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$s(f, g) := f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

auf Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit. Ist s ein Skalarprodukt?

Lösung T8.2: Wir rechnen für $f, g, h \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ nach:
Symmetrie gilt:

$$s(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) = g(0)f(0) + g(1)f(1) + g(2)f(2) = s(g, f).$$

Aufgrund der Symmetrie reicht es nun für die Bilinearität die Linearität im ersten Argument nachzurechnen: **(Bi)linearität (im erstem Argument) gilt:**

$$s(f + \lambda g, h) = (f + \lambda g)(0)h(0) + (f + \lambda g)(1)h(1) + (f + \lambda g)(2)h(2) =$$

$$(f(0) + \lambda g(0))h(0) + (f(1) + \lambda g(1))h(1) + (f(2) + \lambda g(2))h(2) =$$

$$f(0)h(0) + f(1)h(1) + f(2)h(2) + \lambda(g(0)h(0) + g(1)h(1) + g(2)h(2)) = s(f, h) + \lambda s(g, h).$$

Die **positive Definitheit** ist dagegen **nicht** erfüllt. Zwar ist stets $s(f, f) = f(0)^2 + f(1)^2 + f(2)^2 \geq 0$, aber es gibt viele von Null verschiedene stetige Funktionen, die $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ und damit auch $s(f, f) = 0$ erfüllen, z.B. $f(x) = \sin(\pi x)$.
Damit ist s dann auch **kein Skalarprodukt**.

T8.3 Gegeben ist eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Leider hat der Eumel seinen Kaffee über die Angabe verschüttet, so dass die Einträge x_1, x_2, x_3, x_4 unlesbar geworden sind. Der Eumel hat nur noch kurz gesehen, dass $x_1 > 0$ war. Rekonstruieren sie alle Einträge für

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & x_1 & x_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & x_2 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Lösung T8.3: Wir verwenden zunächst, dass das Skalarprodukt aus erster und zweiter Spalte Null ergeben muss, und das liefert die Gleichung

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Weiter muss die Norm der zweiten Spalte gleich 1 sein, also $x_1^2 + \frac{1}{5} + x_2^2 = 1$. Dies liefert wegen $x_1 = -x_2$ dann $2x_1^2 = \frac{4}{5}$ oder $x_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. Da $x_1 > 0$ folgt somit $x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}$ und $x_2 = -x_1 = -\sqrt{\frac{2}{5}}$. Wir verwenden nun dass die dritte Spalte auf den ersten beiden senkrecht steht, und das liefert die Gleichungen

$$x_3 + x_4 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{2}{5}}x_3 - \frac{2}{5} - \sqrt{\frac{2}{5}}x_4 = 0,$$

also das LGS mit erweiterter Koeffizientematrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right).$$

Dieses hat als eindeutige Lösung $x_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. Wir erhalten die orthogonale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

T8.4 Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = (1,0,1,0)^\top, \quad v_2 = (1,1,1,1)^\top, \quad v_3 = (1,1,2,2)^\top \quad \text{und} \quad v_4 = (0,1,-1,0)^\top.$$

Es sei $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von W.

(b) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtverfahren eine Orthonormalbasis von W.

Lösung T8.4: (a) Wir schreiben die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ spaltenweise in eine Matrix A. W ist dann der Spaltenraum von A bzw. der Zeilenraum von $B = A^\top$. Um eine Basis davon zu bestimmen, bringen wir B mithilfe elementarer Zeilenoperationen auf Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\dim(W) = 3$ und die $\{(1,0,1,0)^\top, (0,1,0,1)^\top, (0,0,1,1)^\top\}$ eine Basis von W.

(b) Wir nummerieren nun die Basisvektoren, die wir in Teil (a) berechnet haben, mit b_1, b_2, b_3 durch und wenden das Gram-Schmidtverfahren auf diese Basis an:

$$w_1 = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad w_2' = b_2 - \langle w_1, b_2\rangle\, w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3' = b_3 - \langle w_1, b_3\rangle\, w_1 - \langle w_2, b_3\rangle\, w_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ mit } ||w_3'|| = 1 \;\Rightarrow\; w_3 = w_3'\,.$$

Es ist die Menge $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ eine Orthonormalbasis von W.

T8.5 Begründen Sie, warum orthogonale Vektoren ungleich 0 linear unabhängig sind.

Lösung T8.5: Wir zeigen die Aussage für zwei zueinander senkrechte Vektoren, die Behauptung lässt sich dann leicht verallgemeinern. Wir betrachten zwei orthogonale Vektoren v und w und machen wie immer den Ansatz

$$(*) \quad \lambda\, v + \mu\, w = 0\,.$$

Zu zeigen ist, dass $\lambda = 0 = \mu$ gilt. Da $\langle v, 0\rangle = 0$, gilt wegen der Linearität des Skalarprodukts:

$$0 = \langle v, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\,\langle v, v\rangle + \mu\,\underbrace{\langle v, w\rangle}_{=0}\,,$$

sodass wegen $v \neq 0$ notwendig $\lambda = 0$ gelten muss. Ist aber erst mal $\lambda = 0$ erkannt, so ist wegen $w \neq 0$ auch $\mu = 0$ (siehe obige Gleichung $(*)$).

Zusätzliche Übungen

Z8.1 Es sei $\{a_1,\dots,a_n\}$ eine *beliebige* Basis von $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $A := (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die folgende MATLAB -Funktion `gramSchmidt(A)` soll das Gram-Schmidt-Vefahren implementieren. Ergänzen Sie das fehlende Fragment:

```
function A=gramSchmidt(A)
    [m,n]=size(A);
    A(:,1)=A(:,1)/norm(A(:,1));
    for k=2:n
      for j=1:k-1
        A(:,k)=A(:,k)- % Hier fehlt etwas
      end
      A(:,k)=A(:,k)/norm(A(:,k));
    end
```

Lösung Z8.1:

```
function A=gramSchmidt(A)
    [m,n]=size(A);
    A(:,1)=A(:,1)/norm(A(:,1));
    for k=2:n
      for j=1:k-1
        A(:,k)=A(:,k)-(A(:,j)'*A(:,k))*A(:,j);
      end
      A(:,k)=A(:,k)/norm(A(:,k));
    end
```

Z8.2 Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_3 \subseteq \mathbb{R}[x]$ sei das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

für $f,\ g \in V$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ von V.

(b) Man berechne in V den Abstand von $f = x + 1$ und $g = x^2 - 1$.

Lösung Z8.2: (a) Wir wenden das Gram-Schmidtverfahren auf die Standardbasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ an:

$$||1||^2 = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x = x\Big|_{-1}^{1} = 1 + 1 = 2 \;\Rightarrow\; b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1\,.$$

$$\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0 \;\Rightarrow\; b_2' = x - \frac{1}{2}\langle 1, x\rangle \cdot 1 = x$$

$$\Rightarrow\; b_2 = \frac{x}{||x||} = \sqrt{\frac{3}{2}}x\,.$$

$$b_3' = x^2 - \frac{\langle 1, x^2\rangle}{2}1 - \frac{2\,\langle x, x^2\rangle}{3}x = x^2 - \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; ||b_3'|| = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

$$\Rightarrow\; b_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\,.$$

$$b_4' = x^3 - \frac{3}{5}x \text{ mit } ||b_4'|| = \sqrt{\frac{8}{175}} \;\Rightarrow\; b_4 = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)\,.$$

Es ist also $\left\{\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right), \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)\right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_3$.
(b)

$$\begin{aligned}
d(f,g)^2 = ||f-g||^2 &= \left\langle x+1-x^2+1, x+1-x^2+1\right\rangle = \left\langle x^2-x-2, x^2-x-2\right\rangle \\
&= \int_{-1}^{1}\left(x^2-x-2\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^4-2x^3-3x^2+4x+4\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+4x\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{5}-\frac{1}{2}-1+2+4-\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+1+2-4\right) = \frac{2}{5}-2+8 = {}^{32}\!/_{5}\,.
\end{aligned}$$

Der Abstand von f und g ist also $d(f,g) = \sqrt{{}^{32}\!/_{5}}$.

Z8.3 Im $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) seien die Ebenen

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1-2x_2+x_3=0\} \quad \text{und} \quad E_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

gegeben, sowie der Vektor $v = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Normalenvektoren n_1 und n_2 der Ebenen E_1 und E_2.
Hinweis zu n_1: Schreiben Sie die Ebenengleichung mit Hilfe des Skalarproduktes.

(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2. Diesen erhält man als den *kleineren* der beiden Winkel $\measuredangle(n_1,n_2)$ bzw. $\measuredangle(n_1,-n_2)$ (erklären Sie ihrem Nachbarn, warum man das so definiert).

(c) Geben Sie eine Zerlegung $v = u + w$ des Vektors v an mit $u \in E_1$ und $w \perp E_1$.

Lösung Z8.3: (a) Wir bestimmen den Normalenvektor für E_1: Aus

$$2x_1-2x_2+x_3=0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

folgt, dass die Ebene E_1 aus allen Vektoren besteht, die auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen. Nach normieren erhalten wir so

$$n_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als einen Normalenvektor von E_1 - dieser ist natürlich nur bis auf das Vorzeichen eindeutig. Für die Ebene E_2 bestimmen wir den Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt und anschließendem normieren aus

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu $n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Auch dieser ist natürlich nur bis aufs Vorzeichen eindeutig.

(b) Es gilt

$$\cos(\measuredangle(n_1, n_2)) = \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{||n_1|| \cdot ||n_2||} = \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Wir erhalten somit $\measuredangle(n_1, n_2) = \arccos(\frac{1}{3\sqrt{3}}) = 78.9042°$. Da $\measuredangle(n_1, n_2) + \measuredangle(n_1, -n_2) = 180°$, ist also 78.9042° der gesuchte kleinere Winkel. Da Ebenen keine Orientierung haben, definiert man den kleineren der beiden möglichen von ihnen engeschlossenen Winkel als ihren Schnittwinkel, um Eindeutigkeit zu gewährleisten.

(c) Wir erhalten die gesuchte Zerlegung als orthogonale Zerlegung von v entlang des Vektors n_1. Dabei erhalten wir dann

$$w = \langle v, n_1 \rangle n_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

als Vektor parallel zu n_1 und damit Senkrecht zu E_1, und

$$u = v - w = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

als Vektor in E_1. (Zur Kontrolle: $2 \cdot 5 - 2 \cdot 7 + 4 = 0$, d.h. u liegt wirklich in E_1).