Wichtiges - Zusammenfassung (nicht vollständig)

Lineare Algebra für Informatik [MA0901] (Technische Universität München)

Wichtiges

Samstag, 9. Juli 2016 14:00

Allgemeines

Transponierte Matrix

$(AB)^T = B^T * A^T$

Determinante

$A * A^{-1} = I_n$

$\det(A) = \det(A^T)$

Determinantenmultiplikation

$\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Rang einer Matrix

Anzahl der Zeilen, die nicht komplett null sind **nach der Gaus Umformung**.

Determinante einer Matrixpotenz

Nutze Determinantenmultiplikation. Erst Determinante berechnen. Dann potenzieren.

Basen

Bestimmung einer Basis

Bilde Matrix mit den Vektoren als Zeilen

Bringe Matrix auf Zeilenstufenform

Wähle Zeilen, die nicht komplett null sind als Basis

Oder

Nutze Äquivalenzen

Sei V ein K-Vektorraum, $dim(V) = n$

Sei $M \subset V$ eine Menge an Vektoren

$$|M| < n \left\{ \begin{matrix} \text{=> kein Erzeugendensystem (ES)} \\ \text{=> lineare Unabhängigkeit muss geprüft werden} \end{matrix} \right\} \text{=> keine Basis} \tag{1}$$

$$|M| > n \left\{ \begin{matrix} \text{=> linear abhängig} \\ \text{=> Erzeugendensystem muss überprüft werden} \end{matrix} \right\} \text{=> keine Basis} \tag{2}$$

$$|M| = n \left\{ \begin{matrix} \text{M ist linear unabhängig} \Leftrightarrow \text{M ist Erzeugendensystem} \Leftrightarrow \text{M ist Basis} \\ \text{d.h. es reicht eins zu überprüfen} \end{matrix} \right\} \tag{3}$$

Bestimmung eines Erzeugendensystem

Basis bestimmen wie oben. In einem Erzeugendensystem können doppelte / linear abhängige

Vektoren vorkommen.

Basiswechselmatrix

Basiswechselmatrix $S_{A,B}$
B als Linearkombination von A darstellen.
Koeffizienten <u>in die Spalten</u> schreiben

Von B nach A transformieren.

$$S_{A,C} = S_{C,A}^{-1}$$

$$S_{C,B} = S_{C,A} * S_{A,B}$$

Von B nach C:
Von B nach A; Von A nach C

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung

Definition Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt linear, falls gelten

(1) Für alle $v, v' \in V$: $f(v+v') = f(v) + f(v')$

(2) Für alle $v \in V$ und $a \in K$: $f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$

Beobachtung aus (2): Eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor von V auf den Nullvektor von W ab.

Lineare Abhängigkeit von Spalten und Zeilenvektoren

Die Spaltenvektoren sind linear abhängig genau dann wenn die Zeilenvektoren linear abhängig sind.

Linear Unabhängig

Eine Menge an Vektoren ist linear unabhängig, wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix $(Ax|b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einzige Lösung 0 hat.

Darstellungsmatrix

Abbildung der Basisvektoren als Linearkombination der Basisvektoren schreiben und die Faktoren als Spalte in die Darstellungsmatrix schreiben.

$D_{A,B}$ Abbildungen von A bestimmen und als Linearkombinationen von B darstellen
Abbildung des ersten mit dem zweiten darstellen

Bild und Kern

Dimensionssatz

Sei V Vektorraum, ρ eine lineare Abbildung
$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(\rho)) + \dim(\text{Bild}(\rho))$

Kern und Bild

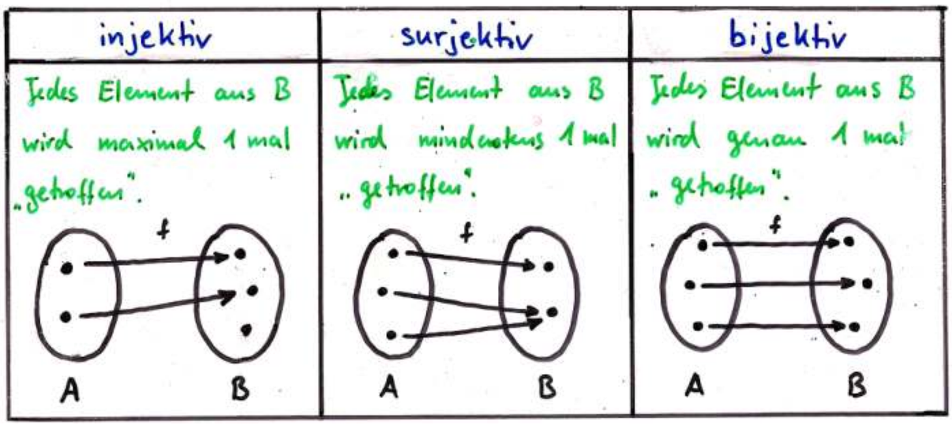
Der Kern ist die Menge der Vektoren aus dem Vektorraum, die auf den Nullvektor abbilden.

Bild bestimmen. Erzeugendensystem aus den Spaltenvektoren der Matrix bestimmen. Oder Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix

$Bild(\phi) \coloneqq \phi(V) = \{\phi(v) | v \in V\}$

$Kern(A) = \{0\} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Injektiv Surjektiv



Eine lineare Abbildung ist dann injektiv, wenn der Kern nur den Nullvektor enthält.

Nicht surjjektiv, wenn $\dim(Bild(\phi)) < \dim(V)$

Untervektorräume

Bedingungen für einen Untervektorraum

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ (mit den selben Abbildungen + und $\cdot$) heißt Untervektorraum, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ U \neq \emptyset \\ (2)\ \forall v, w \in U: v + w \in U \\ (3)\ \forall a \in K, v \in U: a \cdot v \in U \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \in U$$

Dimension eines Vektorraums / Untervektorraums

Zahl der linear Elemente in der Basis (also alle linear unabhängig)

Eigenwerte / Eigenraum

Geometrische Vielfachheit

Dimension des Eigenraums

Algebraische Vielfachheit

Vielfachheit der Nullstelle.

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Die Summe der algebraischen Vielfachheiten ist n

Eigenwerte bestimmen

charakteristisches Polynom $\chi = \det(xI - A)$
Eigenwerte sind Nullstellen von χ
$(\chi = 0)$

Eigenraum bestimmen

$(A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow Kern(A - \lambda I)$
Letzte Variable mit Freiheitsgrad auf 1 setzen.

Invertieren / Diagonalisieren

Invertierbarkeit einer Matrix

Wenn $\det(A) \neq 0$
$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ die Zeilen / Spalten der Matrix sind linear unabhängig.

Invertierbare Matrix bestimmen

Invertierbare Matrix S bestimmen.

Stelle S aus den Eigenvektoren als Spalten auf.

Diagonalmatrix bestimmen

Diagonalmatrix $D = S^{-1}AS$
Diagonalmatrix mit Eigenwerten als Diagonale aufstellen.

Diagonalisierbarkeit

$$A\ \ diagonalisierbar\ \Leftrightarrow m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$$

Sonstiges

GF-Matrix (Indizenmatrix)

GF_2^{3x3}
Adjazenzmatrix mit 2 Zahlen. {0,1}

Vektorraumisomorphismus

Orthogonal

Orthogonale Matrix

A heißt orthogonal, wenn $A^T A = I$

Orthogonale Vektoren

Die Vektoren a und b sind zu orthogonal zu einander, wenn gilt: $a^T * b = 0$
Anders ausgedrückt: Das Skalarprodukt $< a, b >$ von a und b ist null.

Gram-Schmidsches Othogonalisierungsverfahren

Bestimmen einer Orhonormalbasis des Unterraums $< v_1, v_2, v_3 >$ (v Vektoren)
Orthonormalbasis: $\{u_1, u_2, u_3\}$

$w_n = v_n - u_{n-1}^T * v_n * u_{n-1} - U_n^T \dots * v_n * u_n$

$u_n = w_n * \frac{1}{|w_n|}$

Algorithmus

$$m = 0$$

Wiederhole:

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{m} < u_j, v_i > * u_j$$

$$u_m = \frac{w_i}{|w_i|}$$

$$m = m + 1;$$

Ergebnis: Orthonormalbasis: $\{u_1, u_2, u_3 \dots, u_n\}$

Sonstige Äquivalenzen

Für eine quadratische Matrix $A \in K^{nxn}$ sind äquivalent:

- A ist regulär
- A ist invertierbar $(A \in GL_n(K))$
- die Zeilen von A sind linear unabhängig
- die Spalten von A sind linear unabhängig
- Abbildung φ_A ist injektiv
- Abbildung φ_A ist surjektiv
- LGS $Ax=0$ ist eindeutig lösbar
- $\ker(A) = \{0\}$
- $\forall b \in K^n$ ist das LGS $Ax=b$ eindeutig lösbar
- $\det(A) \neq 0$

Matrix Potenzen

Eigenwerte

Sei $A \in K^{nxn}$

Hat A den Eigenwert λ, dann hat A^K den Eigenwert λ^K

Die zugehörigen Eigenwerte sind die entsprechenden Potenzen der Eigenwerte von A.

Matrixpotenz

$A^k = S * D^K * S^{-1}$

S invertierbare Matrix aus Eigenvektoren

D Diagonalmatrix

Potenz einer Diagonalmatrix

Einzelne Einträge auf der diagonalen potenzieren.