Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 10

Tutorium

T10.1 Gegeben sei die lineare Abbildung $f_A:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto A\,v$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das Bild und den Kern von f_A.
(b) Ist f_A injektiv, surjektiv, bijektiv?

Zur Selbstkontrolle: (a) $\mathrm{j}f_A = \operatorname{span}\{(1,4,-1)^T, (3,2,0)^T\}$, $\ker f_A = \{\mathbf{0}\}$. (b) ja, nein, nein.

T10.2 Welche der folgenden Abbildungen sind linear ? Bestimmen Sie gegebenfalls die Abbildungsmatrix bzgl. der kanonischen Basis.

(a) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} v_2 - 1 \\ -v_1 + 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ (b) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 13\,v_2 \\ 11\,v_1 \\ -4\,v_2 - 2\,v_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ (c) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1^2\,v_2 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Zur Selbstkontrolle: (a), (c): nicht linear. (b) linear mit Matrix `[0 13, 11 0, -2 -4]`.

T10.3 Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}[X]_3$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 3, und es bezeichne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$ die Differentiation. Weiter sei $E = (1,\, X,\, X^2,\, X^3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}[X]_3$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_E M(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})_E$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B M(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})_B$ von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ bezüglich der Basis $B = (X^3,\, 3\,X^2,\, 6\,X,\, 6)$ von $\mathbb{R}[X]_3$.

Zur Selbstkontrolle: (a) `[0 1 0 0, 0 0 2 0, 0 0 0 3, 0 0 0 0]` (b) `[ 0 0 0 0, 1 0 0 0, 0 1 0 0, 0 0 1 0]`

T10.4 Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der geordneten Standardbasis $E_3 = (e_1,\, e_2,\, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$ {}_{E_3}M(f)_{E_3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}. $$

(a) Begründen Sie: $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine geordnete Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B M(f)_B$ und die Transformationsmatrix S mit ${}_B M(f)_B = S^{-1}\,{}_{E_3}M(f)_{E_3}\,S$.

Zur Selbstkontrolle: (b) `[1 0 0,0 2 0,0 0 3]`

Zusätzliche Übungen

Z10.1 Es seien die linearen Abbildungen $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f_1(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)^\top \quad \text{und} \quad f_2(x,y,z) = (x-y, 2x+z, 0)^\top.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis der Bildräume und die Kerne von f_i, $i = 1,2$, sowie $f_1 \circ f_2$.

(b) Sind die Abbildungen f_1 bzw. f_2 injektiv oder surjektiv?

Z10.2 Gibt es eine lineare Abbildung f vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ mit $\ker f = \operatorname{Bild} f$?

Z10.3 Betrachten Sie für $n \geq 1$ die Abbildung $f \colon \mathbb{R}[X]_{n-1} \to \mathbb{R}[X]_n$, definiert durch

$$(f(p))(x) = \int_0^x p(t)dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A dieser linearen Abbildung bzgl. der Monombasen $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ von $\mathbb{R}[X]_{n-1}$ bzw. $(1, x, \ldots, x^n)$ von $\mathbb{R}[X]_n$.

(c) Ist die Abbildung f injektiv? Ist sie surjektiv?

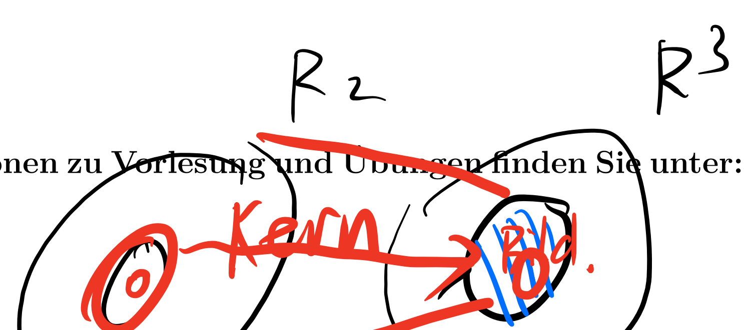
Z10.4 Gegeben sind zwei geordnete Basen A und B des $\mathbb{R}^3$,

$$A = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right), \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

und eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich der Basis A die folgende Darstellungsmatrix hat

$${}_AM(f)_A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM(f)_B$ von f bezüglich der geordneten Basis B.



T10.1 Gegeben sei die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto Av$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das Bild und den Kern von f_A.
(b) Ist f_A injektiv, surjektiv, bijektiv?

Zur Selbstkontrolle: (a) $f_A = \text{span}\{(1,4,-1)^T, (3,2,0)^T\}$, $\ker f_A = \{0\}$. (b) ja, nein, nein.

(a)

$\text{Bild}(f_A) = \left\{ A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \middle| v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 4v_1 + 2v_2 \\ -v_1 + 0v_2 \end{pmatrix} \middle| v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \text{span}\{(1,4,-1)^T, (3,2,0)^T\}$

$\text{Kern}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \middle| A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + 3v_2 = 0 \\ 4v_1 + 2v_2 = 0 \\ -v_1 + 0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Kern}(f_A) = \{0\}$

(b) ① $\text{Kern}(f_A) = \{0\}$
deshalb f_A injektive.
denn:
$f_A(v) = f_A(v')$
$\Rightarrow f_A(v) - f_A(v') = 0$
$f_A(v - v') = 0$
$\Rightarrow v = v'$

② nicht surjektiv.
Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
findet man keine solche $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

③ nicht bijektiv
denn es nicht surjektiv

重做 (a) f_A 而言

$\text{Kern}(f_A) = \{ \boxed{a \in \mathbb{R}^2} \mid f(a) = 0 \}$

$\Rightarrow Aa = 0$ 令 $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 3a_2 \\ 4a_1 + 2a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} = 0$

$3 \times 2 \quad 2 \times 1$

$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \cancel{\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

$\Rightarrow \{0\} \Rightarrow$ Injektiv

$\text{Bild}(f_A) = \{ f(a) \mid a \in \mathbb{R} \}$
span
$= \{ \dots \}$

$A = {}_{E_2}M(f_A)_{E_3}$

T10.2 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen Sie gegebenfalls die Abbildungsmatrix bzgl. der kanonischen Basis.

(a) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} v_2 - 1 \\ -v_1 + 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ (b) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 13\,v_2 \\ 11\,v_1 \\ -4v_2 - 2v_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ (c) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1^2 v_2 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} \end{cases}$

<>先看 $f(0)=0$ 吗 再试 $f(\lambda v+w)$

3×1 $3\times 2\,2\times 1$

Ax

(a) $f_1(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ nicht linear

b) $f_2(\lambda v + w) = f_2\begin{pmatrix} \lambda v_1 + w_1 \\ \lambda v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13(\lambda v_2 + w_2) \\ 11(\lambda v_1 + w_1) \\ -4(\lambda v_2 + w_2) - 2(\lambda v_1 + w_1) \end{pmatrix}$

$\parallel$

$\lambda f_2(v) + f_2(w) = \lambda \begin{pmatrix} 13 v_2 \\ 11 v_1 \\ -4v \cdots \end{pmatrix} \ldots$

$\Rightarrow f_2$ ist linear

$A = {}_{E_3}M(f_A)_{E_2}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 11 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

(c) ein Gegenbeispiel:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$+$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $+ \Big\}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\times$

dasheißt $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_3(v + w) \neq f_3(v) + f(w)$

解: (a) $f_1(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$

nicht linear

(b) $0 \to 0$ ✓

有 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

首先 $f(\lambda v + w)$

$\lambda v + w = \begin{pmatrix} \lambda v_1 + w_1 \\ \lambda v_2 + w_2 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 13(\lambda v_2 + w_2) \\ 11(\lambda v_1 + w_1) \\ -4(\lambda v_2 + w_2) - 2(\lambda v_1 + w_1) \end{pmatrix}$

Darstellungsm.

${}_{E_3}M(f)_{E_2}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\downarrow f$ $\downarrow f$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 11 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

其次 $\lambda f(v) = \lambda \begin{pmatrix} 13 v_2 \\ 11 v_1 \\ -4v_2 - 2v_1 \end{pmatrix}$

$+$

$f(w) = \begin{pmatrix} 13 w_2 \\ 11 w_1 \\ -4w_2 - 2w_1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} 13(\lambda v_2 + w_2) \\ 11(\lambda v_1 + w_1) \\ -4\lambda v_2 - 2\lambda v_1 \\ -4w_2 - 2w_1 \end{pmatrix}$

(c)

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$+$

$w_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\times$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -20 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f(v_1 + w_2) \neq f(v_1) + f(w_2)$

T10.3 Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}[X]_3$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 3, und es bezeichne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$ die Differentiation. Weiter sei $E = (1, X, X^2, X^3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}[X]_3$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_EM(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})_E$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})_B$ von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ bezüglich der Basis $B = (X^3, 3\,X^2, 6\,X, 6)$ von $\mathbb{R}[X]_3$.

解: (a)

$$\frac{d}{dx}(1)=0 \Rightarrow (1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}(x)=1 \Rightarrow (1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}\lambda_1'\\\lambda_2'\\\lambda_3'\\\lambda_4'\end{pmatrix}=1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x \Rightarrow (1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}\lambda_1''\\\lambda_2''\\\lambda_3''\\\lambda_4''\end{pmatrix}=2x \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2 \Rightarrow (1,x,x^2,x^3)(\lambda_1''' \; \lambda_2''' \; \lambda_3''' \; \lambda_4''')=3x^2 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}$$

Darstellungmatrix

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&6&0\end{pmatrix}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2 \Rightarrow (1,x,\cancel{x^2},x^3)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=3x \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\.5\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2)=6x \Rightarrow (1,x,\cancel{x^2},x^3)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=6x \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}(6x)=6 \Rightarrow (1,x,\cancel{x^2},x^3)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=6 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}(6)=0 \Rightarrow (1,x,\cancel{x^2},x^3)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix

$$\cancel{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\.5&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}$$

T10.4 Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der geordneten Standardbasis $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$ lautet:

① $${}_{E_3}M(f)_{E_3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

A

(a) Begründen Sie: $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine geordnete Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM(f)_B$ und die Transformationsmatrix S mit ${}_BM(f)_B = S^{-1}\,{}_{E_3}M(f)_{E_3}\,S$.

(a) ① $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b_1 \in R^3$ $b_2 \in R^3$ $b_3 \in R^3$

② $\lambda b_1 + \mu b_2 + w b_2 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda = 0 \quad \mu = 0 \quad w = 0$

③ 不用更多说明了

(b) $A = E_3 M(f) E_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left(B^{A\cdot b_1}, B^{A\cdot b_2}, B^{A\cdot b_3} \right)$

② $S = {}_{E_3}M(Id)_B$

$b_1 \to Id \to b_1 \Rightarrow b_1$

$b_2 \to Id \to b_2 \Rightarrow b_2$

$b_3 \to Id \to b_3 \Rightarrow b_3$

$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 10

Tutorium

T10.1 Gegeben sei die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto A\,v$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das Bild und den Kern von f_A.
(b) Ist f_A injektiv, surjektiv, bijektiv?

Lösung T10.1:

(a) Multipliziert man A mit $v = (v_1, v_2)$ so erhält man

$$f_A(v) = Av = \begin{pmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 4v_1 + 2v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für das Bild von f_A („Das Bild ist das Erzeugnis der Spalten von A.“):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bild} f_A &= \{f_A(v) \,|\, v \in \mathbb{R}^2\} = \{Av \,|\, v \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 4v_1 + 2v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \middle| \, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Nun zum Kern von f_A:

$$\begin{aligned}
\ker f_A &= \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, f_A(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, Av = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathbf{0}\}.
\end{aligned}$$

(b) f_A ist injektiv, da $\ker f_A = \{0\}$: Aus $f_A(v) = f_A(v')$ folgt $f_A(v - v') = 0$ und hieraus wegen $\ker f_A = \{0\}$ sogleich $v = v'$.
f_A ist nicht surjektiv: Es gibt z.B. keine $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ mit 反例

$$v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da f_A nicht surjektiv ist, kann sie auch nicht bijektiv sein.

$f(\lambda v + w)$

T10.2 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen Sie gegebenfalls die Abbildungsmatrix bzgl. der kanonischen Basis.

(a) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} v_2 - 1 \\ -v_1 + 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ (b) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 13\, v_2 \\ 11\, v_1 \\ -4\, v_2 - 2\, v_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ (c) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1^2\, v_2 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Lösung T10.2:

(a) Wegen $f_1(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$ kann f_1 nicht linear sein.

(b) Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$f_2(\lambda v + w) = \begin{pmatrix} 13(\lambda v_2 + w_2) \\ 11(\lambda v_1 + w_1) \\ -4(\lambda v_2 + w_2) - 2(\lambda v_1 + w_1) \end{pmatrix} = \lambda f_2(v) + f_2(w)\,,$$

so daß f_2 eine lineare Abbildung ist. Wir erhalten als Abbildungsmatrix bzgl. der kanonischen Basis:

$$A = (f_2(e_1), f_2(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 11 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(c) Für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\lambda = 2$ gilt z.B.

$$f_3(\lambda v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda f_3(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so daß f_3 keine lineare Abbildung ist.

T10.3 Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}[X]_3$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 3, und es bezeichne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$ die Differentiation. Weiter sei $E = (1, X, X^2, X^3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}[X]_3$.

求导符号 微分

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_EM(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})_E$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})_B$ von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ bezüglich der Basis $B = (X^3, 3\,X^2, 6\,X, 6)$ von $\mathbb{R}[X]_3$.

Lösung T10.3:

(a) Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(1) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(X) = 1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(X^2) = 2X, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(X^3) = 3X^2$$

erhalten wir sogleich:

$${}_EM(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(X^3) = 3X^2, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(3X^2) = 6X, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(6X) = 6, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(6) = 0$$

erhalten wir hieraus:

$$_B M(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

T10.4 Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der geordneten Standardbasis $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$_{E_3}M(f)_{E_3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Begründen Sie: $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine geordnete Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $_BM(f)_B$ und die Transformationsmatrix S mit $_BM(f)_B = S^{-1}\, {}_{E_3}M(f)_{E_3}\, S$.

Lösung T10.4:

(a) Wegen

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig, also B eine geordnete Basis.

(b) Mit $A = {}_{E_3}M(f)_{E_3}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} A\, b_1 &= 1\, b_1 + 0\, b_2 + 0\, b_3\,, \\ A\, b_2 &= 0\, b_1 + 2\, b_2 + 0\, b_3\,, \\ A\, b_3 &= 0\, b_1 + 0\, b_2 + 3\, b_3\,. \end{aligned}$$

Also gilt

$$_BM(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Und als Transformationsmatrix erhalten wir die Matrix

$$S = {}_{E_3}M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})_B = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusätzliche Übungen

Z10.1 Es seien die linearen Abbildungen $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f_1(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)\top \quad \text{und} \quad f_2(x,y,z) = (x-y, 2x+z, 0)\top.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis der Bildräume und die Kerne von f_i, $i = 1,2$, sowie $f_1 \circ f_2$.

(b) Sind die Abbildungen f_1 bzw. f_2 injektiv oder surjektiv?

Lösung Z10.1:

(a) i) Bildräume: Für $f_1(x,y,z)$ gilt

$$f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_1(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht sehen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Somit bilden $f_1(e_i)$, $i = 1,2,3$ eine Basis des Bildraumes von f_1.

Für $f_2(x,y,z)$ gilt

$$f_2(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$f_2(e_i)$, $i = 1,2,3$ erzeugen zwar den Bildraum, sind jedoch linear abhängig. Somit bilden also z.B. nur $f_2(e_1)$, $f_2(e_2)$ eine Basis des Bildraumes von f_2.

ii) Kerne: Für $f_1(x,y,z)$ gilt

$$0 = f_1(v) = f_1\left(\sum_{i=1}^{3} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} v_i f_1(e_i).$$

Da $f_1(e_i)$ linear unabhängige Vektoren sind, folgt $v_i = 0$, $i = 1,2,3$ und somit $\ker f_1 = \{\mathbf{0}\}$.

Für $f_2(x,y,z)$ gilt

$$\begin{aligned} f_2(v) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad v_1 - v_2 = 0 \ \wedge \ 2v_1 + v_3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad v_1 = v_2 \ \wedge \ v_3 = -2v_1 \\ &\Longleftrightarrow \quad v \in \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Somit gilt $\ker f_2 = \operatorname{span}\{(1,1,-2)\top\}$.

iii) Für die Hintereinanderausführung $f_1 \circ f_2$ ergibt sich

$$(f_1 \circ f_2)(x,y,z) = f_1(f_2(x,y,z)) = f_1(x-y, 2x+z, 0) = \begin{pmatrix} 3x - 3y \\ -x - y - z \\ 4x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

(b) Da $\ker f_1 = \{\mathbf{0}\}$ ist f_1 injektiv. Da außerdem $f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ist f_1 auch surjektiv.

Da $\ker f_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ ist f_2 nicht injektiv und kann damit auch nicht surjektiv sein (z.B. gilt $f_2(v) \neq e_3 \ \forall v \in \mathbb{R}^3$).

Z10.2 Gibt es eine lineare Abbildung f vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ mit $\ker f = \operatorname{Bild} f$?

Lösung Z10.2: Ja, man wähle z. B. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (v_1, v_2) \mapsto (v_1 - v_2, v_1 - v_2)$ oder die *lineare Fortsetzung* von σ mit $\sigma(e_1) = e_2$ und $\sigma(e_2) = 0$.

Z10.3 Betrachten Sie für $n \geq 1$ die Abbildung $f\colon \mathbb{R}[X]_{n-1} \to \mathbb{R}[X]_n$, definiert durch

$$(f(p))(x) = \int_0^x p(t)dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A dieser linearen Abbildung bzgl. der Monombasen $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ von $\mathbb{R}[X]_{n-1}$ bzw. $(1, x, \ldots, x^n)$ von $\mathbb{R}[X]_n$.

(c) Ist die Abbildung f injektiv? Ist sie surjektiv?

Lösung Z10.3:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}(f(\lambda p + q))(x) &= \int_0^x (\lambda p + q)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (\lambda p(t) + q(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda(f(p))(x) + (f(q))(x)\,.\end{aligned}$$

Somit ist f linear.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
p = 1: &\qquad (f(p))(x) = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n \\
p = x: &\qquad (f(p))(x) = \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots + 0 \cdot x^n \\
\vdots &\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
p = x^{n-1}: &\qquad (f(p))(x) = \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}x^n = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^{n-1} + \frac{1}{n} \cdot x^n
\end{aligned}$$

Somit folgt für die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}.$$

(c) f ist injektiv $\iff \ker f = \{0\}$. Für $p \in \mathbb{R}[X]_{n-1}$ gilt

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \implies (f(p))(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}(f(p))(x) = 0 &\iff a_0 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{n} = 0\\ &\iff a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0\\ &\iff p = 0\end{aligned}$$

$$\implies \ker f = \{0\}\,.$$

f ist nicht surjektiv, da es z.B. kein $p \in \mathbb{R}[X]_{n-1}$ gibt mit $f(p) = 1$. Allgemein ergibt sich mit der Dimensionsformel

$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{Bild} f) + \dim(\ker f) = \dim \mathbb{R}[X]_{n-1}\\ \iff &\dim(\mathrm{Bild} f) = \dim \mathbb{R}[X]_{n-1} - \dim(\ker f) = n - 0 = n < n+1 = \dim \mathbb{R}[X]_n\,.\end{aligned}$$

Somit ist f nicht surjektiv.

Z10.4 Gegeben sind zwei geordnete Basen A und B des $\mathbb{R}^3$,

$$A = \left(\begin{pmatrix} 8\\ -6\\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16\\ 7\\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9\\ -3\\ 7 \end{pmatrix} \right), \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

und eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich der Basis A die folgende Darstellungsmatrix hat

$${}_AM(f)_A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15\\ -1 & -22 & 15\\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM(f)_B$ von f bezüglich der geordneten Basis B.

Lösung Z10.4: Es gilt

$${}_BM(f)_B = {}_BM(\mathrm{Id} \circ f \circ \mathrm{Id})_B = {}_BM(\mathrm{Id})_A\, {}_AM(f)_A\, {}_AM(\mathrm{Id})_B\,.$$

Um also ${}_BM(f)_B$ zu ermitteln, ist das Produkt der drei Matrizen ${}_BM(\mathrm{Id})_A$, ${}_AM(f)_A$ und ${}_AM(\mathrm{Id})_B$ zu bilden. Die Matrix ${}_AM(f)_A$ ist gegeben, die anderen beiden Matrizen müssen wir noch bestimmen. Wegen

$${}_BM(\mathrm{Id})_A\, {}_AM(\mathrm{Id})_B = {}_BM(\mathrm{Id})_B = E_3$$

ist ${}_AM(\mathrm{Id})_B$ das Inverse zu ${}_BM(\mathrm{Id})_A$.
Wir bezeichnen die Elemente der geordneten Basis A der Reihe nach mit a_i, $i = 1, 2, 3$ und jene der Basis B mit b_i, $i = 1, 2, 3$ und ermitteln ${}_BM(\mathrm{Id})_A = ({}_Ba_1, {}_Ba_2, {}_Ba_3)$. Gesucht sind also $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, mit

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j b_j = a_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Dies sind drei lineare Gleichungssysteme, die wir simultan lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 8 & -16 & 9\\ -2 & -1 & 1 & -6 & 7 & -3\\ 1 & 2 & 2 & 7 & -13 & 7 \end{array} \right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Damit lautet die „Basistransformationsmatrix“

$${}_BM(\mathrm{Id})_A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ${}_AM(\mathrm{Id})_B$ erhalten wir durch Invertieren der Matrix ${}_BM(\mathrm{Id})_A$. Es gilt

$$
{}_AM(\mathrm{Id})_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} .
$$

Wir berechnen schließlich das Produkt

$$
{}_BM(f)_B \quad = \quad {}_BM(\mathrm{Id})_A \, {}_AM(f)_A \, {}_AM(\mathrm{Id})_B = \begin{pmatrix} 16 & 47 & -88 \\ 18 & 44 & -92 \\ 12 & 27 & -59 \end{pmatrix} .
$$