Vorlesungs Zusammenfassung

Lineare Algebra für Informatik [MA0901] (Technische Universität München)

Literatur: A. Bentelspacher: Lineare Algebra, Vieweg (20 Euro)

Satz 2: (Rechenregeln)

(a) $K^{m\times n}, +)$ ist abelsche Gruppe
(b) $\forall A, B \in K^{m\times n}, \forall c, c' \in K$:
(i) $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$
(ii) $(c + c') \cdot A = c\dot{A} + c' \cdot A$
(iii) $c \cdot (c' \cdot A) = (c \cdot c') \cdot A$
(iv) $1 \cdot A = A$
(c) Seien A, B, C Matrizen, so dass die unten gebildeten Summen bzw. Produkte definiert sind. Dann gelten folgende Regeln:
(i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
(ii) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
(iii) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
(iv) Für $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$(„Einheitsmatrix“) gelten:
$I_n \cdot A = A$ und $A \cdot I_n = A$
(d) $R = K^{n\times n}$ ist damit ein Ring (mit O_R =Nullmatrix, 1_R =Einheitsmatrix)
Beweise: Durch simples Nachrechnen.

Achtung: Im allgemeinen gilt nicht $A \cdot B = B \cdot A$
Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Für $n > 1$ ist $K^{n\times n}$ ein nicht-kommutativer Ring

§2 Lineare Gleichungssysteme

Bestimme alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ mit
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_2 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Def. 1:
Ein Gleichungssystem der Form $A \cdot x = b$ mit $A \in K^{m\times n}, b \in K^m$ für $x \in K^n$ heißt lineares Gleichungssystem (LGS). Es heisst homogen, falls $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, sonst inhomogen. A ist die Koeffizientenmatrix, $(A\vdots b) \in K^{m\times(n+1)}$ ist die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Gauß-Verfahren

Auf eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ dürfen die folgenden, sogenannten elementaren Zeilenoperationen ausgeübt werden:
I: Vertauschen zweier Zeilen
II: Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $c \in K \setminus \{0\}$
III: Addition des c-fachen $(c \in K)$ einer Zeile zu einer anderen
Diese Operationen ändern die Lösungsmenge nicht

Ziel: A soll in Zeilenstufenform gebracht werden, d.h.:
Def. 2:
Eine $m \times n$-Matrix ist in Zeilenstufenform(ZSF), falls folgende Bedingungen gelten:
(i) Beginnt eine Zeile mit k-Nullen, so stehen unter diesen Nullen wieder Nullen
(ii) Unter dem ersten Eintrag $\neq 0$ einer jeden Zeile stehen lauter Nullen
A ist in strenger ZSF, falls zusätzlich gilt:
(iii) Über dem ersten Eintrag $\neq 0$ jeder Zeilen stehen lauter Nullen

Bsp:

Matrix	**ZSF**	**str. ZSF**
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	-	-
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	-	-
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	✓	-
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	✓	✓

Bsp.: Gauß-Algorithmus auf obriges Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & \vdots & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Typ III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Typ I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Typ II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Typ III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \text{(ZSF)} \xrightarrow{\text{Typ III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \text{(str. ZSF)}$$

Algorithmus (Gauß):
Eingabe: Matrix $A \in K^{m \times n}$
Ausgabe: Matrix in (str.) ZSF aus A durch elementare Zeilenoperationen gewonnen.
(1) A sei bis zur Zeile r in ZSF, d.h. (i), (ii) seien bis zur Zeile r erfüllt (r = 0 möglich)
(2) falls r = m, so ist A in ZSF, falls str. gewünscht, gehe zu (7)
(3) Suche den (oder einen) am weitesten links stehenden Eintrag $\neq 0$ unterhalb der r-ten Zeile
(4) Bringe diesen Eintrag in die r+1-te Zeile (Typ I-Operation)
(5) Erzeuge unterhalb dieses Eintrags lauter Nullen (Typ III-Operationen, optional Typ II)
(6) Gehe zurück zu (1)
(7) Bringe A in str. ZSF (Typ III)

Nachtrag Vektorraum:
(iv) $\forall a, b \in K, \forall v \in V : (a \cdot b) \boxdot v = a \boxdot (b \boxdot v)$
(v) $\forall v \in V : 1 \boxdot v = v$

(8) Sei M eine Menge, $V = Abb(M, K) := \{f : M \to K | f \text{Abbildung}\}$. Für
$f, g \in V, a \in K$ def. $f \boxplus g$ und $a \boxdot f$ durch: $f \boxplus g : M \to K, x \mapsto f(x) + g(x)$
$a \boxdot f : M \to K, x \mapsto a \cdot f(x) \Rightarrow V$ ist ein K-VR. Null-Vektor: $f_0 \text{mit} f_0(x) = 0 \forall x \in M$.

(9) Gegenbeispiel: $V, \boxplus)$ abelsche Gruppe, $V \neq \{0\}$
Setze $\forall a \in K, v \in V : a \boxdot v = 0 \Rightarrow$ (i) ...(iv) sind erfüllt, aber (v) nicht.

Proposition 2: Sei V ein K-VR, $a \in K, v \in V$: Dann gelten:
(a) $a \cdot \underbrace{0}_{v} = \underbrace{0}_{v} ; \underbrace{0}_{K} \cdot v = 0 \in V$
(b) $(-a) \cdot v = a \cdot (v) = -(a \cdot v)$
(c) Falls $a \cdot v = 0$, dann $a = 0$ der $V = 0$

Beweis: (a) $a \cdot 0 =_{(i)} a \cdot (0 + 0) =_{(ii)} a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow_{(i)} a \cdot 0 = 0$
$0 \cdot v =_{\text{K ist Körper}} (0 + 0 = \dot{v} =_{(iii)} 0 \cdot v + 0 \cdot v \Rightarrow_{(i)} 0 \cdot v = 0$
(b) $-a) \cdot v + a\dot{v} =_{(iii)} (-a + a) \cdot v =_{\text{K ist Körper}} 0 \cdot v =_{(a)} 0 \Rightarrow_{(i)} (-a) \cdot v = -(a \cdot v)$
$a \cdot (-v) + a \cdot (-v) + a \cdot v =_{(ii)} a \cdot (-v + v) =_{(i)} a \cdot 0 =_{(a)} 0 \Rightarrow a \cdot (-v) = -(a \cdot v)$
(c) Sei $a \cdot v = 0$ aber $a \neq 0 \Rightarrow v =_{(v)} 1 \cdot v =_{\text{K ist Körper}} (a^{-1} \cdot a) \cdot v =_{(iv)} a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot 0 =_{(a)} 0$

Definition 3: Sei V ein K-VR, Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unterraum, falls gelten:
(a) $U \neq 0$
(b) $\forall v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$
(c) $\forall v \in U, \forall a \in K : a \cdot v \in U$

Es folgt sofort: - Jeder Unterraum enthält den Nullvektor 0.
- Mit + und $\cdot$ von V wird jeder Unterraum zu einem K-VR.

Bsp.:
(1) $K = \mathbb{R}, v = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Jede Gerade durch den Nullpunkt ist ein Unterraum. Formal:
wähle $v \in V \Rightarrow K \cdot v = \{a \cdot v | a \in K\}$ ist Unterraum.
Auch für $v = 0 : \{0\} \subseteq V$ ist Unterraum. Dies gilt für alle Vektorräume. Geraden, die nicht durch den Nullpunkt gehen, sind auch keine Unterräume.
(2) V sei K-VR $\Rightarrow U = \{0\}$ und V selbst sind Unterräume.
(3) M Menge, V=Abb(M,K) wie oben. Wähle $x \in M \Rightarrow U := \{f \in V | f(x) = 0\}$ Unterraum
(Die Bedingung $f(x) = 1$) ergibt keinen UVR)
(4) $V = K(x)$ Polynomring, $U := \{f \in K(x) | deg(f) < d\} \leq V$ Unterraum ($d \in \mathbb{N}_0$ fest)
(5) Sei $A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $A \in K^{m \times n}$) ein homogenes LGS.
Dann ist L = Lösungsmenge $\subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum
(6) $V = \mathbb{R}^2$, U = Vereinigung zweier Geraden U_1, U_2 durch den Nullpunkt $\Rightarrow U$ ist kein UVR (außer $U_1 = U_2$)
Im Allgemeinen ist die Vereinigung von Unterräumen kein Unterraum.

Proposition 4:
Sei V ein K-VR und $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Dann:
(a) $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ ist Unterraum
(b) $U_1 + U_2 := \{v + w | v \in U_1, w \in U_2\}$ ist ein Unterraum, der Summenraum
(c) Sei $M \neq 0$ eine Menge von Unterräumen von V $\Rightarrow \bigcap_{U \in M} U \subseteq V$ ist Unterraum

Beweis: Nur (b) und (c) zu zeigen

(b) 1. $U_1 + U_2 \neq \oslash$

2. Seien $v + w, v' + w' \in U_1 + U_2 \Rightarrow (v + w) + (v' + w') = \underbrace{(v + v')}_{\in U_1} + \underbrace{(u + w')}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$

3. Seien $v+w \in U_1+U_2$ (mit $v \in U_1, w \in U_2$), $a \in K \Rightarrow a\cdot(v+w) = \underbrace{a \cdot v}_{\in U_1} + \underbrace{a \cdot w}_{\in U_2} \in U_1+U_2$

(c) 1. $\forall U \in M : 0 \in U \Rightarrow 0 \in \cap U \Rightarrow \cap U \neq \oslash$

2. Seien $v, w \in \cap U \Rightarrow \forall U \in M : v \in U, w \in U \Rightarrow v + w \in U \Rightarrow v + w \in \cap U$

3. Seien $v \in \cap U, a \in K \Rightarrow \forall U \in M : v \in U \Rightarrow a \cdot v \in \cap U$

Man sagt auch, dass die Menge aller Unterräume eines VRs V ein durchschnittsabgeschlossenes System bilden.

Definition 5: (Erzeugnis)

Sei V ein K-VR und $S \subseteq V$ Teilmenge, $M := \{U \subseteq V | U \text{ Unterraum und } S \subseteq U\} \neq \oslash \Rightarrow < S > := \bigcap_{U \in M} U$ heißt das Erzeugnis von S (auch: der von S aufgespannte Unterraum). Schreibweise für $S = \{V_1 \ldots V_n\}$ endlich: $< S > = < v_1, v_2, \ldots, v_n >$. ¡S¿ ist der kleinste Unterraum, der S enthält. Genauer: Jeder Unterraum, der S enthält, enthält auch $< S >$. Dadurch wird $< S >$ eindeutig charakterisiert.

Frage: Wie sieht $< S >$ wirklich aus?

Bsp.: $v \in V$ Was ist $< v >$? (d.h. $S = \{v\}$)

Antwort: $< v > = K \cdot v = \{a \cdot v | a \in K\} =: U$

Denn U enthält v, U ist Unterraum und jeder Unterraum, der v enthält, enthält ganz U.

Satz 6:
V sei K-VR, $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume, $S = U_1 \cup U_2 \Rightarrow < S >= U_1 + U_2$ $\boxed{< U_1 \cup U_2 >= U_1 + U_2}$

Beweis:
1. $S \subseteq U_1 + U_2$, denn $\forall v \in U_1 : v = v + 0 \in U_1 + U_2$, ebenso $\forall w \in U_2 : w \in U_1 + U_2$
2. $U_1 + U_2$ ist Unterraum (Proposition 4)
3. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $S \subseteq U \Rightarrow \forall v \in U_1, w \in U_2 : v \in U, w \in U$
 $\Rightarrow v + w \in U$. Also $U_1 + U_2 \subseteq U$.

Beispiel:
$V = \mathbb{R}^3, U_1, U_2$ seien Geraden durch den Nullpunkt; $U_1 \neq U_2 \Rightarrow U_1 + U_2$ ist eine Ebene

4 Linearkombinationen

Definition 1:
Sei V ein K-VR.
(a) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Ein Vektor $v \in V$ heißt Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$, falls es $a_1, \dots, a_n \in K$ gibt mit $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$
(b) Sei $S \subseteq V$ Teilmenge. Ein Vektor $v \in V$ heißt Linearkombination von S, falls v Linearkombination (LK) von endlich vielen Vektoren aus S ist. Für $S = \emptyset . 0 \in V$ ist LK von S. (leere Summe)

Satz 2:
Seien V K-VR, $S \subseteq V$ Teilmenge $\Rightarrow < S >$ ist die Menge aller LKen von S. Insbesondere für $S = \{v_1, \dots, v_n\}$: $\boxed{< v_1, \dots, v_n >= \{\sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i | a_1, \dots, a_n \in K\}}$

Beweis:
Sei M die Menge aller LKen von S.
1. $S \subseteq M$. Für $v \in S : v = 1 \cdot r \in M$
2. M ist Unterraum. Sei $v = \sum_{i=1}^n (aa_i)v_i \in M$. Sei $w = \sum_{j=1}^m b_j \cdot w_j$ mit $w_j \in S_i b_j \in K \Rightarrow$ $v + w = \sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{j=1}^m b_j w_j \in M$. Außerdem $0 \in M$
3. Sei $U \subseteq V$ Unterraum mit $S \subseteq U$. Zu zeigen: $M \subseteq U$. Seien $v_1, \dots, v_n \in S_i$ $a_1, \dots, a_n \in K \Rightarrow v_i \in U \Rightarrow a_i v_i \in U \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i v_i \in U$. Also $M \subseteq U$

Beispiel: $V = K^3$

(1) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow < v_1, v_2 >= \{a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} | a_1, a_2 \in K\} =$
$\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} | a_1, a_2 \in K\}$

Für $v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kommt das Gleiche raus.

(2) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow < v_1, v_2 >= \{\begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} | a_1, a_2 \in K\} = \{\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} | a \in K\} =$
$< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

(3) Das homogene LGS $A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ aus §2 hat die Lösungsmenge

$L = \{ \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\}; L =< \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

(4) $K^3 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

(5) $V = K[x]; S = \{x^i | i \in \mathbb{N}_0\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} \Rightarrow V =< S >$

Proposition 3:
$A \in K^{m\times n}, A' \in K^{m\times n}$ gewonnen aus A durch elementare Zeilenoperationen $\Rightarrow$ die Zeilen von A erzeugen denselben Unterraum von $K^{1\times n}$ wie die Zeilen von A'

Beweis: $v_1, \dots, v_n$ seien die Zeilen von $A, U =< v_1, \dots, v_n > \subseteq K^{1\times n}$.
1. Vertauschung zweier Zeilen ändert U nicht.
2. Multiplikation eines v_i mit $c \in K \setminus \{0\}$ ändert U nicht.
3. Operationen Typs II Umnummerieren: v_1 wird ersetzt durch $v_1 + c \cdot v_2$
$\Rightarrow < v_1 + c \cdot v_2, v_2, \dots, v_n >= \{a_1(v_1 + c \cdot v_2) + \sum_{i=1}^n a_i v_i | a_1, \dots, a_n \in K\} =< v_1, \dots, v_n >$

Beobachtung: In obigen Bsp (1),(3),(4),(5) ist jeder Vektor aus $< S >$ eindeutig darstellbar als LK, in Bsp (2) nicht.

Definition 4:
Sei V ein K-VR; Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen linear unabhängig, falls $\forall a_1, \dots, a_n \in K$ gilt:
$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$
Gleichbedeutend: Für jede LK $v \in < v_1, \dots, v_n >$ gibt es eindeutig bestimmte $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. („eindeutige Darstellungseigenschaft"). Andernfalls heißen die v_i linear abhängig.

Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt linear unabhängig, falls $\forall v_1, \dots, v_n \in S$ paarweise verschieden (d.h. $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$) gilt: $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig (d.h. Jede endliche Auswahl von Vektoren aus S ist linear unabhängig)
$S = \oslash$ ist linear unabhängig.

Beispiel:
$V = \mathbb{R}^2, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 v_1 + a_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösungsmenge $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, d.h. $a_1 = a_2 = 0$
Also: v_1, v_2 linear unabhängig.

(2) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 a_1 v_1 + a_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, hat die Lösungen $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Also v_1, v_2 linear abhängig.

(3) $V = K[x], S = \{x^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ Behauptung: S ist linear unabhängig.
Seien $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschieden, sei $\sum_{j=1}^n a_j x^{i_j} = 0 \text{mit} a_j \in K$
$\Rightarrow \forall j a_j = 0$ wegen Definition der Gleichheit von Polynomen. Also ist S linear unabhängig.

Test auf lineare Unabhängigkeit von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in K^m$

Bilde die Matrix $A = (v_1 \vdots v_2 \vdots \ldots \vdots v_n) \in K^{m\times n}$. Dann: $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, wenn:
Die einzige Lösung von $A \cdots x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow rg(A) = n$

5 Basen

Definition 1: V K-VR, $S \subseteq V$ Teilmenge
(a) S heißt Erzeugendensystem(EZS) von V, falls $V = < S >$
(b) S heißt eine Basis von V, falls S ein EZS ist und S linear unabhängig ist.
Falls $S = \{v_1, \ldots, v_n\} : v_1, \ldots, v_n$ ist Basis $\Leftrightarrow$ Jedes v hat eine eindeutige Darstellung als $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ mit $a_i \in K$

Beispiel:
(1) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von K^3
(2) $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von K^3
(3) Mit $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 ist i-ter Eintrag) gilt: $e_1, \ldots, e_n$ bilden eine Basis von K^n
(4) Der Lösungsraum $L = \left\{ \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ hat eine Basis $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
(5) Der Nullraum $V = \{0\}$ hat die Basis $\emptyset$

Satz 2: (Charakterisierung von Basen) V K-VR, $S \subseteq V$. Dann sind äquivalent:
(a) S ist eine Basis von V
(b) S ist eine maximale linear unabhängige Menge (d.h. S ist linear unabhängig, aber $\forall v \in V : S : S \cup \{v\}$ linear abhängig)
(c) S ist ein minimales EZS (d.h. S ist EZS und $\forall v \in S : S \setminus \{v\}$ ist kein EZS

Beweis: „(a) $\Rightarrow$ (b)“ : Sei S Basis. Zu zeigen: $\forall v \in V : S : S \cup \{v\}$ lin. abh. Sei also $v \in V \setminus S, v \in < S >$, d.h. $\exists v_1, \ldots, v_n \in S, \exists a_1, \ldots, a_n \in K : v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$
$\Rightarrow a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + (-1) \cdot v = 0 \Rightarrow v_1, \ldots, v_n, v$ linear abhängig $\Rightarrow S \cup \{v\}$ lin. abh.
„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Sei S maximal linear unabh. Zu zeigen: S ist EZS. Sei $v \in V$
1. Fall: $v \in S \Rightarrow v \in < S >$
2. Fall: $v \notin S$ Vorraussetzung: $S \cup \{v\}$ lin. abh. $\Rightarrow \exists v_1, \ldots, v_n \in S \cup \{v\}, \exists a_1, \ldots, a_n \in K$ nicht alle $= 0$, so dass $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ Wegen S lin. unabh. gibt es ein i mit $v_i = v$ und $a_i \neq 0$. Umnummerieren: $v = v_1 \Rightarrow -a_1^{-1} \cdot a_1, \ldots, a_n \in K, v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \Rightarrow a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + (-1) \cdot v = 0 \Rightarrow v_1, \ldots, v_n, v$ linear abhängig $\Rightarrow$ S linear abhängig, Wi-

derspruch zu S Basis.
„(c) $\Rightarrow$ (b)“: Sei S minimales EZS. Zu zeigen: S linear unabh.
<u>Annahme</u>: S ist linear abh. $\Rightarrow \exists v_1, \ldots, v_n \in S$ paarweise verschieden, $a_1, \ldots, a_n \in K$, nicht alle $= 0$, so dass $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ Umnummerieren: $a_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -a_1^{-1}(a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) \in < v_2 \ldots v_n > \subseteq < S \setminus \{v_1\} > \Rightarrow v = < S \setminus \{v_1\} \cup \{v_1\} > \subseteq < S \setminus \{v_1\} > \subseteq v$, also $v = < S \setminus \{v_1\} >$ Widerspruch!

<u>Korollar 3:</u> V K-VR. Falls V ein endliches EZS hat, so hat V auch eine Basis.
<u>Beweis:</u> Wähle ein endliches EZS S mit minimaler Elementanzahl $\Rightarrow$S ist minimales EZS $\Rightarrow$ S ist Basis

<u>Satz 4:</u> (Basissatz): Jeder VR hat eine Basis.
Ohne Beweis. Der Beweis benutzt das „Zornsche Lemma“
<u>Beispiel:</u>
(1) $V = K[x]$ hat die Basis $S = \left\{x^i | i \in \mathbb{N}_0\right\}$
(2) $M = \mathbb{N}_0, K = \mathbb{R}, V = Abb(M; K) =$ Raum aller reelen Folgen: $\rightarrow$ keine Basis bekannt

Basen sind nicht eindeutig! Ziel: Je zwei Basen haben gleich viele Elemente:

Lemma 5: V K-VR, $E \subseteq V$ sei ein endliches EZS, $U \subseteq V$ linear unabhängig, Teilmenge $\Rightarrow |U| \leq |E|$
Beweis: Induktion nach $|E \setminus U|$
1. Fall: $U \subseteq E \Rightarrow |U| \leq |E|$
2. Fall: $U \nsubseteq E$, d.h. $\exists v \in U \setminus E$. Wegen $V =< E >$ gibt es $v_1, \dots, v_n \in E, a_1, \dots, a_n \in K, v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ wegen U linear unabhängig gibt es ein v_i mit $v_i \notin U$ und $a_i \neq 0$
Durch Umnummerieren: $v_1 \notin U, a_i \neq 0$. Setze $E' := (E \setminus \{v_1\}) \cup \{v\}$
$v_1 = a_1^{-1}(v - a_2v_2 - \dots - a_nv_n) \in < E' > \Rightarrow < E' > = V$
$|E' \setminus U| = |E \setminus U| - 1$. Induktionsannahme:
$|U| \leq |E'|$. Aber $|E'| = |E| \Rightarrow$ Behauptung

Korollar 6: Falls ein K-VR V ein endliches EZS hat, so sind alle Basen endlich und haben gleich viele Elemente
Beweis: $\exists E \subseteq V$ endliches EZS. Sei B Basis $\Rightarrow |B| \leq |E| \leq \infty$
Sei $B' \subseteq V$ eine weitere Basis $\Rightarrow |B'| \leq |B|$ und $|B| \leq |B'|$

Definition 7: Sei V ein K-VR
(a) Falls V endlich erzeugt ist, so ist die Dimension von V die Elementarzahl einer (und damit aller) Basen von V. Schreibweise $\dim(V)$
(b) Andernfalls $\dim(V) = \infty$
Beispiel:
(1) $\dim(K^n) = n$

(2) Die Lösungsmenge des homogenen LGS aus §2 ist $L =< \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ also $\dim(L) = 1$

(3) $V = \{0\}$ Nullraum $\dim(V) = 0$
(4) $V = K[x] \Rightarrow \dim(V) = \infty$. Ebenso für W=Folgenraum $\Rightarrow \dim(W) = \infty$, denn es gibt eine unendliche linear unabhängige Menge.

Rezept zum finden einer Basis eines Unterraums von K^n: Sei $U =< v_1, \dots, v_n > \subseteq K^n$.
Bilde $A \in K^{m \times n}$ mit den v_i als Zeilen.
Bringe A in ZSF (Gauß). Die Zeilen $\neq 0$ bilden eine Basis von U. Begründung: §4 Prop 3: Die Zeilen der ZSF erzeugen U. Außerdem: die Zeilen $\neq 0$ der ZSF sind linear unabhängig.
Insbesondere folgt: $\mathrm{rg}(A) = \dim(U)$

Proposition 8:
Der Rang einer Matrix ist die Dimension des von der Zeilen erzeugten Unterraums. Damit ist der Rang eindeutig bestimmt.
Korollar 9:
Sei V endlich dimensionaler K-VR und $U \subseteq V$ ein Unterraum $\Rightarrow$ Auch U ist endlich-dimensional und $\dim(U) \leq \dim(V)$
Beweis:
Jede linear unabhängige Teilmenge S von U erfüllt die Bedingung $|S| \leq \dim(V)$. Also gibt es eine maximale linear unabhängige Teilmenge S von U, und $|S| \leq \dim(V)$
Satz 2: S Basis von U $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$

Korollar 10:
Sei V ein endlich-dim. VR, $S \subseteq V$ lin. unabh. Dann gibt es eine Basis B von V mit $S \subseteq B$ („Basisergänzung“)
Beweis:

Jede lin. unabh. Teilmenge von V hat $\leq \dim(V)$ Elemente. Also gibt es unter denjenigen linear unabhängigen Mengen, die S enthalten, eine mit maximal vielen Elementen. Diese Menge ist maximal linear unabhängig, also eine Basis. (Satz 2)
Anmerkung: Kor. 10 gilt auch für unendlich dimensionale Vektorräume (Beweis mit Zornschem Lemma)
Beispiel: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich durch $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$ ergänzen.

Korollar 11: V endlich dimensionaler K-VR, $U \subseteq V$ Unterraum, $\dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V$
Beweis: Sei $S \subseteq U$ Basis von U. Kor. 10: $\exists$ B Basis von V mit $S \subseteq B$
$|B| = \dim(V) = \dim(U) = |S| \Rightarrow B = S \Rightarrow U = V$

§6 Lineare Codes

$K = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ Körper mit 2 Elementen (Bit); $1 + 1 = 0$
Bits $x_1, x_2, x_3, \ldots$ werden gesendet über einen Kanal (oder gespeichert auf einen Datenträger).
Es können Fehler auftreten. Mit Wahrscheinlichkeit p (etwa $\approx 10^{-6}$ wird jeweils ein Bit x_i falsch übertragen, d.h. als $x_i + 1$ empfangen.
Abhilfe: Redundanz

1. Idee: Alle Daten werden 2x gesendet („Wiederholungscode")
Bei 4er Blocks: Statt $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^4$ wird $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^8$ versendet.
$\rightarrow$ Fast alle Fehler werden erkannt, können aber nicht korrigiert werden.
Allgemeiner Rahmen: Bit-Strom wird in Blocks der Länge k aufgezeichnet, z.B. $k = 4$. Statt $(x_1, \ldots, x_k)$ wird $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ gesendet (bzw. gespeichert)

Zuordnung geschieht (häufig) durch eine Matrix $G \in K^{n \times k}$: $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$.

$(c_1, \ldots, c_n)$ heißt Codewort
$(x_1, \ldots, x_k)$ heißt Informationswort
G heißt Generatormatrix

Die Menge $C := \left\{ G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in K^k \right\}$ aller Codewörter bildet einen Unterraum von K^n.

Das LGS $G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ muss für $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in C$ eindeutig lösbar sein. Also $rg(G) = k$, und damit sind die Spalten von G linear unabhängig $\Rightarrow \dim(C) = k$

Definition 1: Ein linearer Code ist ein Unterraum $C \subseteq K^n$. Mit $k = \dim(C)$ heißt C auch ein (n, k)-Code. n ist die Länge von C, $\frac{k}{n}$ ist die Informationsrate, $n - k$ die Redundanz.
Anmerkung: Es gibt auch nicht-lineare Codes, d.h. Teilmengen $C \subseteq K^n$

Beispiele:

(1) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ liefert den Wiederholungscode. Dies ist ein (8,4)-Code.

(2) Parity-Check-Code(PCC): $(x_1, \ldots, x_4) \mapsto (x_1, \ldots, x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ mit Generatormatrix $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{5 \times 4}$ (5,4)- Code. Wenn nicht 2 oder 4 Fehler auftreten, werden Fehler erkannt $\rightarrow$ 1-Fehlererkennend.

(3) 3x Wiederholungscode $G = \begin{pmatrix} E_4 \\ E_4 \\ E_4 \end{pmatrix}$ (12,4)-Code. Falls nur 1 Fehler auftritt, kann dieser

korrigiert werden. Ab 2 Fehlern ist falsche Korrektur möglich $\rightarrow$ 1-Fehlerkorrigierend.

Dekodieren: Empfangen wird ein Wort $c' = (c'_1, \ldots, c'_n) \in K^n$, $c' = c + f$ mit $f = (f_1, \ldots, f_n) \in K^n$ „Fehlervektor".

Falls $c' \in C$, so wird c' ausgegeben (Annahme f=0), dann $G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c'$ auflösen.

Falls nicht $c' \in C$: Suche ein $c \in C$, aus dem c' durch möglichst wenig Änderungen hervorgeht (Annahme: Anzahl der Fehler ist klein!). Falls es genau ein solches c gibt: ausgeben.
Falls nicht: Sinnvolle Dekodierung unmöglich $\rightarrow$ Fehlermeldung

Definition 2: Für $c = (c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ ist $w(c) = |\{i \in \{1 \ldots n\} | c_1 \neq 0\}|$ das Hamming-Gewicht von c. Für $c, c' \in K^n$:
$d(c, c') = w(c \cdot c') = |\{i | c_i \neq c'_i\}|$ der Hamming-Abstand (Dies ist eine Metrik auf K^n). Für $C \subseteq K^n$ Teilmenge:
$d(C)) = \min \{d(c, c') | c, c' \in C, c \neq c'\}$ ($d(C) := n+1$ für $|C| \leq 1$) ist Hamming-Abstand von C.
Falls C linearer Code $d(C) := \min \{w(c) | c \in C \setminus \{0\}\}$ Bsp:
(1) C (8,4)-Wdh-code $\Rightarrow d(C) = 2$
(2) C (5,4)-PCC $\Rightarrow d(C) = 2$
(3) C (12,4)-Wdhcode $\Rightarrow d(C) = 3$

Falls $d(C) = 2e + 1$: Ändern von höchstens e Bits in einem Codewort $c \in C$ ergibt ein $c' \in K1n$, so dass c das eindeutig bestimmte Codewort ist mit $d(c, c') \leq e$. $\rightarrow C$ ist e-fehler-korrigierend.
Falls $d(C) = 2e + 2$: Auch hier e-fehler-korrigierend. Zusätzlich: Bei e+1 Fehlern gibt es überhaupt kein Codewort $c'' \in C$ mit $d(c'', c') \leq e$ (denn dann wäre $d(c'', c) \leq e + e + 1 = 2e + 1 < 2e + 2$) $\rightarrow (e + 1)$-Fehlererkennend

Parity-Check-Matrix: In allen bisherigen Beispielen hat die Generatormatrix G die Form $G = \begin{pmatrix} I_k \\ \vdots \\ A \end{pmatrix}$ mit $A \in K^{(n-k)\times k}$

Bilde $P := (\underbrace{-A}_{k} \vdots \underbrace{I_{n-k}}_{n-k}) \in K^{(n-k)\times n} \Rightarrow rg(P) = n-k$ und $P \cdot G = (-A \cdot I_{n-k}) \cdot \begin{pmatrix} I_k \\ A \end{pmatrix} = 0$

Also $\forall c \in C : P \cdot c = 0$. Wegen $rg(P) = n-k$ hat der Lösungsraum L von $P \cdot c = 0$ die Dimension $\dim(L) = n-(n-k) = k$. Außerdem $C \subseteq L \Rightarrow L = C$ Also gilt für $c \in K^n : P \cdot c = 0 \Leftrightarrow c \in C$

P heißt Parity-Check-Matrix.

Eine solche Matrix existiert auch für allgemein G.

Bsp:

(1) $(8,4)$-Wiederholungscode: $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $(5,4)$-Paritycheckcode: $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Für $c' \in K^n$ (das empfangene Wort) heißt $P \cdot c' \in K^{n-k}$ das Syndrom von c'. Falls $c' = c + f$ mit $c \in C$ und $f \in K^n$ Fehlerwort, dann $P \cdot c' = P \cdot (c+f) = \overline{P \cdot c} + P \cdot f = P \cdot f$.

Dekodierung mit PCM: Bilde das Syndrom $P \cdot c'$. Suche $f \in K^n$ mit $P \cdot f = P \cdot c'$ und $w(f)$ minimal, genauer: $w(f) \leq e$.

Der $(7,4)$-Hammingcode

Generatormatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d.h. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, x_2+x_3+x_4, x_1+x_3+x_4, x_1+x_2+x_4)$.

Durch hinschauen: $d(C) = 3 \Rightarrow$ 1-Fehlerkorrigierend

Paritycheckmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 7}$

Dekodieren: Falls $P \cdot e' = 0$: c' ausgeben (denn $c' = c$, falls nicht min. 3 Fehler auftreten)

Falls $P \cdot c' \neq 0 \Rightarrow P \cdot c'$ eine der Spalten von P. $P \cdot c'$ sei die i-te Spalte. Dann $c'' = c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c + e_i$ (denn $c'' = c$, falls nicht ≥ 2 Fehler)

Bauer-Code (nach F.L. Bauer, TUM): Hänge an den (7,4)-HC ein Paritätsbit an:
$c_8 := c_1 + c_2 + \cdots + c_7$ d.h. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, x_2+x_3+x_4, x_1+x_3+x_4, x_1+x_2+x_4, x_1+x_2+x_3)$

Der Bauer-Code ist ein (8,4)-Code mit $d(C) = 4$, also 1-Fehlerkorrigierend, 2-Fehlererkennend.

§7 Lineare Abbildungen

Definition 1:
Seien V,W K-VRe. Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt linear falls:
(1) $\forall v, v' \in V : \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v')$
(2) $\forall v \in V$ und $\forall a \in K = \varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)$
Insbesondere $\varphi(0_V) = 0_W$
Beispiel:
(1) Sei $A \in K^{m\times n} \Rightarrow \varphi_A : K^n \to K^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist lineare Abbildung
(2) $\varphi V \to W, v \mapsto 0_W$ ist linear („Nullabbildung“)
(3) $V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Drehungen um den Nullpunkt, Streckungen mit Nullpunkt als Zentrum sind lineare Abbildungen. Verschiebungen und Drehungen um andere Punkte sind nicht linear.

(4) $V = \mathbb{R}[x]$ Polynomring, $\varphi V \to V, f \mapsto f'$ (Ableitung) ist linear

(5) $V = K^n, \pi : V \to K, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i$ ist linear

(6) M Menge, $V = Abb(M, K), x \in M$ fest, $\varphi_x : V \to K, f \mapsto f(x)$ ist linear

Definition 2:
$f : V \to W$ lineare Abbildung $\Rightarrow Kern(\varphi) := \{v \in V | \varphi(v) = 0\}$ heißt der Kern von φ. Außerdem $Bild(\varphi) := \varphi(V) = \{\varphi(v) | v \in V\}$.

Satz 3:
Sei $\varphi : V \to W$ linear
(a) $Kern(\varphi) \subseteq V$ ist ein Unterraum
(b) $Bild(\varphi) \subseteq W$ ist ein Unterraum
(c) Es gilt: φ ist injektiv $\Leftrightarrow Kern(\varphi) = \{0\}$.

Beweis:
(a) 1. $0_V \in Kern(\varphi)$, wenn $\varphi(0_V) = 0_W \Rightarrow Kern(\varphi) \neq 0$
2. Seien $v, v' \in Kern(\varphi) \Rightarrow \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v + v' \in Kern(\varphi)$.
3. Seien $v \in Kern(\varphi), a \in K \Rightarrow \varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow a \cdot v \in Kern(\varphi)$
(b) 1. $0_W = \varphi(0_V) \in Bild(\varphi) \Rightarrow Bild(\varphi) \neq \oslash$
2. Seien $w, w' \in Bild(\varphi) \Rightarrow \exists v, v' \in V : w = \varphi(v), w' = \varphi(v') \Rightarrow w+w' = \varphi(v+v') \in Bild(\varphi)$
3. Seien $v \in Kern(\varphi), a \in K \Rightarrow \exists v \in V : w = \varphi(v) \Rightarrow a \cdot w = \varphi(a \cdot v) \in Bild(\varphi)$
(c) „$\Rightarrow$“: Sei φ injektiv. Sei $v \in Kern(\varphi) \Rightarrow \varphi(v) = 0 = \varphi(0) \Rightarrow v = 0$.
Andererseits $0 \in Kern \Rightarrow Kern(\varphi) = \{0\}$
„$\Leftarrow$“: Sei $Kern(\varphi) = \{0\}$. Seien $v, v' \in V$ mit $\varphi(v) = \varphi(v') \Rightarrow 0 = \varphi(v) - \varphi(v') = \varphi(v - v') \Rightarrow v - v' \in Kern(\varphi) \Rightarrow v - v' = 0 \Rightarrow v = v' \Rightarrow$ Also φ injektiv

Beispiel:

(1) $A \in K^{m \times n} \Rightarrow Kern(\varphi_A)$ ist die Lösungsmenge des LGS $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Also φ_A injektiv $\Rightarrow rg(A) = n$
(2) $V = \mathbb{R}[x], \varphi : V \to V, f \mapsto f' \Rightarrow Kern(\varphi) =$ Menge der konstanten Polynome. φ ist nicht injektiv.

Definition 4:
Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt Isomorphismus, falls φ bijektiv ist. Dann ist auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : w \to v$ ein Isomorphismus. Falls es einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ gibt, so heißen V und W isomorphi. Notation: $V \cong W$.

Satz 5:
Sei V ein K-VR mit $n : \dim(V) < \infty$. Dann gilt $V \cong K^n$.

Genauer: Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so ist $\varphi : K^n \to V, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n a_i v_i$ ein Isomorphismus.

Umkehrabbildung: Jedem $v \in V$ wird sein „Koordinatenvektor“ $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit $\sum_{i=1}^n a_i v_i = v$ zugeordnet.

Beweis:
1. φ ist injektiv wegen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig
2. φ ist surjektiv wegen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ EZS.
Klar: φ ist linear.
Beispiel:
$V = \{f \in K[x] | \deg(f) \leq 2\} \Rightarrow V \cong K^3$
$\varphi : K^3 \to V, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1 + a_2 x + a_3 x^2$

Satz 6: (Dimensionssatz)
Sei $e : V \to W$ lineare Abbildung $\Rightarrow \dim(V) = \dim(Kern(\varphi)) + dim(Bild(\varphi))$
Beweis:
Nur für $\dim(V), \dim(W) < \infty$. (Allgemeiner Fall geht genauso, nur mit mehr Notation)
Seien $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$ eine Basis von $Kern(\varphi)$ und $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq W$ eine Basis von $Bild(\varphi)$.
Wähle zu jedem w_i ein $v_i' \in V$ mit $\varphi(v_i') = w_i$
Behauptung: $B := \{v_1, \ldots v_n, v_1', v \ldots, v_n'\}$ ist eine Basis von V.
(Dann $\dim(V) = m + n = \dim(Kern(\varphi)) + \dim(Bild(\varphi)))$
1. B ist linear unabängig. Sei $\sum_{i=1}^m a_i v_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i' = 0$ mit $a_i, b_i \in K$
φ anwenden: $0 = \varphi(0) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi(v_i) + \sum_{i=1}^n b_i \varphi(v_i') = \sum_{i=1}^n b_i w_i \Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots b_n = 0$.
Also $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_m = 0$
2. B ist EZS
Sei $v \in V.\varphi(v) \in Bild(\varphi) \Rightarrow \varphi(v) = \sum_{i=1}^n b_i w_i$ mit $b_i \in K$
Setze $\widetilde{v} := v - \sum_{i=1}^n b_i v_i' \Rightarrow \varphi(\widetilde{v}) = \varphi(v) - \sum_{i=1}^n w_i e(v_i') = 0 \Rightarrow \widetilde{v} \in Kern(\varphi) \Rightarrow \widetilde{v} = \sum_{i=1}^m a_i v_i$ mit $a_i \in K \Rightarrow v = \widetilde{v} + \sum_{i=1}^n b_i v_i' = \sum_{i=1}^m a_i v_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i'$

Sei $A \in K^{m \times n}, \varphi_A : K^n \to K^m, v \mapsto A \cdot v$. Was ist die $\dim(Kern(\varphi_A))$?
$\dim(Kern(\varphi_A)) = n - rg(A)$. Satz 6: $n = n - rg(A) + \dim(Bild(\varphi_A)) \Rightarrow \dim(Bild(\varphi_A)) = rg(A)$.
$Bild(\varphi_A)$ ist der von den Spalten von A erzeugte Vektorraum.
Korollar 7: Der Rang einer Matrix ist Dimension des von den Spalten erzeugen Unterraums.

Insbesondere:$rg(A^T) = rg(A)$

Korollar 8: V,W K-VRe mit $\dim(V) = \dim(W) < \infty, \phi : V \to W$ lineare Abbildung.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(a) ϕ ist Isomorphismus
(b) ϕ ist injektiv
(c) ϕ ist surjektiv

Beweis: „(a) $\to$ (b)“, „(a) $\to$(c)“ (klar aus Definition)
„(b)$\to$(a)“: ϕ injektiv $\Rightarrow$ $Kern(\phi) = \{0\} \Rightarrow \dim(Kern(\phi)) = 0 \Rightarrow \dim(Bild(\phi)) = \dim(V) = \dim(W) \Rightarrow Bild(\phi) = W \Rightarrow \phi$ ist surjektiv
„(c)$\to$(a)“: ϕ surjektiv $\Rightarrow \dim(Bild(\phi)) = \dim(W) = \dim(V) \Rightarrow \dim(Kern(\phi)) = 0 \Rightarrow Kern(\phi) = \{0\} \Rightarrow \phi$ injektiv

Insbesondere für $A \in K^{n\times n}$(quadratische Matrix:)
ϕ_A Isomorphismus $\Leftrightarrow rg(A) = n$
Falls $rg(A) = n$, so liefert folgendes Verfahren eine inverse Matrix $B \in K^{n\times n}$mit$A \cdot B = I_n$

(1) Bilde die erweiterte Matrix $(A \vdots I_n) \in K^{n\times(2n)}$
(2) Mit Gauß-Algo: Überführen in str. ZSF

(3) 1. Fall: ZSF hat Gestalt $(I_n \vdots B) \Rightarrow A \cdot B = I_n$
2. Fall: ZSF hat andere Gestalt $\Rightarrow rg(A) < n$
Begründung: Es werden simultan die LGS $A \cdot x = e_i$ gelöst. Im Fall 1 sind die eineutigen Lösungen die Spalten von B.

Definition 9: Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, falls es $B \in K^{n\times n}$ gibt mit $A \cdot B = I_n$. Wir werden sehen, dann gilt auch $B \cdot A = I_n$ und B ist eindeutig bestimmt.
A invertierbar $\Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow A$ regulär „$B := A^{-1}$“

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Nachprüfen:$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$

Anwendung: Gegeben ein LGS $A \cdot x = b \in K^n$
$\Rightarrow$ Falls A invertierbar, dann ist $x = A^{-1} \cdot b$ die eindeutige Lösung.

Satz 10:(lineare Fortsetzung)
Seien V,W K-VRe, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.
(a) Eine lineare Abbildung: $\phi : V \to W$ ist durch die Bilder $\phi(v_i)$ der Basisvektoren eindeutig bestimmt.
Formaler: Sind $\phi, \psi : V \to W$ lineare Abbildungen mit $\phi(v_i) = \psi(v_i) \forall i$, dann$\phi = \psi$
(b) Seien $w_1, \ldots, w_n \in W$ beliebig $\Rightarrow \exists \phi : V \to W$ linear mit $\phi(v_i) = w_i$
Also: lineare Abbildungen lassen sich definieren, indem man die Bilder der Basisvektoren angibt.

Beweis:
(a) Seien $\phi(v_i) = \psi(v_i) \forall i$.Sei $v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$mit $a_i \in K \Rightarrow \phi(v) = \sum_{i=1}^n a_i \phi(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i \psi(v_i) = \psi(v)$
(b) Definiere $\phi : V \to W$ durch: Für $v \in V$ habe $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$mit $a_i \in K$
$\phi(v) := \sum_{i=1}^n a_i w_i$ Dies ist wohldefiniert wegen eindeutiger Darstellungseigenschaft.

Nachrechnen: ϕ ist linear und $\phi(v_i) = w_i$
Anmerkung: Satz 10 gilt auch für $\dim(V) = \infty$

Beispiel:
Was ist die lin. Abb. $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\phi(e_1) = e_2, \phi(e_2) = -e_1$?
$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi(xe_1 + ye_2) = x \cdot \phi(e_1) + y \cdot \phi(e_2) = x \cdot e_2 + y \cdot e_1 = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Drehung um 90° nach links

§8 Darstellungsmatrizen

Seinen V,W endlich dimensionale K-VRe
$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, $C := \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basis von W.
Sei $\phi_i V \to W$ eine lineare Abbildung $\forall j = 1, \ldots, n : \phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$mit $a_{ij} \in K$
Bilde die Matrix $A = (a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$
Die Spalten von A sind die Koordinatenvektoren der Bilder der v_i. Spalten = Bilder der Basisvektoren

Definition 1: Die Matrix A heißt die Darstellungsmatrix von ϕ (bezüglich der Basen B,C)
Schreibweise: $A =: D_{B,C}(\phi)$. Falls V=W, so verwendet man dieselbe Basis B=C und schreibt $D_B(\phi)$. Wegen /S7 Satz 10 ist ϕ durch $D_{B,C}(\phi)$ eindeutig bestimmt und jede Matrix in $K^{m \times n}$ ist eine Darstellungsmatrix.

Beispiel:
(1) $V = \mathbb{R}^2 = W$ mit Basis $B = \{e_1, e_2\}, \phi =$ Drehung um 60° nach links.
$\phi(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \phi(e_2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow D_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
(2) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] | \deg(f) \leq 2\}$ mit Basis $B = \{1, x, x^2\}$
$\phi : V \to V, f \mapsto f' \phi(v_1) = 0, \phi(v_2) = 1, \phi(v_2) = 2x = 2v_2$
$D_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Spezialfall: $V = K^n, W = K^m$ mit Standardbasen

Satz 2: $V = K^n, W = K^m$ mit Standardbasen $B, C, \varphi : V \to W$ linear, $A = D_{B,C}(\varphi) \Rightarrow \varphi = \varphi_A$, d.h. $\varphi(v) = A \cdot v$ für $v \in K^n$.
Insbesondere sind alle linearen Abbildungen $K^n \to K^m$ von der Form φ_A.

Beweis:

Sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \varphi(v) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{j=1}^m a_{j,i} e_j) =$

$\sum_{j=1}^m \underbrace{(\sum_{i=1}^n a_{j,i} x_i)}_{=\text{j-te Komp. von}\varphi(v)} \cdot e_j \Rightarrow \varphi(v) = A \cdot v$

Für $\varphi : U \to V, \psi : V \to W$ linear ist $\psi \circ \varphi : U \to W$ linear
Was passiert mit Darstellungsmatrizen?

Satz 3: Seien U, V, W endlich dimensionale K-VRe mit Basen $A, B, C, \varphi : U \to V, \psi : V \to W$ lineare Abbildungen $\Rightarrow D_{A,C}(\psi \circ \varphi) = D_{B,C}(\psi) \cdot D_{A,B}(\varphi)$ Matrizenprodukt $\leftrightarrow$ Verkettung von linearen Abbildungen

Beweis:
$A = \{u_1, \ldots, u_n\}, B = \{v_1, \ldots, v_m\}, C = \{w_1, \ldots, w_l\}$
$D_{B,C}(\psi) = (a_{i,j}) \in K^{l \times m}, D_{A,B}(\varphi) = (b_{i,j}) \in K^{m \times n}$
$(\psi \circ \varphi)(u_j) = \psi(\varphi(u_j)) = \psi(\sum_{k=1}^m b_{k,j} v_k) = \sum_{k=1}^m b_{k,j} \psi(v_k) = \sum_{k=1}^m b_{k,j} (\sum_{i=1}^l a_{i,j} w_i) = \sum_{i=1}^l (\sum_{k=1}^m a_{i,k} k_k) w_i$
Insbesondere für U, V, W Standard-VRe mit Standardbasen
$A \in K^{l \times m}, B \in K^{m \times n} : \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{A \cdot B}$
Hieraus folgt: Für $A \in K^{n \times n}$ regulär ist $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$. Es gilt $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = id \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = I_n$
Auch $\varphi_A^{-1} \circ \varphi_A = id \Rightarrow A'A = I_n$

Definition 6:
$Gl_n(K) := \{A \in K^{n \times n} | A \text{ist invertierbar(=regulär)}\}$ heißt die allgemeine lineare Gruppe. (Dies ist eine Gruppe mit $\cdot$)

Beispiel:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gl_2(K), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Gl_2(K) : A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Also: $Gl_2(K)$ nicht abelsch. $Gl_n(K)$ ist nur für n=1 abelsch.

Basiswechsel:
Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V und $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ eine weitere Basis. Schreibe $v_j' = \sum_{i=1}^n n_{i,j} v_i$ mit $a_{i,j} \in K$. Bilde die Matrix $S = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$
S heißt Basiswechselmatrix. Auch $S =: S_{B,B'}$

$\boxed{\text{Spalten von S= Koordinatenvektoren der neuen Basisvektoren}}$

Es gibt auch $b_{i,j} \in K$ mit $v_j = \sum_{i=1}^n b_{i,j} v_i' T := (b_{i,j}) \in K^{n \times n}$

$v_j = \sum_{i=1}^n b_{i,j} v_i' = \sum_{i=1}^n b_{i,j} (\sum_{k=1}^n a_{k,i} v_k) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{k,i} \cdot b_{i,j})}_{\begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & sonst \end{cases}} \cdot v_k$

$\Rightarrow S \cdot T = I_n \Rightarrow T = S^{-1}$

Sei $\varphi : V \to V$ linear, $D_B\varphi = (d_{i,j}) \in K^{n\times n}$
Was ist $D_{B'}(\varphi)$?
$\varphi(v_j') = \varphi(\sum_{i=1}^n a_{i,j}v_i) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}\varphi(v_i) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}(\sum_{k=1}^n d_{k,i}a_{i,j}\cdot(\sum_{l=1}^n b_{l,k}v_l') =$
$\sum_{l=1}^n \underbrace{(\sum_{i,k=1}^n b_{l,k}d_{k,i}a_{i,j})}_{\text{i-te Eintrag von T}D_B(\varphi)=S=S^{-1}D_B(\varphi)S} v_l'$

<u>Satz 5:</u> Seien B,B' Basen von V, $S = S_{B,B'}$ Basiswechselmatrix, $\varphi : V \to V \to$
$\boxed{D_{B'}(\varphi) = S^{-1}D_B(\varphi)\cdot S}$
<u>Anmerkung:</u> Jede Basiswechselmatrix liest in $Gl_n(k)$
Umgekehrt: Jede invertierbare Matrix ist eine Basiswechselmatrix
Ebenso erhalte:

<u>Satz 6:</u> Seien B,B' Basen von V und C,C' Basen von W.
$S_{B,B'}$und$S_{C,C'}$ Basiswechselmatrizen, $\varphi : V \to W$ lineare Abbildung.
$D_{B',C'}(\varphi) = S_{C,C'}^{-1}\cdot D_{B,C}(\varphi)\cdot S_{B,B'}$

Permanente: Alles mit +
Sarrus-Regel: siehe http://www.mathematik.net/determinanten/22k1s6.htm

(4) Beispiel: Revolverhelden:
$P_{i,j} =$ W'ket, dass R_i R_j erschießt. Keiner überlebt $\Leftrightarrow \exists \sigma \in S_3 : R_i \text{erschiesst} R_{\sigma(i)}$
W'keit dafür: $\prod_{i=1}^{3} P_{i,\sigma(i)} \rightarrow$ Gesamt-W'ket, dass keiner überlebt $= perm(P_{i,j})_{i,j=1\dots3}$

Lemma 4: Sei $A = (a_{i,j}) \in K^{n\times n}$
(a) $\det(A^T) = \det(A)$
(b) Sei $\sigma \in S_n$ und $b_{i,j} := a_{i,\sigma(j)}, B = (b_{i,j})$ (d.h. die Spalten von A werden mit σ vertauscht)
$\Rightarrow \det(B) = sgn(\sigma) \cdot \det(A)$
Ebenso für Zeilenpermutationen
(c) Falls in A zwei Spalten oder zwei Zeilen übereinstimmen, dann $\det(A) = 0, sgn(\tau 1 {-} 1)$
Beweis:

$$(a) \det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \sum_{sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} = \sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\tau(j)} = \det(A)$$

$$(b) \det(B) = \sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(\tau(i))} \underbrace{=}_{\rho:=\sigma\circ\tau} \sum_{\rho\in S_n} sgn(\sigma^{-1}\rho)$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\rho(i)} = sgn(\sigma^{-1}) \cdot \det(A)$$

(c) Wir führen den Beweis nur für $char(K) \neq 2$, d.h. $1 + 1 \neq 0$
Die i-te und j-te Spalte mögen übereinstimmen. Wähle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$, alle anderen fest. $\Rightarrow$ Die Matrix B aus (b) ist identisch mit A $\Rightarrow \det(A) = \det(B) = \underbrace{sgn(\sigma)}_{-A} \det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$ Für $char(K) = 2$ ist der Beweis etwas aufwändiger.

Satz 5: (Determinantenmultiplikationssatz): Sei $A, B \in K^{n\times n} \Rightarrow \boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}$
Beweis: $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), A \cdot B = (c_{i,j})$, also $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} n_{i,j} b_{k,j}$

$$\det(A{\cdot}B) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{i,\sigma(i)} \right) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} (a_{i,k_i} {\cdot} b_{k_i,\sigma(i)}) = \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k}$$

$$\sum_{\tau\in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} \cdot \underbrace{\det(b_{\tau(j),l})_{j,l=1\dots n}}_{L4(b): sgn(\tau)\cdot det(B)} = \sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A)$$

Achtung: Es gilt nicht $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

Satz 6: Sei $A \in K^{n\times n}$, dann gilt: A ist regulär $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. In diesem Fall gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
Beweis:
„$\Rightarrow$“ A regulär $\Rightarrow \exists A^{-1}$
$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$
$\Rightarrow \det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

„$\Leftarrow$“: Sei A nicht regulär $\Rightarrow \exists v \in K^n \setminus \{0\} : A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Basisergänzungssatz: Erhalte $v_1, \dots, v_n \in K^n$ Basis

Bilde $B = (v \vdots v_2 \vdots \ldots \vdots v_n) \in Gl_n(K), A{\cdot}B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A{\cdot}v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 0 & X & \cdots & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & X & \cdots & X \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\det(A \cdot B) = 0 \Rightarrow \det(A) \underbrace{\det(B)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

Für $A \in K^{n \times n}$ quadratisch
A regulär $\Leftrightarrow$ A invertierbar $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n \Leftrightarrow \varphi_A$surjektiv $\Leftrightarrow \varphi_A$injektiv $\Leftrightarrow$ jedes LGS mit Koeff.-matrix A ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in Gl_n(K)$

Korollar 7: $A, B \in K^{n \times n}$ seien ähnlich $\Rightarrow \det(A) = \det(B)$
Beweis: $B = S'AS \text{mit} S \in Gl_n(K) \Rightarrow \det(B) = \frac{1}{\det(S)} \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(A)$
Seien V endlich-dim. K-VR und $\varphi : V \to V$ linear, dann kann man $\det(\varphi)$ definienieren durch $\det(\varphi) = \det(D_B(\varphi))$ mit B Basis

Definition 8:
$Sl_n(K) = \{A \in K^{n \times n} | \det(A) = 1\} \subseteq Gl_n(K)$ heißt die spezielle lineare Gruppe

Berechnen von Determinanten

Satz 9: Sei $A \in K^{n\times n}, A = (a_{i,j})_{i,j=1\ldots n}$. Für $1 \leq i,j \leq n$ sei $A_{i,j} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.
Dann gelten: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\cdot\det(A_{i,j})$ (Entwicklung der Determinanten nach der i-ten Zeile)
und $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\cdot\det(A_{i,j})$ (Entwicklung nach der j-ten Spalte)

Beispiel: $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{pmatrix}$ Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det(A) = 0 + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & 8\end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 7\end{pmatrix} = 0$$

Aus Satz 9 folgt die Regel für die „adjunkte Matrix“: Mit $c_{i,j} := (-1)^{i+j}\cdot\det(A_{i,j}) \in K$ gilt:

$\boxed{A\cdot(c_{i,j})_{i,j=1\ldots n} = \det(A)\cdot I_n}$ Für $A \in Gl_n(K) : A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(c_{i,j})^T$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ regulär $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Was passiert mit der Determinante bei elementaren Zeilenoperationen?
Typ I (Vertauschen von Zeilen): $\det(A)$ ändert das Vorzeichen
Typ II (Multiplizieren einer Zeile mit $c \in K\setminus\{0\}$) : $\det(A)$ wird mit c multipliziert
Typ III (Addieren des c-fachen einer Zeile zu einer anderen): $\det(A)$ bleibt unverändert: (Wegen L.4(c))
$\rightarrow$ Determinante ist mit Gauß-Algorithmus berechenbar.

Beispiel: $\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 1 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 0 & -1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -8 & -4 & -3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ -8 & -4 & -3\end{pmatrix} =$
$\det\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}5 & 4\\ 0 & 9\end{pmatrix} = (5\cdot 9) - (0\cdot 4) = 45$

Geometrische Interpretation der Determinanten: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2, A = (v_1 \vdots v_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow |\det(A)|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten v_1, v_2 $\rightarrow$ Verallgemeinerung auf n-dimensionale Volumina

Spezielle Determinanten

(1) $A = \begin{pmatrix}a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_n\end{pmatrix}$ „Diagonalmatrix“ $\Rightarrow \det(A) = a_1\cdot a_2\ldots a_n$

(2) Allgemeiner: $A = \begin{pmatrix}a_1 & * & * & *\\ 0 & \ldots & * & *\\ 0 & 0 & \ldots & *\\ 0 & 0 & 0 & a_n\end{pmatrix}$ „obere Dreiecksmatrix“ $\Rightarrow \det(A) = a_1\cdot a_2\ldots a_n$

Ebenso für untere Dreiecksmatrizen

(3) $A = \begin{pmatrix}B & 0\\ C & D\end{pmatrix}$ mit $B \in K^{l\times l}, C \in K^{(n-l)\times l}, D \in K^{(n-l)\times(n-l)}$ „Blockdreiecksgestalt“
$\Rightarrow \det(A) = \det(B)\cdot\det(D)$
Alles folgt aus Definition 3

§10 Eigenwerte

Definition 1: Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A, falls es $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit $\boxed{A \cdot v = \lambda \cdot v}$ gibt. v heißt dann ein Eigenvektor zu λ

Beispiel:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum EW 1

Weitere EW: $\lambda = -1$, denn $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_1 = \{v \in K^2 | A \cdot v = v\} = \{v \in K^2 | (A - I_2) \cdot v = 0\}$

$A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat Rang 1 $\Rightarrow \dim(E_1) =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} >$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis bestehend aus Eigenvektoren.

(2) Allgemeiner: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei Darstellungsmatrix einer Spiegelung an einer Ebene durch Nullpunkt $\Rightarrow$ Alle Vektoren der Ebene sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1 $\dim(E_1) = 2$. Die Vektoren auf der Geraden durch den Nullpunkt, aber senkrecht zur Ebene sind Eigenvektoren zum Eigenwert -1.

Anmerkung: Eigenwerte, -vektoren und -räume lassen sich auch definieren für lineare Abbildungen $\varphi : V \to V : \boxed{\varphi(v) = \lambda \cdot v}$

Beispiel:

(1) $V = \mathbb{R}[x]$ Polynomring $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ lineare Abbildung

0 ist EW, denn $\varphi(1) = 0 \qquad E_0 = \{f \in K[x] | f \text{konst.}\}$

(2) $V = C^\infty(\mathbb{R})$ = Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ zu $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = e^{\lambda x}$ ein Egenvektore zum Eigenwert λ

Proposition 2: für $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ ist $E_1 \leq K^n$ ein Unterraum

Beweis: E_1 ist Lösungsmenge des LGS $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$

Berechnen von Eigenwerten: $A \in K^{n\times n}, \lambda \in K$. Dann gilt λ ist EW $\Leftrightarrow \exists v \in K^n \setminus \{0\}$: $A \cdot v - \lambda \cdot v \Leftrightarrow$ das LGS $(\lambda \cdot I_n - A) \cdot v = 0$ hat Lösung $\neq 0 \Leftrightarrow \det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$

Definition 3: Sei $A \in K^{n\times n}, K[x]$ Polynomring $\Rightarrow \chi_A(x) := \det(x \cdot I_n - A) \in K[x]$ heißt das charakteristische Polynom von A.

$\chi_A(x)$ ist ein Polynom vom Grad n mit höchstem Koeffizienten 1

Satz 4: Die EWe von $A \in K^{n\times n}$ sind die Nullstellen von $\chi_A(x)$

Beispiel:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(x) = \det(x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 1$ hat Nullstellen 1 und -1. $\Rightarrow$ Die Eigenwerte sind 1 und -1.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow \chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R} \Rightarrow$ keine EWe. (Allerdings i, -i sind komplexe EWe)

Erinnerung Polynome: $K[x]$ ist Ring mit Polynomaddition und -multiplikation. Außerdem gibt es Division mit Rest: $\forall f, g \in K[x]$ mit $g \neq 0$ gibt es $q \text{und} r \in K[x]$ mit $f = q \cdot g + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$.

Sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von $f : f(\lambda) = 0$. Division mit Rest durch $g = x - \lambda : f = q(x-\lambda) + r$ mit $\deg(r) < 1$, d.h. $r \in K$ konstant.

λ einsetzen: $0 = f(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r \Rightarrow r = 0$. Also $f = q \cdot (x - \lambda)$

Sei $\mu \in K$ weitere Nullstelle, $\mu \neq \lambda \Rightarrow 0 = f(\mu) = q(\mu) \cdot \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} \Rightarrow$

$q(\mu) = 0 \Rightarrow q = h \cdot (x - \mu), f = h(x - \lambda)(x - \mu)$

$\deg(q) = \deg(f) - 1, \deg(h) = \deg(f) - 2$
Es folgt: $\deg(f) = n \to f$ hat höchstens n Nullstellen.
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Nullstellen von $f \Rightarrow f = (x - \lambda_1)^{e_1} \ldots (x - \lambda_r)^{e_r} \cdot g$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ mit $e_i \in \mathbb{N}_{>0}$ und $g \in K[x]$ ohne Nullstellen. Die e_i heißen die Vielfachheiten der Nullstellen λ_i. (häufigster Fall: $e_i = 1$)
Beispiel: $f = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ hat NS = -1
$f = (x+1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) = (x+1)^2 \cdot \underbrace{(x^2+1)}_{g}$ -1 ist einzige NS mit Vielfachheit 2

$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i | a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$. $\mathbb{C}$ ist der Körper der komplexen Zahlen.
Fundamentalsatz der Algebra: Sei $f \in \mathbb{C}[x] \text{mit} \deg(x) > 0 \Rightarrow f$ hat min. eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
Es folgt $f = a \cdot \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{e_i}$ mit $a, \lambda_i \in \mathbb{C}_i e_i \in \mathbb{N}_{>0}$, d.h. f zerfällt in Linearfaktoren. Man sagt auch, dass der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Korollar 5: Sei $A \in K^{n\times n} \Rightarrow$
a) A hat höchstens n Eigenwerte
b) Sei K algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow$ A hat min. einen Eigenwert

Definition 6: Sei λ ein EW einer Matrix $A \in K^{n\times n}$.
Die algebraische Vielfachheit $m_{alg}(\lambda) \text{von} \lambda$ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ im char. Polynom $\chi_A(x)$.
Die geometrische Vielfachheit von λ ist $m_{geo}(\lambda) := \dim(E_\lambda)$, d.h. die Dimension des Eigenraums.
Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2 \Rightarrow \lambda = 1$ ist einziger EW und $m_{alg}(1) = 2; m_{geo}(1) = ?$ $\quad E_1$ ist die Lösungsmenge des homogenen LGS gegeben durch $A = 1 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rang $= 1 \Rightarrow \dim(E_1) = 2 - 1 = 1$, also $m_{geo}(1) = 1$

Satz 7: Für einen EW λ einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ gilt: $1 \leq m_{geom}(\lambda) \leq m_{alg}(\lambda)$
Beweis: $E_\lambda \neq \{0\} \Rightarrow m = m_{geom}(\lambda) = \dim(E_\lambda) \geq 1$
Sei $v_1, \dots, v_m \in K^n$ eine Basis von E_λ. Ergänze $v_1, \dots, v_m$ zu einer Basis $B = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\} \in K^n$ von K^n.

$$S := (v_1 \vdots v_2 \vdots \dots \vdots v_n) \in Gl_n(K).\ D_B(\varphi_A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & B \\ \vdots & \ddots & \lambda & ---- \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & C \end{pmatrix} =: D \text{ mit } C \in K^{(n-m)\times(n-m)}, B \in K^{n\times(n-m)}$$

S ist Basiswechselmatrix, also $D_B(\varphi_A) = S^{-1}AS \Rightarrow A = SDS^{-1}$
$\chi_A(x) = \det(x \cdot I_n - A) = \det(x \cdot I_n - SDS^{-1}) = \det(S \cdot (xI_n - D) \cdot S^{-1}) = \det(xI_n - D) = \chi_D(x) =$
$\prod_{i=1}^{m}(x - \lambda) \cdot \chi_C(x) \Rightarrow \chi_A(x) = (x-\lambda)^m \cdot \chi_C(x) \Rightarrow (x) \Rightarrow m_{alg}(\lambda) \geq m = m_{geom}(\lambda)$

Lemma 8: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene EW von $A \in K^{n\times n}$ und $v_i \in E_{\lambda_i}$ mit $v_1 + v_2 + \dots + v_r = 0 \Rightarrow \forall i = 1 \dots r : v_i = 0$
Beweis: Induktion nach r: $r = 1$: nichts zu zeigen
$r > 1 : 0 = A \cdot 0 = A \cdot (v_1 + \dots + v_r) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r$
$0 = \lambda_1 \cdot 0 = \lambda_1 \cdot (v_1 + \dots + v_r) = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \dots + \lambda_1 v_r$
Bilde Differenz: $\underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1) - v_2}_{\in E_{\lambda_2}} + \underbrace{(\lambda_3 - \lambda_1) - v_3}_{\in E_{\lambda_3}} + \dots + \underbrace{(\lambda_r - \lambda_1) - v_r}_{\in E_{\lambda_r}} = 0$
Induktion: $\forall i \geq 2 : \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{\neq 0} - v_i = 0 \Rightarrow \forall i \geq 2 : v_i = 0$
$v_1 = -(v_2 + v_3 + \dots + v_r) = 0$

Definition 9: Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, falls eine Basis von K^n existiert $v_1, \dots, v_n$, die komplett aus Eigenvektoren v_i besteht. $\Leftrightarrow A$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix:
$S^{-1}AS$ mit $\lambda_i \in K, S \in Gl_n(K)$
Beispiel:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist diagonalisierbar

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist nicht diagonalisierbar

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist nicht diagonalisierbar (Es fehlen EV)

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix und damit diagonalisierbar

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist diagonalisierbar, da symmetrisch (Beweis später)

Satz 10: Sei $A \in K^{n\times n}$: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn gelten:
(a) $\chi_A(x)$ zerfällt in Linearfaktoren $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{e_i}$ und
(b) Für alle EWe λ_i gilt: $m_{geom}(\lambda_i) = m_{alg}(\lambda_i) (= e_i)$ (alle λ_i verschieden)
Insbesondere: Falls A paarweise verschiedene EWe hat, so ist A diagonalisierbar.
Beweis:
1. A?i diagonalisierbar $\Rightarrow \exists S \in Gl_n(K) \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} =: D$ mit $d_i \in K \Rightarrow \chi_A(x) = \chi_D(x) = \prod_{i=1}^n (x-d_i) \Rightarrow (a)$, und die d_i sind die EWe. Für jedes λ_i gibt es e_i Indizes j mit $d_j = \lambda_i$ und $\dim(E_{\lambda_i}) = e_j \Rightarrow (b)$
2. Seien (a) und (b) erfüllt. Sei $B_i \subseteq K^n$ eine Basis von $E_{\lambda_i} \Rightarrow |B_i| = m_{geom}(\lambda_i)$. Setze $B = \bigcup_{i=1}^r B_i \Rightarrow B$ linear unabhängig. $|B| = \sum_{i=1}^r m_{alg}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^r e_i = \deg(\chi_A(x)) = n \Rightarrow B$ Basis von K^n, und B besteht aus Eigenvektoren.
Auch für $K = \mathbb{C}$ sind nicht alle Matrizen diagonalisierbar. Aber:

Satz 11: Sei K algebraisch abgeschlossen (z.B. $K = \mathbb{C}$) und $A \in K^{n\times n}$. Dann ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. $A \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Es gilt $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (x-\lambda_i)$ (einige λ_i können gleich sein)
Beweis: Induktion nach n: n=1: nichts zu zeigen:
$n > 1 \quad \chi_A(x) \in K[x]$ hat eine Nullstelle $\lambda_1 \in K$, also λ_1 EW. Sei $v_1 \in K^n$ ein Eigenvektor zu λ_1.
Ergänze zu Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K^n$.

Mit $S = (v_1 \vdots v_2 \vdots \ldots \vdots v_n) \in Gl_n(K)$ folgt $S^{-1}AS = D_{\{v_1 \ldots v_n\}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ mit $B \in K^{(n-1)\times(n-1)}$, *= unbekannte Einträge
Induktion: $\exists T \in Gl_{n-1}(K) : T^{-1}BT = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
Nachrechnen: (...)
$\chi_A(x) = \chi_D(x) = \prod_{i=1}^n (x-\lambda_i)$
In Wirklichkeit gilt noch mehr:

Satz 12: (Jordansche Normalform): Unter den Vorraussetzungen von Satz 11 ist A ähnlich zu einer Blockdiagonalmatrix mit $J := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{k_i \times k_i}$ „Jordan-Kästchen“
mit $\lambda_i \in K$ (nicht notwendig verschieden) und $k_i \in \mathbb{N}_{>0} \quad K_i = 1 : J_i = (\lambda_i) \in K^{1\times 1}$
Beispiel:
$k_i = 3 : \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \lambda_i = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

§11 Komplexe Zahlen

Definition: $\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} | a, b \in \mathbb{R} \right\} = \{a \cdot I_2 + b \cdot J | a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, heißt Menge der komplexen Zahlen.
Seien $z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$

1. $z_1 + z_2 = (a_1 \cdot I_2 + b_1 \cdot J) + (a_2 \cdot I_2 + b_2 \cdot J) = (a_1 + a_2) \cdot I_2 + (b_1 + b_2) \cdot J \in \mathbb{C}$
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 I_2 + b_1 J) \cdot (a_2 I_2 + b_2 J) = a_1 a_2 I_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) J + b_1 b_2 \cdot \underbrace{J^2}_{=-I_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) I_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) J \in \mathbb{C}$
3. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$
5. Assoziativgesetze und Distributivgesetz werden von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vererbt $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ kommutativer Ring
6. Sei $aI_2 + bJ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \det(aI_2 + bJ) = a^2 + b^2 > 0$
$\Rightarrow (aI_2 + bJ)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} I_2 - \frac{b}{a^2+b^2} J \in \mathbb{C}$. Also $\mathbb{C}$ ist Körper!
7. Habe $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto aI_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ injektiver Ring-Homomorphismus. Fasse $\mathbb{R}$ als Teilmenge (sogar Unterkörper) von $\mathbb{C}$ auf.
8. $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ Neue Notation: $J := i$ $\quad \mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{C}\}$ $\boxed{i^2 = -1}$

Satz 2: $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ ist ein Körper und $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
$\mathbb{C} = \{a \cdot 1 + b \cdot i | a, b \in \mathbb{R}\}$ ist 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR mit Basis $\{1, i\}$ $\to$ komplexe Ebene
$\boxed{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)}$
$Z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow a$ heißt Realteil von Z, b heißt Imaginärteil von Z. $a := Re(Z), b := Im(Z)$

Komplexe Konjugation: Für $Z = a + bi$ schreibe $\overline{Z} = a + bi$.$\overline{Z}$ heißt das komplex konjugierte von Z.
Für $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C} : \overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ und $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$, außerdem $\overline{\overline{Z}} = Z$
Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine sinnvolle Anwendung von „$\leq$“
Aber: Wir haben einen Betrag!

Definition 3: Für $Z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist der Betrag $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Z \cdot \overline{Z}}$
$|Z|$ = Länge von Z in komplexer Ebene

Eigenschaften des Betrags:
(1) $\forall Z \in \mathbb{C} |Z| = 0 \Rightarrow Z = 0$
(2) $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{C} |Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$
(3) $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{C} |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
Beweis von (3):
$|Z_1 + Z_2|^2 = (Z_1 + Z_2) \cdot \overline{(Z_1 + Z_2)} = (Z_1 + Z_2)(\overline{Z_1} + \overline{Z_2}) = Z_1 \bar{Z}_1 + Z_1 \bar{Z}_2 + \underbrace{\bar{Z}_1 Z_2}_{=\overline{Z_1 \bar{Z}_2}} + Z_2 \bar{Z}_2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2 \cdot Re(Z_1 \bar{Z}_2) \leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2 \cdot \underbrace{|Z_1 \bar{Z}_2|}_{=|Z_1| \cdot |Z_2|} = (|Z_1| + |Z_2|)^2 \Rightarrow$ Behauptung
Wann gilt hier Gleichheit? $\Leftrightarrow Re(Z_1 \bar{Z}_2) = |Z_1 \bar{Z}_2| \Leftrightarrow Z_1 = |Z_1| \wedge Z_2 = |Z_2|$
$\Leftrightarrow Z_1 \cdot |Z_2| = Z_2 \cdot |Z_1|$, d.h. Z_1, Z_2 zeigen in dieselbe Richtung $\frac{Z_1}{|Z_1|} = \frac{Z_2}{|Z_2|}$
Durch Betrag erhalten wir einen Begriff von Nähe, Approximation, Grenzwerte, Stetigkeit.
Bsp: $Z \in \mathbb{C}$ mit $|Z| < 1 \Rightarrow Z^n$ konvergiert gegen 0, denn $|Z^n| = |Z|^n \to 0$