Zusammenfassung LA

Lineare Algebra für Informatik [MA0901] (Technische Universität München)

Lineare Algebra

1: Matrizen

1.1 – Definitionen

Was sind Matrizen?

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ - eine $m \times n$ Matrix ist eine „rechteckige Anordnung" mit $a_{i,j} \in K$ (Körper).

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$\{1,...,m\} \times \{1,...,n\} \to K$ Formale Darstellung als Funktion

Was sind Zeilen- und Spaltenvektoren?

- Menge aller $m \times n$ Matrizen: $K^{m \times n}$
- Zeilenvektor: $1 \times n$ Matrix
- Spaltenvektor: $m \times 1$ Matrix

Was sind Skalare?

Elemente des Körpers K, spricht einzelne Zahlen in Zahlenmengen

Nullmatrix

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 – Eigenschaften

Quadratische Matrix

Matrizen mit $A \in K^{m \times n} : m = n$ nennt man quadratisch

Transponierte Matrix

Für $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ ist $A^T := (a_{j,i}) \in K^{n \times m}$ die transponierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix

Quadratische Matrizen mit $A = A^T$

1.3 – Beispiele

Ebenen

Analog zu Koordinatensystemen bzw. Angabe Koordinaten

$$\mathbb{R}^2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}$$

Distanzmatrix

Seien $S_1, \ldots, S_n$ Städte und $d_{i,j}$ die Entfernung zwischen S_i und S_j, dann ist $D = (d_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (meist) symmetrisch.

Weblink-Matrix

Seien $P_1, \ldots, P_n$ Seiten des Internets, $w_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ falls } P_i \text{ einen Link auf } P_j \text{ enthält} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

Transitionsmatrix

Wahrscheinlichkeit, von i nach j zu kommen, wird in Transitionsmatrix angegeben ($P_{i,j}$)

1.4 – Operationen auf Matrizen

Summe zweier Matrizen

Komponentenweise Addition

$$A, B \in K^{m \times n} : A + B = c_{i,j} : c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \in K^{m \times n}$$

Produkt zweier Matrizen

Nicht komponentweise Multiplikation

$$A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times l} : A \cdot B = c_{i,j} : c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} * b_{k,j} \in K^{m \times l}$$

Produkt einer Matrix mit einem Skalar

Komponentenweise Muptiplikation

$$A \in K^{m \times n}, s \in K : A \cdot s = c_{i,j} : c_{i,j} = a_{i,j} \cdot s \in K^{m \times n}$$

Gruppen

- $(K^{m \times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(K^{m \times n}, \cdot)$ ist ein Ring mit Eins (nicht kommutativ)

  $A \cdot B = B \cdot A$ ist falsch - nicht kommutativ

Regeln Addition und Multiplikation mit Skalaren

Für alle $A, B \in K^{n \times m}$ und $s, s' \in K$

$$s \cdot (A + B) = s \cdot A + S \cdot B$$
$$(s + s') \cdot A = s \cdot A + s' \cdot A$$
$$s \cdot (s' \cdot A) = (s \cdot s') \cdot A$$
$$1 \cdot A = A$$

Regeln Addition und Multiplikation mit Matrizen

Seien A, B, C Matrizen, s.d. jeweils die gebildeten Summen und Produkte definiert sind (s.o.)

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$I_n \cdot A = A, I_n \cdot B = B$$

2: Lineare Gleichungssysteme

2.1 – Definitonen

Was sind Lineare Gleichungssysteme?

Lineare Gleichungssysteme (LGS) sind Gleichungen der Form $A \cdot x = b : A \in K^{m \times n}, b \in K^m$

Was ist eine Lösungsmenge?

Die Lösungsmenge ($\mathbb{L}$) ist die Menge aller $x \in K^n$, die die Gleichung erfüllen, Bsp:

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2b - 1 \end{pmatrix}, b \in K\}$$

Homogene und Inhomogene LGS

- homogen: $\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = b$
- inhomogen sind alle nicht homogenen LGS

Was ist eine erweiterte Koeffizientenmatrix?

- A ist die Koeffizientenmatrix
- $(A \,|\, b) \in K^{m \times (n+1)}$ ist die erweiterte Koeffizientenmatrix
  > durch hinzufügen des Vektors b als $(n+1)$-te Spalte an A (bei homogenen LGS nicht nötig)

Was ist der Rang einer Matrix?

- Eingabematrix: $A \in K^{m \times n}$
- Matrix in Zeilenstufenform: $A' \in K^{m \times n}$,
- Rang von A: Anzahl r der Zeilen von A', die mindestens einen Eintrag $\neq 0$ haben
  $r = rg(a) = rk(a) = \text{Rang}(a)$

2.2 – LGS lösen

Elementare Zeilenoperationen

I. Vertauschen zweier Zeilen
II. Multiplizieren einer Zeile mit einem Skalar $s \in K \backslash \{0\}$
III. Addieren des s-fachen einer Zeile zu einer anderes, wobei $s \in K$

(strenge) Zeilenstufenform

Sei $A \in K^{m \times n}$
A ist in Zeilenstufenform, falls gilt:
a) Beginnt eine Zeile mit k Nullen, so stehen unter diesen Nullen lauter weitere Nullen.
b) Unter dem ersten Eintrag $\neq 0$ jeder Zeile (falls nicht nur aus Nullen) stehen lauter Nullen.
A ist in strenger Zeilenstufenform, falls zusätzlich gilt:
c) Über dem ersten Eintrag $\neq 0$ jeder Zeile (falls nicht nur aus Nullen) stehen lauter Nullen.

Gauß-Algorithmus

Eingabe: Matrix $A \in K^{m \times n}$
Ausgabe: Matrix $B \in K^{m \times n}$ in (strenger) Zeilenstufenform
1) Setze $B := A$.
2) B sei bis Zeile r in Zeilenstufenform ($r = 0$ ist möglich)
3) Falls $r = m$ (Zeilenstufenform erreicht), gehe zu Schritt 8
4) Suche den weitesten link stehenden Eintrag $\neq 0$ von B unter Zeile r (eventuell unspezifisch)
5) Bringe den Eintrag mit Zeilenoperation I in die $(r+1)$-te Zeile
6) Erzeuge unterhalb des Eintrages lauter Nullen - wende Zeilenoperationen II. und III. an
7) Gehe zu Schritt 2
8) Bringe B mit Zeilenoperation III. auf strenge Zeilenstufenform

Auslesen der Zeilenstufenform

Eingabe: LGS $A \cdot x = b : A \in K^{m \times n}, b \in K^m$ (d.h. m Gleichungen mit n unbekannten)
Ausgabe: $\mathbb{L}$
1) Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \,|\, b) \in K^{m \times (n+1)}$ in strenge Zeilenstufenform bringen
2) r ist Anzahl der Zeilen, die mindestens einen Eintrag $\neq 0$ haben.
   Für $i = 1,...,r$ sei $j_i \in \{1,...,n+1\}$ die Position (=Spalte), in der der erste Eintrag $\neq 0$ in der i-ten Zeile steht
3) Falls $j_r = n + 1$, ist das LGS unlösbar ($\mathbb{L} = \emptyset$)
4) Sonst seien $k_1, \ldots, k_{n-r}$ die Zahlen in $\{1,...,n\}$, die nicht j_i sind (Zahlen, die frei gewählt weren müssen) $\{1,...,n\} \backslash \{j_1, \ldots, j_r\} = \{k_1, \ldots, k_{n-r}\}$
5) Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{\ldots$ *nicht wichtig*

Mögliche Lösungsmengen

1) Unlösbarkeit (siehe 3. oben): $\mathbb{L} = \emptyset$
2) Eindeutige Lösbarkeit: $|\mathbb{L}| = 1 \Leftrightarrow r = n,\ j_r = n$
   > notwendige Bedingung: mindestens so viele Gleichungen wie Unbekannte
3) Uneindeutige Lösbarkeit: $|\mathbb{L}| > 1 \Leftrightarrow r > n,\ j_r \neq n + 1$, die Lösungsmenge hat dann $n - r$ freie Parameter. Falls K undendlich viele Elemente hat (Standardfall) $\longrightarrow |\mathbb{L}| = \infty$

3: Vektorräume

3.1 – Definitonen

Was ist ein Vektorraum?

Ein Vektorraum ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen, deren Elemente man Vektoren nennt.

$\boxplus : V \times V \to V, (v, w) \to v \boxplus w$ und $\boxdot : V \times V \to V, (v, w) \to v \boxdot w$

Geltende Axiome für Vektorräume

1) V ist mit $\boxplus$ als Operator eine abelsche Gruppe.
2) $\forall a \in K, \forall v, w \in V : a \boxdot (v \boxplus w) = a \boxdot v \boxplus a \boxdot w$*
3) $\forall a, b \in K, \forall v \in V : (a + b) \boxdot v = a \boxdot v \boxplus b \boxdot v$*
4) $\forall a, b \in K, \forall v \in V : (a \cdot b) \boxdot v = a \boxdot (b \boxdot v)$
5) $\forall v \in V : v \boxdot 1 = v$

   * (es gilt: Punkt vor Strich)

Was ist ein n-dimensionaler Standardraum?

$K^{m \times n} : m = 1 \to K^{1 \times n} \to K^n$

Was ist ein Nullraum?

$V = \{0\}$

Was ist ein Untervektorraum?

Ein Untervektorraum ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ falls gilt:

1) $U \neq \varnothing$
2) Abgeschlossenheit: $v, w \in U \to v \boxplus w \in U$ und $v \in U,\ a \in K \to a \boxdot v \in U$

- Jeder Unterraum enthält den Nullvektor
- Vereinigung zweier Untervektorräume ist im allgemeinen kein Untervektorraum

Was sind Erzeugte Vektorräume?

Sei V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$ (S ist nicht zwingend Unterraum).

$\mathscr{M} := \{U \subseteq V \mid U \text{ ist ein Unterraum und } S \subseteq U\}$

$\langle S \rangle := \bigcap_{U \in \mathscr{M}} U$ von S erzeugter/aufgespannter Unterraum

Der von S erzeugte Unterraum ist die Menge aller Linearkombinationen von S

$\langle S \rangle = \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von } S\}$

3.2 – Rechenregeln

Propositionen

Falls gilt: $\forall a \in K, \forall v \in V, V$ ist K-Vektorraum

$a \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ und $0 \cdot v = \overrightarrow{0}$

$(-a) \cdot v = a \cdot (-v) = -(a \cdot v)$

$a \cdot v = \overrightarrow{0} \longrightarrow a = 0$ oder $v = \overrightarrow{0}$

Seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume, dann gilt

$U_1 + U_2 := \{v + w \,|\, v \in U_1,\ w \in U_2\} \subseteq V$ Summenraum

$\mathcal{M} \neq \varnothing \,|\, \mathcal{M} := \{x : x \subseteq V\} : \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U \subseteq V$

Vereinigung von Untervektorräumen

Sei V ein K-Vektorraum, U_1 und U_2 Unterräume (von V) und $S := U_1 \cup U_2$, dann gilt $\langle S \rangle = U_1 + U_2$

3.3 – Beispiele

Untervektorraum

- Jede Gerade durch den Nullpunkt ist ein Vektorraum (im $V = \mathbb{R}^2$)
- Lösungsmenge eines LGS $A \cdot x = 0 : A \in K^{m \times n} \subseteq K^n$

$\mathbb{L} = U := \{x \in K^n \,|\, A \cdot x = 0\} \subseteq K$

$0 \in U \to U \neq \varnothing \qquad x_1, x_2 \in U \to A x_1 = 0,\ A x_2 = 0 \to x_1 + x_2 \in U$

4: Linearkombinationen

4.1 – Definitionen

Was sind Linearkombinationen?

Ein Vektor $v \in V$ heißt Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n \in V$, falls es Skalare $a_1, \ldots, a_n \in K : v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ gibt.

Lineare Abhängigkeit

Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen linear unabhängig, falls gilt:

$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0 \to a_1 = \ldots = a_n = 0$

Falls $\exists a : a \neq 0$, sind die Vektoren linear abhängig

4.2 – Rechenregeln

Proposition

Seien $A, A' \in K^{m \times n}$ (A' ist durch elementare Zeilenumformungen aus A hervorgegangen), dann erzeugen die Zeilen von A und A' denselben Unterraum $\in K^{1 \times n}$

Rang & Lineare Abhängigkeit

$v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow rg(A) = n$

5: Basen

5.1 – Definitionen

Was ist eine Basis?

Basen müssen folgende Eigenschaften erfüllen

- Maximal linear unabhängige Teilmenge
  > fügt man einen weiteren Vektor hinzu, wird die Menge linear abhängig
  > S ist linear unabhängig, $S \cup \{v\} : \forall v \in V \backslash S \rightarrow$ linear abhängig
- Minimales Erzeugendensystem
  > Minimale Anzahl von Vektoren, die ein Erzeugendensystem bilden
  > $V = \langle S \rangle$ aber $S \backslash \{v\} : v \in S \rightarrow$ kein Erzeugendensystem

Dimension

Die Dimension ist die Anzahl der Elemente einer Basis, K^n hat per Definition die Dimension n.

5.2 – Rechenregeln

Dimension & LGS

$$A \cdot x = 0 : A \in K^{m \times n} \rightarrow \dim(\mathbb{L}) = n - rg(A)$$

$$rg(A) : A \in K^{m \times n} = \text{ von Zeilen aufgespannter Unterraum } \in K^{1 \times n}$$

Eigenschaften von Basen

Seien $V_1, ..., v_n \in V$ disjunkt und $S = \{v_1, ..., v_n\}$

- S ist Basis von $V \Longleftrightarrow$ dim(V) und S ist linear unabhängig $\Longleftrightarrow \dim(V) = n$ und $V = \langle S \rangle$
- Falls $n < \dim(V) \rightarrow V \neq \langle S \rangle$
- Falls $n > \dim(V) \rightarrow S$ ist linear abhängig

Basisergänzung

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, Sei $S \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge

Es gilt: Es gibt eine Basis B von $V : S \subseteq B$, B ist Basisergänzung zu S

Kardinalität & Dimension

Sei V ein K-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, dann gilt

- $\dim(V) \leq \dim(U)$
- Falls $\dim(U) = \dim(V) < \infty \rightarrow U = V$

6: Lineare Codes

6.1 – Definitionen

Was sind Lineare Codes?

Lineare Codes werden zum ‚codieren' von Nachrichten verwendet und ermöglichen das identifizieren von Fehlern bei der Übertragung

Sonstige Begrifflichkeiten

- Informationswort: die zu versendende Nachricht im uncodierten Zustand. $(x_1, \dots, x_k)^T \in K^k$
- Codewort: das codierte Informationswort – also das, was versendet wird. $(c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$
- Generatormatrix: ergibt multipliziert mit dem Informationswort das Codewort. $G \in K^{n \times k}$
  Die Spalten der Generatormatrix müssen linear unabhängig sein. $\rightarrow rg(G) = dim(C) = k$
  $(c_1, \dots, c_n)^T = G \cdot (x_1, \dots, x_k)^T$

Eigenschaften eines Linearen Codes

Ein linearer Code ist ein Unterraum $C \in K^n$. Mit $k := dim(C)$ bezeichnen wir C auch als einen (n, k)-Code.

- Länge (von C, des Codewortes): n
- Informationsrate: k/n
- Redundanz: $n - k$
- Länge (des Informationswortes): k

Hamming Gewicht

$w(c) := |\{i \in \{1,...,n\} : c_i \neq 0\}| : c = (c_1, \dots, c_n) \in K^n$ intuitiv: zähle $\in \neq 0$

Hamming Abstand

Hamming Abstand zwischen zwei Vektoren, inutuitiv: nötige Bitflips

$d(c, c') := w(c - c') = |\{i \in \{1,...,n\} : c_i \neq c_i'\}| : c, c' \in K^n$

Hamming Abstand einer Menge, intuitiv: minimaler Hamming Abstand

$d(C) := \min\{d(c, c') : c, c' \in C, c \neq c'\} : C \subseteq K^n$

$|C| \leq 1 \rightarrow d(C) := n + 1$

C ist ein Unterraum $\rightarrow d(C) = min\{w(c) : c \in C \backslash \{0\}\}$

6.2 – Anwendung

Menge der Codewörter

$C := \{G \cdot (x_1, \dots, x_k)^T | (x_1, \dots, x_k)^T \in K^n\} \subseteq K^n$
$= \{G \cdot x | x \in K^k\} \subseteq K^n$

Fehlerkorrigierung

- Falls $d(C) = 2e + 1 \rightarrow C$ ist e-fehlerkorrigierend
- Falls $d(C) = 2e + 2 \rightarrow C$ ist e-fehlerkorrigierend und $(e + 1)$-fehlerekennend

Daten Senden

- gegeben: $x \in K^k, G \in K^{n\times k}$
- berechne: $c = G \cdot x$
- sende: c

Daten Empfangen

- empfange: $c' \in K^n$

1. Fall: $c' \in C \subseteq K^n$
   > $\exists x \in K^k : G \cdot x = c'$
   > Annahme: Es gab keine Übertragungsfehler, $c' = c$ und damit ist $x \in K^k$ das Info.wort.
2. Fall: $c' \notin C \subseteq K^n$
   > $\neg\exists x \in K^k : G \cdot x = c'$
   > Annahme: Es gab mindestens einen Übertragungsfehler, $c' \neq c$
   > Idee: Suche $c'' \in C$, dass so wenig wie möglich von c' abweicht

Generatormatrix & Parity-Check-Matrix

$$G = (I_k, A)^T : A \in K^{(n-k)\times k}$$
$$P := (-A \,|\, I_{n-k}) \in K^{(n-k)\times n}$$
$$P \cdot G = 0$$
$$P \cdot c = 0 \iff c \in C$$

Dekodierung mit Parity-Check-Matrix

- Falls $P \cdot c' \neq 0$, ist sicher ein Fehler aufgetreten und man sucht $f \in \mathbb{F}$, $\{f' \in K^n : P \cdot f' = P \cdot (c + f') = P \cdot c'\} = \mathbb{F}$, f ist Fehlervektor: $f := c' - c \in K^n$
- Das gesuchte $f \in \mathbb{F}$ hat minimales Hamminggewicht
- Falls es ein eindeutiges f gibt, dann ist $c'' = c' - f$ das gesendete Codewort
  > $\exists x \in K^k : Gx = c'' = c$
- Falls es kein eindeutiges f gibt, dann ist die Codierung fehlerkennend aber nicht fehlerkorrigierend

  $P \cdot c' \in K^{n-k}$ Syndrom von c', intuitiv: Abstand von c' zum Codewort

1. Man berechnet das Syndrom $P \cdot c'$
2. Man sucht $f \in K^n$, welches unter allen $f' \in K^n : P \cdot f'? = P \cdot c'$ minimales Hamming-Gewicht hat
   > falls $c' \in C \to f = 0$, man gibt $x \in K^n : G \cdot x = c$ aus
   > falls es ein eindeutiges f gibt, setzt man $c'' := c' - f \in C$ und gibt $x \in K^n : G \cdot x = c''$ aus
   > falls es kein eindeutiges f gibt, gibt man eine Fehlermeldung aus

7: Lineare Abbildungen

7.1 – Definitionen

Bedingungen für Lineare Abbildungen

Sei K ein Körper. Seien V, W zwei K-Vektorräumen. $\phi : V \to W$ heißt linear, falls

1. $\forall v, v' \in V : \phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v')$
2. $\forall v \in V, \forall a \in K : \phi(a \cdot v) = a \cdot \phi(v)$
3. $\overrightarrow{0} \to \overrightarrow{0}$

Kern & Bild

Bild und Kern sind Unterräume

Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung

$$\text{Kern}(\phi) := \{v \in V \,|\, \phi(v) = 0\} \subseteq V$$

$$\text{Bild}(\phi) := \{\phi(v) \,|\, v \in V\} \subseteq W$$

7.2 – Regeln

Kern & Injektivität

Es gilt die Äquivalenz ϕ ist injektiv $\iff$ Kern$(\phi) = \{0\}$

Isomorphie

Eine lineare Abbildung $\phi := V \to W$ ist isomorph, falls ϕ bijektiv. Dann ist auch die Umkehrabbildung $\phi^{-1} := W \to V$ isomorph.

$$V \cong W : \exists \phi : V \to W, \phi^{-1} : W \to V$$

Es gilt ferner: $n := \dim(V) < \infty \implies V \cong K^n$ - der Isomorphismus ist jedoch nicht kanonisch und kann erst nach Wahl einer Basis bestimmt werden.

Dimensionsformel

Sei $\phi : V \to W$ linear, dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(\phi)) + \dim(\text{Bild}(\phi))$$

Zeilen- und Spaltenrang

Der Rang einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist die Dimension des von den Spalten aufgespannten Unterraums von K^m.

$$\dim(\text{Bild}(A)) = rg(A) \longrightarrow \text{"Zeilenrang"} = \text{"Spaltenrang"}$$

Injektivität, Surjektivität & Isomorphismus

Sei $\dim(V) = \dim(W) < \infty, \phi : V \to W$ linear

$$\phi \text{ ist Isomorphismus} \iff \phi \text{ ist injektiv} \iff \phi \text{ ist surjektiv} \iff \phi \text{ ist bijektiv}$$

Umkehrabbildung bestimmen

Eingabe: Matrix $A \in K^{n \times n}$

Ausgabe: eindeutige Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

1) Bilde die erweiterte Matrix $(A \,|\, I_n) \in K^{n \times (2n)}$ durch anhängen einer Einheitsmatrix
2) Führe die Matrix (mit Gauß-Algorithmus) in strenge Zeilenstufenform, so dass in jeder Zeile $\neq 0$ der erste Eintrag $\neq 0$ eine 1 ist.

Fall 1: Die Zeilenstufenform hat die Gestalt $(I_n | A^{-1}) : A^{-1} \in K^{n \times n} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n$

Fall 2: Die Zeilenstufenform hat eine andere Gestalt, dann ist $rg(A) < n, \nexists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = I_n$

A invertierbar $\iff A$ regulär (voller Rang)

Lineare Fortsetzung

Lineare Abbildungen sind eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren des Urbildes definiert.

8: Darstellungsmatrizen

8.1 – Definitionen

Darstellungsmatrix

Sei $\phi : V \to W$, B Basis von V und C Basis von W. Für $j \in [1; n]$ können wir schreiben:

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot w_i \text{ mit } a_{i,j} \in K$$

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$, die Spalten von A sind die Koordinatenvektoren der $\phi(v_i)$

A nennt man Darstellungsmatrix (bezüglich der Basen B und C)

$A = D_{B,C}(\phi)$, falls $V = W \to A = D_B(\phi)$

Spalten der Darstellungsmatrix $\longleftrightarrow$ Bilder der Basisvektoren

Allgemeine lineare Gruppe

Die allgemeine lineare Gruppe besteht aus der Menge von invertierbaren Matrizen

$GL_n(K) = \{A \in K^{n \times n} \,|\, A \text{ ist invertierbar}\}$

Basiswechselmatrix

Wechselt man die Basis eines Vektorraums in einer Abbildung, so verändert sich auch die Darstellungsmatrix. Seien B, B' Basen von V.

Wir können die neuen Basisvektoren v_j' mit Hilfe der alten v_j ausdrücken (und umgekehrt: T):

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot v_i \text{ mit } a_{i,j} \in K$$

$S := (a_{j,k}) \in K^{n \times n} = S_{B,B'}$

Spalten von $S \longleftrightarrow$ Koordinatenvektoren der "neuen" Basisvektoren

$D_{B'}(\phi) = S^{-1} \cdot D_B(\phi) \cdot S$

Ähnlichkeit und Äquivalenz

- Zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, falls es $S \in GL_n(K) : B = S^{-1}AS$
- Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen *äquivalent*, falls es $S \in GL_n(K), T \in GL_m(K) : B = T^{-1}AS$

8.2 – Regeln

Darstellungsmatrizen und Lineare Abbildungen

Gegeben seien $V = K^n, W = K^m$ mit den Standardbasen B und C und eine Abbildung

$\phi : V \to W : A := D_{B,C}(\phi) \Longrightarrow \phi = \phi_A$

Kompositionen von Abbildungen

Seien U, V, W endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen A, B, C , $\phi : U \to V$ und $\psi : V \to W$

$D_{A,C}(\psi \circ \phi) = D_{B,C}(\psi) \cdot D_{A,B}(\phi)$

$\phi_A \circ \phi_B = \phi_{A \cdot B}$

$\phi_A \circ \phi_{A^{-1}} = \phi_{I_n} = id_{K^n}$

$\phi_{A^{-1}} = \phi_A^{-1}$

Komposition von lin. Abbildungen $\longleftrightarrow$ Matrixprodukt

Basiswechselmatrix bei verschiedenen Vektorräumen

Seien B, B' endliche Basen von V und C, C' endliche Basen von W, dann gilt für $\phi : V \to W$

$D_{D',C'}(\phi) = S_{C,C'}^{-1} \cdot D_{B,C}(\phi) \cdot S_{B,B'}$

9: Determinanten

9.1 – Definitionen

Symmetrische Gruppe

Permutationen über n mit Gruppeneigenschaften: $S_n := \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\}$

Permutationen

Für σ defnieren wir

$w(\sigma) = |\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq i < j \leq n \wedge \sigma(i) > \sigma(j)\}|$ Fehlstellen

$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{w(\sigma)}$ Vorzeichen/Signum

$\text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\sigma \cdot \tau)$

Permanente

Sei $A = a_{i,j} \in K^{n \times n}$

$$\text{perm}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Determinante

Sei $A = a_{i,j} \in K^{n \times n}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Spezielle Lineare Gruppe

$SL_n(K) := \{A \in K^{n \times n} \mid \det(A) = 1\}$

Adjunkte Matrix & Gramersche Regel

Die adjunkte Matrix $C = c_{i,j} \in K^{n \times n}$ ist definiert durch

$c_{i,j} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{j,i})$

$A \cdot C = C \cdot A = \det(A) \cdot I_n$

Äquivalente Aussagen & Folgerungen

Für $A \in K^{n \times n}$ gelten folgende Äquivalenzen:

- A ist regulär
- A ist invertierbar ($A \in GL_n(K)$)
- Zeilen/Spalten von A sind linear unabhänging
- Die Abbildung φ_A ist bijektiv (injektiv & surjektiv)
- LGS mit $A \cdot x = 0$ ist eindeutig lösbar (homogen)
- LGS mit $A \cdot x = b : \forall b \in K^n$ ist eindeutig lösbar (inhomogen)
- $\det(A) \neq 0$

9.2 – Determinanten effizient Berechnen

Determinante Konkret

Für $n \leq 3$ konkrete Definitionen, $A = a_{i,j} \in K^{n \times n}$

$$n = 1 : \det(A) = \text{perm}(A) = a$$

$$n = 2 : \text{perm}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad + bc, \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$$

$$n = 3 : \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix}) = aej + bfh + cdi - bdj - ceh - afi$$

$$\det(I_n) = 1$$

Rechenregeln mit Determinanten

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ Determinantenmultiplikationssatz

$\det(A) = \det(A^T)$ Transponierte Matrix

$\det(B) = \det(A) \cdot \text{sgn}(\sigma)$ Permutierte Matrix

$\exists$ zwei Zeilen/Spalten stimmen überein $\rightarrow \det(A) = 0$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ Inverse

Determinanten von ähnlichen Matrizen & Abbildungen

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ seien ähnlich

$$\det(A) = \det(B)$$

Sei $\varphi : V \rightarrow V$ eine lineare Selbstabbildung

$$\det(\varphi) := \det(D_B(\varphi))$$

Entwicklung der Determinante nach Laplace

Sei $A = a_{i,j} \in K^{n \times n} : n \geq 2$, für $i, j \in [1,n]$ sei $A_{i,j} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die durch das Weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

$$\forall i \in [1,n] : \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det(A_{i,j})$$

$$\forall j \in [1,n] : \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det(A_{i,j})$$

Dreiecks- und Diagonalmatrizen

$\det(A) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n : A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ Diagonalmatrix

$\det(A) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n : A = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

$\det(A) = \det(B) \cdot \det(D) : A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ untere/ (Block-)Dreiecksmatrix

Gauß & Determinanten

I. (Vertauschen zweier Zeilen): Determinante ändert das Vorzeichen

II. (Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $s \in K \setminus \{0\}$: Determinante multipliziert sich mit s

III. (Addition des s-fachen einer Zeile zu einer anderen): Determinante ändert sich nicht

Gilt für elementare Spaltenoperationen/Zeilenoperationen.

Anwendung: Erstelle Matrizen, die sich leicht entwickeln lassen.

10: Eigenwert

10.1 – Definitonen

Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum

Sei $A \in K^{n \times n}$

$$\lambda \in K : \exists v \in K^n \backslash \{0\} : A \cdot v = v \cdot \lambda$$

$$E_\lambda := \{v \in K^n | A \cdot v = \lambda \cdot v\} \cup \{\overrightarrow{0}\}$$

- Eigenwert: λ ist Eigenwert von A
- Eigenvektor: v ist Eigenvektor von A (zum Eigenwert λ)
- Eigenraum: E_λ ist Eigenraum zum Eigenwert λ
- A hat höchstens n Eigenwerte
- Falls K algebraisch abgeschlossen ist, so hat A Eigenwerte
  > $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^2 | A \cdot v = v\} = \{v \in \mathbb{R}^2 | (A - \lambda I_n) \cdot v = 0\} =$ Lösungen des hom. LGS
  > $E_\lambda \subseteq K^n$ ist ein Unterraum

Geometrische und Algebraische Vielfachheit

Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert einer Matrix $A \in K^{n \times n}$, so gilt $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq 1$

$m_a(\lambda) =$ Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom $\mathcal{X}_A$

$m_g(\lambda) = \dim(E_\lambda)$

Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, falls es eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A gibt (A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix).

Beide der folgenden Bedingungen müssen erfüllt sein:

- Das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_A$ zerfällt in Linearfaktoren
- $\forall$ Eigenwerte λ_i gilt $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$

Lineare Abbildungen

Die Definitionen lassen sich auch auf lineare Abbildungen der Form $\varphi : V \to V$ eines K -Vektorraums V übertragen.

$$\varphi(v) = \lambda v : v \in V \backslash \{0\}$$

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Damit zerfällt f in Linearfaktoren.

10.2 – Polynomringe

Charakteristische Polynome

Sei $A \in K^{n \times n}$, im Polynomring $K[x]$ bilden wir

$$\mathcal{X}_A := \det(x \cdot I_n - A)$$

- $\mathcal{X}_A$ ist ein Polynom von Grad n mit höchstem Koeffizient 1
- Eigenwerte einer quadratischen Matrix A sind die Nullstellen des charakterist. Polynoms $\mathcal{X}_A$

Polynomdivison

Sei $K[x]$ ein Polynomring. Bei der Division mit Rest für $f, g \in K[x] : g \neq 0$ gibt es $q, r \in K[x]$

$$f = g \cdot q + r \, : \deg(r) < \deg(g) \qquad (q\text{: Quotient, } r\text{: Rest})$$

Falls $\lambda \in K$ eine Nullstelle des Polynoms $f \neq 0$ ist, so können wir durch $g = x - \lambda$ dividieren

$$f = (x - \lambda) \cdot q + r \, : \deg(r) < 1 \qquad (r\text{/Rest ist also ein konstantes Polynom})$$

$$f = (x - \lambda) \cdot q \, : \deg(q) = \deg(f) - 1$$

Man kann so Schrittweise Linearfaktoren von Typ $x - \lambda$ abspalten. Sei $\mu \in K$ eine weitere Nullstelle von f mit $\lambda \neq \mu$, so folgt

$$(\mu - \lambda) \cdot q(\mu) = 0 \longrightarrow q(\mu) = 0$$

So kann man f mit Hilfe seiner disjunkten Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ weiter in Linearfaktoren aufspalten

$$f = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{e_r} \cdot g \, : \forall c \in K : g(c) \neq 0, g \in K[x] \qquad (e_i\text{: Multiplizität})$$

Falls g ein konstantes Polynom ist, sagen wir, dass f in Linearfaktoren zerfällt.

11: Komplexe Zahlen

11.1 – Definitonen

Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ a Realteil, b Imaginärteil

Rechenregeln

$\bar{z} := a - bi$	komplexe Konjugation
$(a + bi)^{-1} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$	Inversionsregel
$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 a_2 - b_1 b_2) i$	Multiplikationsregel
$\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad \lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$	Betrag

12: Google-Matrix

12.1 – Google Matrix

1. Adjazenzmatrix für Verbindungen zwischen den Seiten des Internets (Weblink-Matrix)
   $$w_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ falls } P_i \text{ einen Link auf } P_j \text{ enthält} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$
2. Wir ändern diese Matrix indem wir in jeder Zeile durch die Anzahl der Einsen in dieser Zeile dividieren. $\longrightarrow H$
   $p \cdot H = p \,|\, p := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ wobei p^T Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ von H^T ist.
3. Errechne die Google-Matrix
   $$G := (1-\alpha)\cdot H + \frac{\alpha}{n}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$
4. Rechne den Page-Rank aus
   $$\lim_{k\to\infty} G^k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ wobei } G^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Algorithmus 12.12 (Google-Algorithmus).

(1) Bilde die Weblink-Matrix, daraus die Google-Matrix (mit „geeigneter“ Wahl des Parameters α).
(2) Wähle einen Vektor $p \in \mathbb{R}^{1\times n}$ mit Komponentensumme 1.
(3) Ersetze immer wieder p durch $p\cdot G$, bis sich hierdurch p kaum noch ändert. (Hierbei sollte ein Schwellenwert für die Änderung von p vorgegeben werden, dessen Unterschreitung ein Terminationskriterium liefert.)
(4) Verwende p als Pagerank-Vektor. Seine i-te Komponente beinhaltet also die Wichtigkeit der Seite P_i im Internet.

Wir bemerken noch, dass die komplette Matrix G nie abgespeichert werden muss, da sich aufgrund der einfachen Bauart von G die Multiplikation $p \cdot G$ sehr einfach gestaltet. Aber selbst wenn man die Multiplikation ohne Optimierung durchführt, kommt der Algorithmus mit $r \cdot O(n^2)$ *Floating Point* Operationen aus, wobei r die Anzahl der Schleifendurchläufe ist. Setzt man $r = 10$ und $n = 10^9$ an, so ergibt sich gegenüber der Berechnung eines Eigenvektors mit dem Gauß-Algorithmus eine Verbesserung um den Faktor von etwa 10^8. Dies ist äußerst grob geschätzt, aber es zeigt, dass die Idee von Google erst durch Satz 12.11 und den daraus resultierenden Algorithmus praktikabel wird.

12.2 – Definitionen

Stochastische Matrizen

Eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt stochastisch (oder auch zeilen-stochastisch), falls
$$(a_{i,j}) \geq 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$
A heißt positiv, falls $(a_{i,j}) > 0$
Falls $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stochastisch, dann ist auch $A \cdot B$ stochastisch.

Eigenwerte & stochastische Matrizen

Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stochastisch
- A hat den Eigenwert 1, und für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt: $|\lambda| \leq 1$
- Falls A zusätzlich positiv ist, so gilt $m_a(1) = m_g(1) = 1$, und für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{1\} \rightarrow |\lambda| < 1$

13: Skalarprodukt

13.1 – Definitionen

Eigenschaften von Skalarprodukten

Für alle $u, v, w \in K^n$ und $a \in K$ gilt:

$\langle u, v + a \cdot w\rangle = \langle u, v\rangle + a \cdot \langle u, w\rangle \quad \langle u + a \cdot v, w\rangle = \langle u, w\rangle + a \cdot \langle v, w\rangle$ bilinear

$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ symmetrie

$(K^n)^{\perp} = \{0\}$ Nullvektor steht auf allen Vektoren senkrecht

Euklidische Länge

Für $v = \mathbb{R}^n$ heißt $|v| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die (euklidische) Länge von v.

13.1 – Gram-Schmidt Verfahren

Orthonomalsystem

Eine Menge $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Orthogonalsysten, falls v_i und v_j für $i \neq j$ orthogonal sind, und $\forall i : |v_i| = 1$. Orthogonalsysteme sind linear unabhängig.

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j} \text{ mit } \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ die Matrix mit den v_i Spalten ist, ergibt sich

$$S \text{ Orthonormalsystem} \iff A^T \cdot A = I_k$$

Orthonormalbasis

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum, $k := \dim(U)$ und $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset U$ sei ein Orthonormalsystem. Dann ist S eine Basis von U (Orthonormalbasis).

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

- Eingabe: Ein Unterraum $U = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ (erzeugt von Vektoren v_i).

1. Setze $m := 0$.
2. Für $i \in [1 : k]$ führe Schritte 3 und 4 aus.
3. Setze $w_i := v_i - \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_i\rangle \cdot u_j$
4. Falls $w_i \neq 0$, setze $m := m + 1$ und $u_m := \dfrac{w_i}{|w_i|}$

- Ausgabe: Eine Orthonormalbasis $\{u_1, \ldots, u_m\}$ von U.

Damit hat jeder Unterraum von $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis.

Weitere Definitionen

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal, falls $A^T \cdot A = I_n$.

$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T \cdot A = I_n\}$ orthogonale Gruppe

$SO_n(\mathbb{R}) := O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$ spezielle orthogonale Gruppe ($SL \to \dim = 1$)

14: Symmetrische Matrizen

14.1 – Ia

$$D_{A,B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_3 \\ 2v_1 \end{pmatrix}$$

$m_g(\lambda) = n - rg(A - \lambda I_n) : A \in K^{n\times n}$